

# **ANWENDUNG DER PLASTIZITÄTSTHEORIE AUF STAHLBETON**

Prof. Dr. B. Thürlimann

Prof. Dr. P. Marti

Dr. J. Pralong

Prof. Dr. P. Ritz

Dr. B. Zimmerli

Institut für Baustatik und Konstruktion

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich

## Vorwort

Seit über zwanzig Jahren sind am Institut für Baustatik und Konstruktion (IBK) der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich systematische Untersuchungen über das Tragverhalten von Stahlbetonbauteilen durchgeführt worden. Sie haben gezeigt, dass die Plastizitätstheorie auch für den Stahlbeton als einheitliche Grundlage zur Berechnung der Tragfähigkeit dienen kann.

In einem ersten Fortbildungskurs für Bauingenieure "Plastische Berechnungsmethoden" im Jahre 1963 wurde eine Uebersicht über die Anwendung auf Stahl- und Stahlbetontragwerke gegeben. Auf dem Gebiet des Stahlbetons war sie damals im wesentlichen auf die einfachen Fälle der Balken- und Plattenbiegung beschränkt. Die Forschungsergebnisse der folgenden Jahre wurden 1975 in einem zweiten Fortbildungskurs "Torsion, Biegung und Schub in Stahlbetonträgern" zusammengefasst und für die praktische Anwendung dargestellt.

Mit den Vorlesungen zum dritten Kurs 1983 wird nun erstmals eine einheitliche systematische Anwendung der Plastizitätstheorie auf das ganze Gebiet des Stahlbetons vorgelegt. Bei dieser Gelegenheit möchte ich allen ehemaligen und heutigen Mitarbeitern des IBK, welche durch jahrelange Forschungstätigkeit wesentliche theoretische und experimentelle Beiträge erarbeitet haben, meine Anerkennung und meinen Dank aussprechen. Durch ihre Veröffentlichungen und ihre praktische Tätigkeit und Mitarbeit in Fachausschüssen haben sie bereits wichtige Erkenntnisse in die Praxis einfliessen lassen.

Für ihre aktive Mitarbeit bei der Ausarbeitung dieser Vorlesung und der Durchführung des Kurses bin ich den Herren Peter Marti, Jean Pralong, Peter Ritz und Bruno Zimmerli zu grossem Dank verpflichtet. Die technische und organisatorische Vorbereitung wurde von Herrn Reto Caflisch, administrativer Institutsleiter des IBK, geleitet. Für seine umsichtige und umfassende Arbeit danke ich ihm recht herzlich.

Nebst der direkten Unterstützung durch die ETH Zürich wurden unsere Forschungsarbeiten in all den Jahren durch grosszügige finanzielle Beiträge der "Stiftung für wissenschaftliche, systematische Forschungen auf dem Gebiet des Beton- und Eisenbetonbaus" des Vereins Schweiz. Zement-, Kalk- und Gips-Fabrikanten entscheidend gefördert. Ausser der Förderung der Stahlbetonbauweise haben diese Zuwendungen auch die wissenschaftliche Weiterbildung einer stattlichen Anzahl junger Ingenieure ermöglicht. Es ist mir ein ganz besonderes Anliegen, an dieser Stelle auch dem Stiftungsrat meinen aufrichtigen Dank auszusprechen.

Zürich, März 1983

Bruno Thürlimann

# Inhaltsverzeichnis

---

		Seite
	Vorwort	
1.	Plastizität im Stahlbeton - Grundlagen	B. Thürlimann 1
	1.1 Bemessungskriterien	1
	1.2 Material Stahlbeton	2
	1.3 Beziehung Moment - Krümmung	4
	1.4 Grenzwertsätze der Plastizitätstheorie	6
	1.5 Zusammenfassung	14
	1.6 Anwendbarkeit der Plastizitätstheorie auf Stahlbeton	16
2.	Balken I: Biegung	P. Ritz 17
	2.1 Einleitung	17
	2.2 Einfaches Beispiel	19
	2.3 Einfacher Balken	24
	2.4 Randfeld	26
	2.5 Innenfeld	35
	2.6 Zwängungen	43
3.	Balken II: Verformungen	P. Marti 45
	3.1 Problemstellung	45
	3.2 Durchbiegungen	48
	3.3 Risse	58
4.	Balken III: Schub	B. Zimmerli 60
	4.1 Einführung	60
	4.2 Schubwandelement	61
	4.3 Schubbemessung von Parallelträgern	67
	4.4 Schubbemessung von Voutenträgern	73
	4.5 Schub mit Querbiegung	76
	ANHANG A: Schubwandelement mit schiefer Bewehrung	80
	ANHANG B: Schubwandelement mit Membranspannungen	84
	ANHANG C: Bügelquerschnitte in Voutenträgern	88
5.	Balken IV: Torsion und kombinierte Beanspruchungen	P. Marti 89
	5.1 Torsion	89
	5.2 Kombinierte Beanspruchung	102
	ANHANG A: Träger mit Kreisquerschnitt unter reiner Torsion	108

	Seite
6. Wände I: Grundlagen	B. Thürlimann 112
6.1 Definitionen - Lösungsmethode	112
6.2 Konsole mit konzentrierter Belastung	112
6.3 Grundaufgaben für Spannungsfelder	114
6.4 Konsole mit verteilter Belastung	122
6.5 Weitere Beispiele	125
6.6 Kopplungsträger	127
6.7 Effektive Betondruckfestigkeit	130
7. Wände II: Anwendungen	B. Zimmerli 134
7.1 Bemessung von Wänden	134
7.2 Bemessung von Rahmenecken	145
7.3 Bemessung von aus Rahmen bestehenden Hohlkästen	155
8. Platten I: Grundlagen	P. Marti 157
8.1 Gleichgewicht	157
8.2 Fliessbedingungen	164
8.3 Statische und kinematische Methode	171
ANHANG A: Grundlagen der Theorie dünner plastischer Platten mit kleinen Durchbiegungen	173
ANHANG B: Bemessungsverfahren für kombinierte Beanspruchung durch Momente und Membrankräfte	176
9. Platten II: Anwendungen	J. Pralong 178
9.1 Einleitung	178
9.2 Statische Methode	178
9.3 Kinematische Methode	179
9.4 Anwendungen	180
10. Platten III: Vorspannung	P. Ritz 207
10.1 Die Anwendung der Vorspannung in Platten	207
10.2 Wahl der Berechnungsmethode	208
10.3 Rechnerische Berücksichtigung der Vorspannung	210
10.4 Berechnung und Bemessung	211
11. Platten IV: Durchstanzen	J. Pralong 224
11.1 Einleitung	224
11.2 Durchstanz-Phänomen	224
11.3 Theoretisches Modell für achsialsymmetrisches Durchstanzen	225
11.4 Einfluss der Vorspannung	239
ANHANG A: Räumliches Fachwerk	242
BEZEICHNUNGEN	244
ZUSAMMENSTELLUNG DER INSTITUTSPUBLIKATIONEN BETR. 'PLASTIZITÄT IM STAHLBETON'	248



### 1.1 Bemessungskriterien

Als Bemessungskriterien werden heute die Tragfähigkeit und die Gebrauchsfähigkeit herangezogen. Letztere kann mit Hilfe elastischer Methoden untersucht werden. Im Stahlbeton wird mit dem homogenen Betonquerschnitt oder mit dem gerissenen Stahlbetonquerschnitt gerechnet. Kriechen und Schwinden des Betons müssen berücksichtigt werden.

Zur Ermittlung der Tragsicherheit hat sich die Anwendung der Plastizitätstheorie als eine einfache, zuverlässige und überblickbare Methode erwiesen. Im allgemeinen wird der Tragfähigkeitsnachweis für die Bemessung massgebend und deshalb an erster Stelle durchgeführt. Wenn mit  $S$  die Einwirkungen (Sollicitation) und mit  $R$  der Widerstand (Resistance) bezeichnet werden, so lautet die Bemessungsbedingung für ein Tragwerk

$$S \leq R \quad (1.1)$$

Wegen zufälligen Streuungen der Materialfestigkeiten, Abweichungen in den Dimensionen oder Lasten, Vereinfachungen der rechnerischen Annahmen (Modellbildung), usw., hauptsächlich aber zur Abdeckung kleinerer "grober Fehler" aus menschlichen Unzulänglichkeiten usw., müssen Sicherheitsmargen eingeführt werden. Eine einfache, heute allgemein übliche Methode operiert mit dem "Materialsicherheitsfaktor"  $\gamma_R$  und dem "Lastsicherheitsfaktor"  $\gamma_S$ . Die Bedingung (1.1) wird dann

$$\gamma_S \cdot S \leq \frac{R}{\gamma_R} \quad (1.2)$$

In vielen Fällen, für welche eine lineare Abhängigkeit zwischen  $S$  und  $R$  besteht, lassen sich die beiden Teilfaktoren  $\gamma_S$  und  $\gamma_R$  zu einem einzigen "Lastfaktor"  $\gamma = \gamma_S \cdot \gamma_R$  zusammenziehen. Somit:

$$\gamma \cdot S = \gamma_S \cdot \gamma_R \cdot S \leq R \quad (1.3)$$

Selbstverständlich sind auch Verfeinerungen durch Unterteilung der  $\gamma$ 's in Partialfaktoren möglich. Auch die Berücksichtigung von Lastkombinationen kann eingeführt werden. Die praktische Kalibrierung der  $\gamma$ -Werte erfolgte bis anhin aus der Erfahrung. Umfangreiche theoretische Studien sind durchgeführt worden, um wahrscheinlichkeitstheoretische Untersuchungen zu ihrer Festlegung heranzuziehen. Dabei hat es sich aber gezeigt, dass sich nur der kleinere Teil der notwendigen Sicherheitsmarge mit statistischen Methoden begründen lässt. Der grössere Teil der Sicherheitsvorgabe hat wohl oder übel kleinere "grobe Fehler" aus menschlichen Unzulänglichkeiten abzudecken, welche sich einer rein statistischen Betrachtungsweise entziehen.

Im folgenden wird die Berechnung des Widerstandes  $R$  einer Stahlbetonkonstruktion unter statischer Belastung behandelt. Im Zeitalter des Computers und der sehr leistungsfähigen numerischen Berechnungsverfahren scheint dieses Problem, oberflächlich betrachtet, gelöst

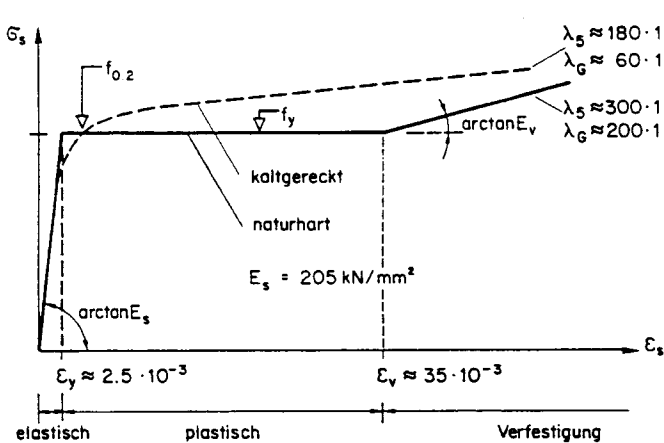
zu sein. Beschäftigt man sich aber etwas eingehender damit, so sieht man bald, dass sowohl die Modellierung des Materials Stahlbeton als auch die konstruktive Ausbildung aufgrund errechneter Spannungs- oder Kraftgrößen ganz wesentliche Fragen offen lassen.

Ein Verfahren, das auf einfachen, klar definierten mechanischen Annahmen beruht, das sich sowohl für die Behandlung ganzer Tragwerkssysteme als auch zur Lösung konstruktiver Details eignet, und das für die "Handrechnung" und auch für numerische Computerrechnungen verwendbar ist, scheint heute mehr denn je notwendig zu sein. Dazu eignet sich die Plastizitätstheorie. Ihre konsequente Anwendung auf den Stahlbeton soll hier einheitlich dargestellt werden.

## 1.2 Material Stahlbeton

### Stahl

Im Stahlbeton werden Stahleinlagen in Form von Stäben verwendet. Das Spannungs-Dehnungs-Verhalten ist im Bild 1.1 für naturharten (z.B. BOX) und kaltverformten (z.B. TOR) Stahl dargestellt. Der naturharte Stahl zeigt ein typisches, ausgedehntes Fließniveau  $f_y$  mit



einer plastischen Dehnung bis zur Verfestigung  $\epsilon_v = 15 \cdot \epsilon_y$ . Die Bruchdehnung  $\lambda_5$  entspricht ungefähr dem 15-fachen Betrag von  $\epsilon_v$ , d.h.  $\lambda_5 \approx 25\%$ . Die plastische Dehnfähigkeit ist also ein Vielfaches der Fließdehnung. Der vergütete Bewehrungsstahl (z.B. TOPAR) zeigt im wesentlichen ein ähnliches Verhalten.

Der kaltverformte Stahl hat durch das Recken und Tordieren des Stabes das Fließplateau bereits durchlaufen und zeigt nur noch ein elastisch-verfestigen-

Bild 1.1

des Verhalten. Er kann jedoch zufriedenstellend durch die  $\sigma$ - $\epsilon$ -Kurve des naturharten Stahls beschrieben werden.

Somit kann mit sehr guter Näherung für den Stahl unter Zug-Druck ein idealisiertes  $\sigma$ - $\epsilon$ -Diagramm gemäss Bild 1.2 angenommen werden. Wird der geringe elastische Verformungsanteil vernachlässigt, so wird das Verhalten starr-plastisch. Es können nur Stahlspannungen  $-f_y \leq \sigma_s \leq f_y$  auftreten. Erreicht  $\sigma_s$  die Fließspannung  $f_y$ , so ist ein Dehnungszuwachs  $\dot{\epsilon}_s$  nur in Richtung  $\sigma_s$  möglich und umgekehrt, wenn  $\sigma_s = -f_y$ . Insbesondere ist der Betrag der Dehnung  $\epsilon_s$  für  $\sigma_s = f_y$  nicht eindeutig bestimmt, wie auch aus Bild 1.2 (a) ersichtlich ist.

Als Hinweis ist im Bild 1.3 noch die Fließbedingung für den ebenen Spannungszustand nach TRESCA und VON MISES dargestellt. Das Fließgesetz für starr-plastisches Verhalten ist durch den Dehnungszuwachs  $\dot{\epsilon}$ , welcher senkrecht zur Fließfläche angenommen ist, festgelegt. Dabei treten für die TRESCA-Bedingung in den Eckpunkten Singularitäten auf, indem dort der Dehnungszuwachs zwischen zwei Grenzlagen beliebig variieren kann.

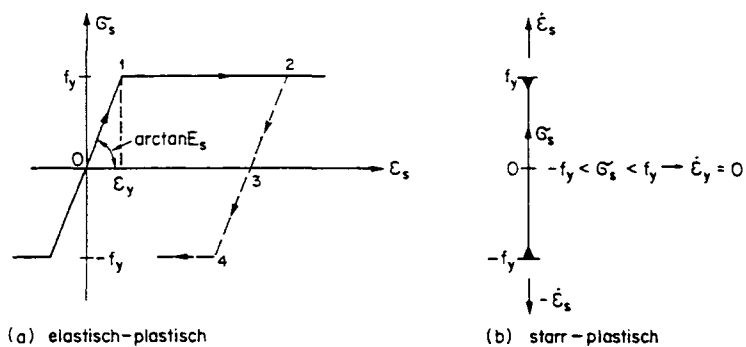


Bild 1.2

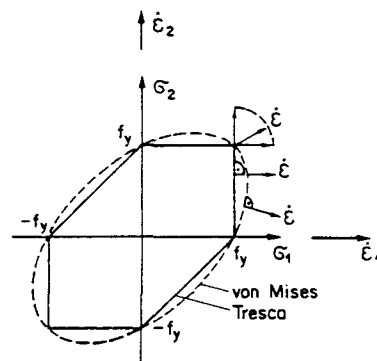


Bild 1.3

## Beton

Ein Betonzylinder resp. Betonprisma zeigt unter einachsialer Belastung das im Bild 1.4 dargestellte Verhalten. Nur für geringe Druckspannungen  $\sigma \geq -f_c/3$  ist das Verhalten elastisch. Nach Erreichen der Druckfestigkeit  $f_c$  tritt Entfestigung ein. Das Langzeitverhalten ist durch Kriechen beeinflusst, wobei die Stauchungen das Mehrfache der Kurzzeitwerte erreichen können. Auch liegt die Standfestigkeit etwas unter der kurzzeitigen Druckfestigkeit.

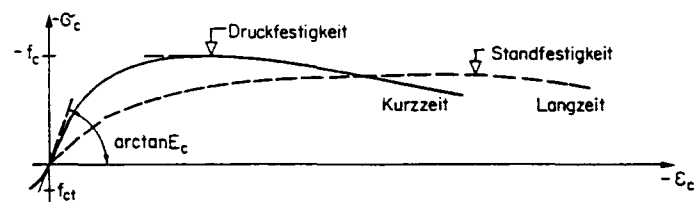


Bild 1.4

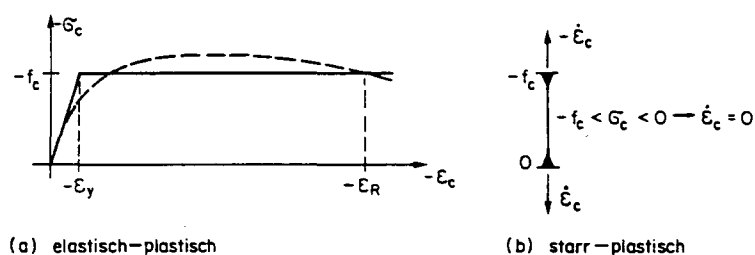
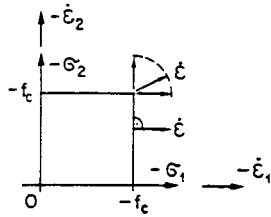


Bild 1.5

Die Zugfestigkeit des Betons ist bedeutend kleiner als die Druckfestigkeit und wird daher bei Traglastberechnungen im allgemeinen vernachlässigt. Zur Berechnung wird ein vereinfachtes  $\sigma$ - $\epsilon$ -Diagramm gemäß Bild 1.5 benutzt. Wichtig dabei ist, dass die Bruchstauchung  $\epsilon_R$  ein Vielfaches der Fließstauchung  $\epsilon_y$  ist. Die Zugfestigkeit wird vernachlässigt. Die effektive Betonfestigkeit  $f_c$  ist nicht immer der Prismen- oder Zylinderfestigkeit gleichzusetzen. Vielmehr hängt sie vom Zustand beim Erreichen der Traglast ab. Sie ist vom Risszustand, der Umlagerung des Druckfeldes und weiteren Einflüssen abhängig, die im Kapitel 6 noch diskutiert werden. Wird starr-plastisches Verhalten vorausgesetzt, so werden alle Verformungen bis zum Erreichen von  $-f_c$  vernachlässigt. Die Dehnungsinakremente  $\dot{\epsilon}_c$  sind im Bild 1.5 (b) angedeutet. Insbesondere sind theoretisch positive Dehnungen spannungslos möglich. Tatsächlich entwickeln sich im Beton diskrete Risse. Die "verschmierten" Risse entsprechen den Zugdehnungen.

Es soll hier noch darauf hingewiesen werden, dass die Stauchungsfähigkeit  $\epsilon_R$  des Betons durch geeignete Bewehrungen sehr stark beeinflusst werden kann. Eng verbügelte Säulen sind ein typisches Beispiel. Um die Anwendung der Plastizitätstheorie zu rechtfertigen, kann es

in einzelnen extremen Fällen nötig werden, entsprechende konstruktive Massnahmen zur Erhöhung von  $\epsilon_R$  zu ergreifen.



Als Ergänzung ist noch die einfache "quadratische" Fließbedingung für den ebenen Spannungszustand beigefügt (Bild 1.6). Die Dehnungsincremente stehen wieder orthogonal zur Fließfläche. In den Ecken der Fließfläche ist der Zuwachs wiederum mehrdeutig wie im Fall der TRESCA-Bedingung für Stahl.

Bild 1.6

### 1.3 Beziehung Moment - Krümmung

Das angenommene elastisch-plastische Verhalten für Stahl und Beton soll nun auf einen Biegeträger angewendet werden. Im Bild 1.7 ist ein I-Träger aus Stahl unter einem Moment  $M$  dargestellt.

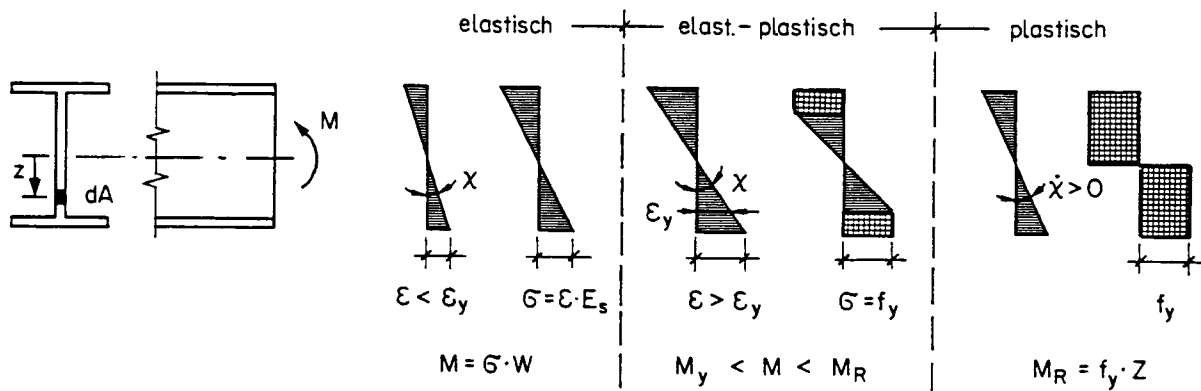


Bild 1.7

Solange die Randdehnung  $\epsilon < \epsilon_y$  bleibt, ist das Verhalten rein elastisch. Für  $\epsilon > \epsilon_y$  tritt eine teilweise Plastifizierung des Querschnittes auf. Wird die Krümmung  $\dot{\chi}$  und damit die Randdehnung weiter gesteigert, so verengt sich der elastische Kern weiter, bis asymptotisch eine volle Plastifizierung eintritt. Das Moment nähert sich sehr rasch dem plastischen Moment:

$$M_R = f_y \cdot Z \tag{1.4}$$

wobei: 
$$Z = \int_A |z| \cdot dA$$

Wird starr-plastisches Materialverhalten gemäss Bild 1.2 (b) vorausgesetzt, so ergibt sich für

$$\begin{aligned} \dot{\chi} > 0 &\rightarrow M = M_R \\ \dot{\chi} < 0 &\rightarrow M = -M_R \\ \dot{\chi} = 0 &\rightarrow -M_R \leq M \leq M_R \end{aligned} \tag{1.5}$$

Von Interesse ist noch die Beziehung zwischen Moment und Krümmung (Bild 1.8). Bis zum Fließmoment  $M_y$  gilt die elastische Beziehung

$$-M_y \leq M \leq M_y \rightarrow \chi = \frac{M}{EI}$$

Im elastisch-plastischen Bereich nähert sich mit zunehmender Krümmung das Moment sehr rasch dem plastischen Moment  $M_R$ . Für Verformungsberechnungen ist die genaue Kurve OA oder die bilineare Beziehung OB-BC heranzuziehen. Für die Berechnung der Traglast genügt es, starr-plastisches Verhalten O-D-C (auch Bild 1.8 (b)) zu berücksichtigen.

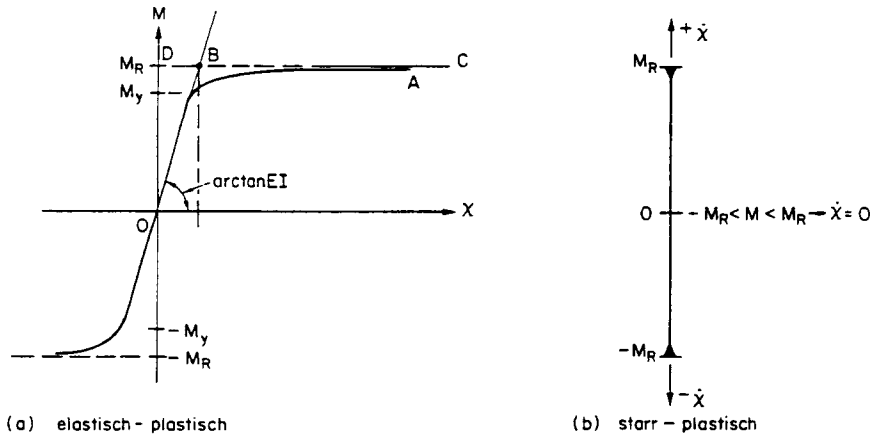


Bild 1.8

Im Bild 1.9 wird ein Stahlbetonbalken untersucht. Für kleine Betonspannungen ist die Zugfestigkeit des Betons noch wirksam. Der Beton verhält sich homogen, also ungerissen. Wird die Zugfestigkeit vernachlässigt, so sind die Betonspannungen unterhalb der neutralen Achse null. Der Querschnitt wird als gerissen angenommen. Die Berücksichtigung des unelastischen Betonverhaltens kann mit einer entsprechenden  $\sigma$ - $\epsilon$ -Kurve geschehen. Für grosse Krümmungen  $\chi$  plastifiziert sich der Querschnitt mehr und mehr, d.h. die Stahlspannung  $\sigma_s$  erreicht die Fließspannung, die Betondruckzone wird zunehmend kleiner, die Betonspannungen nähern sich der Betonfestigkeit  $f_c$ . Wird starr-plastisches Verhalten des Materials vorausgesetzt, so ergibt sich aus dem voll plastifizierten Querschnitt das plastische Moment  $M_R$  wie folgt. Die Bedingung

$$\int_A \sigma \cdot dA = 0 = f_y \cdot A_s - f_c \cdot \omega \cdot d \cdot b$$

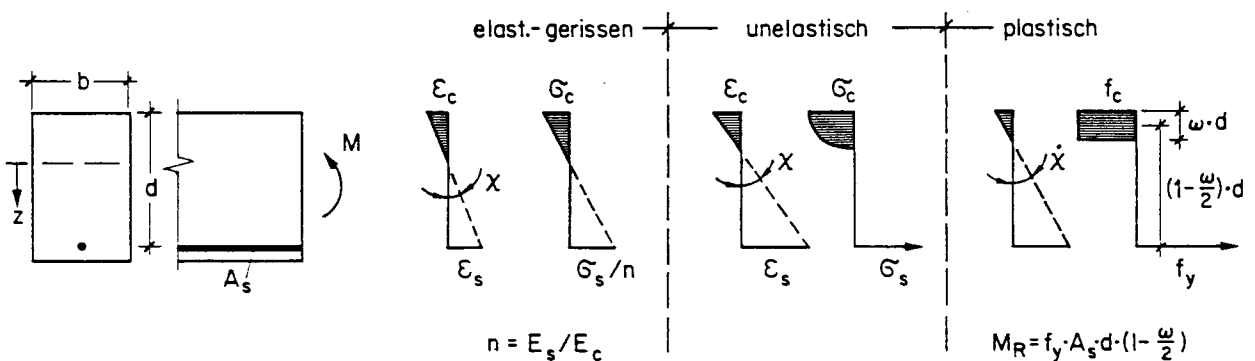


Bild 1.9

bestimmt die Lage der neutralen Achse  $\omega \cdot d$  und den mechanischen Bewehrungsgehalt  $\omega$ :

$$\omega = \frac{A_s}{b \cdot d} \cdot \frac{f_y}{f_c} = \rho \cdot \frac{f_y}{f_c} \quad (1.6)$$

Das plastische Moment ist

$$M_R = f_y \cdot A_s \cdot d \cdot \left(1 - \frac{\omega}{2}\right) \quad (1.7)$$

Mit  $\rho$  wird der Bewehrungsgehalt bezeichnet. Das  $M$ - $\chi$ -Diagramm für den Stahlbetonträger ist im Bild 1.10 dargestellt. Bis zum Rissmoment  $M_r$  ergibt sich die Krümmung aus der homogenen Steifigkeit  $(EI)_h$  des Betonquerschnittes (Stahleinfluss vernachlässigt). Darüber nähert sich die Krümmung dem Wert, der sich aus der elastischen Steifigkeit des gerissenen Querschnittes  $(EI)_r$  ergibt. Ungefähr auf der Höhe des Fliessmomentes, bei dem die Bewehrung zu fließen beginnt, überschreitet die Krümmung diesen Wert und nähert sich asymptotisch dem plastischen Moment. Für Verformungsberechnungen genügt eine geeignete Näherung, die dem Linienzug 0-R-A folgt. Dabei ist noch zu beachten, dass Kriech- und Schwindeinflüsse nur sehr ungenau bestimmt werden können und somit eine zu hohe Genauigkeit für die  $M$ - $\chi$ -Beziehung sowieso fehl am Platz ist. Für die Traglastberechnung kann wiederum das starr-plastische Verhalten (Bild 1.10 (b)) herangezogen werden.

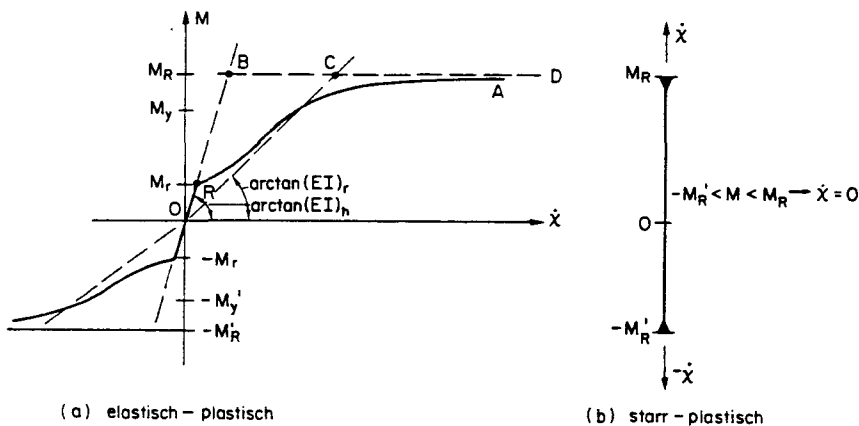


Bild 1.10

#### 1.4 Grenzwertsätze der Plastizitätstheorie

Anhand eines einfachen Beispiels sollen nun die zwei Grenzwertsätze der Plastizitätstheorie hergeleitet und physikalisch anschaulich begründet werden. Gegeben sei ein einseitig eingespannter Balken mit zwei konzentrierten Einzellasten  $F$  (Bild 1.11). Der positive und der negative plastische Widerstand  $M_R$  resp.  $M'_R$  seien über die Länge konstant. Für einen Stahlträger wird  $M'_R = M_R$ , während für einen Stahlbetonträger die Widerstände von der positiven und der negativen Bewehrung  $A_s$  resp.  $A'_s$  abhängen. Die  $M$ - $\chi$ -Beziehung ist im Bild 1.10 dargestellt.

Die elastische Lösung ist im Bild 1.11 (a) gegeben. Wird der Balken über die Elastizitätsgrenze hinaus belastet, so bildet sich ein erstes plastisches Gelenk in jenem Querschnitt,

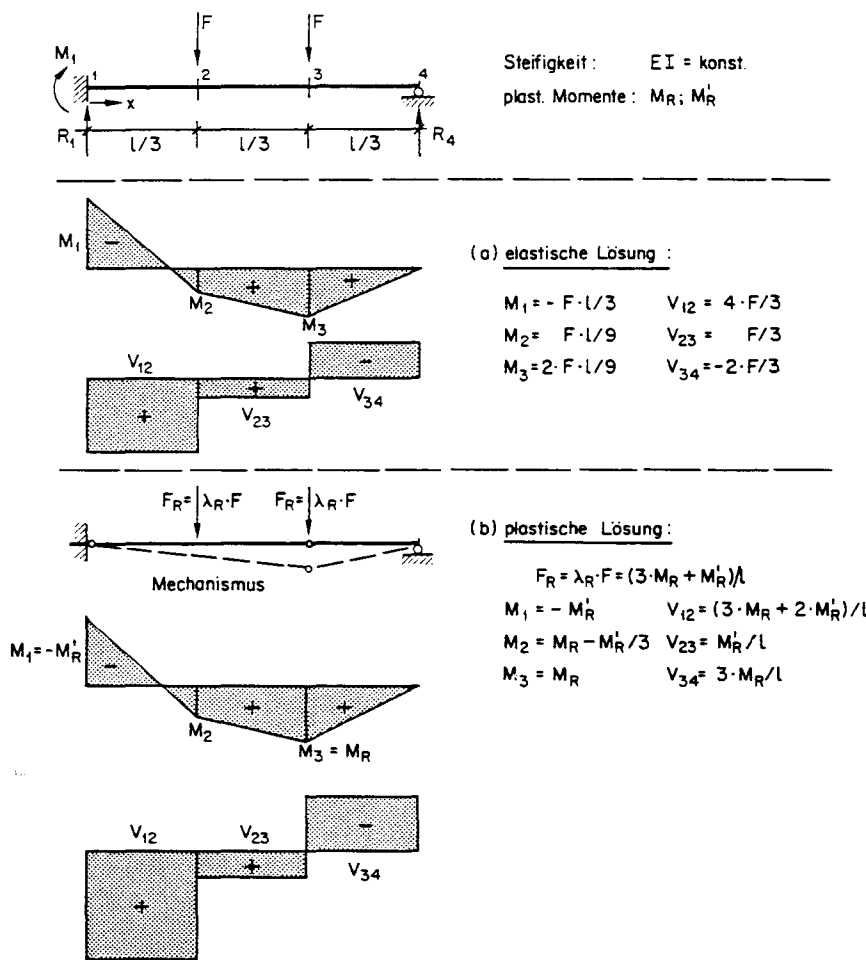


Bild 1.11

wo zuerst  $M = M_R$  oder  $M = -M'_R$  wird. Eine weitere Laststeigerung  $\lambda \cdot F$  ist möglich, bis in einem zweiten Querschnitt ein weiteres plastisches Gelenk auftritt. Damit hat sich aber ein Mechanismus ausgebildet. Eine weitere Laststeigerung ist nicht mehr möglich. Die Traglast  $F_R = \lambda_R \cdot F$  ist erreicht (Bild 1.11 (b)).

#### Statischer Grenzwertsatz (Unterer Grenzwert)

Das Problem soll zuerst nur von der statischen Seite her untersucht werden. Ueber die ganze Balkenlänge (Bild 1.12 (a)) müssen die Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{dM}{dx} = V \quad (1.8)$$

$$\frac{dV}{dx} = -q \quad (1.9)$$

erfüllt sein. Da keine verteilte Belastung  $q$  vorhanden ist, muss  $V$  zwischen den Lasten  $\lambda_S \cdot F$  konstant sein. Mit dem "statischen" Faktor  $\lambda_S$  wird die proportionale Zunahme des Lastsystems, hier zwei Einzellasten  $F$ , beschrieben. Der Momentenverlauf zwischen den Lasten ist linear. Für das rechte Auflager gilt noch die statische Randbedingung

$$M_4 = 0 \quad (1.10)$$

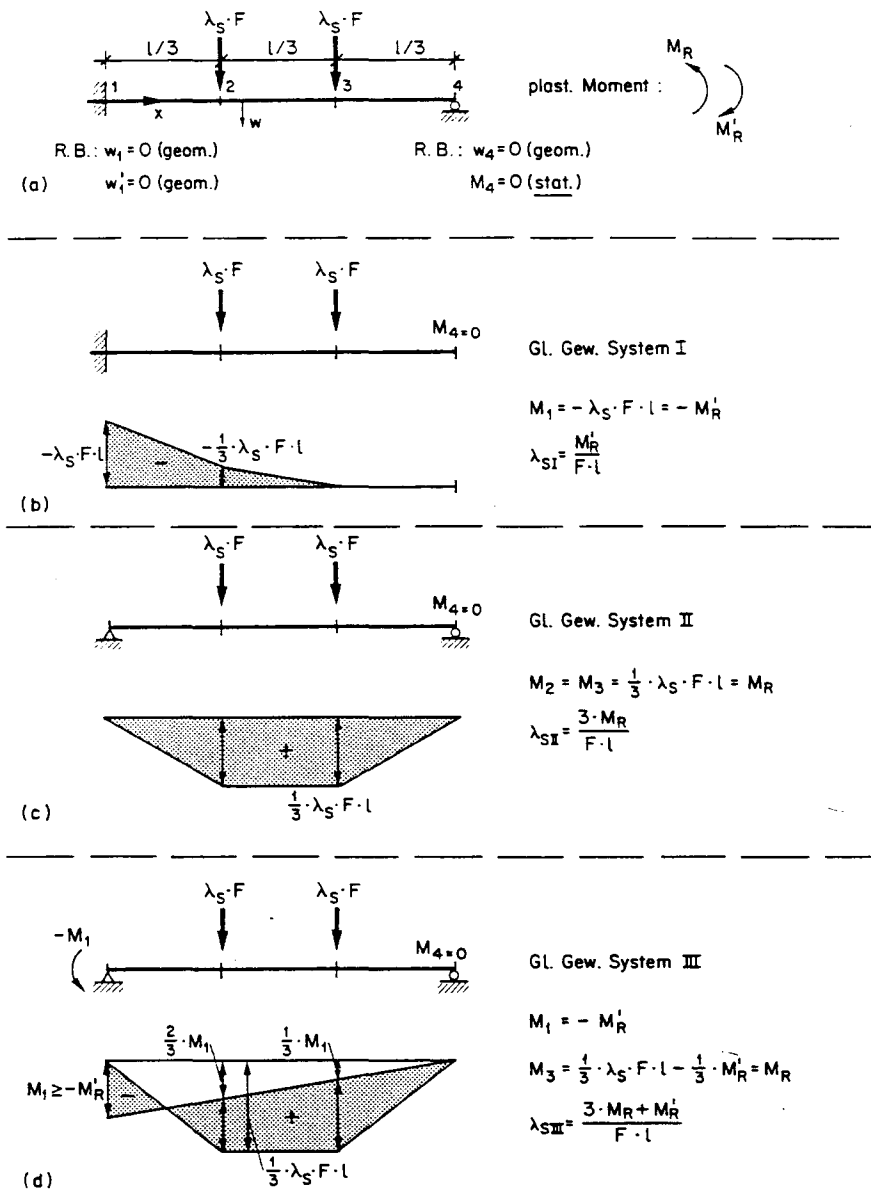


Bild 1.12

Die übrigen drei Randbedingungen sind geometrische Vorschriften und daher für eine rein statische Lösung nicht massgebend.

Einen ersten möglichen Gleichgewichtszustand I (Bild 1.12 (b)) ergibt die Vereinfachung zum Kragarm. Das entsprechende Momenten-Diagramm erfüllt die Gleichgewichtsgleichungen (1.8) und (1.9) und die statische Randbedingung von Gl. (1.10). Aus der Fließbedingung

$$-M_R' \leq M \leq M_R \quad (1.11)$$

folgt, dass die Last  $\lambda_S \cdot F$  nur soweit gesteigert werden kann, bis

$$M_1 = -\lambda_S \cdot F \cdot l = -M_R' \quad (1.12)$$

wird. Daraus folgt ein erster statischer Grenzwert



$$\lambda_{S,I} = \frac{M_R'}{F \cdot l} \quad (1.13)$$

Es ist zu beachten, dass das gegebene System durch Wegnahme des rechten Auflagers - also nicht Erfüllen der geometrischen Randbedingung  $w_4 = 0$  - geschwächt wurde.

Als zweites Gleichgewichtssystem II wird der einfache Balken (Bild 1.12 (c)) untersucht. Gleichgewicht und statische Randbedingung sind ebenfalls erfüllt. Aus der Bedingung

$$M_2 = M_3 = \frac{1}{3} \cdot \lambda_S \cdot F \cdot l = M_R \quad (1.14)$$

folgt ein zweiter Grenzwert

$$\lambda_{S,II} = \frac{3 \cdot M_R}{F \cdot l} \quad (1.15)$$

Hier entsteht die Schwächung durch Vernachlässigung der Einspannung links, d.h. die geometrische Randbedingung  $w_1' = 0$  ist nicht erfüllt.

In einem dritten Gleichgewichtssystem III (Bild 1.12 (d)) wird dem System II ein Randmoment  $M_1$  überlagert, das die Einspannung berücksichtigt. Unter Einhaltung der Fließbedingung Gl.(1.11) kann die Last  $\lambda_S \cdot F$  soweit anwachsen, bis

$$M_1 = -M_R'$$

$$M_3 = \frac{1}{3} \cdot \lambda_S \cdot F \cdot l + \frac{1}{3} \cdot M_1 = \frac{1}{3} \cdot \lambda_S \cdot F \cdot l - \frac{1}{3} \cdot M_R' = M_R$$

resultiert. Es folgt:

$$\lambda_{S,III} = \frac{3 \cdot M_R + M_R'}{F \cdot l} \quad (1.16)$$

Das System III erfüllt das Gleichgewicht und die statische Randbedingung  $M_4 = 0$ . Das M-Diagramm (Bild 1.12 (d)) zeigt, dass die Fließbedingung nicht verletzt ist. Ferner haben sich in den Schnitten 1 und 3 zwei plastische Gelenke gebildet. Das System ist zum Mechanismus geworden, und eine weitere Laststeigerung ist nicht mehr möglich. Somit entspricht  $\lambda_{S,III} \cdot F$  der Traglast  $\lambda_R \cdot F$ :

$$\lambda_R = \frac{3 \cdot M_R + M_R'}{F \cdot l} \quad (1.17)$$

Zusammenfassend lässt sich der statische Grenzwertsatz formulieren:

$$\text{Statischer Grenzwertsatz: } \lambda_S \cdot F \leq \lambda_R \cdot F$$

Eine Belastung  $\lambda_S \cdot F$ , die zu einem statisch zulässigen Spannungszustand gehört, der die Fliessbedingung nicht verletzt, ist ein unterer Grenzwert der Traglast  $\lambda_R \cdot F$

Statisch zulässig ist jeder Spannungszustand, der die Gleichgewichtsbedingungen sowie die statischen Randbedingungen erfüllt.

Die Belastung  $F$  kann aus einem Lastsystem  $(F_1, \dots, F_n)$  bestehen;  $\lambda_S$  ist der "statische" Faktor, der die proportionale Laststeigerung steuert.

Plausible Erklärung:

Jeder solche Zustand lässt sich in einem Tragwerk verwirklichen, indem die geometrischen Randbedingungen gelockert werden (z.B. I: rechtes Auflager entfernt,  $w_4 \neq 0$ ; II: linke Einspannung entfernt,  $w_1' \neq 0$ ), oder indem das Tragwerk künstlich geschwächt wird (z.B. II: am linken Ende nur Schubverbindung, keine Momentenverbindung,  $M_1 = 0$ ). Würden solche Schwächungen tatsächlich vorgenommen, so würde der angenommene statisch zulässige Spannungszustand in einen Mechanismus übergeführt. Daher muss der statische Grenzwert  $\lambda_S \cdot F$  kleiner oder höchstens gleich der Traglast  $\lambda_R \cdot F$  sein.

Bemerkung:

Gemäss der Kraftmethode der elastischen Baustatik wird ein  $n$ -fach statisch unbestimmtes Stabsystem in ein statisch bestimmtes Grundsystem mit  $n$  überzähligen Kraftgrössen  $X_i$  zerlegt. Die Belastung des Grundsystems erzeugt einen statisch zulässigen Spannungszustand. Jede überzählige Grösse  $X_i$  erzeugt ebenfalls einen statisch zulässigen Spannungszustand. Durch Ueberlagerung aller dieser statisch zulässigen Spannungszustände und unter Einhaltung der Fliessbedingung werden die Kraftgrössen  $X_i$  so variiert, dass der maximale Wert von  $\lambda_S \cdot F$  resultiert. Es hat sich dann auch ein lokaler Mechanismus (Anzahl Gelenke  $< n + 1$ ) oder ein totaler Mechanismus (Anzahl Gelenke  $= n + 1$ ) ausgebildet, wobei  $n$  die Anzahl überzähliger Grössen ist. Im Gegensatz dazu werden in einer elastischen Lösung die überzähligen Grössen  $X_i$  aus den  $n$  Verträglichkeitsbedingungen bestimmt, welche die Kontinuität in den künstlich eingeführten Schnittstellen wieder herstellen.

Kinematischer Grenzwertsatz (Oberer Grenzwert)

Ein duales Vorgehen ergibt sich aus einer kinematischen Betrachtungsweise. Im Bild 1.13 (b) wird ein erster Mechanismus I eingeführt. Angenommen wird eine Bewegung, die im Schnitt 2 ein negatives plastisches Moment  $M_2 = -M_R'$  und im Schnitt 3 ein positives plastisches Moment  $M_3 = M_R$  erzeugt. Alle übrigen Balkenteile werden als starr betrachtet. Im besonderen erfüllt der Mechanismus die geometrischen Randbedingungen  $w_1 = w_1' = 0$  am linken und  $w_4 = 0$  am rechten Auflager. Im weiteren soll er mit den äusseren Lasten  $\lambda_K \cdot F$  ein Gleichgewichtssystem bilden. Der "kinematische" Faktor  $\lambda_K$  beschreibt die proportionale Aenderung der Belastung.

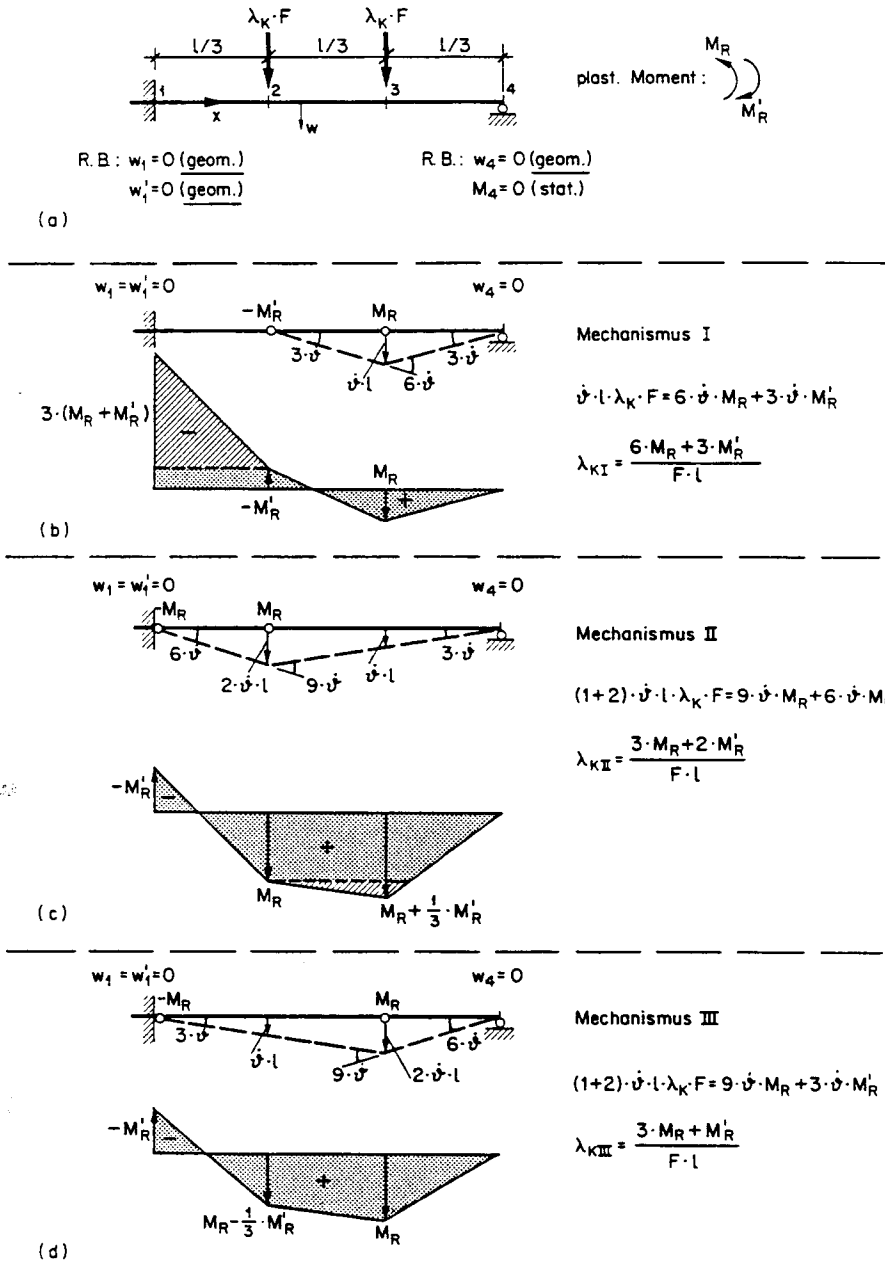


Bild 1.13

Mit Vorteil wird das globale Gleichgewicht durch das Prinzip der virtuellen Leistung (PVL) formuliert:

PVL: Ein statisches System ist im Gleichgewicht, wenn die Summe der äusseren und der inneren Leistungen, welche sich aus einem virtuellen Bewegungszustand ergeben, verschwindet:  $L_a + L_i = 0$ .

Anstelle des PVL kann auch das Prinzip der virtuellen Arbeit (PVA) verwendet werden. Dabei müssen die virtuellen Verschiebungen als infinitesimal klein angenommen werden, damit die Geometrie kleiner Winkel gültig bleibt. Die virtuellen Verschiebungen ergeben sich aus den virtuellen Geschwindigkeiten durch Multiplikation mit einem infinitesimalen Zeitintervall  $\Delta t$ .

PVA: Ein statisches System ist im Gleichgewicht, wenn die Summe der äusseren und der inneren Arbeiten, welche sich aus einem virtuellen Verschiebungszustand ergeben, verschwindet:  $A_a + A_i = 0$ .

Wird gerade der durch den Parameter  $\dot{\vartheta}$  festgelegte Mechanismus als virtueller Bewegungszustand herangezogen, so ergibt sich (Bild 1.13 (b)):

$$L_a = \dot{\vartheta} \cdot 1 \cdot \lambda_K \cdot F$$

$$L_i = -3 \cdot \dot{\vartheta} \cdot M_R^i - 6 \cdot \dot{\vartheta} \cdot M_R$$

Die innere Leistung in einem plastischen Mechanismus ist immer negativ. Sie wird daher auch als Dissipationsleistung bezeichnet.

Mit dem PVL:  $L_a + L_i = 0$  folgt

$$\lambda_{K,I} = \frac{6 \cdot M_R + 3 \cdot M_R^i}{F \cdot 1} \quad (1.18)$$

als erster kinematischer Grenzwert. Aus der zugehörigen Momentenverteilung ist jedoch sofort ersichtlich, dass die Fließbedingung  $-M_R^i \leq M \leq M_R$  im Bereich 1-2 verletzt ist. Dieser Zustand wäre tatsächlich nur möglich, wenn das System in diesem Bereich entsprechend verstärkt würde.

Für einen zweiten Mechanismus II (Bild 1.13 (c)) wird daher ein plastisches Moment  $M_1 = -M_R^i$  an der Einspannstelle angenommen, ein zweites Gelenk im Schnitt 2,  $M_2 = M_R$ . Das globale Gleichgewicht mit dem PVL ergibt:

$$L_a = 2 \cdot \dot{\vartheta} \cdot 1 \cdot \lambda_K \cdot F + \dot{\vartheta} \cdot 1 \cdot \lambda_K \cdot F$$

$$L_i = -6 \cdot \dot{\vartheta} \cdot M_R^i - 9 \cdot \dot{\vartheta} \cdot M_R$$

$$\lambda_{K,II} = \frac{3 \cdot M_R + 2 \cdot M_R^i}{F \cdot 1} \quad (1.19)$$

Das M-Diagramm zeigt wiederum eine Verletzung der Fließbedingung im Bereich 2-3-4 an. Wird das positive plastische Moment in den Schnitt 3 verschoben, so folgt aus dem Mechanismus III (Bild 1.13 (d)):

$$L_a = \dot{\vartheta} \cdot 1 \cdot \lambda_K \cdot F + 2 \cdot \dot{\vartheta} \cdot 1 \cdot \lambda_K \cdot F$$

$$L_i = -3 \cdot \dot{\vartheta} \cdot M_R^i - 9 \cdot \dot{\vartheta} \cdot M_R$$

$$\lambda_{K,III} = \frac{3 \cdot M_R + M_R^i}{F \cdot 1} \quad (1.20)$$

Die Fließbedingung ist nun über den ganzen Balken erfüllt. Der kinematische Grenzwert  $\lambda_{K,III}$

entspricht nun dem statischen Grenzwert  $\lambda_{S,III}$  gemäss Gl. (1.16). Damit ist aber auch die Traglast  $\lambda_R \cdot F$ , Gl. (1.17), gefunden.

Das kinematische Vorgehen lässt sich verallgemeinert durch den kinematischen Grenzwertsatz ausdrücken:

Kinematischer Grenzwertsatz:  $\lambda_K \cdot F \geq \lambda_R \cdot F$

Eine Belastung  $\lambda_K \cdot F$ , die mit einem Mechanismus ein Gleichgewichtssystem bildet, ist ein oberer Grenzwert der Traglast  $\lambda_R \cdot F$

Ein Mechanismus besteht aus einem kinematisch zulässigen Bewegungszustand, der plastische Widerstände in den bewegten Zonen entsprechend der Fließbedingung und dem Fließgesetz erzeugt.

Ein Bewegungszustand mit einem Freiheitsgrad ist kinematisch zulässig, wenn er geometrisch kompatibel ist und die geometrischen Randbedingungen erfüllt.

Zur Illustration des Gesagten sei auf Bild 1.13 (b) verwiesen. Der Mechanismus I besteht aus einem Bewegungszustand, beschrieben durch die Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\chi}$ , der kinematisch zulässig ist. Insbesondere erfüllt er die geometrische Randbedingung  $w_4 = 0$ . Die plastischen Widerstände sind durch die Fließbedingung und das Fließgesetz (Bild 1.10 (b)) festgelegt:

$$\text{Schnitt 2: } \dot{\chi} < 0 \rightarrow M_2 = -M_R'$$

$$\text{Schnitt 3: } \dot{\chi} > 0 \rightarrow M_3 = M_R'$$

#### Plausible Erklärung:

Jeder angenommene Mechanismus wird im allgemeinen eine M-Verteilung erzeugen, die in gewissen Bereichen die Fließbedingung  $-M_R' \leq M \leq M_R'$  verletzt. Würden diese Stellen verstärkt bis kein Fließen mehr auftritt, so wäre der kinematische Grenzwert gleich der Traglast. Daraus folgt, dass ein kinematischer Grenzwert immer grösser oder höchstens gleich der Traglast sein wird.

### 1.5 Zusammenfassung

Der Sachverhalt wird in der Tabelle 1.1 festgehalten:

Bedingungen	statischer Grenzwertsatz	vollständige Lösung	kinematischer Grenzwertsatz
(1) Gleichgewicht	erfüllt	erfüllt	erfüllt
(2) Fließbedingung	erfüllt	erfüllt	?
(3) Mechanismus	?	erfüllt	erfüllt
Berechnungsverfahren →	statische Methode		Mechanismus-Methode
Resultat →	Unterer Grenzwert $\lambda_S \cdot F \leq \lambda_R \cdot F$	Traglast $\lambda_R \cdot F$	Oberer Grenzwert $\lambda_K \cdot F \geq \lambda_R \cdot F$

Tabelle 1.1: Plastische Berechnungen

Die vollständige Lösung erfüllt alle drei Bedingungen (1), (2) und (3). Ein statischer Grenzwert  $\lambda_S \cdot F$  basiert auf einer statischen Lösung, die (1) die Gleichgewichts- und statischen Randbedingungen sowie (2) die Fließbedingung einhält. Im allgemeinen wird sie jedoch keinen Mechanismus (3) erzeugen, d.h. eine ungenügende Anzahl plastischer Gelenke ausbilden. Daher ist  $\lambda_S \cdot F$  ein unterer Grenzwert der Traglast  $\lambda_R \cdot F$ .

Eine kinematische Lösung mit dem kinematischen Grenzwert  $\lambda_K \cdot F$ , die die Mechanismusbedingung (3) und global die Gleichgewichtsbedingung (1) erfüllt, erzeugt im allgemeinen ausserhalb der Gelenke auch Spannungen, die die Fließbedingung (2) verletzen. Somit ist  $\lambda_K \cdot F$  ein oberer Grenzwert der Traglast  $\lambda_R \cdot F$ .

Grundsätzlich lassen sich zwei praktische Berechnungsverfahren unterscheiden, die direkt auf den beiden Grenzwertsätzen basieren.

### A. Statische Methode

Aufgrund des statischen Grenzwertsatzes wird folgendes Vorgehen eingeschlagen:

1. Annahme statisch zulässiger Spannungszustände.
2. Formulierung der Fließbedingung in kritischen Zonen, resp. Schnitten.  
Kombination der Spannungszustände, um Grenzwert zu maximieren:

$$\lambda_S \cdot F \rightarrow \text{Maximum}$$

3. Kontrolle der Mechanismusbedingung, d.h. genügende Anzahl Gelenke, um lokalen oder globalen Mechanismus zu erzeugen.

Auf jeden Fall liefert diese Methode einen unteren Grenzwert, d.h. auf der sicheren Seite.

### B. Mechanismus-Methode

Der kinematische Grenzwertsatz dient als Basis.

1. Annahme von Mechanismen.
2. Formulierung des globalen Gleichgewichtes für Mechanismen.  
Kombination der Mechanismen, um Grenzwert zu minimieren:

$$\lambda_K \cdot F \rightarrow \text{Minimum}$$

3. Kontrolle der Fließbedingung ausserhalb der Gelenkstellen:

Die Kontrolle der Fließbedingung bietet oft erhebliche Schwierigkeiten oder ist überhaupt nicht exakt durchführbar. Da die Mechanismus-Methode obere Grenzwerte, d.h. Werte auf der unsicheren Seite, liefert, ist sie in der Praxis mit der nötigen Erfahrung und Vorsicht anzuwenden.

Wichtig ist noch der Hinweis, dass die Berechnung der Traglast mit den Grenzwertsätzen nicht als Näherungslösung aufgefasst werden sollte. Mathematisch führt nämlich die Berechnung auf die Lösung eines linearen oder nichtlinearen Programms. Darin treten die Fließbedingungen als Restriktionen in Form von Ungleichungen auf (z.B. Gl. (1.11)). Als Extremalwert ist die Traglast als Maximum oder dual als Minimum zu bestimmen. Die Grenzwertsätze stellen eine anschauliche physikalische Formulierung des mathematischen Problems der Lösung solcher Programme dar.

Damit sind die beiden grundsätzlichen Lösungsverfahren skizziert. Für die praktische Durchführung wird auf die folgenden Kapitel sowie auch auf die entsprechende Fachliteratur verwiesen.

## 1.6 Anwendbarkeit der Plastizitätstheorie auf Stahlbeton

Die Anwendbarkeit der Plastizitätstheorie auf Stahlbeton lässt sich nur aufgrund von Versuchen sowie praktischer Erfahrungen rechtfertigen.

Die langjährige Erfahrung aus der Beobachtung von Stahlbetontragwerken zeigt, dass oft bedeutende Kraftumlagerungen eintreten. Diese können entweder durch unvorhergesehene Einwirkungen (z.B. Setzungen), fehlerhafte Ausführung (falsch plazierte Bewehrung, usw.) oder Fehler in der Berechnung (falsches statisches Modell, Rechenfehler, usw.) verursacht werden. Diese "Selbsthilfe" oder "Schlauheit" des Materials Stahlbeton hat glücklicherweise schon manches Bauwerk gerettet. Sie kommt durch unelastisches Materialverhalten des Stahls und des Betons zustande. Mit Hilfe der Plastizitätstheorie gelingt es, dieses Verhalten zufriedenstellend auch rechnerisch zu berücksichtigen und deshalb in die Berechnung der Tragsicherheit einzubeziehen.

Weltweit sind in den letzten 25 Jahren viele experimentelle Untersuchungen über das unelastische Verhalten von Stahlbetontragwerken durchgeführt worden. Sie haben sich hauptsächlich auf das Biegeverhalten von Balken und Platten konzentriert. Am Institut für Baustatik und Konstruktion der ETH Zürich ist in den letzten 20 Jahren systematisch das Verhalten von Säulen, Balken, Platten und Scheiben bis zum Bruch sowohl theoretisch als auch experimentell untersucht worden. Die Resultate haben eindrücklich gezeigt, dass die Plastizitätstheorie, richtig angewendet, heute wohl die einzige umfassende theoretische Grundlage bildet, auf der die Traglast von Stahlbetonkonstruktionen methodisch einheitlich und relativ einfach berechnet werden kann. Sie erlaubt auch eine methodisch einheitliche Ausbildung wichtiger konstruktiver Details.

Die folgenden Kapitel sollen in einer zusammenfassenden Darstellung die Anwendung der Plastizitätstheorie auf den Stahlbeton aufzeigen. Die Revision der Norm SIA 162 wird den Nachweis der Tragfähigkeit im wesentlichen auf diese plastischen Bemessungsverfahren abstützen.

### LITERATUR

- [1.1] Prager W.: "Probleme der Plastizitätstheorie", Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1955.
- [1.2] Save M., Massonnet Ch.: "Calcul plastique des constructions", Vol. I (1967), Vol. II (1972), Centre Belgo-Luxembourgeois d'information de l'acier, Bruxelles.
- [1.3] Thürlimann B., Ziegler H.: "Plastische Berechnungsmethoden", Autographie zu Fortbildungskurs 1963, ETH Zürich.
- [1.4] International Association for Bridge and Structural Engineering (IABSE): "Plasticity in Reinforced Concrete", IABSE Colloquium Copenhagen 1979, Introductory Report (1978) and Final Report (1979). IABSE, ETH-Hönggerberg, Zürich.
- [1.5] Marti P.: "Zur plastischen Berechnung von Stahlbeton", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Bericht Nr. 104, 1980, Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart.



## 2. Balken I: Biegung

P. Ritz

### 2.1 Einleitung

Die Berechnung und Bemessung ein- und mehrfeldriger Träger gehört zur alltäglichen Arbeit eines in der Kontruktion tätigen Bauingenieurs. In diesem Kapitel wird gezeigt, wie diese Aufgabe mit Hilfe der Plastizitätstheorie gelöst werden kann. Die im Kapitel 1 behandelten Grundbegriffe werden an einfachen Beispielen systematisch angewendet und erläutert. Dabei wird nur die Biegung untersucht; die zusätzlichen Einflüsse von Quer- und Normalkräften werden in anderen Kapiteln behandelt. Im weiteren wird vorausgesetzt, dass das Material eine genügende Verformungsfähigkeit aufweist und somit die in Rechnung gestellten Umlagerungen der Schnittkräfte möglich sind. Die Grenzen dieser Annahme werden im Kapitel 3 diskutiert.

In den folgenden Untersuchungen wird das Konzept der Teilsicherheitsbeiwerte verwendet, wie dies in der Norm SIA 162 (1968) [2.1] und der Richtlinie 34 (1976) zur Norm SIA 162 (1968) [2.2] dargestellt ist. Eine differenziertere Darstellung findet man in der CEB/FIP Mustervorschrift für Tragwerke aus Stahlbeton und Spannbeton (1978) [2.3]. Die im Entstehen begriffenen Regelungen in den Normen SIA 160 und 162 sind dann sinngemäss anzuwenden.

Der Sicherheitsfaktor  $\gamma$  wird in einen Widerstandsfaktor  $\gamma_R$  und einen Lastfaktor  $\gamma_S$  aufgeteilt, wobei beim Lastfaktor  $\gamma_S$  noch zwischen einem Faktor  $\gamma_g$  für ständige Lasten und einem Faktor  $\gamma_q$  für Nutzlasten unterschieden wird. Entsprechend der Richtlinie 34 zur Norm SIA 162 werden folgende Sicherheitsfaktoren angenommen:

$\gamma_S$  :  $\gamma_q = 1.4$ ;  $\gamma_{g,max} = 1.4$ , wenn die ständige Last ungünstig wirkt,  
 $\gamma_{g,min} = 0.8$ , wenn die ständige Last günstig wirkt. Die ständige Last wird für einen bestimmten Nachweis über das ganze Tragwerk mit einem einheitlichen  $\gamma_g$ -Wert behaftet.

$\gamma_R = 1.3$

$\gamma = \gamma_S \cdot \gamma_R = 1.8$  (bzw. = 1.0 für günstig wirkende ständige Last)

Gemäss der CEB/FIP Mustervorschrift können, je nachdem, ob die ständige Last günstig oder ungünstig wirkt, von Feld zu Feld verschiedene Lastfaktoren  $\gamma_g$  angenommen werden. Man darf aber auch eine Grenzwertlinie bilden, indem man über das ganze Tragwerk einen einheitlichen  $\gamma_g$ -Wert ansetzt, wobei die Schnittgrössen aus ständiger Last einmal mit  $\gamma_{g,max}$  und einmal mit  $\gamma_{g,min}$  zu berechnen sind.

Bei der Anwendung der Plastizitätstheorie stehen zwei Methoden zur Verfügung:

Statische Methode (unterer Grenzwertsatz): liefert unteren Grenzwert der Traglast

Kinematische Methode (oberer Grenzwertsatz): liefert oberen Grenzwert der Traglast

In einfachen Fällen gelingt es, die Bedingungen beider Grenzwertsätze zu erfüllen und so eine vollständige Lösung, d.h. die Traglast, zu gewinnen.

Mit Hilfe der statischen Methode sind zulässige Spannungszustände (= Gleichgewichtszustände, die die statischen Randbedingungen erfüllen) zu untersuchen. Dabei wird verlangt, dass die gewählten Spannungszustände die Fließbedingung nicht verletzen. Dies ist bei Balken, die nur durch Biegemomente beansprucht sind, gleichbedeutend mit der Aussage, dass in jedem Schnitt die Fließbedingung

$$-M'_R \leq M_U \leq M_R \quad (2.1)$$

erfüllt sein muss.  $M_U$  ist das um den Sicherheitsfaktor  $\gamma$  erhöhte Biegemoment infolge Belastung des gewählten zulässigen Spannungszustandes,  $M_R$  das positive und  $M'_R$  das negative plastische Moment. Verwendet man das Konzept der Teilsicherheitsbeiwerte, lässt sich die Gl. (2.1) wie folgt schreiben:

$$-\frac{M'_R}{\gamma_R} \leq \gamma_S \cdot M \leq \frac{M_R}{\gamma_R} \quad (2.2)$$

Da die statische Methode einen unteren Grenzwert der Traglast liefert, ist man nun bestrebt, einen zulässigen Spannungszustand zu finden, der eine möglichst grosse Last ergibt. Die statische Methode eignet sich vor allem für Bemessungsaufgaben.

Mit Hilfe der kinematischen Methode, oft auch Mechanismenmethode genannt, sind zulässige (d.h. geometrisch kompatible und die kinematischen Randbedingungen erfüllende) Bewegungs- bzw. Verschiebungszustände zu untersuchen. Es wird verlangt, dass ein Mechanismus, d.h., dass in den angenommenen Gelenken das entsprechende plastische Moment, vorhanden ist.

Die zu den einzelnen Mechanismen gehörende Gleichgewichtslast kann am einfachsten mit dem Prinzip der virtuellen Leistungen oder mit dem dem Ingenieur vertrauteren Prinzip der virtuellen Arbeiten gewonnen werden. Die Gleichgewichtslast kann auch direkt mit den Gleichgewichtsbedingungen bestimmt werden. Im folgenden wird aus Gründen der Einheitlichkeit ausschliesslich mit dem Prinzip der virtuellen Leistungen gearbeitet.

Prinzip der virtuellen Leistungen (PVL):

$$L_a + L_i = 0 \quad (2.3)$$

Dabei bezeichnen  $L_a$  die Leistung der äusseren Kräfte und  $L_i$  die Leistung der inneren Kräfte.

Mit den Teilsicherheitsbeiwerten lässt sich Gl. (2.3) wie folgt schreiben:

$$\gamma_S \cdot L_a + \frac{L_i}{\gamma_R} = 0 \quad (2.4)$$

oder mit  $\gamma_S \cdot L_a = L_{ad}$

$$L_{ad} + \frac{L_i}{\gamma_R} = 0 \quad (2.5)$$

Die Frage, ob die ständige Last mit  $\gamma_{g,max}$  oder  $\gamma_{g,min}$  multipliziert werden muss, kann relativ einfach beantwortet werden. Beim angenommenen Mechanismus ist abzuklären, ob die ständige Last eine positive oder eine negative Leistung bewirkt. Ist die Leistung positiv, wirkt die ständige Last ungünstig und ist somit mit  $\gamma_{g,max}$  zu multiplizieren. Ist sie negativ, wirkt die ständige Last günstig, und somit ist als Lastfaktor  $\gamma_{g,min}$  in die Rechnung einzuführen.

Wie die nachfolgenden Beispiele zeigen, ist es oft vorteilhaft, die statische und die kinematische Methode kombiniert anzuwenden. Dadurch kann entweder die Traglast bestimmt (vollständige Lösung) oder die Abweichung der berechneten Last von der Traglast einfach abgeschätzt werden.

Die Annahmen, die diesem Kapitel zugrunde liegen, können wie folgt zusammengefasst werden:

- Querkräfte und Normalkräfte werden vernachlässigt.
- Das Tragwerk weist eine genügende Verformungsfähigkeit auf, damit die notwendigen Schnittkraftumlagerungen gewährleistet sind.
- Das Gleichgewicht wird am undeformierten System formuliert (Theorie 1. Ordnung).
- Sicherheiten:

Lastfaktoren $\gamma_S$ : Nutzlasten	$\gamma_q = 1.4$
Ständige Lasten	$\gamma_g = 1.4$ ; ungünstig wirkend
	$\gamma_g = 0.8$ ; günstig wirkend
Widerstandsfaktor:	$\gamma_R = 1.3$
Sicherheitsfaktor	$\gamma = \gamma_S \cdot \gamma_R = 1.8$ bzw. $1.0$

## 2.2 Einfaches Beispiel

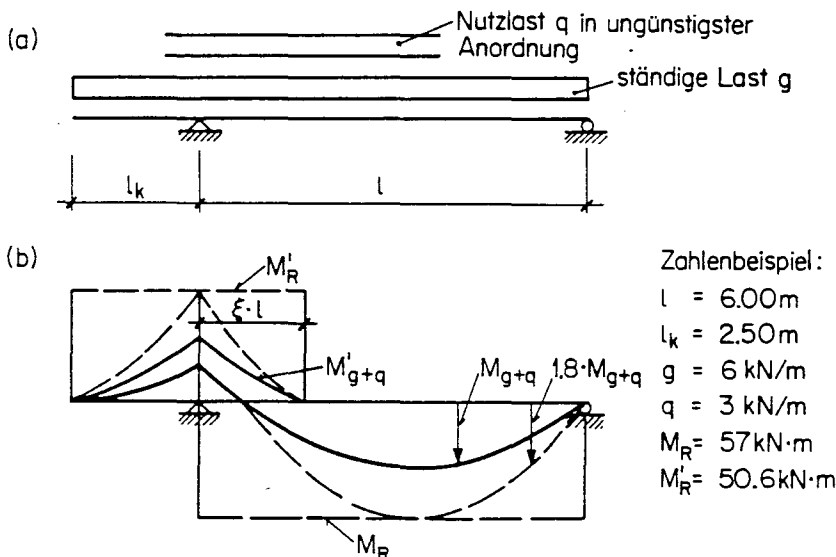


Bild 2.1: Statisches System und Momentengrenzwertlinie

Ein Tragwerk, wie der im Bild 2.1 (a) dargestellte Einfeldträger mit Kragarm, wird häufig so berechnet und bemessen, indem man zuerst die Grenzwertlinien unter Gebrauchslasten bestimmt und dann verlangt, dass die um den Sicherheitsfaktor  $\gamma$  vergrösserten Schnittgrössen in jedem Querschnitt kleiner als der Bruchwiderstand sind. Dieses Vorgehen ist unter Berücksichtigung eines Sicherheitsfaktors  $\gamma = 1.8$  im Bild 2.1 (b) dargestellt.

Auf den ersten Blick scheint eine solche Bemessung in Ordnung zu sein, wendet man doch im Prinzip die statische Methode der Plastizitätstheorie an, die eine Bemessung auf der sicheren Seite liefert. Im folgenden wird der gemäss Bild 2.1 bemessene Träger mit der statischen und der kinematischen Methode der Plastizitätstheorie sauber analysiert.

### Statische Methode

Zu erfüllende Bedingungen:

- Gewählte Spannungszustände müssen zulässig sein
- Fließbedingungen dürfen nicht verletzt sein

Der Einfeldträger mit Kragarm ist ein statisch bestimmtes System, bei dem keine Umlagerungen möglich sind. Zu einem Lastfall gibt es nur einen zulässigen Spannungszustand. Die zu untersuchenden Lastfälle sind im Bild 2.2 (a-d), und die daraus resultierende Momentengrenzwertlinie ist im Bild 2.2 (e) dargestellt. Darin ist  $M_d$  die Momentengrenzwertlinie der um  $\gamma_S$  ( $\gamma_{g,max}$ ,  $\gamma_{g,min}$ ,  $\gamma_q$ ) erhöhten Lasten.

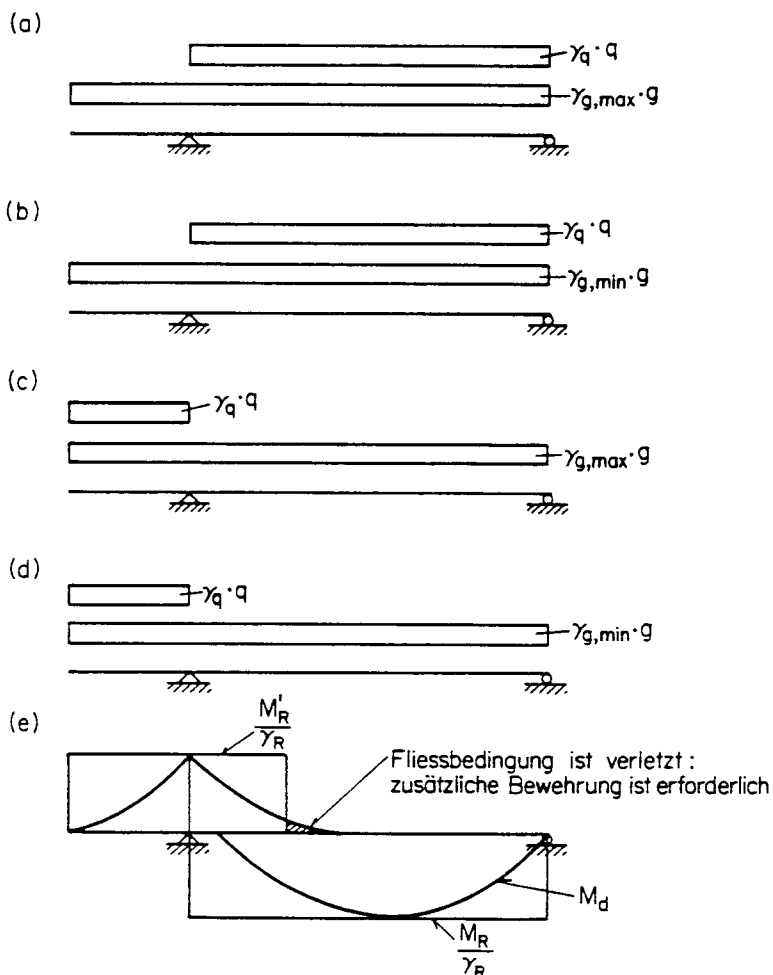


Bild 2.2: Statische Methode

Ein Vergleich der  $M_d$ -Grenzwertlinie mit dem um  $\gamma_R$  reduzierten Biegebruchwiderstand des gemäss Bild 2.1 bemessenen Balkens zeigt, dass die Fliessbedingung im Feldinnern unter negativen Momenten auf einem gewissen Bereich verletzt ist. In diesem Bereich ist eine zusätzliche Bewehrung erforderlich.

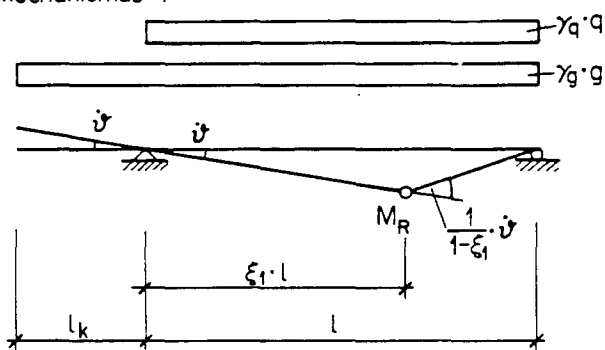
### Kinematische Methode

Zu erfüllende Bedingungen:

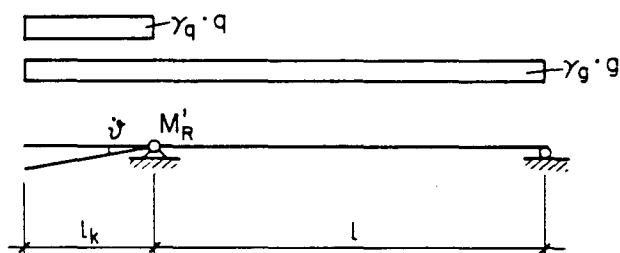
- Gewählter Bewegungszustand muss zulässig sein
- Mechanismus muss vorhanden sein

Damit bei einem statisch bestimmten System ein Mechanismus vorhanden ist, muss sich ein plastisches Gelenk bilden. Die für den Einfeldträger mit Kragarm in Frage kommenden Bruchmechanismen sind im Bild 2.3 dargestellt.

(a) Mechanismus 1



(b) Mechanismus 2



(c) Mechanismus 3

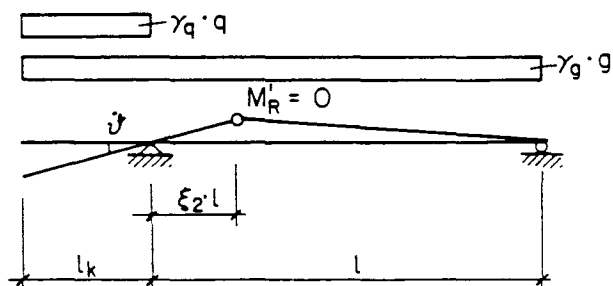


Bild 2.3: Kinematische Methode

Mechanismus 1

Leistung der äusseren Kräfte:

$$L_{ad} = -\gamma_g \cdot g \cdot l \cdot \frac{l_k}{2} \cdot \dot{\xi} + (\gamma_g \cdot g + \gamma_q \cdot q) \cdot l \cdot \frac{\xi_1 \cdot l}{2} \cdot \dot{\xi} \quad (2.6)$$

Leistung der inneren Kräfte:

$$L_i = -M_R \cdot \frac{1}{1 - \xi_1} \cdot \dot{\xi} \quad (2.7)$$

Einsetzen der Gleichungen (2.6) und (2.7) in Gl. (2.5) gibt

$$\gamma_g \cdot g \cdot \frac{1}{2} \cdot (\xi_1 \cdot l^2 - l_k^2) + \gamma_q \cdot q \cdot \frac{1}{2} \cdot \xi_1 \cdot l^2 = \frac{M_R}{\gamma_R} \cdot \frac{1}{1 - \xi_1} \quad (2.8)$$

Aus der Gl. (2.8) kann, je nach Fragestellung, einer der Lastfaktoren  $\gamma_g$  bzw.  $\gamma_q$  oder das plastische Moment  $M_R$  bestimmt werden. Zum Beispiel wird der Lastfaktor

$$\gamma_q = \frac{1}{\gamma_R} \cdot \frac{2 \cdot M_R}{q \cdot l^2 \cdot \xi_1 \cdot (1 - \xi_1)} + \gamma_g \cdot \frac{g}{q} \cdot \left( \frac{l_k^2}{\xi_1 \cdot l^2} - 1 \right) \quad (2.9)$$

Die massgebende Lage des Gelenks erhält man durch Ableiten von  $\gamma_q$  nach  $\xi_1$  und Nullsetzen der so gewonnenen Gleichung.

$$\xi_1 = \frac{2 \cdot M_R}{\gamma_R \cdot \gamma_g \cdot g \cdot l_k^2} + 1 - \sqrt{\frac{2 \cdot M_R}{\gamma_R \cdot \gamma_g \cdot g \cdot l_k^2} \cdot \left( \frac{2 \cdot M_R}{\gamma_R \cdot \gamma_g \cdot g \cdot l_k^2} + 1 \right)} \quad (2.10)$$

Wie später gezeigt wird, macht man im Normalfall einen kleinen Fehler, wenn das Gelenk in Feldmitte angenommen, also  $\xi_1 = 0.5$  gesetzt, wird.

Um zu entscheiden, ob  $\gamma_{g,max}$  oder  $\gamma_{g,min}$  massgebend ist, muss der von  $g$  abhängige erste Term der Gl. (2.8) untersucht werden.

$$\xi_1 \cdot l^2 - l_k^2 > 0: \quad \gamma_g = \gamma_{g,max}$$

$$\xi_1 \cdot l^2 - l_k^2 < 0: \quad \gamma_g = \gamma_{g,min}$$

Zahlenbeispiel:

$$\xi_1 = 0.558, \quad \xi_1 \cdot l^2 - l_k^2 = 13.8, \quad \gamma_{g,max} \text{ massgebend, } \gamma_q = 1.40$$

Mechanismus 2

$$L_{ad} = (\gamma_g \cdot g + \gamma_q \cdot q) \cdot l_k \cdot \frac{l_k}{2} \cdot \dot{\vartheta} \quad (2.11)$$

$$L_i = -M_R' \cdot \dot{\vartheta} \quad (2.12)$$

Mit Gl. (2.5) und  $\gamma_g = \gamma_{g,max} = \gamma_q = \gamma_S$  folgt

$$\gamma_S = \frac{2 \cdot M_R'}{\gamma_R \cdot (g + q) \cdot l_k^2} \quad (2.13)$$

Zahlenbeispiel:

$$\gamma_S = 1.40$$

Mechanismus 3

$$L_{ad} = (\gamma_g \cdot g + \gamma_q \cdot q) \cdot l_k \cdot \frac{l_k}{2} \cdot \dot{\vartheta} - \gamma_g \cdot g \cdot l \cdot \frac{\xi_2 \cdot l}{2} \cdot \dot{\vartheta} \quad (2.14)$$

$$L_i = 0, \text{ da } M_R' \text{ beim Gelenk gleich null ist.}$$

Mit Gl. (2.5) folgt

$$\gamma_g \cdot g \cdot (l_k^2 - \xi_2 \cdot l^2) + \gamma_q \cdot q \cdot l_k^2 = 0 \quad (2.15)$$

und

$$\gamma_q = \gamma_g \cdot \frac{g}{q} \cdot \left( \xi_2 \cdot \frac{l^2}{l_k^2} - 1 \right) \quad (2.16)$$

Damit  $\gamma_q$  positiv ist, muss der Klammerausdruck positiv sein. Im weiteren sieht man aus Gl. (2.16), dass immer  $\gamma_{g,min}$  einzusetzen ist, um den minimalen Wert von  $\gamma_q$  zu erhalten.

Nach der Momentengrenzwertlinie unter Gebrauchslasten gemäss Bild 2.1 (b) bestimmt sich die erforderliche Länge der oberen Bewehrung zu

$$\xi \cdot l = \frac{g + q \cdot \frac{l_k^2}{l}}{g} \quad (2.17)$$

Gl. (2.17) eingesetzt in Gl. (2.16) ergibt mit  $\xi_2 = \xi$

$$\gamma_q = \gamma_g \quad (2.18)$$

Der Lastfaktor  $\gamma_q$  ist also immer gleich dem Lastfaktor  $\gamma_g$ . Der kleinste Wert von  $\gamma_q$  ist demnach immer 0.80, da angenommen wurde, dass  $\gamma_{g,min} = 0.80$  ist.

Zahlenbeispiel:

$$\xi = \xi_2 = 0.26, \quad \gamma_q = 0.80, \quad \gamma = 1.0 (!)$$

Daraus kann die Schlussfolgerung gezogen werden, dass ein Einfeldträger mit Kragarm (und analog wirkende Systeme), der durch Abdecken der um den Sicherheitsfaktor erhöhten Momentengrenzwertlinie unter Gebrauchslasten bemessen wurde, keine genügende Biegebruchsicherheit aufweist.

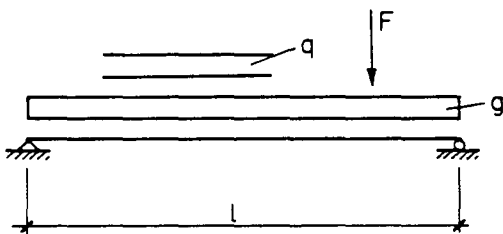
Um die gewünschte Sicherheit  $\gamma_q$  zu erhalten, kann die erforderliche Länge der oberen Bewehrung aus der Gl. (2.16) zu

$$\xi_2 \cdot l = \left(1 + \frac{\gamma_q \cdot q}{\gamma_{g,\min} \cdot g}\right) \cdot \frac{l_k^2}{l} \quad (2.19)$$

bestimmt werden.

### 2.3 Einfacher Balken

Auf den im Bild 2.4 dargestellten einfachen Balken sollen beliebig verteilte und konzentrierte Lasten wirken.



$q, F$ : Nutzlasten in ungünstigster Anordnung

Bild 2.4: Einfacher Balken

#### Statische Methode

Bei einem statisch bestimmten System gibt es pro Lastfall nur einen zulässigen Spannungszustand. Es genügt also, die Momentengrenzwertlinie unter den  $\gamma_S$ -fachen Lasten zu bestimmen und dafür zu sorgen, dass in keinem Schnitt die Fließbedingung

$$-\frac{M'_R}{\gamma_R} \leq \gamma_S \cdot M \leq \frac{M_R}{\gamma_R}$$

verletzt ist. Falls die Nutzlast und die ständige Last gleichgerichtet sind, ist die letztere mit  $\gamma_{g,\max}$  zu multiplizieren. Haben  $g$  und  $q$  verschiedene Vorzeichen, so muss zusätzlich eine Grenzwertlinie unter  $\gamma_{g,\min}$ -fachen ständigen Lasten bestimmt werden.

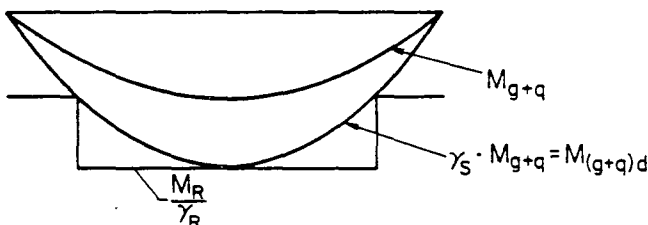
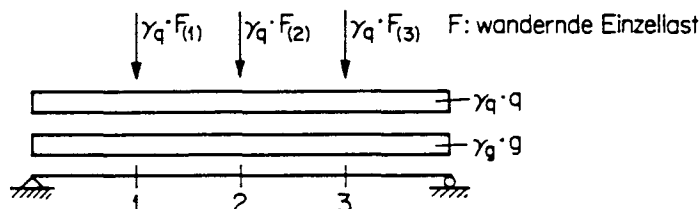


Bild 2.5: Statische Methode

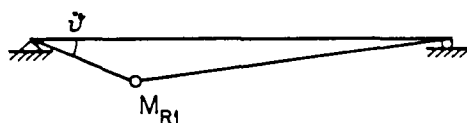


Als Beispiel ist im Bild 2.5 eine Momentendeckungslinie mit einer Bewehrungsabstufung dargestellt. Bei der Festlegung der effektiven Länge der Bewehrung sind selbstverständlich noch das zusätzliche Versatzmass für Einfluss Querkraft (siehe Kapitel 4) sowie die erforderliche Verankerungslänge zu berücksichtigen.

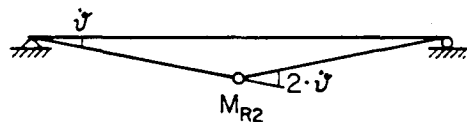
### Kinematische Methode



(a) Mechanismus 1



(b) Mechanismus 2



(c) Mechanismus 3

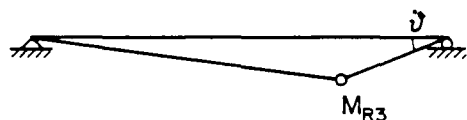


Bild 2.6: Kinematische Methode

Bei einem statisch bestimmten System ist ein Fließgelenk erforderlich, damit sich ein Mechanismus bildet. Für jeden Mechanismus muss nach dem PVL die Bedingung (Gl. (2.5))

$$L_{ad} + \frac{L_i}{\gamma_R} = 0$$

erfüllt sein, z.B.:

Mechanismus 2 (mit Belastung  $F$  im Punkt 2)

$$\gamma_S \cdot (g + q) \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \dot{\vartheta} + \gamma_S \cdot F \cdot \frac{1}{2} \cdot \dot{\vartheta} = \frac{2 \cdot M_R}{\gamma_R} \cdot \dot{\vartheta} \quad (2.20)$$

Daraus kann die vorhandene Bruchsicherheit zu

$$\gamma = \gamma_S \cdot \gamma_R = \frac{8 \cdot M_R}{(g + q) \cdot 1^2 + 2 \cdot F \cdot 1} \quad (2.21)$$

bestimmt werden. Bemisst man den Balken mit der kinematischen Methode, kann aus der Gl. (2.20) das erforderliche plastische Moment bestimmt werden:

$$M_R = \gamma \cdot (g + q) \cdot \frac{l^2}{8} + \gamma \cdot F \cdot \frac{l}{4} \quad (2.22)$$

### 2.4 Randfeld

Bei der Behandlung eines Randfeldes wird unterschieden, ob man in der Wahl des Stützensmomentes frei ist (einseitig eingespannter Balken, Anfangsfeld eines Durchlaufträgers), oder ob das Stützensmoment vorgegeben ist (Endfeld eines Durchlaufträgers).

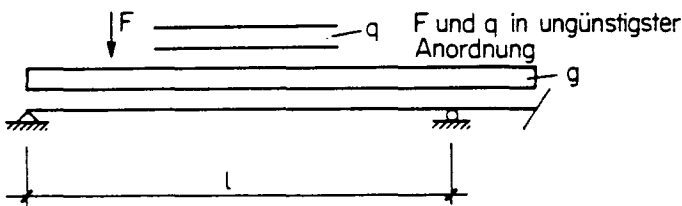


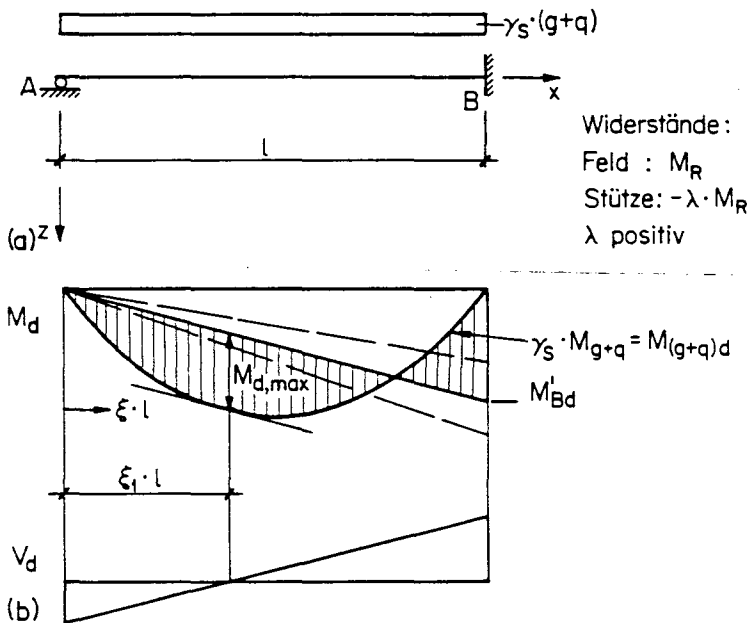
Bild 2.7: Randfeld

Im folgenden wird das Randfeld zuerst unabhängig vom Nachbarfeld betrachtet; in einem weiteren Schritt wird die Aufnahme des Stützensmomentes untersucht.

#### 2.4.1 Anfangsfeld

Ein Anfangsfeld kann analog einem einseitig eingespannten Balken behandelt werden. Im wesentlichen besteht die zu lösende Aufgabe darin, das Verhältnis Stützensmoment/Feldmoment vernünftig festzulegen bzw. zu berechnen.

#### Statische Methode



Da der einseitig eingespannte Balken einfach statisch unbestimmt ist, gibt es unendlich viele zulässige Spannungszustände. Unter den getroffenen Annahmen ist eine beliebige Momentenumlagerung zwischen eingespanntem Rand und Feld möglich.

Bild 2.8: Statische Methode

Im Bild 2.8 (b) ist die graphische Lösung dargestellt. Im Prinzip ist man in der Wahl der Schlusslinie frei. In keinem Schnitt dürfen die Fließbedingungen

$$M_d \leq \frac{M_R}{\gamma_R} \quad \text{bzw.} \quad M'_d \geq \frac{M'_R}{\gamma_R} \quad (2.23)$$

verletzt sein.

Im folgenden wird das Verhältnis Stützenmoment/Feldmoment analytisch so bestimmt, dass der Träger im Feld und über der Stütze voll ausgenutzt ist, also

$$M_{d,\max} = \frac{M_R}{\gamma_R} \quad \text{und} \quad M'_{Bd} = -\lambda \cdot \frac{M_R}{\gamma_R}$$

Auflagerreaktionen:

$$A_d = \gamma_S \cdot (g + q) \cdot \frac{l}{2} - \lambda \cdot \frac{M_R}{\gamma_R \cdot l} \quad (2.24)$$

$$B_d = \gamma_S \cdot (g + q) \cdot \frac{l}{2} + \lambda \cdot \frac{M_R}{\gamma_R \cdot l} \quad (2.25)$$

Momentenverlauf:

$$M_d(\xi) = \gamma_S \cdot (g + q) \cdot \frac{l^2}{2} \cdot \xi \cdot (1 - \xi) - \lambda \cdot \frac{M_R}{\gamma_R} \cdot \xi \quad (2.26)$$

Aus der Bedingung, dass die Querkraft gleich null ist, können mit dem gewählten Parameter  $\lambda$  der Wert  $\xi_1$  und das zugehörige maximale Feldmoment berechnet werden. Für das plastische Moment  $M_R$  erhält man damit die quadratische Gleichung

$$\left(\frac{M_R}{\gamma_R}\right)^2 - \frac{2}{\lambda^2} \cdot \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) \cdot \gamma_S \cdot (g + q) \cdot l^2 \cdot \frac{M_R}{\gamma_R} + \gamma_S^2 \cdot (g + q)^2 \cdot \frac{l^4}{4 \cdot \lambda^2} = 0 \quad (2.27)$$

Die in Frage kommende Lösung lautet:

$$\frac{M_R}{\gamma_R} = \gamma_S \cdot (g + q) \cdot l^2 \cdot \frac{1}{\lambda^2} \cdot \left(1 + \frac{\lambda}{2} - \sqrt{1 + \lambda}\right) \quad (2.28)$$

wobei für  $\sqrt{1 + \lambda}$  immer der positive Wert zu nehmen ist. Durch zweimalige Anwendung der Regel von De L'Hospital kann gezeigt werden, dass auch der Grenzübergang  $\lambda \rightarrow 0$  stimmt.

Setzt man

$$M_{od} = \gamma_S \cdot (g + q) \cdot \frac{l^2}{8} \quad (2.29)$$

lässt sich Gl. (2.28) wie folgt schreiben:

$$\frac{M_R}{\gamma_R \cdot M_{od}} = \frac{8}{\lambda^2} \cdot \left(1 + \frac{\lambda}{2} - \sqrt{1 + \lambda}\right) \quad (2.30)$$

Die Gleichungen (2.28) und (2.30) stellen in diesem Fall die vollständige Lösung dar. Es ist leicht einzusehen, dass sie sowohl die Bedingungen der statischen als auch der kinematischen Methode erfüllen.

Im Bild 2.9 ist die Gl. (2.30), die man als Bemessungsformel verwenden kann, dargestellt.

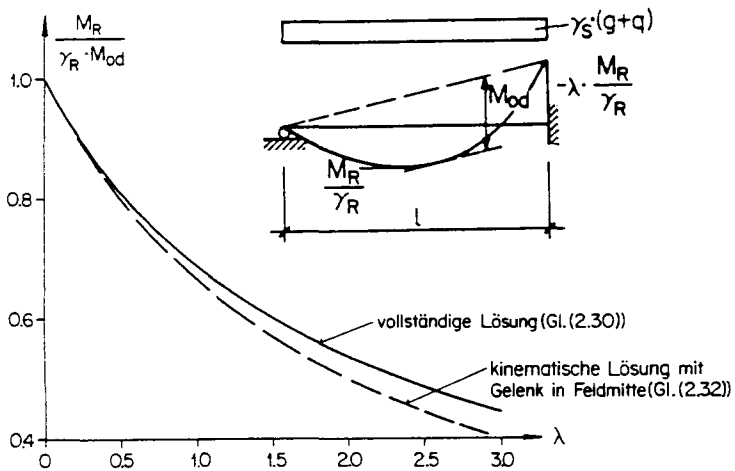
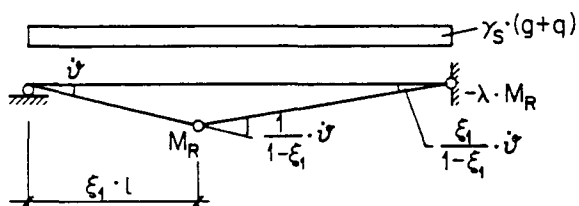


Bild 2.9: Bemessungsdiagramm Anfangsfeld

### Kinematische Methode

Bei einem einfach statisch unbestimmten System sind zwei Fließgelenke erforderlich, damit sich ein Mechanismus bildet. Die in Frage kommenden Mechanismen sind im Bild 2.10 dargestellt.

(a) Mechanismus 1



(b) Mechanismus 2

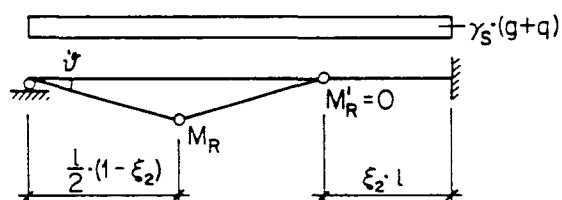


Bild 2.10: Kinematische Methode

### Mechanismus 1

Mit dem PVL gemäss Gl. (2.5) erhält man

$$\gamma_S \cdot (g + q) \cdot l \cdot \xi_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \dot{\vartheta} - \frac{M_R}{\gamma_R} \cdot \frac{1 + \lambda \cdot \xi_1}{1 - \xi_1} \cdot \dot{\vartheta} = 0 \quad (2.31)$$

Durch Annahme eines Fließgelenks in Feldmitte, d.h. in Gl. (2.31) wird  $\xi_1 = \frac{1}{2}$  gesetzt, gelangt man auf einfache Art zu einer Näherungslösung.

$$\frac{M_R}{\gamma_R} = \gamma_S \cdot (g + q) \cdot \frac{l^2}{8} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{2}} \quad (2.32)$$

Der Vergleich dieser Näherung mit der exakten Lösung gemäss Gl. (2.30) zeigt, dass diese einfache kinematische Lösung bei Verhältnissen Stützenmoment/Feldmoment von kleiner 2 sehr gute Bemessungswerte liefert.

$\lambda$	$M_R / (\gamma_R \cdot M_{od})$		Fehler %
	vollständige Lösung Gl. (2.30)	Näherung Gl. (2.32)	
0	1.0	1.0	0
0.5	0.808	0.800	1.0
1.0	0.686	0.667	2.7
2.0	0.536	0.500	6.7

Tabelle 2.1

### Mechanismus 2

Das PVL gemäss Gl. (2.5) angewendet, ergibt

$$\gamma_S \cdot (g + q) \cdot l \cdot (1 - \xi_2) \cdot \frac{1}{4} \cdot (1 - \xi_2) \cdot \dot{\vartheta} - \frac{2 \cdot M_R}{\gamma_R} \cdot \dot{\vartheta} = 0 \quad (2.33)$$

In der praktischen Anwendung ist es vorteilhaft, die minimale Länge der oberen Bewehrung so zu bestimmen, dass der Mechanismus 2 nicht massgebend wird. Aus Gl. (2.33) erhält man dafür die Bedingung

$$\xi_2 \cdot l \geq \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\lambda}{2}}}\right) \cdot l \quad (2.34)$$

#### 2.4.2 Endfeld

Ein Randfeld, bei dem das Stützenmoment  $M_C^l$  vorgegeben ist, wird als Endfeld bezeichnet. Die Aufgabe besteht nun darin, das entsprechende Feldmoment zu bestimmen.

### Statische Methode

Der Momentenverlauf kann gemäss Bild 2.11 wie folgt bestimmt werden:

$$M_d(\xi) = \gamma_S \cdot (g + q) \cdot \frac{\xi \cdot l^2}{2} \cdot (1 - \xi) - \frac{M'_C}{\gamma_R} \cdot (1 - \xi) \quad (2.35)$$

Dabei ist  $M'_C$  positiv einzusetzen. Mit der Bedingung  $V = 0$  findet man den Ort des maximalen Feldmomentes

$$\xi_1 = \frac{1}{2} + \frac{M'_C}{\gamma_R \cdot \gamma_S \cdot (g + q) \cdot l^2} \quad (2.36)$$

Das zugehörige Moment erhält man nach verschiedenen Umrechnungen

$$M_d(\xi = \xi_1) = \gamma_S \cdot (g + q) \cdot \frac{l^2}{8} - \frac{M'_C}{2 \cdot \gamma_R} \cdot \left(1 - \frac{M'_C}{\gamma_R \cdot \gamma_S \cdot (g + q) \cdot l^2}\right) \quad (2.37)$$

Verlangt man, dass dieses Moment gleich  $M_R/\gamma_R$  ist, und normiert man es wieder auf  $M_{od}$  gemäss Gl. (2.29), wird

$$\frac{M_R}{\gamma_R \cdot M_{od}} = 1 - \frac{M'_C}{2 \cdot \gamma_R \cdot M_{od}} \cdot \left(1 - \frac{M'_C}{8 \cdot \gamma_R \cdot M_{od}}\right) \quad (2.38)$$

Im Bild 2.11 ist Gl. (2.38) als Bemessungsdiagramm dargestellt.

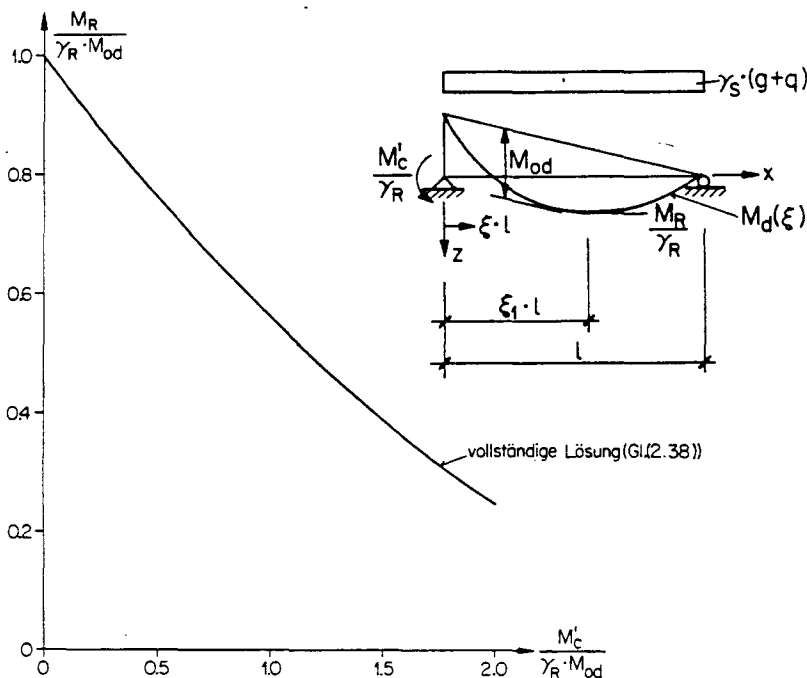


Bild 2.11: Bemessungsdiagramm Endfeld

Auf die Anwendung der kinematischen Methode wird für diesen Fall verzichtet. Mit der Bedingung, dass im Einspannquerschnitt und beim maximalen Feldmoment die plastischen Momente erreicht werden, sind sowohl die Bedingungen der statischen als auch diejenigen der kinematischen Methode erfüllt. Man hat somit wiederum die vollständige Lösung gefunden.

### 2.4.3 Zweifeldträger

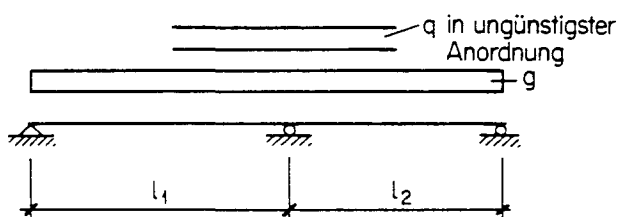


Bild 2.12: Zweifeldträger

Als Anwendungsbeispiel für Randfelder wird ein durch eine gleichmässig verteilte ständige Last sowie durch eine Nutzlast in ungünstigster Anordnung beanspruchter Zweifeldträger behandelt.

#### Statische Methode

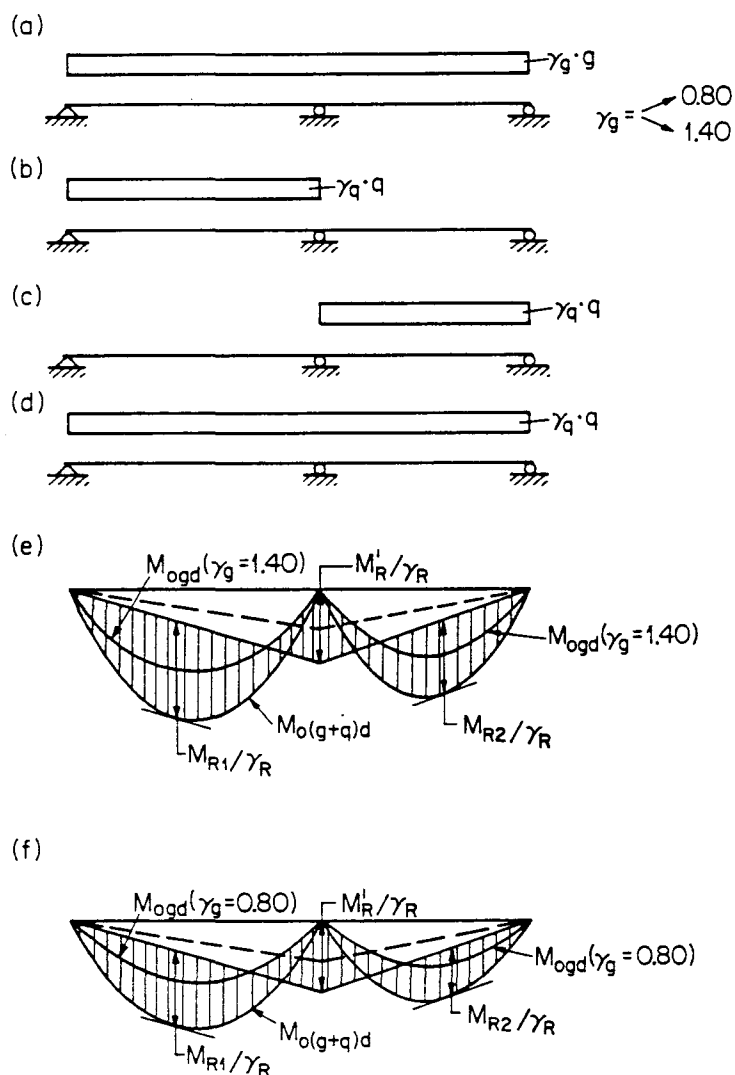


Bild 2.13: Statische Methode

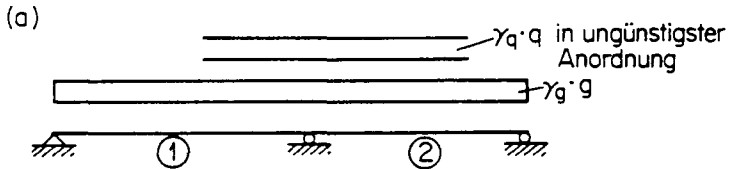
Die zu untersuchenden Lastfälle sind in den Bildern 2.13 (a-d) dargestellt. Es sind zwei  $M_{od}$ -Grenzwertlinien unter  $\gamma_S$ -fachen Lasten zu bestimmen, wobei für die ständige Last einmal mit  $\gamma_{g,min}$  und einmal mit  $\gamma_{g,max}$  zu rechnen ist. Für beide Grenzwertlinien dürfen in keinem Schnitt die Fließbedingungen verletzt sein. Die graphische Lösung ist in den Bildern 2.13 (e) und (f) dargestellt. Bei der Wahl der Schlusslinie geht man am besten vom Stützenmoment aus, wobei dieses für die einzelnen Lastfälle verschieden gewählt werden kann.

Für die analytische Bestimmung der grössten Momente kann man ein Feld, am besten dasjenige mit der grössten Spannweite, als Anfangsfeld betrachten. Mit einem gewählten Verhältnis Stützenmoment/Feldmoment lassen sich die erforderlichen Widerstände gemäss Gl. (2.30) oder anhand des Bildes 2.9 bestimmen. Das Feld mit der kürzeren Spannweite wird nun als Endfeld aufgefasst. Der erforderliche Widerstand kann dann mit Hilfe der Gl. (2.38)

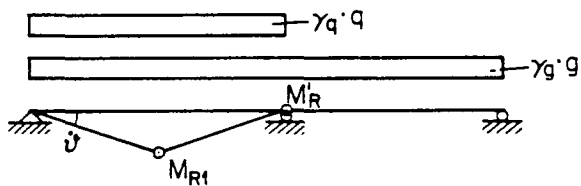
berechnet oder aus dem Bild 2.11 herausgelesen werden. Dabei ist auf dem betrachteten Feld jeweils die Vollast aufzubringen; für die ständige Last ist immer  $\gamma_{g,max}$  massgebend. In einem weiteren Schritt sind die jeweiligen M-Nullpunkte zu bestimmen. Hier kann nun  $\gamma_{g,max}$  oder  $\gamma_{g,min}$  massgebend sein. Diese Aufgabe wird anschliessend mit Hilfe der kinematischen Methode gelöst.

### Kinematische Methode

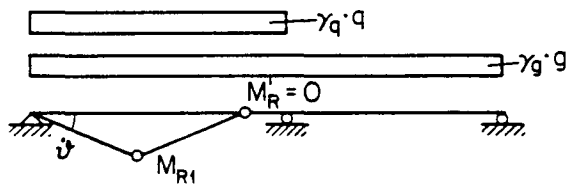
Die zu untersuchenden Mechanismen sind im Bild 2.14 dargestellt.



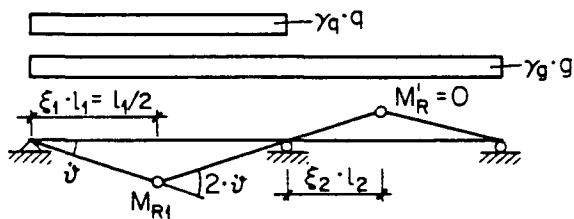
(b) Mechanismus 1



(c) Mechanismus 2



(d) Mechanismus 3



analog Mechanismen 1,2,3 für Feld ②

Bild 2.14: Kinematische Methode

### Mechanismen 1 und 2

Diese beiden Mechanismen können analog zu den Mechanismen 1 und 2 des Anfangsfeldes behandelt werden (siehe Gleichungen (2.32) und (2.34)), wobei diese Mechanismen für beide Felder zu untersuchen sind.



Mechanismus\_3

Die Leistungen der äusseren und der inneren Kräfte betragen

$$L_{ad} = L_{agd} + L_{aqd} = \gamma_g \cdot g \cdot \left( \frac{l_1^2}{4} - \frac{\xi_2 \cdot l_2^2}{2} \right) \cdot \dot{\varphi} + \gamma_q \cdot q \cdot \frac{l_1^2}{4} \cdot \dot{\varphi} \quad (2.39)$$

$$L_i = -2 \cdot M_{R1} \cdot \dot{\varphi} \quad (2.40)$$

Durch Einsetzen in Gl. (2.5) und Auflösen nach  $M_{R1}$  erhält man

$$\frac{M_{R1}}{\gamma_R} = \gamma_g \cdot g \cdot \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{l_1^2}{2} - \xi_2 \cdot l_2^2 \right) + \gamma_q \cdot q \cdot \frac{l_1^2}{8} \quad (2.41)$$

Verlangt man wiederum, dass der Mechanismus 3 nicht massgebend wird, erhält man eine Bedingung für die Lage des Gelenks bzw. der erforderlichen Länge der oberen Bewehrung im nur durch  $g$  belasteten Feld. Ersetzt man  $M_{R1}$  in der obigen Gleichung durch  $M_R$  aus Gl. (2.32), folgt

$$\gamma_g \cdot g \cdot \left( 1 - 2 \cdot \frac{\xi_2 \cdot l_2^2}{l_1^2} \right) + \gamma_q \cdot q = \gamma_S \cdot (g + q) \cdot \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{2}} \quad (2.42)$$

Auflösen nach  $\xi_2$  ergibt

$$\xi_2 = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{l_1}{l_2} \right)^2 \cdot \left[ 1 + \frac{\gamma_S}{\gamma_g} \cdot \frac{1}{2 + \lambda} \cdot \left( \lambda \cdot \frac{q}{g} - 2 \right) \right] \quad (2.43)$$

Damit ist die erforderliche obere Bewehrungslänge bestimmt. Die Frage, ob  $\gamma_{g,max}$  oder  $\gamma_{g,min}$  massgebend ist, kann man aus dem mit  $\gamma_g$  behafteten Term in Gl. (2.43) beantworten.

$$\begin{aligned} \left( \lambda \cdot \frac{q}{g} - 2 \right) < 0: & \quad \gamma_{g,max} \text{ massgebend} \\ \left( \lambda \cdot \frac{q}{g} - 2 \right) > 0: & \quad \gamma_{g,min} \text{ massgebend} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Der Wert  $\xi_2$ , mit dem die erforderliche Länge der oberen Bewehrung berechnet werden kann, ist für verschiedene Verhältnisse Stützenmoment/Feldmoment in Abhängigkeit des Spannweitenverhältnisses im Bild 2.15 dargestellt. Es ist jeweils angegeben, ob  $\gamma_{g,min}$  oder  $\gamma_{g,max}$  massgebend ist.

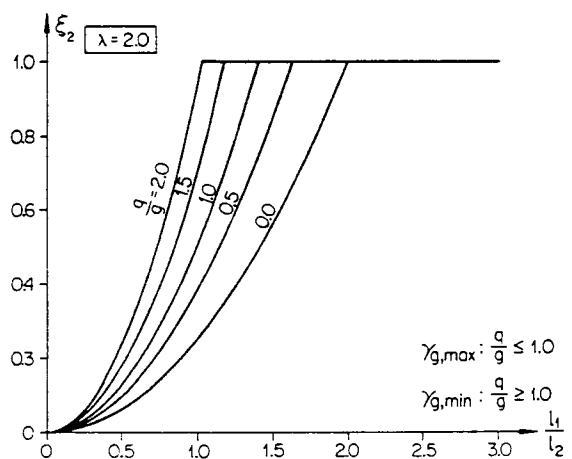
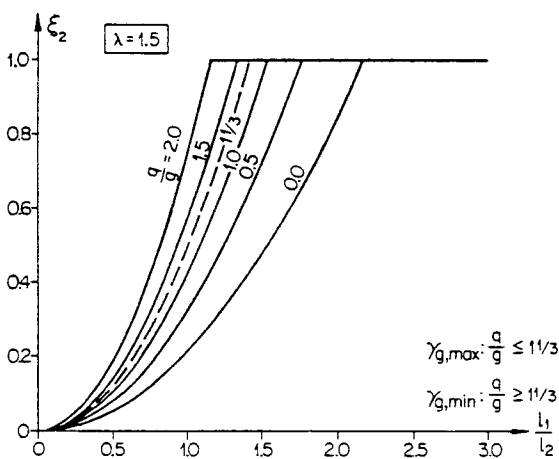
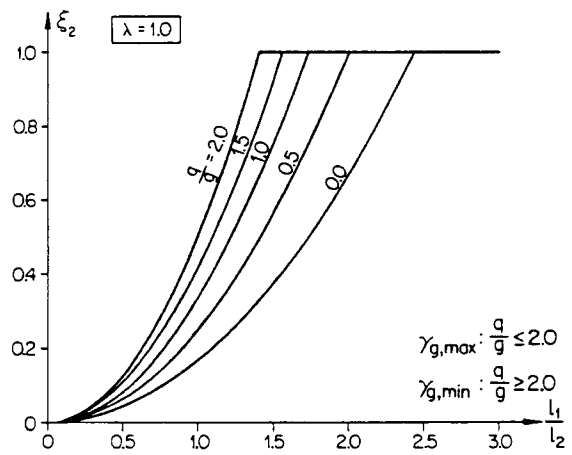
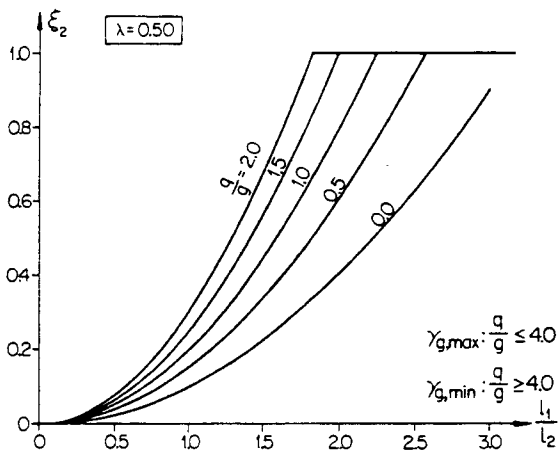
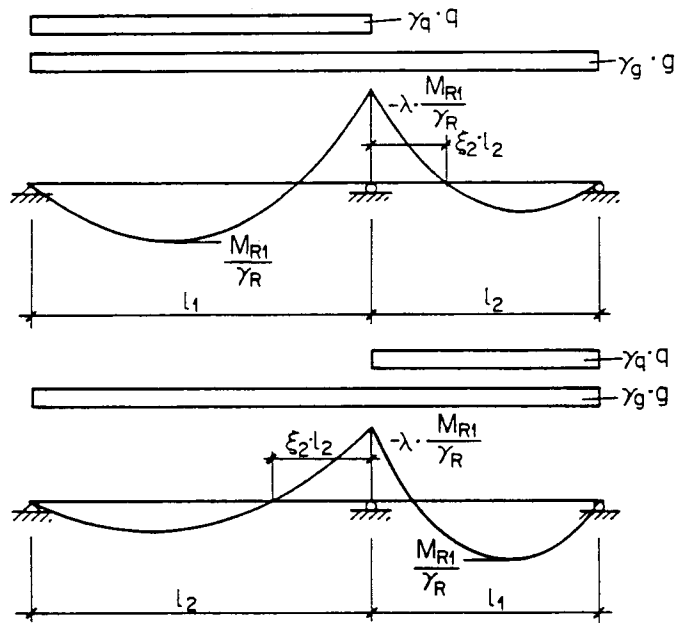


Bild 2.15: Länge der oberen Bewehrung

### Praktisches Vorgehen bei Zweifeldträgern

1. Verhältnis Stützenmoment/Feldmoment wählen (Feld mit grösserer Spannweite).
2. Stützenmoment und Feldmomente berechnen.
3. Erforderliche Länge der oberen Bewehrung bestimmen:
  - . Durch Ausschliessen der Mechanismen 2 und 3 gemäss Bild 2.14

Versatzmass aus Einfluss Querkraft sowie Verankerungslängen zusätzlich berücksichtigen.

## 2.5 Innenfeld

Die analytische Behandlung eines Innenfeldes und vor allem das Ableiten allgemein gültiger Beziehungen ist umfangreich. Im folgenden wird zuerst der beidseitig eingespannte Balken und dann dessen Einordnen in den Durchlaufträger behandelt.

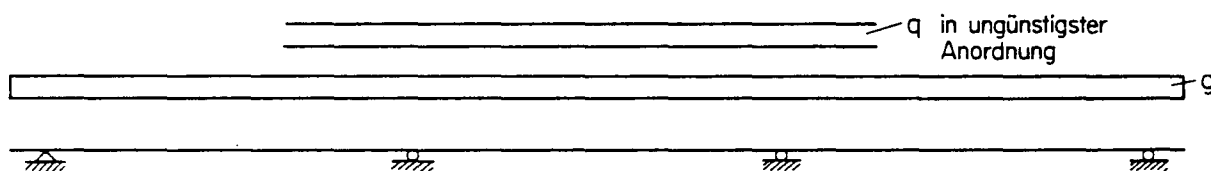


Bild 2.16: Innenfeld

### 2.5.1 Beidseitig eingespannter Balken

Die zu lösende Aufgabe besteht darin, die mathematischen Beziehungen zwischen den beiden Stützenmomenten und dem maximalen Feldmoment unter Vollast herzuleiten. Im allgemeinen ist davon auszugehen, dass die beiden Stützenmomente nicht gleich gross sind. Im weiteren ist abzuklären, wie sich der Träger unter minimalen Lasten verhält.

### Statische Methode

#### Vollast

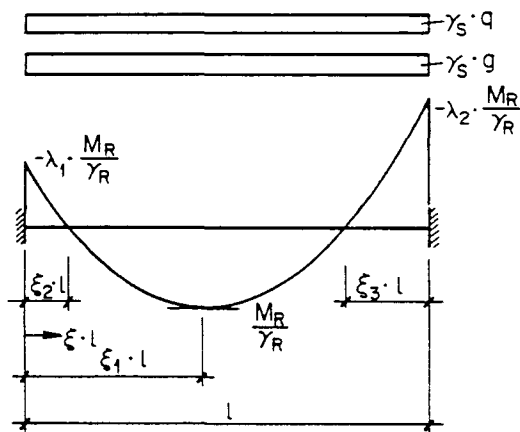
Gemäss Bild 2.17 (a) kann der Momentenverlauf wie folgt angegeben werden:

$$M_d(\xi) = \gamma_S \cdot (g + q) \cdot \frac{l^2}{2} \cdot \xi \cdot (1 - \xi) + \frac{M_R}{\gamma_R} \cdot [\xi \cdot (\lambda_1 - \lambda_2) - \lambda_1] \quad (2.45)$$

Mit der Bedingung, dass die Querkraft gleich null ist, findet man den Ort des grössten Feldmomentes.

$$\xi_1 = \frac{1}{2} + \frac{M_R \cdot (\lambda_1 - \lambda_2)}{\gamma_R \cdot \gamma_S \cdot (g + q) \cdot l^2} \quad (2.46)$$

(a) Vollast



(b) Ständige Last

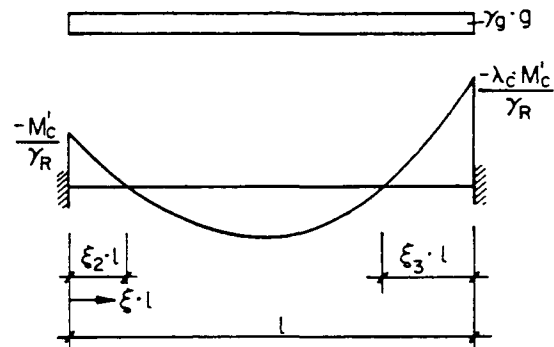


Bild 2.17: Statische Methode

Nimmt man an, dass sowohl bei den Einspannstellen als auch am Ort des grössten Feldmomentes das plastische Moment erreicht ist, erhält man durch Einsetzen der Gl. (2.46) in die Gl. (2.45) mit

$$M_{od} = \gamma_S \cdot (g + q) \cdot \frac{l^2}{8}$$

nach einigem Umformen

$$\frac{M_R}{\gamma_R \cdot M_{od}} = 8 \cdot \left[ \frac{\frac{1}{2} \cdot (\lambda_1 + \lambda_2) + 1 - \sqrt{\left[\frac{1}{2} \cdot (\lambda_1 + \lambda_2) + 1\right]^2 - \frac{1}{4} \cdot (\lambda_1 - \lambda_2)^2}}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \right] \quad (2.47)$$

Die Lagen der Momentennullpunkte können berechnet werden zu

$$\xi_2 = \frac{1}{2} + \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot M_R}{8 \cdot \gamma_R \cdot M_{od}} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot M_R}{8 \cdot \gamma_R \cdot M_{od}} + \left[ \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot M_R}{8 \cdot \gamma_R \cdot M_{od}} \right]^2} \quad (2.48)$$

$$\xi_3 = \frac{1}{2} - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot M_R}{8 \cdot \gamma_R \cdot M_{od}} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot M_R}{8 \cdot \gamma_R \cdot M_{od}} + \left[ \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot M_R}{8 \cdot \gamma_R \cdot M_{od}} \right]^2} \quad (2.49)$$

Die Gl. (2.47) kann als Bemessungsgleichung verwendet werden; sie ist im Bild 2.18 dargestellt. Im Bild 2.19 sind die Gleichungen (2.48) und (2.49) graphisch ausgewertet. Die Gl. (2.47) stellt wiederum die vollständige Lösung dar.

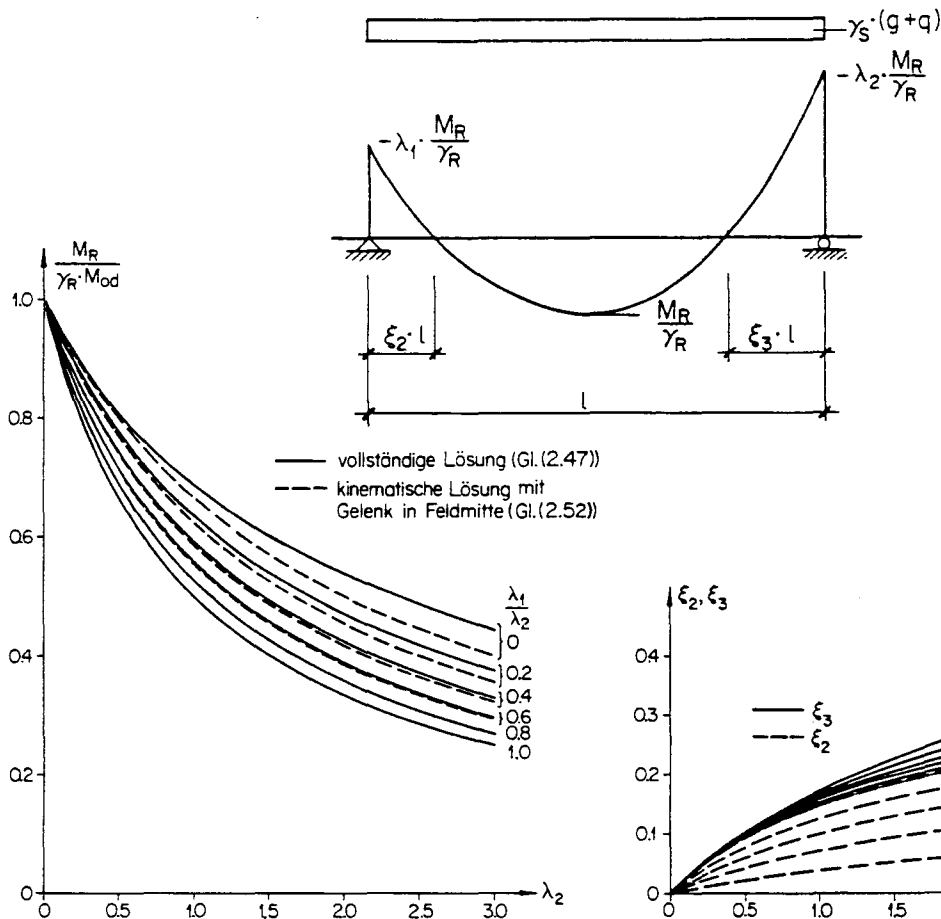


Bild 2.18: Bemessungsdiagramm Innenfeld

Bild 2.19: Momentennullpunkte unter Vollast

### Ständige Last

Wird nur die ständige Last auf den Träger aufgebracht, ergeben sich aus den entsprechenden Momentennullpunkten die erforderlichen Längen der oberen Bewehrung.

Ausgehend von den als bekannt vorausgesetzten Stützenmomenten  $M'_c$  und  $\lambda_c \cdot M'_c$  gemäß Bild 2.17 (b) findet man nach längerer Rechnung

$$\xi_2 = \frac{1}{2} + \frac{(1-\lambda_c) \cdot M'_c}{8 \cdot \gamma_R \cdot M_{ogd}} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{(1+\lambda_c) \cdot M'_c}{8 \cdot \gamma_R \cdot M_{ogd}} + \frac{(\frac{1}{2} - \lambda_c + \frac{\lambda_c^2}{2}) \cdot M_c'^2}{32 \cdot \gamma_R^2 \cdot M_{ogd}^2}} \quad (2.50)$$

$$\xi_3 = \frac{1}{2} - \frac{(1-\lambda_c) \cdot M'_c}{8 \cdot \gamma_R \cdot M_{ogd}} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{(1+\lambda_c) \cdot M'_c}{8 \cdot \gamma_R \cdot M_{ogd}} + \frac{(\frac{1}{2} - \lambda_c + \frac{\lambda_c^2}{2}) \cdot M_c'^2}{32 \cdot \gamma_R^2 \cdot M_{ogd}^2}} \quad (2.51)$$

wobei

$$M_{ogd} = \gamma_g \cdot g \cdot \frac{l^2}{8}$$

beträgt. Die graphische Auswertung der Gleichungen (2.50) und (2.51) ist im Bild 2.20 wiedergegeben.

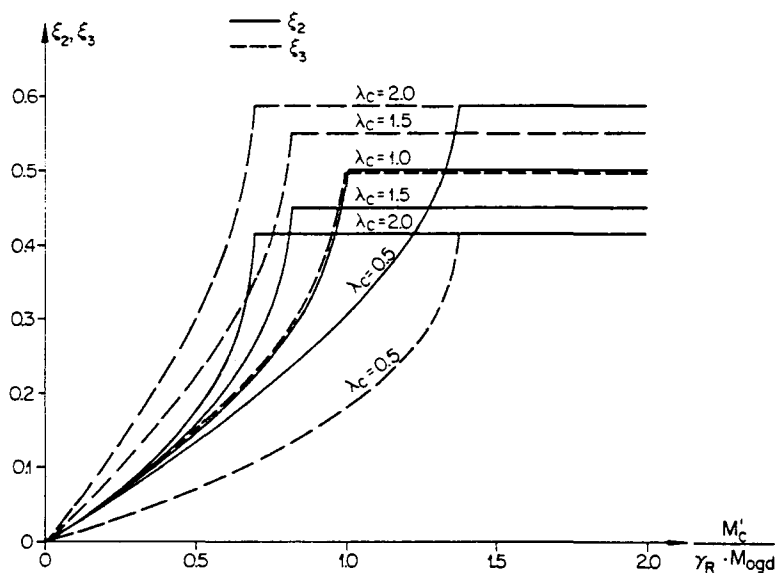


Bild 2.20: Längen der oberen Bewehrung

### Kinematische Methode

Mit der kinematischen Methode können die Bemessung und der Sicherheitsnachweis auf einfache Art durchgeführt werden.

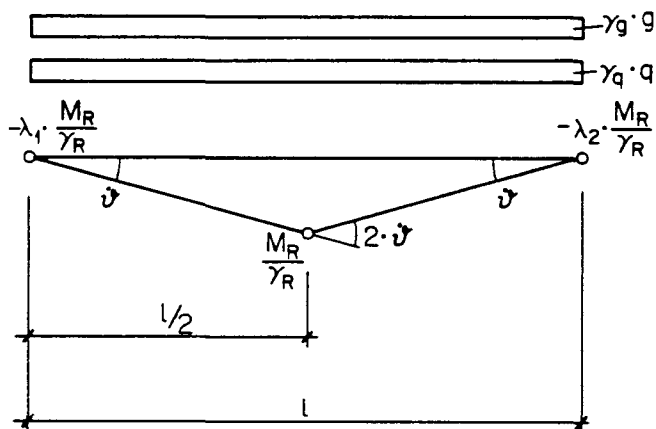


Bild 2.21: Kinematische Methode

Mit dem im Bild 2.21 dargestellten Mechanismus, bei dem ein Gelenk in Feldmitte angesetzt wurde, findet man durch Anwendung des PVL die Beziehung

$$(\gamma_g \cdot g + \gamma_q \cdot q) \cdot \frac{l^2}{4} \cdot \dot{\vartheta} = \frac{M_R}{\gamma_R} \cdot (2 + \lambda_1 + \lambda_2) \cdot \dot{\vartheta}$$

und daraus die zur Gl. (2.47) der statischen Lösung analoge kinematische Lösung

$$\frac{M_R}{\gamma_R \cdot M_{od}} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_2}{2}} \quad (2.52)$$

Der Vergleich der statischen Lösung (in diesem Fall wiederum eine vollständige) und der

kinematischen Lösung, wie er im Bild 2.18 dargestellt ist, zeigt für die in der Praxis auftretenden Fälle eine sehr gute Übereinstimmung.

### 2.5.2 Allgemeines Innenfeld eines Durchlaufträgers

Die beiden Stützenmomente und das maximale Feldmoment können auch bei einem beliebig langen Innenfeld eines Durchlaufträgers mit den für den beidseitig eingespannten Balken abgeleiteten Beziehungen bestimmt werden. Abzuklären bleibt jedoch die Frage, ob eventuell  $\gamma_{g,\min}$  für die Längen der oberen Bewehrung massgebend werden könnte.

#### Statische Methode

In den Bildern 2.22 (a-e) sind die zu untersuchenden Lastfälle dargestellt. Analog zum Zweifeldträger sind wiederum zwei  $M_{od}$ -Grenzwertlinien unter  $\gamma_S$ -fachen Nutzlasten und  $\gamma_{g,\min}$ - bzw.  $\gamma_{g,\max}$ -fachen ständigen Lasten zu bestimmen. Die Stützenmomente können im wesentlichen

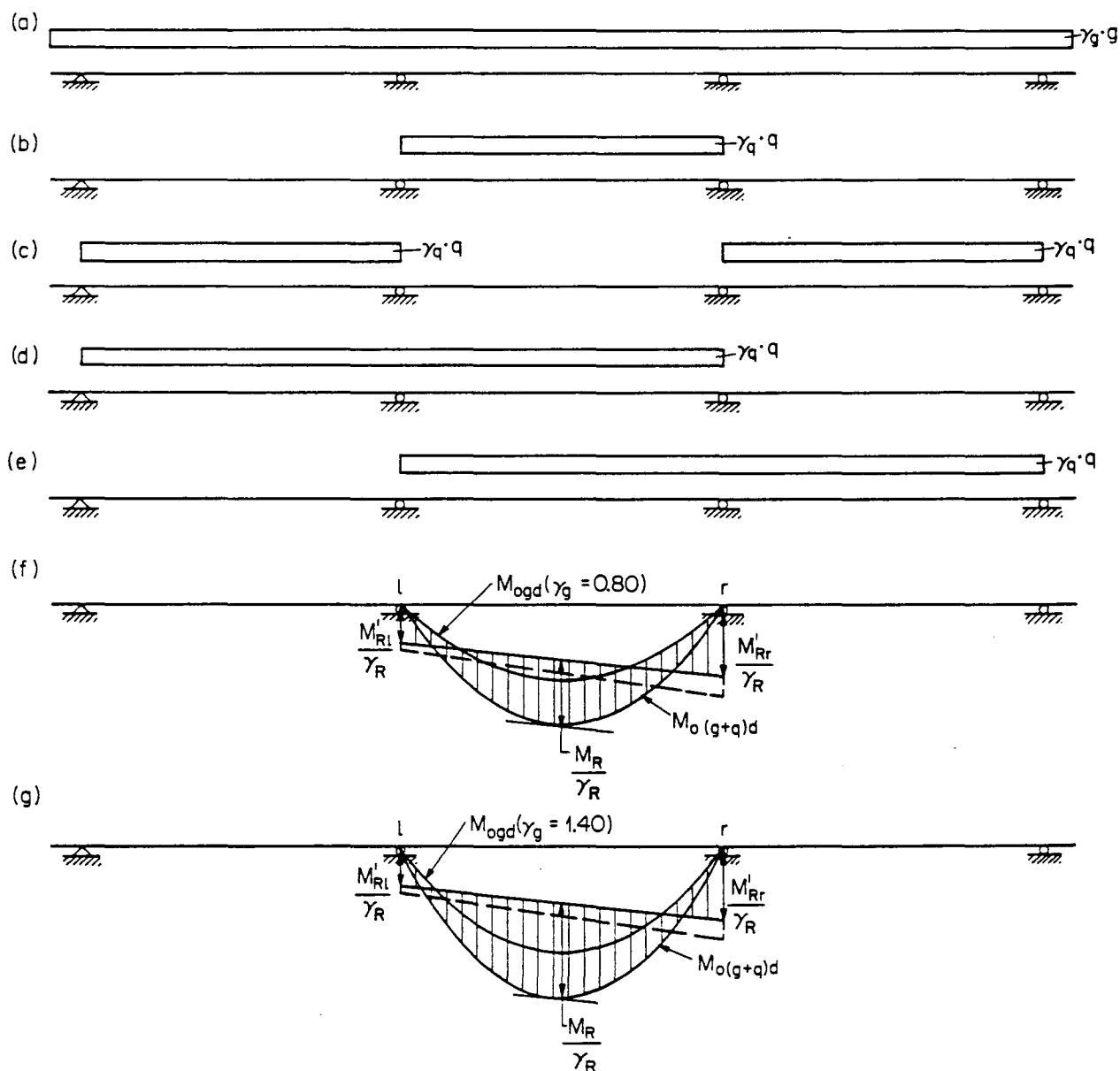


Bild 2.22: Statische Methode

frei gewählt werden. Die Bemessung ist dann so durchzuführen, dass die Fließbedingungen in keinem Schnitt verletzt sind. Eine graphische Lösung ist in den Bildern 2.22 (f) und (g) dargestellt.

Kinematische Methode

Kinematisch kann ein Innenfeld bezüglich der Stützenmomente und maximalen Feldmomente einfach mit dem im Bild 2.23 dargestellten Mechanismus 1 bemessen werden. Die erforderlichen Längen der oberen Bewehrung sind mit den Mechanismen 2, 3 und 4 zu bestimmen. Ob jeweils  $\gamma_{g,min}$  oder  $\gamma_{g,max}$  massgebend wird, kann wiederum über das Vorzeichen der Leistung der ständigen Lasten entschieden werden.

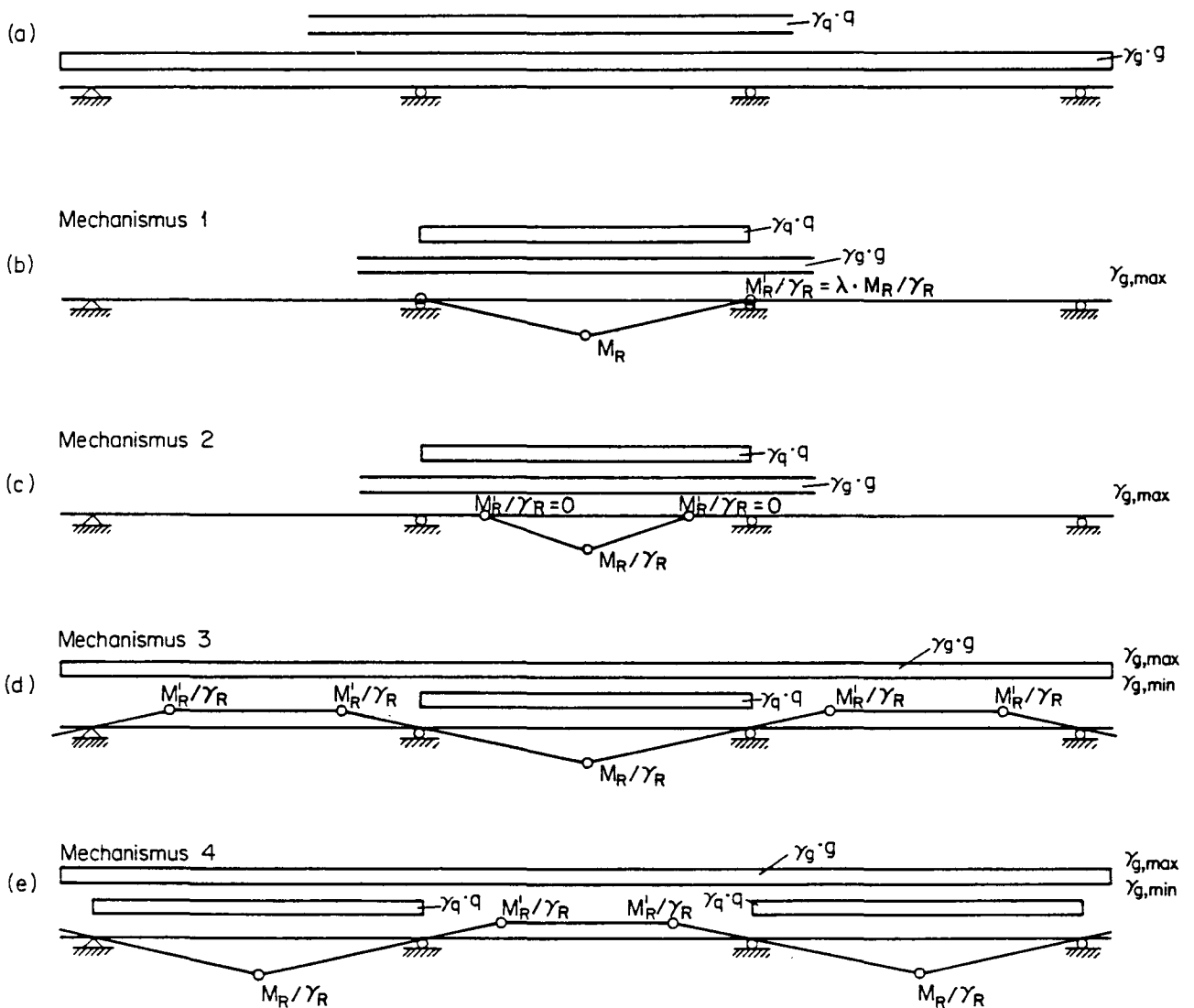


Bild 2.23: Kinematische Methode



Für den Spezialfall "unendlich langer Durchlaufträger mit gleichen Spannweiten" werden die minimalen oberen Bewehrungslängen hergeleitet. Im Bild 2.24 ist der massgebende Mechanismus angegeben.

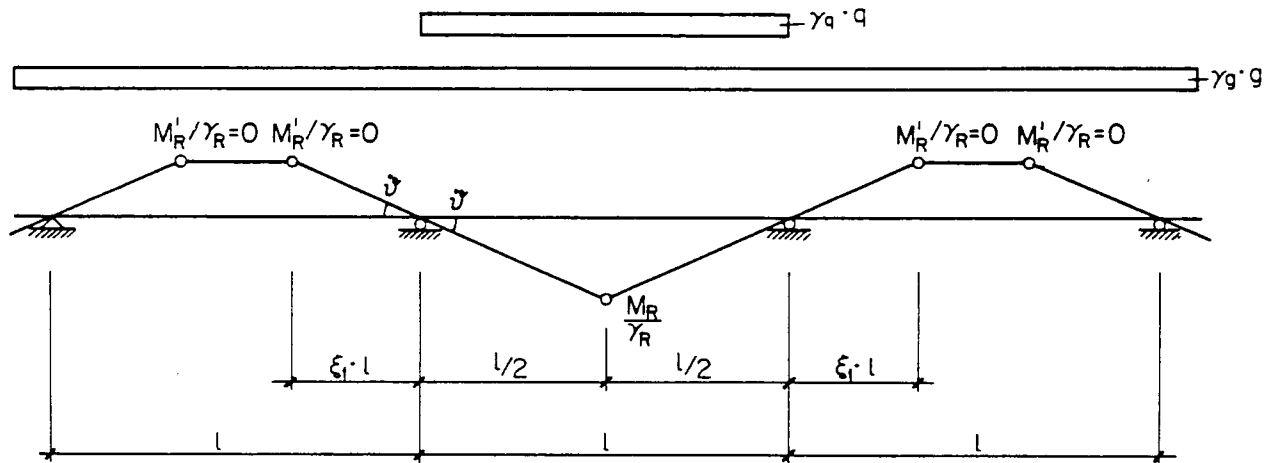


Bild 2.24: Massgebender Mechanismus beim Spezialfall "unendlich langer Durchlaufträger mit gleichen Spannweiten"

Das PVL auf diesen Mechanismus angewendet gibt gemäss Gl. (2.5):

$$\gamma_g \cdot g \cdot \frac{l^2}{8} \cdot (1 + 4 \cdot \xi_1^2 - 4 \cdot \xi_1) + \gamma_q \cdot q \cdot \frac{l^2}{8} = \frac{M_R}{\gamma_R} \quad (2.53)$$

Da in diesem Spezialfall der Wert  $\xi_1$  im Maximum die Grösse 0.5 erreichen kann, ist der Term  $(1 + 4 \cdot \xi_1^2 - 4 \cdot \xi_1)$  in der Gl. (2.53) immer gleich oder grösser null. Darum ist immer  $\gamma_{g,max}$  massgebend.

Wird in Gl. (2.52)  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  gesetzt (symmetrisch), vereinfacht sich diese auf

$$\frac{M_R}{\gamma_R \cdot M_{od}} = \frac{1}{1 + \lambda} \quad (2.54)$$

Gl. (2.54) in Gl. (2.53) eingesetzt und nach  $\xi_1$  aufgelöst gibt

$$\xi_1 = \frac{1}{2} \cdot \left[ 1 - \sqrt{\frac{1}{1 + \lambda} \cdot \left( 1 - \lambda \cdot \frac{q}{g} \right)} \right] \quad (2.55)$$

und damit die erforderliche minimale Länge der oberen Bewehrung. Im Bild 2.25 ist  $\xi_1$  in Abhängigkeit von  $q/g$  und dem Wert  $\lambda$  als Parameter aufgetragen.

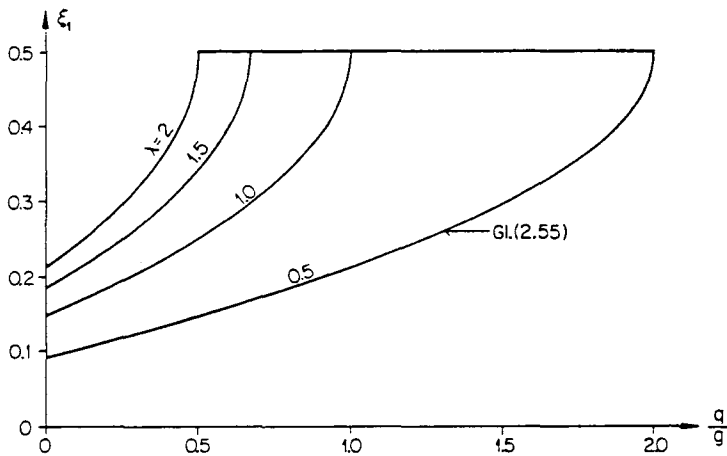


Bild 2.25: Länge der oberen Bewehrung

### Praktisches Vorgehen bei Durchlaufträgern

1. Bestimmen der erforderlichen plastischen Stützenmomente und plastischen maximalen Feldmomente.
  - 1.1 Anfangsfeld:
    - . Verhältnis Stützenmoment/Feldmoment wählen
    - . Feld- und Stützenmoment berechnen
  - 1.2 Innenfeld:
    - . Verhältnisse zwischen den beiden Stützenmomenten und Feldmoment wählen
    - . Feldmoment und unbekanntes Stützenmoment berechnen
 Weitere Innenfelder analog
  - 1.3 Endfeld:
    - . Mit bekanntem Stützenmoment Feldmoment berechnen
2. Bestimmen der erforderlichen oberen Bewehrungslängen durch Ausschliessen von Mechanismen mit negativen plastischen Gelenken im Feld.
  - 2.1 Anfangs- und Endfeld:
    - . Mechanismen in der Form der im Bild 2.14 dargestellten Mechanismen 2 und 3 ausschliessen
  - 2.2 Innenfeld:
    - . Mechanismen 2, 3 und 4 gemäss Bild 2.23 ausschliessen

## 2.6 Zwängungen

Zwängungen können durch Temperatureinwirkungen, Schwinden, Kriechen, Vorspannung, Stützensenkungen usw. verursacht werden. Sie bewirken einen Eigenspannungszustand, der - je nach Art der Zwangsbeanspruchung - über den Querschnitt oder über einen Teil des Tragwerks oder über das ganze Tragwerk einen Gleichgewichtszustand darstellt. Unter der Annahme, dass eine genügende Verformungsfähigkeit vorhanden ist, hat ein Eigenspannungszustand keinen Einfluss auf die Traglast und kann unberücksichtigt bleiben. Falls die erforderliche Verformungsfähigkeit nicht gewährleistet ist, muss eine Zwängung auch in der Berechnung der Tragfähigkeit mitberücksichtigt werden. Selbstverständlich ist eine Zwängung und der daraus resultierende Eigenspannungszustand im Gebrauchszustand zu berücksichtigen, nämlich dort, wo Spannungen bzw. entsprechende Dehnungen und Verformungen von Interesse sind.

Am einfachen Beispiel des einseitig eingespannten Trägers wird gezeigt, warum eine Zwängung keinen Einfluss auf die Traglast hat. Der im Bild 2.26 dargestellte einseitig eingespannte Balken sei zusätzlich zur vertikalen Last  $g + q$  durch ein Zwängungsmoment  $M_Z$  in B angreifend belastet. Das Zwängungsmoment kann zum Beispiel von einer Stützensenkung in B oder von einer Vorspannung des Trägers herrühren. Die von  $M_Z$  resultierenden Reaktionen und Momente sind im Bild 2.26 angegeben.

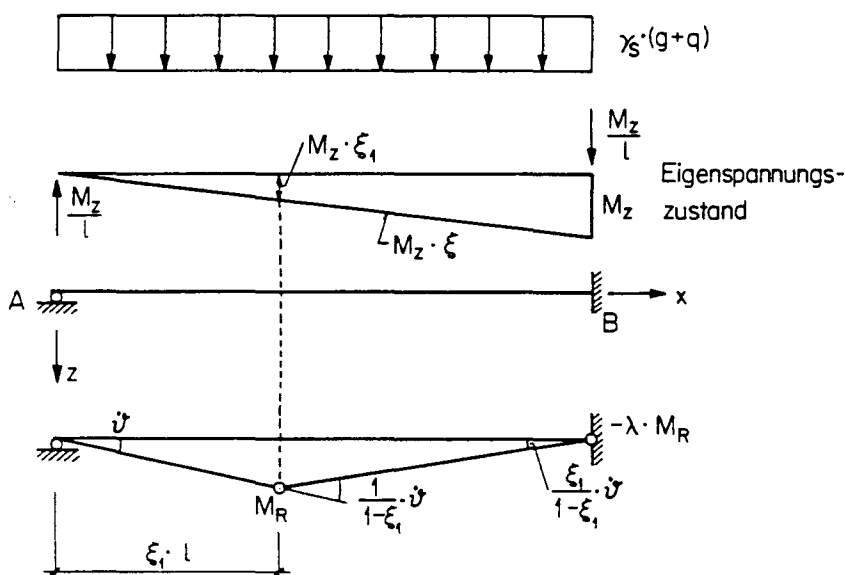


Bild 2.26: Einfluss eines Zwängungsmomentes

Berechnet man die Traglast mit der kinematischen Methode, so ergibt das PVL gemäss Gl. (2.5) auf den angegebenen Mechanismus angewendet

$$\gamma_S \cdot (g+q) \cdot \xi_1 \cdot \frac{l^2}{2} \cdot \dot{\delta} - M_Z \cdot \xi_1 \cdot \frac{1}{1-\xi_1} \cdot \dot{\delta} + M_Z \cdot \frac{\xi_1}{1-\xi_1} \cdot \dot{\delta} - \frac{M_R}{\gamma_R} \cdot \frac{1+\lambda \cdot \xi_1}{1-\xi_1} \cdot \dot{\delta} = 0 \quad (2.56)$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{L_i(M_Z) = 0}$$

Aus der Gl. (2.56) ist sofort ersichtlich, dass bei jeder beliebigen und somit auch bei der die Traglast bestimmenden Lage des positiven plastischen Gelenks die Leistung der von der Zwängung herrührenden Schnittgrößen null ist. Die Traglast wird also durch  $M_z$  nicht beeinflusst.

Die gleiche Aussage kann auch direkt aus dem PVL gewonnen werden. Ein Eigenspannungszustand ist im Tragwerk, wie vorher erwähnt, infolge nicht vorhandener äusserer Lasten immer ein Gleichgewichtszustand. Darum gilt  $L_a = 0$  für beliebige kinematisch zulässige Bewegungszustände. Wegen  $L_a + L_i = 0$  muss auch  $L_i = 0$  sein, d.h. die Arbeit der inneren Kräfte ändert sich durch einen Eigenspannungszustand nicht.

#### LITERATUR

- [2.1] Schweizerischer Ingenieur- und Architekten-Verein (SIA): "Norm für die Berechnung, Konstruktion und Ausführung von Bauwerken aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton", Norm SIA 162, Zürich, 1968. (
- [2.2] Schweizerischer Ingenieur- und Architekten-Verein (SIA): "Bruchwiderstand und Bemessung von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken", Richtlinie 34 zur Norm SIA 162, Zürich, 1976.
- [2.3] Euro-Internationales Beton-Komitee, Internationaler Spannbeton-Verband: "CEB/FIP Mustervorschrift für Tragwerke aus Stahlbeton und Spannbeton", 3. Ausgabe, 1978. (

### 3.1 Problemstellung

Vollständige Lösungen im Rahmen der Theorie starr-ideal plastischer Körper enthalten Aussagen über die Traglast, den Spannungszustand und die Verformungsinkremente (Verschiebungs- und Verzerrungsgeschwindigkeiten) im Kollapszustand. Die statische und die kinematische Methode erlauben die Eingrenzung der Traglast.

Die Erfahrung zeigt, dass starr-ideal plastische Verfahren eine brauchbare Grundlage für die Beurteilung der Sicherheit von Bauteilen und Tragwerken aus Stahlbeton und Spannbeton liefern. Wird bei der Bemessung ein genügender Sicherheitsabstand zur Traglast eingehalten, so ergibt sich im allgemeinen auch ein befriedigendes Verhalten im Gebrauchszustand.

Zur Ermittlung der Anwendungsgrenzen starr-ideal plastischer Verfahren sowie zur detaillierten Untersuchung der Verformungen im Gebrauchszustand sind weiterführende Erwägungen notwendig. Elastisch-plastische Verfahren sind heranzuziehen, mit denen Aussagen über die totalen Verformungen gemacht werden können. Linear elastisch-ideal plastische Berechnungen sind oft bereits ausreichend. Im allgemeinen sind aber nichtlinear elastisch-plastische Modelle mit Verfestigung zu verwenden, um der Nichtlinearität des Materialverhaltens angemessen Rechnung zu tragen. Ist zudem die Zeitabhängigkeit des Materialverhaltens von Bedeutung, so müssen visko-elastische und visko-plastische Modelle benützt werden.

Elastisch-plastische Untersuchungen sind in jedem Fall aufwendig. Für Stahlbeton und Spannbeton ergeben sich zusätzliche Erschwerungen wegen der beschränkten Verformungsfähigkeit des Betons und dem Zusammenwirken von Bewehrung und Beton über Verbund.

Ein Grundproblem aller elastisch-plastischer Untersuchungen, das allzu oft übersehen wird, besteht darin, dass die wirkliche Belastungs- und Zwängungsgeschichte meistens nicht hinreichend bekannt ist. Ueblicherweise wird stillschweigend angenommen, dass der initiale (lastfreie) Zustand gänzlich frei von Spannungen und Verformungen ist. In Wirklichkeit existieren in jedem Fall mehr oder minder beträchtliche initiale Spannungen (Eigenspannungen) und Verformungen infolge vorangegangenen Belastungen und/oder Zwängungen. MELAN bemerkte 1938 [3.1] in diesem Zusammenhang "..., dass die Aufgabe, die Spannungen in einem elastisch-plastischen Körper zu bestimmen, die Kenntnis der in dem betreffenden Augenblick bereits vorhandenen bleibenden Dehnungen voraussetzt. Nachdem diese aber von den vorangegangenen Belastungszuständen abhängen, ist es notwendig, die Vorgeschichte der Belastung zu kennen. In der Praxis liegen nun in den weitaus meisten Fällen die Verhältnisse so, dass verschiedene Belastungszustände möglich sind, die in beliebiger Reihenfolge und beliebig oftmalig einander folgen können. Es wird also der von einer bestimmten Belastung hervorgerufene Spannungszustand im allgemeinen nicht der gleiche sein, wenn diese Belastung nach einer Reihe von Belastungswechseln wieder auftritt. Da, wie schon erwähnt, die Reihenfolge der Belastungen willkürlich zu sein pflegt, hat die Frage nach einem Spannungszustand bei einer bestimmten Belastung keinen Sinn." Eine grössere Verbreitung dieser Einsicht

und damit verbunden eine etwas sparsamere Verwendung der Bezeichnung "wirklichkeitsnah" für elastisch-plastische Berechnungen ist wünschenswert.

In Bauteilen aus Stahlbeton und Spannbeton sind im allgemeinen Risse aus Zwängungen infolge Setzungen, Schwinden, Kriechen, Temperatureffekten, etc., oder aus früheren Belastungen vorhanden. Unter einem bestimmten Belastungs-Zwängungsprozess öffnen sich einzelne der Risse weiter und pflanzen sich fort, während andere sich schliessen und neue Risse entstehen. Mit dem Reissen entstehen sukzessiv neue statische Systeme aus Betonkörpern und Bewehrungsstäben. Die Betonkörper sind von Rissflächen begrenzt, haben endliche Abmessungen, sind deformierbar und haben eine bestimmte Festigkeit, insbesondere eine bestimmte Zugfestigkeit. Die Rissflächen sind unregelmässig und rau. Entlang einzelnen Teilen der Rissflächen sind die Betonkörper in Kontakt. Dort werden Kräfte übertragen, und die Rissflächen können allmählich zerstört werden. Die die Betonkörper verbindenden Bewehrungsstäbe sind ebenfalls deformierbare Körper mit endlichen Abmessungen. An den Staboberflächen ergeben sich Relativverschiebungen zum umgebenden Beton, und es werden Kräfte übertragen ähnlich wie bei den Rissflächen zwischen den einzelnen Betonkörpern.

Bisher ist noch keine Theorie aufgestellt worden, mit der alle erwähnten Aspekte befriedigend erfasst werden können. Die Forschung hat zwar in jüngster Zeit zu einer bemerkenswerten Erweiterung der Kenntnisse des Verhaltens von Stahlbeton und Spannbeton geführt. Weitere Untersuchungen sind aber notwendig. Als Ergebnis dieser Anstrengungen kann insbesondere eine bessere Abklärung mancher noch nicht ausreichend erfasster Anwendungsgrenzen starr-ideal plastischer Verfahren erwartet werden.

Bei praktischen Anwendungen geht es in der Regel lediglich darum, bestimmte Verformungen einigermaßen zutreffend abzuschätzen. Eine vollständige elastisch-plastische Analyse ist nur für spezielle Probleme gerechtfertigt, und die dafür notwendigen Kenntnisse sind noch lückenhaft. Da lokale Verformungen wie Rissweiten etc. naturgemäss erhebliche Streuungen aufweisen und rechnerisch stets schwieriger zu erfassen sind als integrale Verformungen wie z.B. Mittendurchbiegungen von Trägern und Platten, sollte man sich in erster Linie darauf konzentrieren, die Grössenordnung solcher integraler Verformungen annähernd zu bestimmen. Mit einer geeigneten konstruktiven Durchbildung, insbesondere mit einer guten Bewehrungsverteilung und durch Vermeiden abrupter Geometrieänderungen kann dann dafür gesorgt werden, dass die lokalen Verformungen ausreichend verteilt sind und auf unschädliche Werte beschränkt bleiben.

Zur Abschätzung von Verformungen ist es zweckmässig, die unter der Annahme eines linear elastischen Verhaltens für Kurzzeitbelastung im ungerissenen und im gerissenen Zustand resultierenden Steifigkeiten zu ermitteln und die entsprechenden Geraden in einem Belastungs-Verformungs-Diagramm gemäss Bild 3.1 einzutragen. Zusammen mit dem Ergebnis einer Traglastberechnung sowie den rechnerischen Werten für Risslast und Fließbeginn erhält man damit einen guten Ueberblick über die Grössenordnung der Verformungen und verfügt über ein Gerippe für alle weiterführenden Ueberlegungen. Mit einiger Erfahrung können der Einfluss des Mitwirkens des Betons zwischen den Rissen auf Zug sowie die Einflüsse des Kriechens und des nichtlinearen Verhaltens des Betons beurteilt werden, oder es kann zumindest entschieden werden, wo verfeinerte Untersuchungen durchgeführt werden sollen.

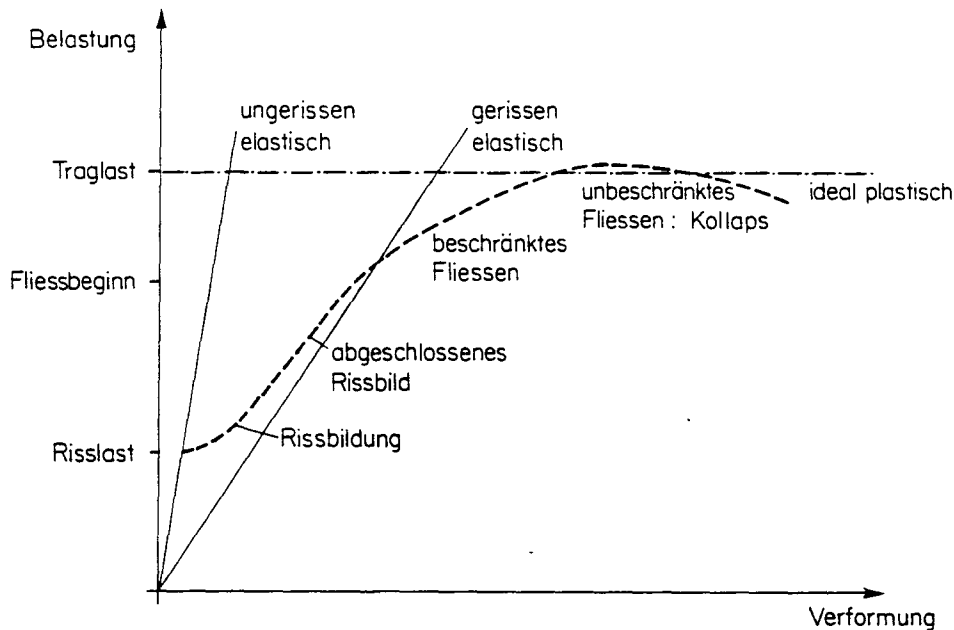


Bild 3.1

Zur Ermittlung der Steifigkeit im ungerissenen Zustand stehen die bekannten Verfahren der elastischen Festigkeitslehre zur Verfügung. Für den gerissenen Zustand wird die Betonzugfestigkeit gänzlich vernachlässigt. Für vorwiegend auf Biegung oder durch Biegung und Achsialkraft beanspruchte Bauteile ergeben sich in Verbindung mit Jakob Bernoulli's Hypothese über das Ebenbleiben der Querschnitte besonders einfache Verhältnisse (vgl. Abschnitt 3.2). Im allgemeinen Fall kombinierter Beanspruchungen mit beträchtlichen Querkräften und/oder Torsionsmomenten können die Verformungen im gerissenen Zustand mit Hilfe von Fachwerkmodellen oder mit entsprechenden kontinuumsmechanischen Verfahren bestimmt werden (vgl. Kapitel 5). Hier ist lediglich zu bemerken, dass der Einfluss der Querkräfte auf die Verformungen von schwer belasteten Trägern im Vergleich zu den Biegeverformungen beträchtlich sein kann, insbesondere bei mittleren bis kleinen Schlankheiten (gedrungene Träger) und dünnen Stegen, und dass der Abfall der Torsionssteifigkeit vom ungerissenen zum gerissenen Zustand weit ausgeprägter ist als der vergleichbare Abfall der Biegesteifigkeit. Ferner ist zu beachten, dass die verallgemeinerten Verformungen (verallgemeinerte Dehnung, Krümmungen, Verdrehung und verallgemeinerte Schiebungen) bei kombinierter Beanspruchung im allgemeinen durch alle Beanspruchungskombinationen beeinflusst werden, nicht nur durch die zugehörigen verallgemeinerten Spannungen (Normalkraft, Biege- und Torsionsmomente, Querkräfte).

Bei der Beurteilung des Einflusses der Betonzugfestigkeit zwischen den Rissen, des sog. "tension stiffening effect", ist die beträchtliche Streuung der Betonzugfestigkeit zu berücksichtigen. Bei den in der Praxis häufigen mittleren und kleinen Bewehrungsgehalten fällt die Rissbildung oft in den Gebrauchslastbereich. Zur Abschätzung des Verhaltens im Übergangsbereich zwischen dem ungerissenen und dem sog. "nackten" gerissenen Zustand sind namentlich von deutschen Forschern verschiedene Vorschläge gemacht worden. Eine grundsätzliche Verbesserung der bisherigen Ansätze sollte mit zukünftigen Forschungsarbeiten durch den Einbezug angemessener Verbundgesetze in kontinuumsmechanische Erwägungen erreicht werden.

Die Einflüsse des Kriechens und des nichtlinearen Verhaltens des Betons können näherungsweise auf bekannte Art durch eine entsprechende Abminderung des Elastizitätsmoduls des Betons erfasst werden. Für vorwiegend durch Biegung und Achsialkraft beanspruchte Träger sind verfeinerte Verfahren entwickelt worden. Vor deren Anwendung sollte man sich aber stets über die Bedeutung der erwarteten Resultate Gedanken machen, um zu vermeiden, dass in einzelnen Bereichen, die der Berechnung leichter zugänglich sind, ausgiebig gearbeitet wird, während andere Fragen, z.B. der Einfluss von Querkräften und Torsionsmomenten sowie von Unstetigkeiten bei Krafteinleitungen und Geometrieänderungen, die von gleicher oder grösserer Bedeutung sein können, stiefmütterlich behandelt werden.

### 3.2 Durchbiegungen

#### 3.2.1 Momenten-Krümmungs-Beziehungen

Die grundlegende Voraussetzung der Theorie der Balkenbiegung ist die Hypothese von Jacob Bernoulli, nach der ebene, zur Balkenachse senkrechte Querschnitte während der Verformung eben und normal zur verformten Balkenachse bleiben. Gemäss dieser Voraussetzung ist die Verteilung der Dehnungen  $\epsilon_x$  der zur Balkenachse  $x$  parallelen Fasern über den Querschnitt linear

$$\epsilon_x = \bar{\epsilon}_x + \chi_y \cdot z - \chi_z \cdot y \quad (3.1)$$

$\bar{\epsilon}_x$  ist die Dehnung der Balkenachse, und  $\chi_y$  und  $\chi_z$  sind die Krümmungskomponenten in  $y$ - und  $z$ - Richtung.

Für beliebige Querschnitte und Materialien können mit der Gl. (3.1) für jeden Satz der sog. verallgemeinerten Verformungen  $\bar{\epsilon}_x$ ,  $\chi_y$ ,  $\chi_z$  die Dehnungen  $\epsilon_x$  und zusammen mit angenommenen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen die Spannungen  $\sigma_x$  in Abhängigkeit der Querschnittskordinaten  $y$  und  $z$  ermittelt werden. Integration der  $\sigma_x$  über den Querschnitt bringt die verallgemeinerten Spannungen (Spannungsergebnisse)

$$N = \int_A \sigma_x \cdot dy \cdot dz, \quad M_y = \int_A z \cdot \sigma_x \cdot dy \cdot dz, \quad M_z = - \int_A y \cdot \sigma_x \cdot dy \cdot dz \quad (3.2)$$

Umgekehrt können zu gegebenen Spannungsergebnissen  $N$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  die zugehörigen Werte  $\bar{\epsilon}_x$ ,  $\chi_y$  und  $\chi_z$  bestimmt werden. Für die praktische Berechnung geht man in der Regel iterativ vor, indem man die Dehnungsebene schätzt, die zugehörigen Spannungsergebnisse berechnet und mit den gegebenen Werten vergleicht und anschliessend das Vorgehen mit verbesserten Ausgangswerten  $\bar{\epsilon}_x$ ,  $\chi_y$ ,  $\chi_z$  wiederholt.

Grundsätzlich können mit der Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte ausgehend von Spannungs-Dehnungs-Diagrammen für Beton und Bewehrung die Beziehungen zwischen verallgemeinerten Spannungen und Verformungen von beliebigen Stahlbeton- und Spannbetonträgern ohne weiteres bestimmt werden. Um Fehlschlüsse bei der Anwendung solcher Beziehungen zu vermeiden, müssen allerdings einige Besonderheiten beachtet werden, welche das Verhalten des Betons und den Verbund zwischen Bewehrung und Beton betreffen. Ausser dem Reißen des Betons sind namentlich die Einflüsse der Lastdauer und der Belastungsgeschwindigkeit sowie

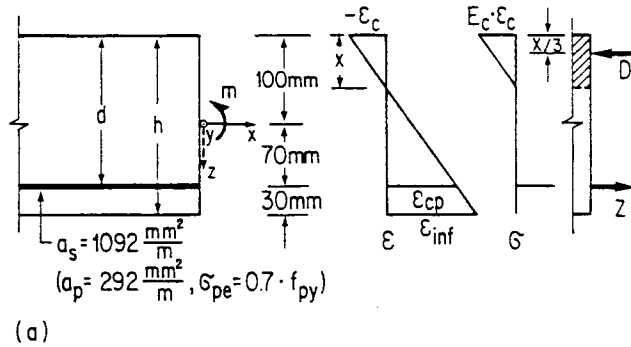


von allenfalls vorhandenen Querbewehrungen zu nennen. Der Verbund führt zur Aktivierung der Zugfestigkeit der durch die Risse getrennten, noch ungerissenen Betonkörper und zu einer ungleichmässigen Zugkraft- und Dehnungsverteilung in der Bewehrung. Wenn der Spannungs- und Verformungszustand in den einzelnen Betonkörpern und in der Bewehrung untersucht werden soll, ist die Hypothese von Bernoulli aufzugeben und eine zwei- oder dreidimensionale Analyse durchzuführen, bei der die Verbundkräfte und die zugehörigen Relativverschiebungen zwischen Bewehrung und Beton sowie die Rissverzahnung einzubeziehen sind. Derartige Untersuchungen können beispielsweise im Zusammenhang mit einer detaillierten Abklärung des Vorgangs der Rissbildung angestellt werden oder zur Beantwortung der Frage nach der Beeinflussung der Steifigkeit durch das Mitwirken des Betons zwischen den Rissen auf Zug (tension-stiffening effect). Ferner ermöglichen solche Untersuchungen die theoretische Behandlung der Frage nach der möglichen Rotationsfähigkeit von plastischen Gelenken.

Aus diesen Bemerkungen geht hervor, dass die Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte nicht zu zuverlässigen Aussagen über lokale Spannungs- und Verformungsgrössen in einem Träger führen kann. Sie gestattet aber den Aufbau einer einfachen Theorie, welche, wie die Erfahrung zeigt, in bezug auf integrale Grössen wie Lasten und Durchbiegungen befriedigende Resultate ergibt. Die in Momenten-Krümmungs-Beziehungen auftretenden Krümmungen sind nie als lokale Grössen zu betrachten, sondern stets als Mittelwerte über Trägerelemente, deren Längen von der Grössenordnung der Trägerhöhen sind. Aus diesem Grund wird im folgenden Beispiel (Bild 3.2 (e)) nicht die Krümmung  $\chi$ , sondern die mittlere Rotation  $\chi \cdot h$  über die Länge  $h$  dem Biegemoment gegenübergestellt. Die Grösse  $\chi \cdot h$  ist auch deshalb praktisch, weil sie gleich der Differenz der mittleren Randdehnung ist und damit sofort Rückschlüsse auf die Grössenordnung der Spannungen im Beton und in der Bewehrung zulässt.

Dass die Hypothese über das Ebenbleiben der Querschnitte keine zutreffenden Aussagen für lokale Spannungs- und Verformungsgrössen liefern kann, ersieht man auch aus einem einfachen Gedankenexperiment. In der Tat beinhaltet die Annahme dieser Hypothese für Stahlbeton implizit die Voraussetzung, dass sich unendlich viele Risse in verschwindend kleinen Abständen und mit verschwindenden Rissbreiten ergeben. Wäre dies nicht so, d.h. wären endliche Rissabstände und endliche Rissbreiten möglich, so könnten zumindest die Ebenen der Risse nicht eben bleiben, weil sich bei der Risswurzel auf der Höhe der neutralen Faser eine Aufgabelung in zwei getrennte Rissflächen und damit ein Knick ergibt. Das Problem des Verbundes und die damit zusammenhängenden Fragen werden demnach mit der Annahme der Hypothese von Jacob Bernoulli theoretisch aufgehoben.

Im Bild 3.2 wird als Beispiel die Momenten-Krümmungs-Beziehung einer 200 mm dicken, auf Biegung beanspruchten Platte untersucht, die mit Vorspannlitzen 0.6" bewehrt ist, welche in einem Abstand von 500 mm angeordnet sind ( $a_p = 292 \text{ mm}^2/\text{m}$ ). Die Litzen sind auf 70% der Streckgrenze  $f_{py} = 1570 \text{ N/mm}^2$  vorgespannt und injiziert. Zum Vergleich ist die Momenten-Krümmungs-Beziehung einer gleichen, aber schlaff bewehrten ( $a_s = 1092 \text{ mm}^2/\text{m}$ ,  $f_{sy} = 420 \text{ N/mm}^2$ ) Platte angegeben, welche dasselbe Bruchmoment  $m_R = 75 \text{ kN}$  aufweist. Die Berechnung beruht auf der Hypothese von Bernoulli, vgl. Bild 3.2 (a), und auf den in den Bildern 3.2 (b) und (c) dargestellten Spannungs-Dehnungs-Diagrammen von Beton und Bewehrung.



x	$\chi \cdot h$	$-\epsilon_c$	$\epsilon_{cp}$	Z	$d - \frac{x}{3}$	m
200	.109	.109	-.016	327.6	103.3	33.8
170	.152	.129	0	328.6	113.3	37.2
150	.195	.146	.019	329.7	120	39.6
120	.308	.185	.077	333.1	130	43.4
90	.562	.253	.225	341.8	140	47.8
60	1.38	.414	.758	373.0	150	55.8
45	2.85	.640	1.78	432.6	155	67.0
42	3.46	.727	2.21	458.0	156	71.4
mm	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	kN/m	mm	kN

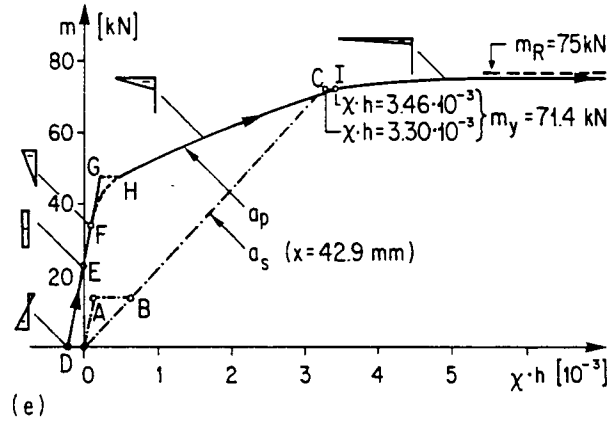
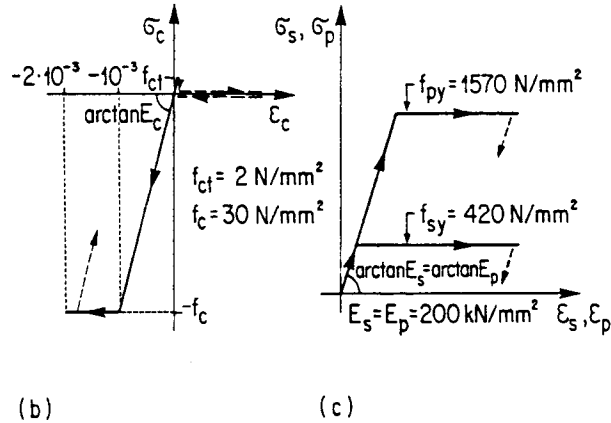


Bild 3.2

Die Vorspannkraft  $a_p \cdot \sigma_{pe} = 292 \cdot 1099 \text{ N/m} = 320.8 \text{ kN/m}$  wirkt auf den Nettoquerschnitt  $a_n = 199708 \text{ mm}^2/\text{m}$ , dessen Schwerpunkt durch  $z = -0.1 \text{ mm}$ , und dessen Trägheitsmoment durch  $i_n = 6.652 \cdot 10^8 \text{ mm}^4/\text{m}$  gegeben sind. Die Randspannungen oben ( $z_n = -99.9 \text{ mm}$ ) und unten ( $z_n = 100.1 \text{ mm}$ ) folgen aus

$$\sigma_c = \frac{320.8 \text{ kN}}{199708 \text{ mm}^2} - \frac{320.8 \text{ kN} \cdot 70.1 \text{ mm}}{6.652 \cdot 10^8 \text{ mm}^4} \cdot z_n$$

zu  $\sigma_{c,sup} = 1.8 \text{ N/mm}$  und  $\sigma_{c,inf} = -5.0 \text{ N/mm}$  und die entsprechende Krümmung aus

$$\chi \cdot h = \frac{\sigma_{c,inf} - \sigma_{c,sup}}{E_c} = -0.223 \cdot 10^{-3}$$

Diese Berechnung liefert den Punkt D im Bild 3.2 (e).

Für das ungerissen elastische Verhalten sind die ideellen Querschnittswerte

$$a_i = a_c + \left(\frac{E_p}{E_c} - 1\right) \cdot a_p = 201655 \text{ mm}^2/\text{m}, \quad i_i = 6.747 \cdot 10^8 \text{ mm}^4/\text{m}$$

massgebend, wobei der Schwerpunkt des ideellen Querschnittes durch  $z = 0.6 \text{ mm}$  gegeben ist. Zu den initialen Betonspannungen aus Vorspannung kommen die Werte  $m \cdot z_i / i_i$  hinzu, und die Vorspannung  $1099 \text{ N/mm}^2$  im Spannstahl wird um den kleinen Zuwachs  $m \cdot 69.4 \text{ mm} \cdot E_p / (E_c \cdot i_i)$  vergrößert. Die Krümmung  $\chi$  verschwindet für  $m = 22.8 \text{ kN}$ . Diesem Wert entspricht Punkt E im Bild 3.2 (e). Punkt F im Bild 3.2 (e) entspricht dem Dekompressionsmoment  $m = 33.9 \text{ kN}$

und Punkt G dem Rissmoment  $m_r = 47.4$  kN. Typisch für vorgespannte Bauteile ist die Feststellung, dass die Zugkraft  $Z$  in der Bewehrung im ungerissenen Zustand annähernd konstant bleibt, nämlich von 320.9 kN/m um nur 3% auf 330.4 kN/m anwächst, wenn das Moment von null bis zum Rissmoment 47.4 kN gesteigert wird, während der Hebelarm von  $Z$  und der Resultierenden  $D = Z$  der Betonspannungen gleichzeitig von null auf 143.5 mm ansteigt. Im gerissenen Zustand wird der Hebelarm der inneren Kräfte ähnlich wie bei schlaff bewehrten Bauteilen nur noch mässig vergrössert, während die inneren Kräfte  $Z = D$  bis zum Bruch noch beträchtlich anwachsen.

Für den gerissenen Zustand gelten gemäss Bild 3.2 (a) die Beziehungen

$$\begin{aligned}\epsilon_{cp} &= -\epsilon_c \cdot \left(\frac{d}{x} - 1\right) \\ D &= -x \cdot E_c \cdot \frac{\epsilon_c}{2} = Z = Z_0 + \epsilon_{cp} \cdot E_p \cdot a_p \\ \chi \cdot h &= \epsilon_c \cdot \frac{h}{x} = \frac{Z_0 \cdot h}{E_c \cdot \frac{x^2}{2} - (d-x) \cdot E_p \cdot a_p} \\ m &= Z \cdot \left(d - \frac{x}{3}\right)\end{aligned}$$

$Z_0$  bezeichnet die Zugkraft 328.6 kN/m in der Spannbewehrung entsprechend  $\epsilon_{cp} = 0$ , d.h.  $x = 170$  mm. Von angenommenen Werten  $x$  ausgehend, können alle weiteren Grössen berechnet werden. In der Tabelle (Bild 3.2 (d)) sind die Ergebnisse solcher Berechnungen zusammengestellt. Im Diagramm (Bild 3.2 (e)) resultiert die Strecke FHI. Der Punkt I entspricht dem Erreichen der Streckgrenze der Spannbewehrung unter dem Moment  $m_y = 71.4$  kN.

Anschliessend kann das Moment bei konstantem  $Z = D = 458$  kN/m durch Verkleinern von  $x$  noch auf  $m_R = 75$  kN gesteigert werden. Für  $\epsilon_c = -10^{-3}$  erhält man  $x = 30.6$  mm,  $\chi \cdot h = 6.53 \cdot 10^{-3}$  und  $m = 73.4$  kN, und für  $\epsilon_c = -2 \cdot 10^{-3}$  gilt  $x = 20.4$  mm,  $\chi \cdot h = 19.6 \cdot 10^{-3}$ ,  $m_R = 75$  kN. Die erforderliche plastische Dehnung des Spannstahls ist 1.25%.

Für die Stahlbetonplatte mit  $a_s = 1092$  mm<sup>2</sup>/m erhält man im ungerissenen Zustand eine geringfügig grössere ideelle Steifigkeit als für die Spannbetonplatte mit dem gleichen Widerstand ( $a_i = 206190$  mm<sup>2</sup>/m,  $i_i = 6.961 \cdot 10^8$  mm<sup>4</sup>/m, Schwerpunktlage  $z = 2.1$  mm). Das Rissmoment  $m_r = 14.2$  kN entsprechend Punkt A im Bild 3.2 (e) ist aber viel kleiner als der Wert 47.4 kN der Spannbetonplatte. Für den gerissenen Zustand gilt

$$D = -x \cdot E_c \cdot \frac{\epsilon_c}{2} = Z = -\epsilon_c \cdot \left(\frac{d}{x} - 1\right) \cdot E_s \cdot a_s$$

woraus mit  $\rho_s = \frac{a_s}{d}$  und  $n_s = \frac{E_s}{E_c}$

$$\frac{x}{d} = \rho_s \cdot n_s \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{2}{\rho_s \cdot n_s}} - 1\right)$$

und mit  $\chi \cdot h = -\epsilon_c \cdot \frac{h}{x}$  und  $m = Z \cdot \left(d - \frac{x}{3}\right)$

$$\frac{m}{\chi \cdot h} = a_s \cdot E_s \cdot (d-x) \cdot \left(d - \frac{x}{3}\right) \cdot \frac{1}{h}$$

folgt. Für die gegebenen Zahlenwerte ergibt sich  $x = 42.9 \text{ mm}$ , und im Bild 3.2 (e) erhält man die Gerade OBC. Der Punkt C mit  $\chi \cdot h = 3.3 \cdot 10^{-3}$  entspricht dem Fließbeginn der Bewehrung. Das Verhalten bei der anschliessenden Steigerung des Momentes von  $m_y$  auf  $m_R$  entspricht jenem der Spannbetonplatte.

Für eine teilweise vorgespannte Platte erhält man im Bild 3.2 (e) eine Kurve zwischen den Grenzen OABC und DEFGHI, wenn das Vorspann-Niveau  $\nu = \sigma_{pe}/f_{py}$ , das üblicherweise 60 bis 70% beträgt, konstant ist. Wie man sieht, nimmt die Tangentensteifigkeit  $dm/d\chi$  im gerissenen Zustand mit zunehmendem Vorspanngrad  $\lambda = a_p \cdot f_{py} / (a_s \cdot f_{sy} + a_p \cdot f_{py})$  und mit zunehmender Beanspruchung  $m$  ab.

### 3.2.2 Berechnungsbeispiel

Mit bekannten Momenten-Krümmungs-Beziehungen können Durchbiegungen mit Hilfe der üblichen Verfahren der Baustatik berechnet werden, insbesondere mit der Analogie von Mohr.

Als Beispiel wird die Durchbiegung der im Bild 3.3 (a) dargestellten Platte untersucht, die

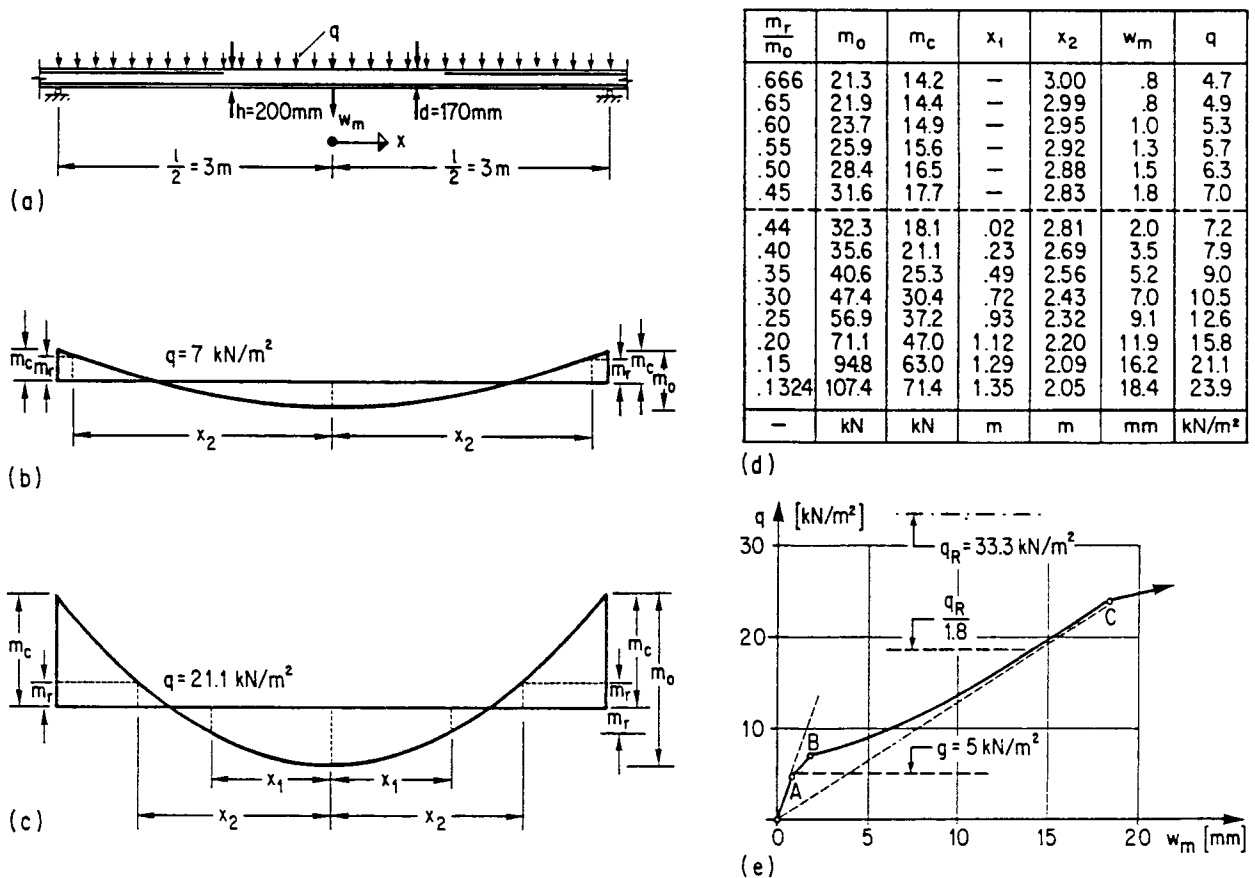


Bild 3.3

über mehrere in regelmässigen Abständen von 6 m angeordnete Linienlager durchläuft und die gleichmässig verteilte Belastung  $q$  trägt. Die Platte sei mit einer durchlaufenden unteren und einer gleich starken oberen Bewehrung über den Auflagern versehen, die gerade dem im Bild 3.2 untersuchten Beispiel entspricht ( $a_s = 1092 \text{ mm}^2/\text{m}$ ,  $f_{sy} = 420 \text{ N/mm}^2$ ,  $d = 170 \text{ mm}$ ). Den folgenden Berechnungen wird die Momenten-Krümmungs-Beziehung OABC im Bild 3.2 (e) zugrundegelegt. Der Einfluss der Druckbewehrung wird vernachlässigt, und die Platte wird als beidseitig eingespannter Träger behandelt.

Für den ungerissenen Zustand erhält man die aus der elastischen Festigkeitslehre bekannte Momentenverteilung. Die Platte wird allerdings über den Auflagern bereits unter der Belastung

$$q_r = \frac{14.2 \text{ kN}}{(6 \text{ m})^2} \cdot 12 = 4.7 \text{ kN/m}^2$$

reissen, d.h. schon unter dem Eigengewicht  $g = 5 \text{ kN/m}^2$ .

Die zur Risslast  $q_r$  gehörige Mittendurchbiegung ist

$$w_{mr} = \frac{1}{384} \cdot \frac{4.7 \text{ kN/m}^2 \cdot (6 \text{ m})^4}{30 \text{ kN/mm}^2 \cdot 6.961 \cdot 10^8 \text{ mm}^4/\text{m}} = 0.8 \text{ mm}$$

Die Werte  $q_r$  und  $w_{mr}$  definieren im Bild 3.3 (e) den Punkt A.

Mit dem Reissen über den Auflagern ergibt sich eine Umverteilung der inneren Kräfte derart, dass die positiven Momente in den noch ungerissenen und damit steiferen Feldern rascher, die negativen Momente bei den Auflagern jedoch langsamer anwachsen als nach der Lösung für homogenes und linear elastisches Verhalten. Bild 3.3 (b) zeigt die Momentenverteilung für  $q = 7 \text{ kN/m}^2$ . Im Bereich  $|x| \leq x_2$  ist die Gerade OA von Bild 3.2 (e) massgebend und im Bereich  $x_2 < |x| \leq 1/2$  die Gerade BC, wobei  $x_2$  durch

$$x_2 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{m_c}{m_0} + \frac{m_r}{m_0}} \quad , \quad m_0 = \frac{q \cdot l^2}{8}$$

gegeben ist. Das statisch unbestimmte Moment  $m_c$  folgt aus der Bedingung, dass die Biegelinie bei den Auflagern keinen Knick aufweist:

$$(m_0 - m_c) \cdot \frac{2 \cdot x_2}{3} - \frac{m_r}{3} \cdot x_2 - k \cdot [(m_0 - m_c) \cdot \left(\frac{2 \cdot x_2}{3} - \frac{1}{2}\right) + m_0 \cdot \frac{1}{6} - m_r \cdot \frac{x_2}{3}] = 0$$

$k = 4.83$  bezeichnet das Verhältnis der Steifigkeiten im ungerissenen und im gerissenen Zustand. Durch Elimination von  $x_2$  erhält man eine Gleichung für  $m_c/m_0$  in Abhängigkeit von  $m_r/m_0$ . Damit ist auch  $x_2$  bekannt, und  $w_m$  kann mit der Arbeitsgleichung berechnet werden. Die Resultate solcher Berechnungen sind im oberen Teil der Tabelle von Bild 3.3 (d) zusammengestellt. Im Bild 3.3 (e) erhält man die annähernd gerade Strecke AB.

Unter der Belastung  $q = 7.2 \text{ kN/m}^2$  reisst die Platte auch im Feld. Die Ausdehnung der noch ungerissenen Zonen  $-x_2 \leq x \leq -x_1$  und  $x_1 \leq x \leq x_2$  gemäss Bild 3.3 (c) nimmt mit zunehmender

Belastung ständig ab. Die Länge  $x_1$  ist gegeben durch

$$x_1 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{m_c}{m_0} - \frac{m_r}{m_0}}$$

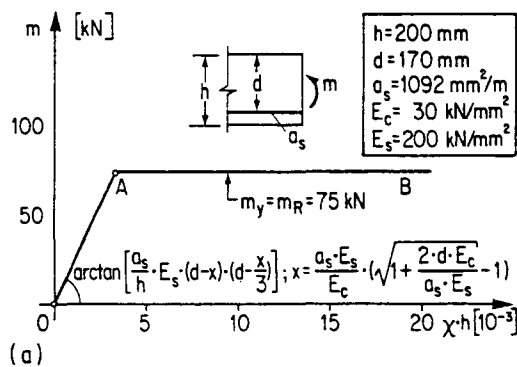
und  $m_c$  folgt aus der Bedingung

$$(m_0 - m_c) \cdot \left( \frac{2 \cdot x_2}{3} - \frac{2 \cdot x_1}{3} \right) - m_r \cdot \left( \frac{x_2}{3} + \frac{x_1}{3} \right) - k \cdot \left[ (m_0 - m_c) \cdot \left( \frac{2 \cdot x_2}{3} - \frac{2 \cdot x_1}{3} - \frac{1}{2} \right) + m_0 \cdot \frac{1}{6} - m_r \cdot \left( \frac{x_2}{3} + \frac{x_1}{3} \right) \right] = 0$$

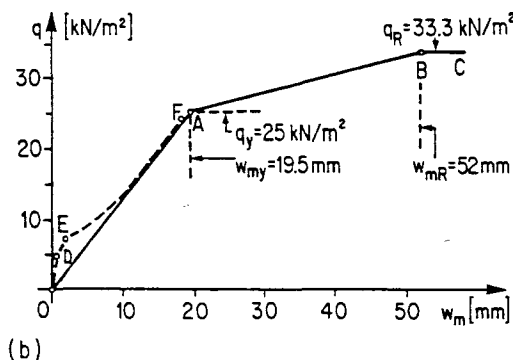
Die Durchbiegung  $w_m$  kann wieder mit der Arbeitsgleichung ermittelt werden. Der untere Teil der Tabelle von Bild 3.3 (d) enthält entsprechende Resultate. Im Bild 3.3 (e) ergibt sich die Linie BC. Der Punkt C bezeichnet den Fließbeginn der Bewehrung über den Auflagern unter der Belastung  $q_y = 23.9 \text{ kN/m}^2$ . Wie man sieht, schmiegt sich die Belastungs-Mittendurchbiegungslinie zwischen den Punkten B und C immer näher an die gestrichelte Gerade, die dem linear elastischen Verhalten im gerissenen Zustand gemäss der Linie OBC im Bild 3.2 (e) entspricht.

Nach dem Fließbeginn der Bewehrung über den Auflagern kann  $m_c$  nur noch leicht vergrössert werden, nämlich von 71.4 kN auf 75 kN (vgl. Bild 3.2 (e)). Ueber den Auflagern ergeben sich in dieser Phase plastische Verformungen. Die Belastung kann aber noch erheblich gesteigert werden, bis auch im Feld das Bruchmoment erreicht ist.

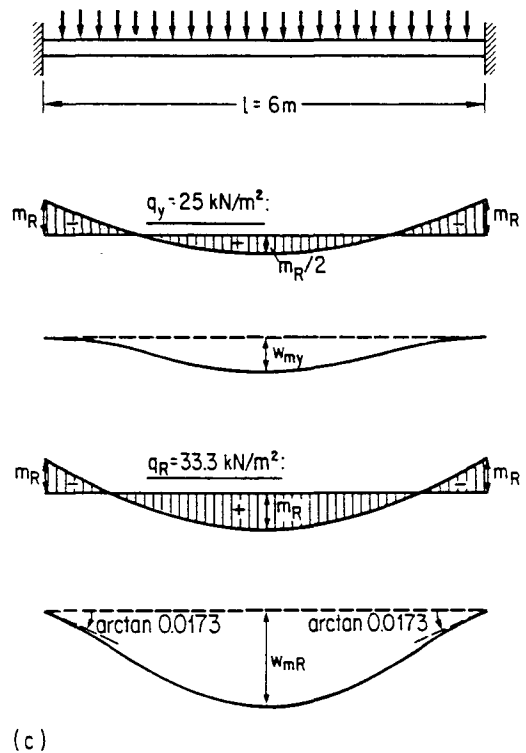
Wird zur Vereinfachung die Momenten-Krümmungs-Beziehung durch eine bilineare (linear elastisch-ideal plastische) Näherung gemäss Bild 3.4 (a) ersetzt, so erhält man das im



(a)



(b)



(c)

Bild 3.4

Bild 3.4 (b) dargestellte trilineare Belastungs-Durchbiegungs-Diagramm. Der Punkt A bezeichnet den Fließbeginn der Bewehrung über den Auflagern, und der Punkt B entspricht dem Erreichen der Traglast beim Fließbeginn der Bewehrung im Feld. Zum Vergleich mit der früheren Lösung ist die gestrichelte Linie ODEF eingetragen, welche der Linie OABC im Bild 3.3 (e) entspricht. Die Belastung beim Fließbeginn der Bewehrung über den Auflagern

$$q_y = \frac{12 \cdot 75 \text{ kN}}{(6 \text{ m})^2} = 25 \text{ kN/m}^2$$

ist etwas grösser als der früher erhaltene Wert  $23.9 \text{ kN/m}^2$ , der einem Moment  $m_c = 71.4 \text{ kN/m}^2$  entspricht. Die zugehörige Mittendurchbiegung erhält man nach der elastischen Balkentheorie zu

$$w_{my} = \frac{25 \text{ kN/m}^2 \cdot (6 \text{ m})^4}{384 \cdot EI_r} = 19.5 \text{ mm}$$

wobei  $EI_r$  die früher berechnete Steifigkeit  $a_s \cdot E_s \cdot (d-x) \cdot (d - \frac{x}{3})$  im gerissenen Zustand bezeichnet. Nach dem Fließbeginn bleiben die Momente bei den Auflagern konstant gleich  $-m_R$ . Die Feldmomente wachsen weiter an bis unter die Belastung

$$q_R = \frac{16 \cdot 75 \text{ kN}}{(6 \text{ m})^2} = 33.3 \text{ kN/m}^2$$

die Traglast erreicht ist. Die Mittendurchbiegung beim Erreichen der Traglast folgt aus der Arbeitsgleichung

$$w_{mR} = \frac{5 \cdot q_R \cdot l^4}{384 \cdot EI_r} - \frac{m_R \cdot l^2}{8 \cdot EI_r} = \frac{m_R \cdot l^2}{12 \cdot EI_r} = \frac{8}{3} \cdot w_{my} = 52 \text{ mm}$$

Im Lastbereich  $q_y < q \leq q_R$  ergeben sich in den Fließgelenken bei den Auflagern plastische Verdrehungen. Für den Neigungswinkel der Biegelinie bei den Auflagern in dieser Phase des beschränkten Fließens findet man mit der Arbeitsgleichung den Ausdruck

$$\frac{q \cdot l^3}{24 \cdot EI_r} - \frac{m_R \cdot l}{2 \cdot EI_r}$$

Für  $q = q_R$  ergibt sich eine Neigung von 1.73%. Dieser Wert ist mit dem früher berechneten Wert  $\chi \cdot h = 1.96\%$  beim Erreichen von  $m_R = 75 \text{ kN}$  ( $\epsilon_c = -2 \cdot 10^{-3}$ ) vergleichbar. In der anschließenden Phase des unbeschränkten plastischen Fließens werden die über die Fließgelenke bei den Auflagern und in den Feldmitten miteinander verbundenen und elastisch verformten Plattenteile nicht mehr weiter deformiert. Alle zusätzlichen Verformungen sind in den Fließgelenken konzentriert, und die elastischen Plattenteile zwischen den Fließgelenken bewegen sich als starre Körper. Im Bild 3.4 (c) sind die zu den Punkten A und B von Bild 3.4 (b) gehörigen Momentendiagramme und Biegelinien dargestellt. Wie man anhand der Momentendiagramme noch bemerkt, nehmen die negativen Momente zwischen den Auflagern und den Momentennullpunkten der elastischen Lösung in der elastisch-plastischen Phase zu, d.h. es ergibt sich eine elastische Entlastung und zum Teil sogar eine anschließende Belastung mit umgekehrtem (positivem) Vorzeichen.

3.2.3 Bemerkungen

Die im Berechnungsbeispiel eingesetzten Methoden können auf beliebige Stabtragwerke angewendet werden. Meistens wird eine bilineare Näherung für die Momenten-Krümmungs-Beziehung ausreichen. Für mehrfach statisch unbestimmte Systeme wird Schritt für Schritt durch Einführen von Fließgelenken der Grad der statischen Unbestimmtheit reduziert. Dementsprechend ergeben sich verschiedene aufeinanderfolgende Phasen des beschränkten Fließens mit sukzessive abnehmender Steifigkeit. In gewissen Fällen können sich unter zunehmender Belastung Fließgelenke ausbilden, die nicht zum Bruchmechanismus gehören, sondern vor dem Erreichen der Traglast wieder elastisch entlastet werden. Solche Fälle erfordern spezielle Aufmerksamkeit.

Möchte man nicht ein vollständiges Belastungs-Durchbiegungs-Diagramm ermitteln, sondern lediglich z.B. eine ausgezeichnete Durchbiegung beim Erreichen der Traglast, so genügt ein vereinfachtes Verfahren. Zur Illustration dieses Verfahrens wird der im Bild 3.5 (a) dargestellte, beidseitig elastisch eingespannte Balken mit der Einzellast  $F$  in der Mitte betrachtet. Unter Voraussetzung der Momenten-Krümmungs-Beziehung von Bild 3.5 (b) erhält man für die elastische Phase

$$M_m = \frac{F \cdot l}{4} \cdot \frac{3 + 4 \cdot \alpha}{6 + 4 \cdot \alpha}, \quad w_m = \frac{F \cdot l^3}{192 \cdot EI} \cdot \frac{3 + 8 \cdot \alpha}{3 + 2 \cdot \alpha}$$

und für die Phase des beschränkten Fließens (Fließgelenk unter der Last)

$$M_m = M_R, \quad w_m = \frac{F \cdot l^3}{48 \cdot EI} \cdot (1 + 2 \cdot \alpha) - \frac{M_R \cdot l^2}{24 \cdot EI} \cdot (3 + 4 \cdot \alpha)$$

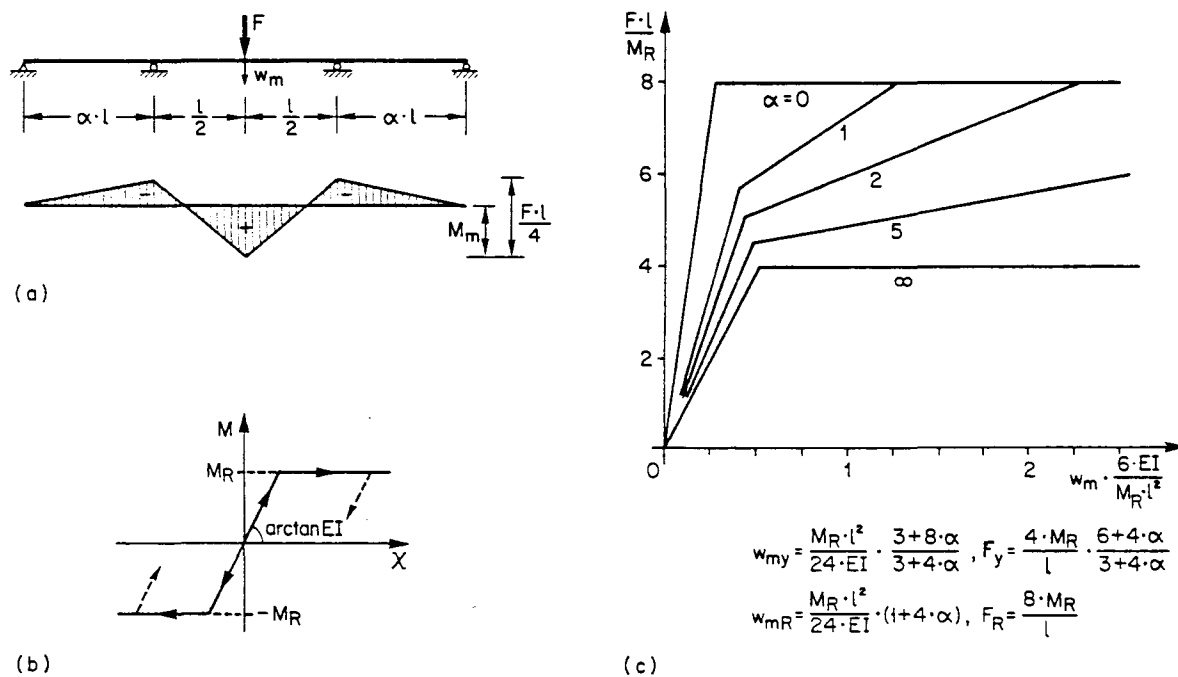


Bild 3.5



Belastung und Mittendurchbiegung beim Fließbeginn sind

$$F_y = \frac{4 \cdot M_R}{l} \cdot \frac{6 + 4 \cdot \alpha}{3 + 4 \cdot \alpha}, \quad w_{my} = \frac{M_R \cdot l^2}{24 \cdot EI} \cdot \frac{3 + 8 \cdot \alpha}{3 + 4 \cdot \alpha}$$

und beim Erreichen der Traglast  $F_R = 8 \cdot M_R / l$  ist

$$w_{mR} = \frac{M_R \cdot l^2}{24 \cdot EI} \cdot (1 + 4 \cdot \alpha)$$

Im Bild 3.5 (c) sind entsprechende Belastungs-Durchbiegungs-Diagramme für verschiedene Werte  $\alpha$  zusammengestellt. Die Grenzfälle  $\alpha = 0$  und  $\alpha \rightarrow \infty$  entsprechen einer starren Einspannung und einem einfachen Balken. Hätte man fälschlicherweise angenommen, das Fließgelenk unter der Last bilde sich zuletzt aus, d.h. nach den Fließgelenken über den beiden mittleren Auflagern, so hätte man für die Mittendurchbiegung in der Phase des beschränkten Fließens nach der Arbeitsgleichung den Ausdruck

$$w_m = \frac{F \cdot l^3}{48 \cdot EI} - \frac{M_R \cdot l^2}{8 \cdot EI}$$

erhalten, also für die Traglast  $F_R = 8 \cdot M_R / l$  den Wert  $w_{mR} = M_R \cdot l^2 / (24 \cdot EI)$ . Für  $\alpha = 0$  stimmt dieser Wert mit der richtigen Lösung überein. Für  $\alpha > 0$  erhält man jedoch zu kleine Durchbiegungen. Diese Feststellung lässt sich leicht verallgemeinern. Berechnet man für beliebige Systeme in der gleichen Art ausgezeichnete Durchbiegungen unter der Traglast, indem man der Reihe nach für jedes Fließgelenk annimmt, es sei das zuletzt ausgebildete, so entspricht die betragsmäßig grösste der so berechneten Durchbiegungen gerade der beim Eintreten des Kollapses vorhandenen.

Absolute Kriterien für die Beschränkung von Durchbiegungen im Gebrauchszustand sind nicht sinnvoll. Die in der Praxis auftretenden Anforderungen in bezug auf Aesthetik, Schäden an nichttragenden Elementen, Beeinträchtigung der Nutzung von Einbauten und Apparaten usw. sind zu unterschiedlich. Die in Normvorschriften enthaltenen Richtwerte geben Anhaltspunkte für die Beurteilung im Einzelfall.

Für die Praxis zu empfehlen ist eine vermehrte Kontrolle von ausgezeichneten Durchbiegungen mit einfachen (und billigen), periodisch durchgeführten Nivellements, nicht lediglich im Brückenbau, wo dies schon lange üblich ist, sondern vor allem auch im Hochbau. Solche Messungen fördern das Verständnis des Tragverhaltens und liefern willkommene Informationen bei einer allfälligen späteren Aenderung der Nutzung. Ferner können sie bei der Beurteilung von Schadenfällen äusserst wichtig sein.

### 3.3 Risse

#### 3.3.1 Ursachen und Auswirkungen

Die Ursachen für das Entstehen von Rissen sind sehr vielfältig. Die Bedeutung der Lasten sollte gegenüber anderen Rissursachen nicht überschätzt werden.

Risse infolge Lasten sind im Gebrauchszustand im allgemeinen relativ klein. Falls sie sehr gross sind, ist in der Regel auch die Bemessung auf Bruch nicht in Ordnung, oder es liegt eine konstruktiv besonders unglückliche Lösung vor.

Eine zweite wichtige Ursache von Rissen bilden Zwängungen aus Setzungen, Schwinden, Kriechen und Temperatureinflüssen. Oft übersehen wird der unter Umständen bedeutende Einfluss der Abbindewärme.

Sehr grosse Risse können infolge Setzung des Frischbetons in den ersten Stunden nach dem Betonieren entstehen, besonders in Trägern und hohen Scheiben, aber auch bei den oben liegenden Bewehrungsstäben in Platten.

Die Korrosion der Bewehrung verursacht eine Expansion, die zu Rissen und eventuell zum Abplatzen der Betonüberdeckung führen kann.

Ausser verschiedenen chemischen Einwirkungen ist noch der Einfluss des Frostes zu nennen. Frost verursacht nicht nur Oberflächenschäden. Mit sorgfältig angeordneten Entwässerungen sollten Schäden durch gefrorenes Wasser in Hüllrohren von Spanngliedern oder anderen Hohlkörpern verhindert werden.

#### 3.3.2 Anforderungen und Massnahmen

Die Rissbreiten müssen aus ästhetischen und funktionellen Gründen sowie zum Korrosionsschutz der Bewehrung beschränkt bleiben. Bei den funktionellen Anforderungen handelt es sich in erster Linie um Ansprüche an die Dichtigkeit bezüglich Gas, Flüssigkeiten und Schall. Bei speziellen Anwendungen wie z.B. in Operationsräumen und Getreidesilos etc. sind Risse auch deshalb unerwünscht, weil sie schädlichen Organismen Unterschlupf bieten können.

In der Fachliteratur sind in letzter Zeit verschiedene Formeln zur Abschätzung von Rissbreiten vorgeschlagen worden. Die Gültigkeit solcher Formeln ist noch sehr umstritten, und zum Teil erhält man bei ihrer Anwendung widersprüchliche Ergebnisse. Es hat sich gezeigt, dass es besser ist, nicht zu viele dünne Bewehrungsstäbe in sehr kleinen Abständen anzuordnen, wie dies nach verschiedenen der vorgeschlagenen Rissformeln nötig wäre, sondern "normale" Stabdurchmesser und Abstände zu wählen, dafür aber die Betonüberdeckung reichlich zu bemessen und die Bewehrung nicht allzu stark auszunützen, d.h. mit relativ kleinen Stahlspannungen im Gebrauchszustand zu rechnen, wenn die Rissbeschränkung von besonderer Bedeutung ist. Zur Verminderung der Rissbildung im jungen Beton kann ausser mit einer geeigneten Vorspannung auch mit technologischen Massnahmen viel beigetragen werden, insbesondere mit einer geeigneten Betonzusammensetzung (wenig Feinstanteil des Zuschlagstoffes,

geringer Zementgehalt, langsam abbindender Zement, niedriger Wasser/Zement-Faktor), sowie mit einer guten Verdichtung und Nachbehandlung (Abdecken mit wärmeisolierenden und dampfdichten Matten, usw.).

#### LITERATUR

- [3.1] Melan E.: "Der Spannungszustand eines Mises-Henckyschen Kontinuums bei veränderlicher Belastung", Sitz. ber. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa, 147 (1938), S. 73-87.

## 4.1 Einführung

In diesem Kapitel wird die Querkraftbemessung von Balken auf der Grundlage der Plastizitätstheorie behandelt. Dabei geht es primär darum, die Schubbewehrung im Stegbereich eines Trägers zu bestimmen.

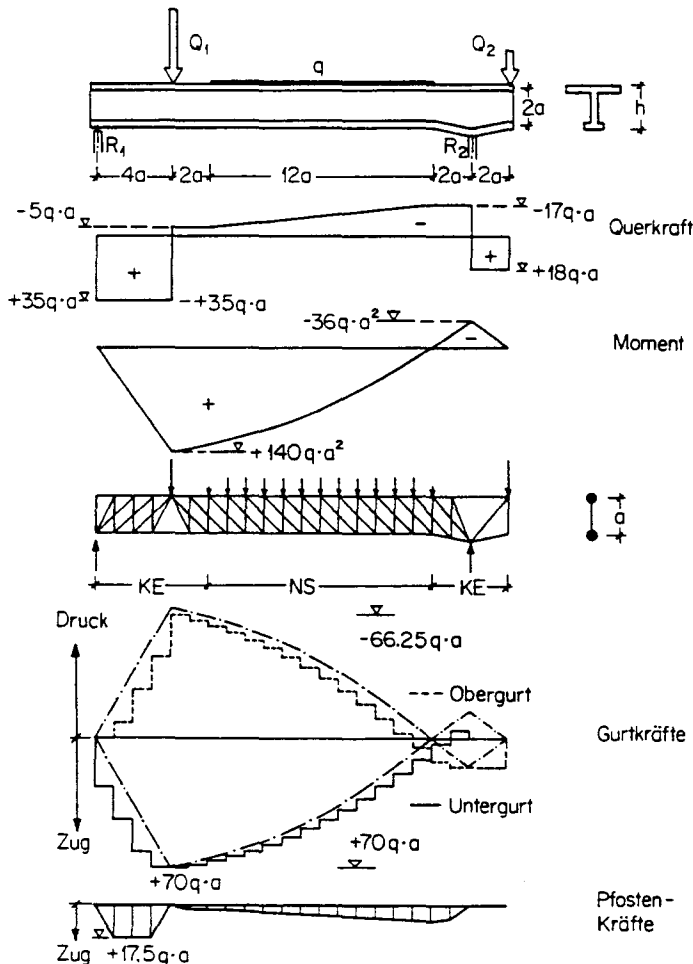


Bild 4.1

Bild 4.1 zeigt einen Balken mit einseitiger Voute und Auskrägung. Er wird mit den konzentrierten Einzellasten  $Q_1$ ,  $Q_2$  und den verteilten Lasten  $q$  vertikal belastet. Der mit Vertikalbügel und einer unteren und einer oberen Längsbewehrung ausgestattete Balken wird mit einem Fachwerkmodell nachgebildet.

Die Druckstreben werden durch den Stegbeton erzeugt. Sie stützen sich an den Enden auf die Bügel ab, die den vertikalen Pfosten eines Fachwerks entsprechen. Die Richtung der Diagonalenneigung ist, da der Beton nur Druck übertragen kann, vom Querkraftverlauf  $V$  abhängig. Sie ändert jeweils mit den Vorzeichen der Schnittgröße  $V$ . Im Beispiel von Bild 4.1 sind diese Stellen für die gewählten numerischen Werte ( $Q_1 = 40 \cdot q \cdot a$ ,  $Q_2 = 18 \cdot q \cdot a$ ) bei der Krafteinleitung  $Q_1$  und beim Auflager  $R_2$ . Für den Vorzeichenwechsel bei  $Q_1$  muss die Bedingung  $R_1 - Q_1 < 0$  erfüllt sein:

$$q \cdot a < \frac{2 \cdot Q_1 + Q_2}{48}$$

Von der Fachwerkmodellbildung ging schon MÖRSCH bei der Interpretation seiner Versuche aus. Er erkannte, dass sich zwei verschiedene Zonen im Stegbereich bilden. Zu unterscheiden sind der normale Schubbereich (NS) und der Krafteinleitungsbereich (KE), der sich durch die Fächerung der Druckstreben hervorhebt. Bei der direkten Abstützung von  $Q_2$  auf das Auflager  $R_2$  wird überhaupt keine Schubbewehrung benötigt.

Ein Vergleich der Momentenlinie des Balkens mit den Gurtkräften des Fachwerkmodells zeigt, dass die Zugbewehrung für die Druckstrebenabstützung über die Momentenlinie hinaus verlängert werden muss.

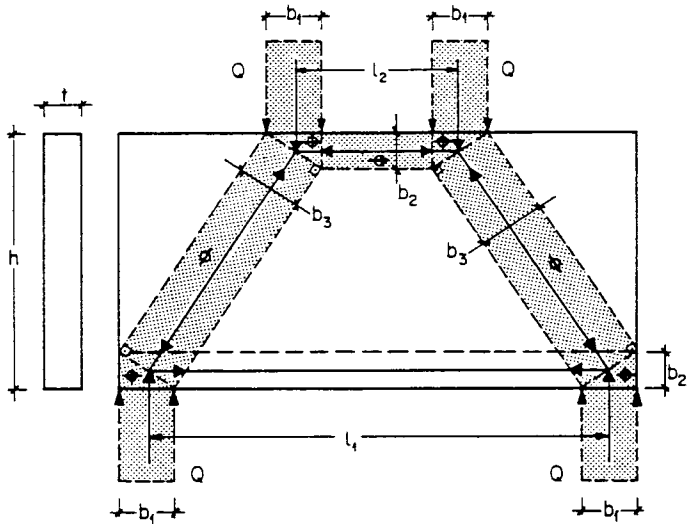


Bild 4.2

Mit dem einfachen Beispiel von Bild 4.1 sind die wesentlichen Merkmale einer Schubbemessung aufgezeigt. Auch die direkte Abstützung ist eingeführt, ohne dass auf die massgebenden Bemessungsgrößen eingegangen wird. Am typischen Fall von Bild 4.2 wird ersichtlich, dass den diskreten Fachwerkstäben des Modells endliche Abmessungen  $b$  im effektiven Tragwerk entsprechen (vgl. Kapitel 6).

Im Kapitel 4 wird nur auf den normalen Schubbereich eingegangen. Die Kräfteinleitung und die direkte Abstützung sind Gegenstand des Kapitels 6, wo auch die

notwendigen Grundlagen zur Behandlung allgemeiner Wand- und Scheibenprobleme erarbeitet werden. Immerhin soll schon dieses Kapitel vom reinen Querschnittsdenken der Balkentheorie wegführen.

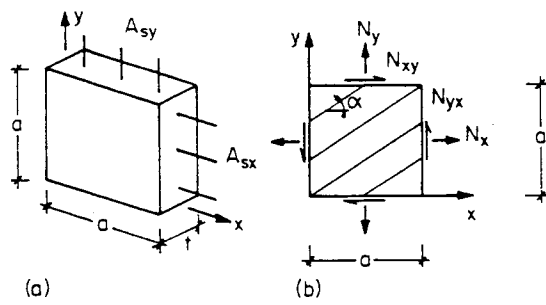
In einem kurzen Abriss wird die Entwicklung dargestellt, auf der das Kapitel 4 aufgebaut ist. LAMPERT (1970), GROB (1975) und LÜCHINGER (1977) haben in ihren Arbeiten das Fachwerk weiterentwickelt. Mit dem sich auf die fließende Längs- und Schubbewehrung einstellenden Neigungswinkel der Diagonalen haben sie die Fachwerktheorie mit optimaler Druckstrebenneigung begründet. In der Autographie von THÜRLIMANN, GROB und LÜCHINGER (1975) [4.1] ist mit diesem Modell der Bruchwiderstand von Trägern mit dünnwandigem Querschnitt unter Torsion, Biegung und Querkraft bestimmt worden. Aufgrund dieser Resultate entstand die Richtlinie 34 (1976) zur Norm SIA 162 (1968).

MÜLLER (1978) [4.2] und MARTI (1980) [4.3] erweiterten das auf die Balkentheorie beschränkte Fachwerkmodell. Sie untersuchten Stahlbetonscheiben mit allgemeinen Druckspannungsfeldern für den Beton und einachsialen Zug- und Druckspannungsfeldern für die Bewehrungen in deren Richtungen. In beiden Arbeiten werden der nahtlose Uebergang von den normalen Schubbereichen zu den Kräfteinleitungsstellen und die direkte Abstützung ohne Schubbewehrung auf der Basis der Plastizitätstheorie für Scheiben behandelt.

#### 4.2 Schubwandelement

Wird den diskreten Druckstreben des Fachwerks von Bild 4.1 in der Stegebene des normalen Schubbereichs (NS) eine endliche Breite gegeben, so dass sie sich gerade gegenseitig berühren, resultiert ein kontinuierliches, paralleles Betondruckspannungsfeld. Bild 4.3 zeigt ein aus diesem Druckspannungsfeld herausgeschnittenes quadratisches Element (a·a).

Das kontinuierliche Druckspannungsfeld ist unter dem Winkel  $\alpha$  zur x-Achse geneigt. In den orthogonalen Richtungen x und y sind die Bewehrungen  $A_{sx}$  und  $A_{sy}$  eingelegt. Die Beanspruchung des Scheibenelementes (a·a) ist durch die Kräfte  $N_x$ ,  $N_y$  und  $N_{xy}$  an den Rändern ge-

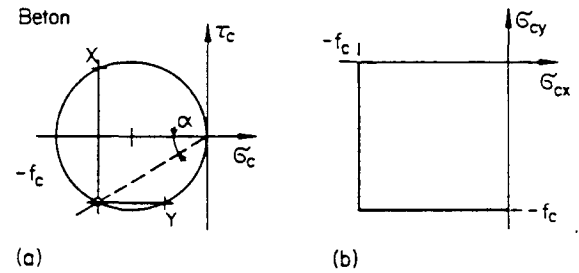


(a)

(b)

(c)

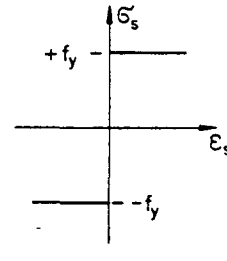
Bild 4.3



(a)

(b)

Stahl



(c)

Bild 4.4

gegeben. Diese Kräfte werden durch die Druckspannungen  $\sigma_c$  des Betons und die Stahlspannungen  $\sigma_{sx}$  und  $\sigma_{sy}$  des orthogonalen Bewehrungsnetzes im Gleichgewicht gehalten.

Für den Beton, die Bewehrung und den Verbund zwischen Beton und Stahl wird gemäss Kapitel 1 vorausgesetzt (Bild 4.4):

1. Der Beton ist ein homogenes, isotropes, ideal plastisches Material mit der Fließbedingung:

$$-f_c \leq \sigma_c \leq 0 \quad (4.1)$$

Der Wert  $f_c$  bezeichnet die einachsiale Druckfestigkeit.

2. Die Bewehrungsstäbe nehmen nur Kräfte in ihrer Stabrichtung auf. Angenommen wird ebenfalls ein ideal plastisches Stoffverhalten:

$$-f_y \leq \sigma_s \leq +f_y \quad (4.2)$$

3. Zwischen dem Beton und der Bewehrung wird ein starrer Verbund vorausgesetzt.

Die Gleichgewichtsbeziehungen für das Schubwandelement von Bild 4.3 lauten:

$$N_x = \sigma_{sx} \cdot A_{sx} + \sigma_c \cdot a \cdot t \cdot \cos^2 \alpha \quad (4.3)$$

$$N_y = \sigma_{sy} \cdot A_{sy} + \sigma_c \cdot a \cdot t \cdot \sin^2 \alpha \quad (4.4)$$

$$N_{xy} = N_{yx} = \sigma_c \cdot a \cdot t \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad (4.5)$$

Verschwinden die Kräfte  $N_x$  und  $N_y$ , befindet sich das Element im Zustand reinen Schubes.

Mit den mechanischen Bewehrungsgehalten

$$\omega_x = \frac{A_{sx} \cdot f_y}{a \cdot t \cdot f_c} \quad \text{und} \quad \omega_y = \frac{A_{sy} \cdot f_y}{a \cdot t \cdot f_c} \quad (4.6)$$

ergeben sich aus den Gleichungen (4.3) und (4.4) die Beziehungen

$$\cos^2 \alpha = -\omega_x \cdot \frac{\sigma_{sx}}{f_y} \cdot \frac{f_c}{\sigma_c} \quad (4.7)$$

$$\sin^2 \alpha = -\omega_y \cdot \frac{\sigma_{sy}}{f_y} \cdot \frac{f_c}{\sigma_c} \quad (4.8)$$

Die Winkelfunktionen (4.7) für  $\cos \alpha$  und (4.8) für  $\sin \alpha$  können in die Gleichung (4.5) eingesetzt werden. Dabei sind vier Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: Fließen der Bewehrungen  $A_{sx}$  und  $A_{sy}$

$$\sigma_{sx} = \sigma_{sy} = f_y \quad (4.9)$$

Die Bewehrungen haben die Fließgrenze in beiden Richtungen erreicht. Werden die beiden Gleichungen (4.7) und (4.8) addiert, wobei die Gl. (4.9) mitberücksichtigt wird, resultiert die Beziehung

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = -(\omega_x + \omega_y) \cdot \frac{f_c}{\sigma_c} = 1 \quad (4.10)$$

Da die Ungleichung (4.1) erfüllt sein muss, führt die Gl. (4.10) zur Bedingung

$$-\frac{\sigma_c}{f_c} = \omega_x + \omega_y \leq 1 \quad (4.11)$$

Unter der Voraussetzung von Gl. (4.11) kann die Gl. (4.5) neu formuliert werden:

$$\frac{N_{yx}}{\sigma_c \cdot a \cdot t} = \frac{\tau_{yx}}{\sigma_c} = -\frac{f_c}{\sigma_c} \cdot \sqrt{\omega_x \cdot \omega_y} \quad (4.12)$$

und nach der Elimination von  $\sigma_c$ :

$$-\frac{\tau_{yx}}{f_c} = \sqrt{\omega_x \cdot \omega_y} \quad , \quad \tan \alpha = \sqrt{\omega_y / \omega_x} \quad (4.13)$$

Für alle weiteren Fälle wird die Ungleichung (4.11) verletzt:

$$\omega_x + \omega_y > 1 \quad (4.14)$$

Fall 2: Fließen der  $A_{sy}$ -Bewehrung und Stauchen des Betons

$$\omega_y \leq 0.5 \quad \text{und} \quad \omega_x > 1 - \omega_y \quad (4.15)$$

$$\sigma_c = -f_c \quad \text{und} \quad \sigma_{sy} = f_y \quad (4.16)$$

Die Bewehrung in y-Richtung (Bügelbewehrung) hat die Fließgrenze und der Beton die Druckfestigkeit erreicht.

Die Gleichungen (4.7) und (4.8) lauten neu:

$$\sin^2 \alpha = \omega_y \quad (4.17)$$

$$\cos^2 \alpha = \omega_x \cdot \frac{\sigma_{sx}}{f_y} = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \omega_y \quad (4.18)$$

und damit folgt für  $\tau_{yx}$  und  $\alpha$ :

$$-\frac{\tau_{yx}}{f_c} = \sqrt{\omega_y \cdot (1 - \omega_y)}, \quad \tan \alpha = \sqrt{\omega_y / (1 - \omega_y)} \quad (4.19)$$

Fall 3: Fließen der  $A_{sx}$ -Bewehrung und Stauchen des Betons

$$\omega_x \leq 0.5 \quad \text{und} \quad \omega_y > 1 - \omega_x \quad (4.20)$$

$$\sigma_c = -f_c \quad \text{und} \quad \sigma_{sx} = f_y \quad (4.21)$$

Die Bewehrung in x-Richtung (Längsbewehrung) hat die Fließgrenze und der Beton die Druckfestigkeit erreicht. Die Lösungen werden analog zum Fall 2 bestimmt:

$$\cos^2 \alpha = \omega_x \quad (4.22)$$

$$\sin^2 \alpha = \omega_y \cdot \frac{\sigma_{sy}}{f_y} = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \omega_x \quad (4.23)$$

$$-\frac{\tau_{yx}}{f_c} = \sqrt{\omega_x \cdot (1 - \omega_x)}, \quad \tan \alpha = \sqrt{(1 - \omega_x) / \omega_x} \quad (4.24)$$

Fall 4: nur Stauchen des Betons

$$\omega_x \geq 0.5, \quad \omega_y \geq 0.5, \quad \sigma_c = -f_c. \quad (4.25)$$

Der Beton erreicht die Druckfestigkeit, ohne dass eine der Bewehrungsrichtungen ins Fließen kommt.

Die Gleichung für  $\tau_{yx}$  muss maximiert werden:

$$-\frac{\tau_{yx}}{f_c} = \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad (4.26)$$

$$\frac{d\tau_{yx}}{d\alpha} = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 0 \quad (4.27)$$

$$-\frac{\tau_{yx}}{f_c} = \frac{1}{2}, \quad \tan \alpha = 1.0 \quad (4.28)$$



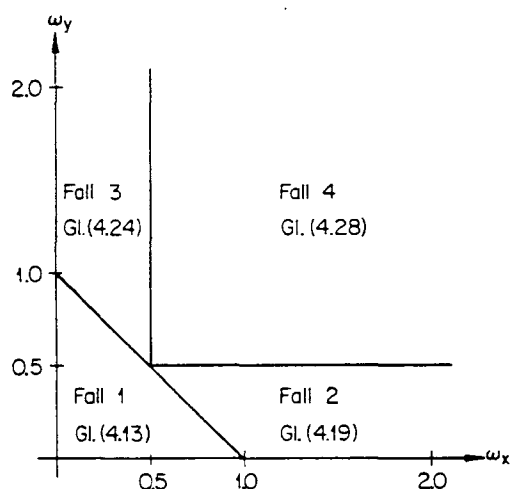


Bild 4.5

Damit sind alle möglichen Fälle behandelt. Die Gültigkeitsbereiche der Lösungen für die Schubspannungen  $\tau_{yx}$  sind in Funktion der mechanischen Bewehrungsgehalte  $\omega_x$  und  $\omega_y$  im Bild 4.5 aufgezichnet.

Aus den Gleichungen der Fälle 1 bis 4 lassen sich Diagramme (Bilder 4.6 und 4.7) herleiten, die die Abhängigkeit der orthogonalen Bewehrungen  $\omega_x$  und  $\omega_y$ , des Neigungswinkels  $\alpha$  und der Druckspannungen  $\sigma_c$  in Funktion der Schubbeanspruchungen  $\tau_{yx}$  entlang den Rändern zeigen. MARTI und THÜRLIMANN (1981/82) haben für den Fall 1 die gleichen Darstellungen verwendet.

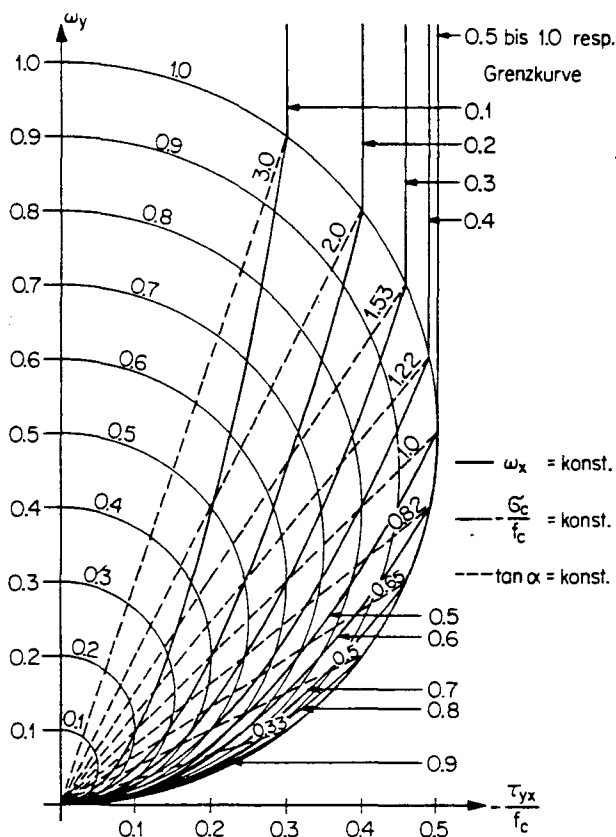


Bild 4.6

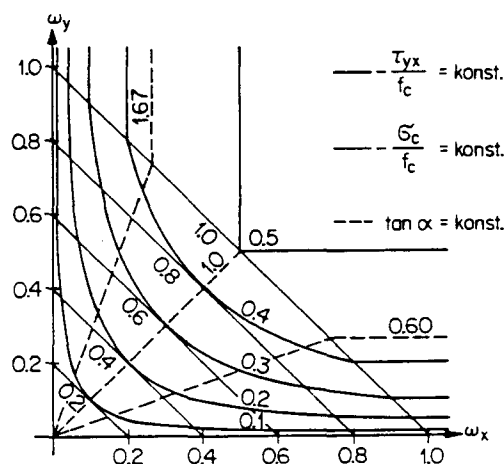


Bild 4.7

Die Grenzkurve im Diagramm von Bild 4.6 ist, wie im Abschnitt 4.3 gezeigt wird, für die Schubbemessung von Balken mit vertikaler Bügelbewehrung von Bedeutung. Schubwandelemente mit schiefer Bewehrung werden im Anhang A diskutiert.

Mit dem untersuchten Schubwandelement ist eine wichtige Grundlage für die Schubbemessung von Balken gegeben. In allen hergeleiteten Formeln ist davon ausgegangen worden, dass der Beton unabhängig von den äusseren Beanspruchungsverhältnissen, den Randbedingungen und der Neigung  $\alpha$  des diagonalen Druckspannungsfeldes die Druckfestigkeit  $f_c$  erreicht.

Die Druckspannungsfelder haben in Versuchen abhängig von den Elementbeanspruchungen ( $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$ ), den Randbedingungen und dem Bewehrungsgehalt ( $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ) bei Spannungswerten  $f_c$  versagt, die bedeutend unter der Druckfestigkeit  $f_{cw}$  lagen. Bei Schubwandelementen mit verstärkten Randzonen sind jedoch auch Festigkeitswerte nachgewiesen worden, die über der Druckfestigkeit  $f_{cw}$  lagen.

Aufgrund von Versuchsergebnissen an Stegen von Balken wird für die effektive Druckfestigkeit des diagonalen Spannungsfeldes folgende Näherung vorgeschlagen:

$$f_{cv} = f_{co} \sin 2\alpha \quad (4.29)$$

Im Vernehmlassungsentwurf Norm SIA 162 [4.4] wird der Maximalwert von  $f_{co}$  vom Bügelabstand abhängig gemacht

$$\begin{aligned} s \leq z/3 \quad \text{resp.} \quad s \leq 200 \text{ mm} & \quad f_{co}/f_c = 0.70 \\ z/3 \leq s \leq z/2 \quad \text{resp.} \quad 200 \text{ mm} \leq s \leq 300 \text{ mm} & \quad f_{co}/f_c = 0.50 \end{aligned}$$

wobei  $f_c = 0.65 f_{cw, \min}$  (2%-Fraktile).

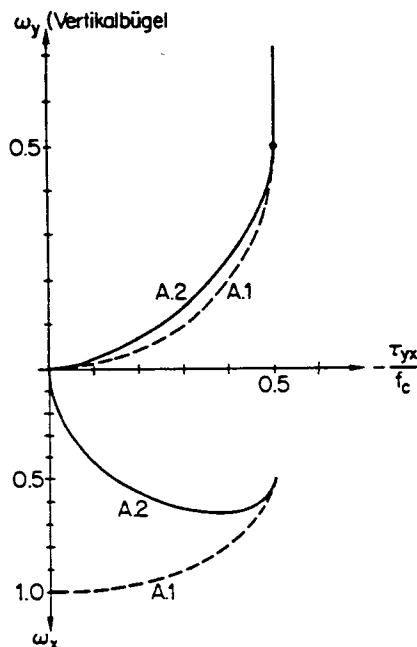
Im Anhang B wird ein Vorschlag erläutert, der auch äussere Membranspannungen  $\sigma_x$  im Steg berücksichtigt.

Wird in der Beziehung (4.29)  $f_{co} = f_c$  gesetzt, kann das Schubwandelement mit fliessender  $A_{sy}$ -Bewehrung und ausgenützter Druckfestigkeit im diagonalen Spannungsfeld neu berechnet werden:

$$-\frac{\tau_{yx}}{f_c} = \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sin 2\alpha = \frac{\sin^2 2\alpha}{2} \quad (4.30)$$

$$\omega_y = \sin^2 \alpha \cdot \sin 2\alpha \quad (4.31)$$

$$\omega_x = \cos^2 \alpha \cdot \cos 2\alpha \quad (4.32)$$



Die Resultate sind im Bild 4.8 durch die Kurven A.2 dargestellt. Sie können mit den Kurven A.1, die den ursprünglichen Beziehungen mit konstanter Druckfestigkeit  $f_c$  entsprechen, verglichen werden.

Bild 4.8

### 4.3 Schubbemessung von Parallelträgern

Bild 4.9 zeigt einen gleichförmig belasteten Balken mit Vouten in den Auskragungen. Der Querschnitt kann als T-Form, als Kasten mit Druck- und Zugflansch oder als einfache Rechteckform ausgebildet sein. Der Stegbereich entspricht mit Ausnahme der Auflagerzonen dem in der Einführung erwähnten normalen Schubbereich (NS). Die wirksame Steghöhe  $a$  wird an den Rändern durch Druck- und Zugelemente, die als Stringer bezeichnet werden, begrenzt. Bild 4.9 macht deutlich, dass ein Schnitt durch den Träger mit der Elementlänge  $a \cdot \cot \alpha$  verknüpft ist. Eine Bemessung von Querschnitt zu Querschnitt ist daher nur beschränkt zulässig.

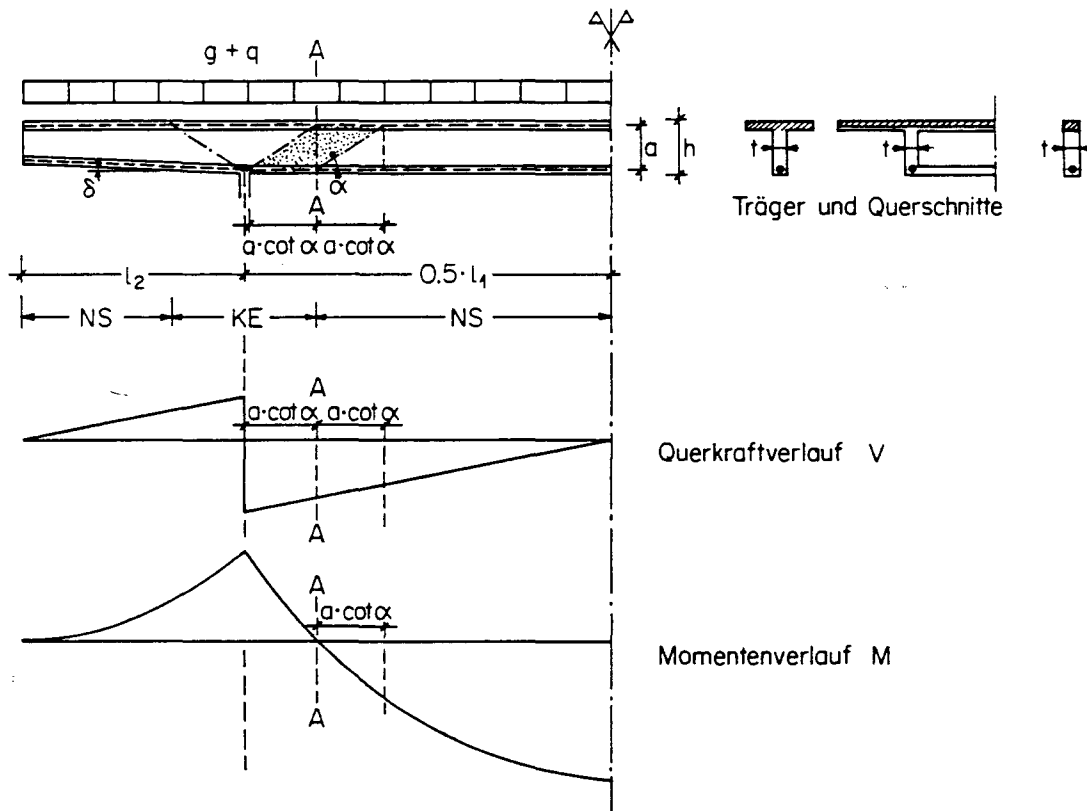


Bild 4.9

In diesem Abschnitt werden vorerst nur Parallelträger (Balken ohne Vouten) betrachtet. Ist ein Balken vorwiegend auf Biegung und Schub beansprucht, wobei die Betondruckzone infolge Biegung auf maximal die halbe Querschnittshöhe beschränkt sein soll, entspricht die wirksame Steghöhe  $a$  gerade dem inneren Hebelarm  $z$  (Bild 4.10). Die Stringer werden auf der Druckseite durch die Betondruckzone (eventuell verstärkt durch eine konstruktiv ohnehin vor-

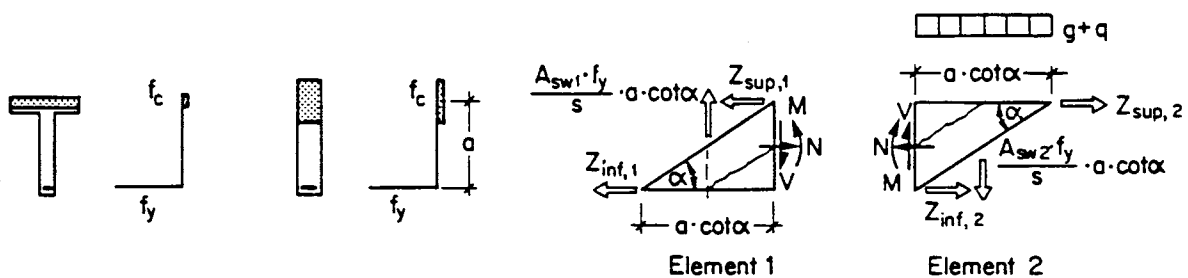


Bild 4.10

handene Druckbewehrung) und auf der Zugseite durch die gewöhnlich auf den Rand konzentrierte Längsbewehrung gebildet. Die Stegzone weist ein unter dem Winkel  $\alpha$  geneigtes, paralleles Betondruckspannungsfeld auf. An den Grenzen des Diagonalstreifens  $a \cdot \cot \alpha$  können je nach Verlauf der Querkraft  $V$  Spannungsdiskontinuitäten auftreten.

Die Stringerkräfte werden aus den Gleichgewichtsbedingungen aufgrund der Schnittgrößen  $M$ ,  $N$  und  $V$  an einem durch die Diagonalenennung  $\alpha$  herausgeschnittenen Dreieckselement bestimmt (Bild 4.10):

$$\begin{aligned} \text{Element 1: } Z_{\text{sup},1} &= -\frac{M}{a} + \frac{N}{2} + \frac{V \cdot \cot \alpha}{2} \\ \text{Element 2: } Z_{\text{inf},2} &= +\frac{M}{a} - \frac{N}{2} + \frac{V \cdot \cot \alpha}{2} \end{aligned} \quad (4.33)$$

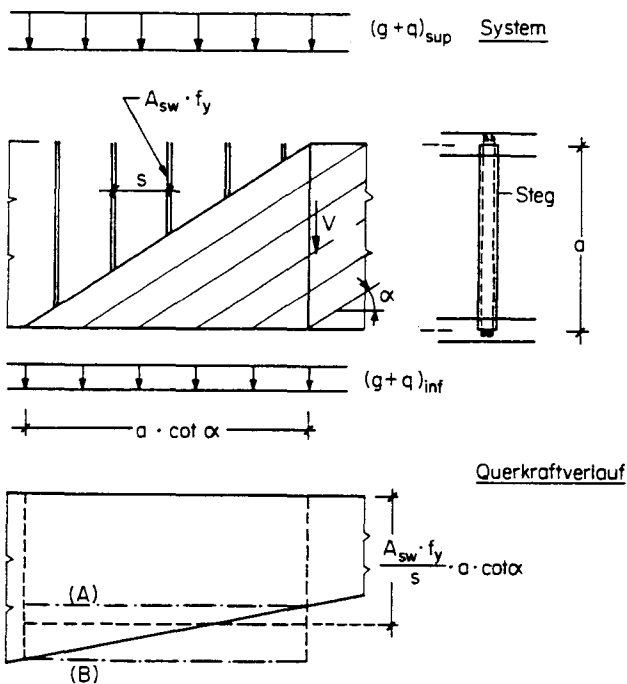


Bild 4.11

Der durch die Stringer  $Z_{\text{inf}}$  und  $Z_{\text{sup}}$  begrenzte Stegbereich ist im reinen Schubzustand. Die Querkraft  $V$  wird durch das geneigte Betondruckspannungsfeld auf die Randstringer und die Vertikalbügel übertragen. Die Gleichgewichtsbeziehung zwischen Querkraft und Bügelkräften wird durch den Angriffspunkt der Vertikallast massgebend beeinflusst. Greifen die Vertikallasten über dem Träger an, müssen die Bügel den Tiefstwert der Querkraft innerhalb der betrachteten Elementlänge  $a \cdot \cot \alpha$  übernehmen (Linie A im Bild 4.11). Wird die gesamte Last unter dem Träger angehängt, müssen die Bügel auf den Höchstwert der Querkraft innerhalb der betrachteten Elementlänge dimensioniert werden (Linie B im Bild 4.11). Beide Extremfälle gehen davon aus, dass die Eigenlast gegenüber der Nutzlast vernachlässigbar klein ist.

$$V_R = \frac{A_{\text{sw}} \cdot f_y}{s} \cdot a \cdot \cot \alpha \geq V + (g + q)_{\text{inf}} \cdot a \cdot \cot \alpha \quad (4.34)$$

Die Regel der Richtlinie 34 (1976) der Norm SIA 162 (1968), wonach der Nachweis der Bügelbewehrung im Bereich von Auflagern im Abstand  $0.5 \cdot a \cdot \cot \alpha$  zu erfolgen hat, geht also davon aus, dass je die Hälfte der Vertikallasten am oberen und unteren Trägerrand angreift.

Wird vorausgesetzt, dass die Stringer die in der Gl. (4.33) berechneten Gurtkräfte  $Z_{\text{inf}}$  und  $Z_{\text{sup}}$  aufnehmen, wird die mit Vertikalbügeln bewehrte Stegscheibe wie ein Schubwandelement im Abschnitt 4.2 bemessen.

Damit in der Praxis die Schubbewehrung von Trägern rasch bestimmt werden kann, ist ein einfaches Vorgehen für die Bemessung zu wählen. Die Ausführungen beschränken sich auf Stahl-

beton- und Spannbetonträger, die durch Biegemomente und Querkräfte beansprucht sind. Dabei soll im diagonalen Druckspannungsfeld einer Stegscheibe die effektive Druckfestigkeit  $f_c$  nicht überschritten werden.

### Erster Schritt

Die wirksame Steghöhe  $a$  wird mit der Bemessung der Längsbewehrung für das Biegemoment bestimmt. Sie entspricht im Normalfall dem inneren Hebelarm  $z$ . Die Krafteinleitungsbereiche werden von den normalen Schubbereichen abgegrenzt. Im Normalfall genügt es, den Nachweis im normalen Schubbereich durchzuführen.

### Zweiter Schritt

Im normalen Schubbereich darf für den Schubwiderstand der Wert  $V_R$  nicht überschritten werden. Damit soll verhindert werden, dass im Steg das diagonale Druckspannungsfeld gestaucht wird.

Für Vertikalbügel ( $\beta = 90^\circ$ ):

$$V_R = f_{co} \cdot z \cdot t \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \sin 2\alpha = f_{co} \cdot z \cdot t \cdot \frac{\sin^2 2\alpha}{2} \quad (4.35)$$

Für unter dem Winkel  $\beta$  geneigte Schrägbügel:

$$V_R = f_{co} \cdot \sin\beta \cdot z \cdot t \cdot (\cot\alpha + \cot\beta) \cdot \sin^2\alpha \cdot \sin 2\alpha \quad (4.36)$$

### Bemerkung:

Der Abminderungsfaktor  $\sin\beta$  ist empirisch eingeführt worden. Damit soll verhindert werden, dass mit Schrägbügeln allzu grosse Querkräfte übertragen werden, da diese im Krafteinleitungsbereich zu Problemen führen könnten. Die Auswertung vorhandener Versuchsergebnisse hat nicht ergeben, dass der Abminderungsfaktor  $\sin\beta$  erforderlich ist.

Der Wert für die wirksame Druckfestigkeit  $f_{co}$  im diagonalen Druckspannungsfeld des Betons kann vom Bügelabstand abhängig gemacht werden. Der Vernehmlassungsentwurf Norm SIA 162 [4.4] hat dieses Konzept gewählt.

Bügelabstand:

maximale wirksame Druckfestigkeit:

$$s \leq \frac{z}{3} \quad \text{und} \quad s \leq 200 \text{ mm} \quad f_{co} = 0.70 \cdot f_c \quad (4.37)$$

$$\frac{z}{3} < s \leq \frac{z}{2} \quad \text{und} \quad 200 \text{ mm} < s \leq 300 \text{ mm} \quad f_{co} = 0.50 \cdot f_c \quad (4.38)$$

### Bemerkung:

Schrägbügel sollten im allgemeinen nicht flacher als  $45^\circ$  eingelegt werden.

Extrem flache Neigungswinkel der diagonalen Druckspannungsfelder sollten ausgeschlossen werden. Eine Ausnahme bilden die direkte Abstützung (vgl. Kapitel 6 und 7) und Stege, die mit hohen äusseren Normalkräften beansprucht werden.

Die meisten Normen verlangen in den Tragelementen eine konstruktive Mindestbewehrung. In der Norm SIA 162 [4.5] werden in den Stegbereichen von Balken und Plattenbalken Bügel mit einem Querschnitt von mindestens 0.15% des zugehörigen Betonquerschnittes verlangt. Der Vernehmlassungsentwurf Norm SIA 162 [4.4] hat diesen Wert sogar auf 0.20% erhöht.

$$\omega_{y,\min} = \rho_{\min} \cdot \frac{f_y}{f_c} = \frac{f_{co}}{f_c} \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sin 2\alpha \quad (4.39)$$

Mit der Gl. (4.39) können für gegebene Bewehrungsgehalte und Festigkeitswerte die zugehörigen minimalen Neigungswinkel des Druckspannungsfeldes bestimmt werden:

$$\sin^2 \alpha \cdot \sin 2\alpha = \rho_{\min} \cdot \frac{f_y}{f_{co}} \quad (4.40)$$

Die Formel (4.40) wird für die Festigkeitswerte  $f_y = 460 \text{ N/mm}^2$ ,  $f_{cw,\min} = 30 \text{ N/mm}^2$ ,  $f_c = 0.65 f_{cw,\min} = 19.5 \text{ N/mm}^2$  mit den oben erwähnten Mindestbewehrungsgehalten in der Tabelle 4.1 numerisch ausgewertet.

$\rho_{\min}$	$\omega_{y,\min}$	$f_{co} = 0.7 \cdot f_c$	$f_{co} = 0.5 \cdot f_c$
		$\tan \alpha$	
0.20%	0.0472	0.3487	0.3987
0.15%	0.0354	0.3122	0.3554

Tabelle 4.1

Dieses Beispiel zeigt deutlich, dass es vernünftiger wäre, den mechanischen Bewehrungsgehalt  $\omega$  anstelle des geometrischen Bewehrungsgehaltes  $\rho$  vorzuschreiben ( $\omega_{y,\min} = 0.03$ ).

Wird eine Minimalbewehrung von der Größenordnung, wie sie die SIA Normen vorsehen, gefordert, sind die Bereiche kleiner Querkraftbeanspruchungen automatisch abgedeckt. Zonen mit Schubbeanspruchungen  $\tau \leq \tau_c$  gehören in diese Bereiche. Im Bild 4.13 ist diese Tatsache durch die eingetragene Mindestbewehrung  $\omega_{y,\min} = 0.03$  veranschaulicht.

In der praktischen Bemessung empfiehlt es sich, den Neigungswinkel  $\alpha$  in den Grenzen

$$0.4 \leq \tan \alpha \leq 1 \quad (4.41)$$

zu wählen.

Bemerkung:

Sind die Stegscheiben Druckbeanspruchungen ausgesetzt, darf unter Berücksichtigung der günstigen Wirkung der Druckspannungen (vgl. Anhang B und Abschnitt 4.2) die untere Schranke unterschritten werden. Ist die Stegscheibe durch eine Zugkraft beansprucht, kann auch die obere Grenze des Neigungswinkels überschritten werden. In Kastenträgern, die durch Torsions- und Biegemomente beansprucht werden, finden sich Stegscheiben mit den kombinierten Schnittgrößen einer resultierenden Zugkraft oder Druckkraft und einer zugehörigen Querkraft. Diese kombinierten Beanspruchungen werden im Kapitel 5 behandelt.

Bemerkung:

In einem zusammenhängenden Querkraftbereich (Auflager oder Kräfteinleitung bis Vorzeichenwechsel der Querkraft) sollte der einmal gewählte Neigungswinkel  $\alpha$  des diagonalen Druckspannungsfeldes nicht abrupt geändert werden. Wenn diese Bedingung nicht eingehalten wird, ist die Fächerwirkung, die im Kapitel 6 behandelt wird, zu beachten, und die statische Zulässigkeit des Druckspannungsfeldes ist nachzuweisen.

Dritter Schritt

Mit dem für das Druckspannungsfeld gewählten Neigungswinkel  $\alpha$  werden die Bügelbewehrung und die aus der Querkraft zusätzlich resultierende Längsbewehrung ermittelt. Der Anteil der Stegbewehrung am Schubwiderstand  $V_R$  beträgt:

bei Trägern mit Vertikalbügeln

$$V_R = \frac{A_{sw(V)} \cdot f_y}{s} \cdot z \cdot \cot \alpha \quad (4.42)$$

bei Trägern mit Schrägbügel

$$\begin{aligned} V_R &= \frac{A_{swB(V)} \cdot f_y}{s_B} \cdot z \cdot (\cot \alpha + \cot \beta) \cdot \sin^2 \beta \\ &= \frac{A_{swB(V)} \cdot f_y}{s} \cdot z \cdot (\cot \alpha + \cot \beta) \cdot \sin \beta \end{aligned} \quad (4.43)$$

Die Bügelbewehrung des normalen Schubbereichs wird bis zum Auflager resp. bis zur Kräfteleitung durchgeführt.

Aus der Schrägstellung des Betondruckfeldes resultiert eine Längskraft. Diese verteilt sich entsprechend den Gleichgewichtsbeziehungen (4.33) je zur Hälfte auf den oberen und den unteren Stringer (oder wird gleichmässig über den Querschnitt verteilt). Dabei ist zu beachten, dass der durch die Druckkomponente des Biegemomentes (und der Normalkraft) kompensierte Anteil nicht zu bewehren ist.

Der Anteil der Querkraft an der Längsbewehrung des Zugstringers kann für Träger ohne Normalkraftbeanspruchung direkt angeschrieben werden:

Längsbewehrung von Trägern mit Vertikalbügeln:

$$A_{s1}(V) = \frac{1}{2} \cdot V_R \cdot \cot \alpha \cdot \frac{1}{f_y} \quad (4.44)$$

Längsbewehrung von Trägern mit Schrägbügel:

$$A_{s1}(V) = \frac{1}{2} \cdot V_R \cdot (\cot \alpha - \cot \beta) \cdot \frac{1}{f_y} \geq 0 \quad (4.45)$$

Bemerkung:

Wird eine Bügelbewehrung mit vorgespannten Stäben ausgeführt, ist die Streckgrenze als Fließgrenze des Spannstahls anzunehmen. Wird auch die Längsbewehrung mit vorgespanntem Stahl ausgeführt, sind gewisse Besonderheiten zu beachten. Diese werden erst im Abschnitt über Voutenträger diskutiert, damit auf den notwendigen theoretischen Grundlagen basiert werden kann.

Bild 4.12 zeigt qualitativ, wie sich das vorgeschlagene Bemessungsverfahren auf einen Durchlaufträger mit oben liegender verteilter Last auswirkt. Im Beispiel ist ein konstanter Neigungswinkel  $\alpha$  mit den zugehörigen Elementlängen  $a \cdot \cot \alpha$  für einen bestimmten Lastfall gewählt worden.

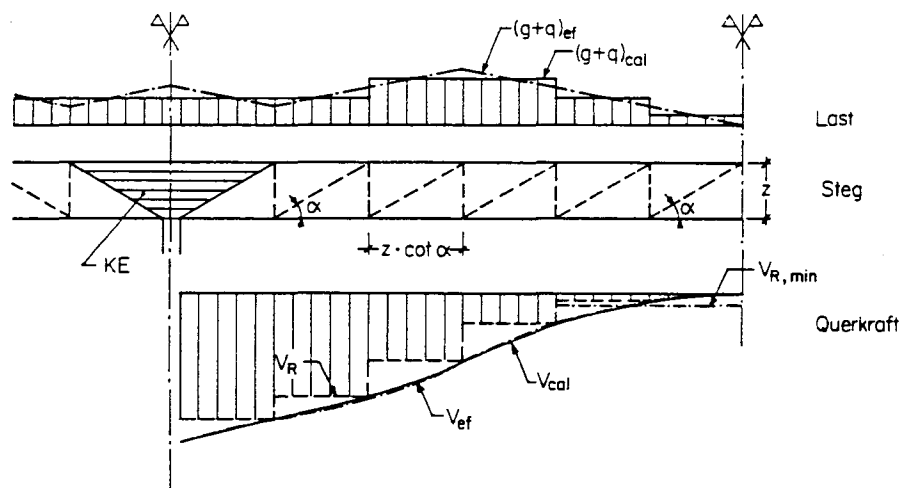


Bild 4.12

In der Praxis werden im allgemeinen einzelne Querschnitte eines Trägers bemessen. Werden dabei die Neigungen  $\alpha$  des Betondruckspannungsfeldes verändert, müssen die Bewehrungssprünge einer querschnittsweisen Bemessung um die Elementlänge  $a \cdot \cot \alpha$  überlappt werden. Ohne diese konstruktive Massnahme muss der Uebergangsbereich als statisch zulässiger Spannungszustand nachgewiesen sein.

In der plastischen Bemessung ist es nicht zulässig, mit Grenzwertlinien die Bewehrung zu bestimmen (vgl. Kapitel 2). Sie ist mit den massgebenden Lastkombinationen festzulegen.

Die minimalen Abweichungen zwischen der effektiven Querkraft  $V_{ef}$  und der rechnerischen Querkraft  $V_{cal}$  zeigen deutlich, dass eine beliebig verteilte Last zu abschnittsweise konstanten Lasten umgewandelt werden kann, ohne dass dadurch die Rechengenauigkeit wesentlich beeinflusst wird. Dabei entspricht im Bild 4.12 ein konstanter Lastabschnitt der betrachteten Elementlänge  $z \cdot \cot \alpha$ . Die Bügel der horizontal schraffierten Krafteinleitungszone über dem Auflager werden durch das anschliessende unten liegende Dreieckselement bestimmt. Die maximale Querkraft, auf die der Balken zu bemessen ist, befindet sich für eine vollständig oben liegende Auflast  $(g + q)_{sup}$  im Abstand  $z \cdot \cot \alpha$  vom Auflager entfernt. Sie verläuft über die betrachtete Elementlänge konstant, was zur aufgezeichneten Treppenkurve führt. Da für Stege von Balken eine minimale Bügelbewehrung gefordert wird, ist im Bereich des Vorzeichenwechsels die minimale Querkraft  $V_{R,min}$  abgedeckt.

Bild 4.13 zeigt einen Vergleich des Bemessungsvorschlages mit den bestehenden Normen SIA 162 (1968), Richtlinie 34 (1976) [4.5]. Dazu muss der Wert der Schubspannungsgrenze  $\tau_c$  der bisherigen Norm auf das Niveau des Vernehmlassungsentwurfs SIA 162 gebracht werden:

$$\tau_c = 0.40 \text{ N/mm}^2 + \frac{f_{cw,min}}{50} \leq 1.20 \text{ N/mm}^2$$



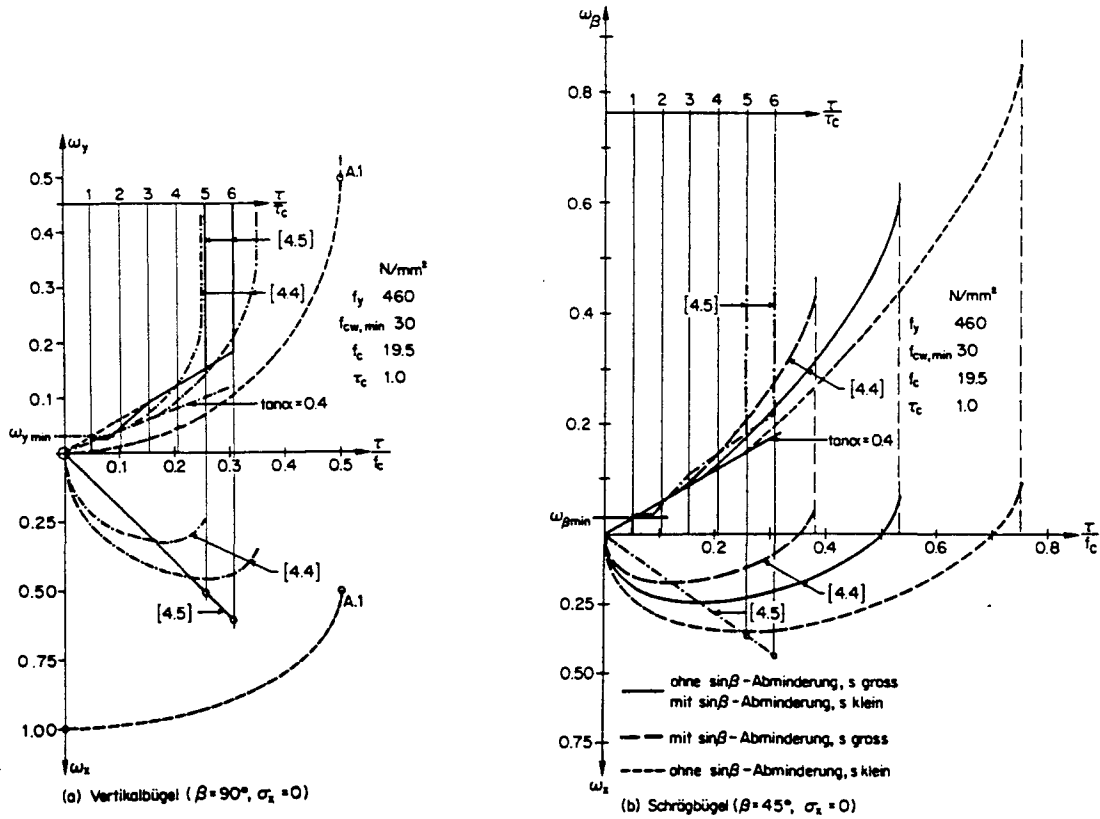
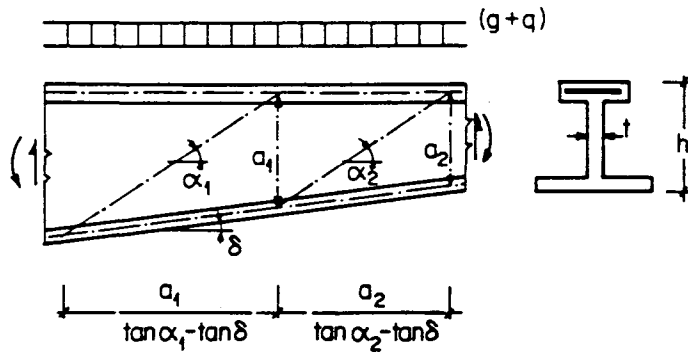


Bild 4.13

4.4 Schubbemessung von Voutenträgern

Bild 4.14 zeigt einen Voutenträger mit variabler Querschnittshöhe  $h$ . Der Zuggurt wird durch die oben liegende Bewehrung, der Druckgurt durch die unter dem Winkel  $\delta$  geneigte, unten liegende Betonplatte gebildet. Die wirksame Steghöhe  $a$  entspricht weiterhin dem inneren Hebelarm  $z$  der Gurtkräfte.

Die Stringerkräfte werden aus den Gleichgewichtsbedingungen aufgrund der Schnittgrößen  $M$  und  $V$  an einem durch die Diagonalenneigung  $\alpha$  herausgeschnittenen Dreieckelement bestimmt (Bild 4.14). Die Querkraft  $V$  wird durch das geneigte Betondruckspannungsfeld, die Vertikalbügel und die geneigte Stringerkraft  $Z_{inf}$  im Gleichgewicht gehalten.



Annahme:  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$

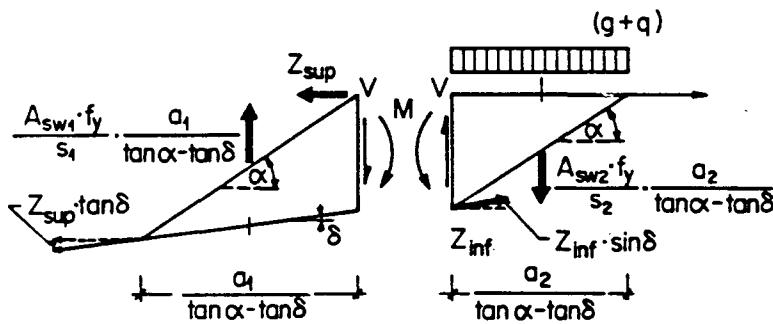


Bild 4.14

$$Z_{\text{sup}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\tan \delta}{\tan \alpha - \tan \delta}\right) = \frac{M}{a_1} + \frac{V}{2} \cdot \frac{1}{\tan \alpha - \tan \delta} \quad (4.46)$$

$$-Z_{\text{inf}} \cdot \cos \delta \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\tan \delta}{\tan \alpha - \tan \delta}\right) = \frac{M}{a_2} - \frac{V}{2} \cdot \frac{1}{\tan \alpha - \tan \delta} \quad (4.47)$$

$$\frac{A_{\text{sw1}} \cdot f_y}{s_1} \cdot \frac{a_1}{\tan \alpha - \tan \delta} = V - Z_{\text{sup}} \cdot \tan \delta \quad (4.48)$$

$$\frac{A_{\text{sw2}} \cdot f_y}{s_2} \cdot \frac{a_2}{\tan \alpha - \tan \delta} = V + Z_{\text{inf}} \cdot \sin \delta \quad (4.49)$$

Zwischen den Steghöhen  $a_1$  und  $a_2$  besteht die geometrische Beziehung

$$\frac{a_2}{a_1} = 1 - \cot \alpha \cdot \tan \delta \quad (4.50)$$

Mit einem gewählten Neigungswinkel  $\alpha$  können nacheinander die Gurtkräfte  $Z_{\text{inf}}$ ,  $Z_{\text{sup}}$  und anschliessend die Bügelkräfte pro Einheitslänge berechnet werden.

Mit Ausnahme der günstigen Wirkung der inneren Stringerkraft  $Z_{\text{inf}}$  auf die Schubbewehrung ergeben sich keine Unterschiede zur Querkraftbemessung eines Parallelträgers. Der Bemessungsvorschlag von Abschnitt 4.3 kann somit auch für Voutenträger verwendet werden.

Durch entsprechende Umformung der Gleichungen (4.46) bis (4.49) und unter Berücksichtigung der Beziehung (4.50) kann das Verhältnis der Bügelkräfte in benachbarten Elementen bestimmt werden.

$$\frac{A_{sw1}}{s_1} \cdot \frac{s_2}{A_{sw2}} = (1 - \cot\alpha \cdot \tan\delta)^2 = \frac{a_2^2}{a_1^2} \quad (4.51)$$

Im Anhang C ist diese Beziehung noch einfacher hergeleitet worden. Gleichung (4.51) besagt, dass die Biegelkräfte (pro Einheitslänge) von benachbarten Dreieckelementen (Bereiche 1 und 2) umgekehrt proportional zum Quadrat ihrer wirksamen Steghöhen ändern.

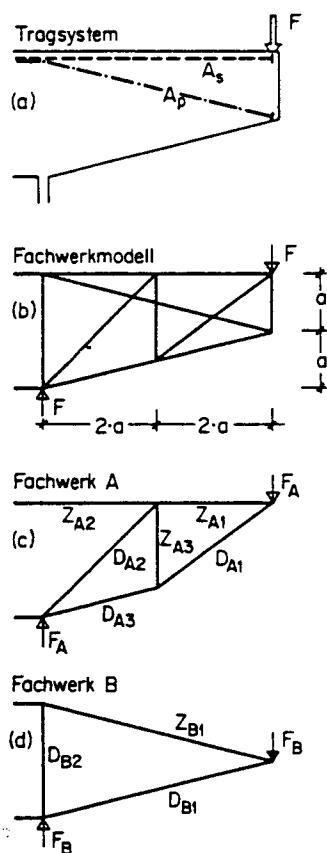


Bild 4.15

Bei Voutenträgern, vor allem im Brückenbau, kann es von Vorteil sein, die Spannungsfelder durch ihre Resultierenden zu ersetzen. Dadurch wird es möglich, Träger mit Zugstringern in verschiedenen Lagen in unabhängige Tragwerke aufzuteilen und diese getrennt zu berechnen. Am Schluss der Berechnung müssen die Spannungsergebnisse wieder zu Druckspannungsfeldern im Beton erweitert werden. Die Spannungen der sich kreuzenden Druckfelder müssen mit Hilfe des Mohrschen Spannungskreises oder der Transformationsgleichungen überlagert werden. Der resultierende Höchstwert der Spannungen darf die wirksame Druckfestigkeit  $f_{co}$  des Betons nicht überschreiten (vgl. Kapitel 6).

Der Kragträger von Bild 4.15 mit dem schlaffen Bewehrungsstahl und dem geeigneten Spannkabel  $A_p$  wird in zwei Fachwerke (Fachwerkstab = Spannungsergebnisse) aufgeteilt. Die beiden Tragwerke A und B werden getrennt für die Lasten  $F_A$  und  $F_B$  berechnet.

Die Gleichgewichtsbeziehungen lauten:

$$\begin{aligned} F_A + F_B &= F \\ Z_{A1} &= \frac{4}{3} \cdot F_A \quad ; \quad Z_{A2} = 2 \cdot F_A \quad ; \quad Z_{A3} = \frac{2}{3} \cdot F_A \\ D_{A1} &= -\frac{5}{3} \cdot F_A \quad ; \quad D_{A2} = -\frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3} \cdot F_A \quad ; \quad D_{A3} = -\frac{\sqrt{17}}{3} \cdot F_A \\ Z_{B1} &= \frac{\sqrt{17}}{2} \cdot F_B \\ D_{B1} &= -\frac{\sqrt{17}}{2} \cdot F_B \quad ; \quad D_{B2} = -\frac{F_B}{2} \end{aligned} \quad (4.52)$$

Wird Stahlfließen massgebend, so folgt für über den Träger konstante Stahlflächen  $A_s$  und  $A_p$  aus den Beziehungen (4.52):

$$\begin{aligned} Z_{A2} &= A_s \cdot f_{ys} = 2 \cdot F_A \quad \text{resp.} \quad F_A = \frac{A_s \cdot f_{ys}}{2} \\ Z_{B1} &= A_p \cdot f_{yp} = \frac{\sqrt{17}}{2} \cdot F_B \quad \text{resp.} \quad F_B = \frac{2}{\sqrt{17}} \cdot A_p \cdot f_{yp} \end{aligned} \quad (4.53)$$

Mit den Verhältniszahlen

$$\lambda_f = \frac{f_{yp}}{f_{ys}} \quad \text{und} \quad \lambda_A = \frac{A_p}{A_s}$$

resultiert für die Auflast  $F$  der Ausdruck

$$F = F_A + F_B = A_s \cdot f_{ys} \cdot \left[ \frac{1}{2} + \lambda_f \cdot \lambda_A \cdot \frac{2}{\sqrt{17}} \right] \quad (4.54)$$

Ist das Spannkabel nicht mit dem Beton im Verbund, dürfen für die Vorspannkraft  $P$  Werte grösser  $P_0$  nur verwendet werden, wenn die auftretenden Deformationen entsprechende zusätzliche Dehnungen im Kabel ergeben.

Die Zugkraft im Spannkabel bewegt sich in den Grenzen

$$P_y \geq P \geq P_\infty$$

und ist eine Funktion der im Bruchzustand auftretenden maximalen Dehnungen im Spannkabel. Diese können näherungsweise ermittelt werden, wenn anstelle des starr-plastischen Stoffgesetzes ein elastisch-plastisches eingeführt wird. Diese Verformungsberechnung kann mit dem Fachwerkssystem durchgeführt werden. Dabei ist zu beachten, dass die diskreten "Betonstäbe" des Modells in Wirklichkeit aus dem gleichen Stegbeton entstammen. Diese Tatsache ist bei der Steifigkeit und der Fließgrenze der Fachwerkstäbe zu berücksichtigen.

Die Modellbildung und die Berechnungsmethode, die für das Beispiel des Kragträgers von Bild 4.15 angewendet worden sind, können auf beliebige Schubuntersuchungen von Hochbau- und Brückenträgern übertragen werden.

#### 4.5 Schub mit Querbiegung

Die Stege des Kastenträgers von Bild 4.16 werden durch die Querkraft  $V$  und zusätzlich durch Querbiegemomente  $m_w$  an den oberen und unteren Stegrändern beansprucht. Je nach Lastverteilung und Einspannung der Stegränder in den angrenzenden Platten ergeben sich unterschiedliche  $m_w$ -Verteilungen über die Steghöhe  $a$ . Im herausgeschnittenen Element der Länge  $a \cdot \cot \alpha$  von Bild 4.17 ist der ungünstigste Beanspruchungsfall eines konstanten Querbiegemomentenverlaufs über die Höhe  $a$  aufgezeichnet. Durch die Momentenbeanspruchung  $m_w$  wird das diagonale Druckspannungsfeld  $\sigma_{cw}$  gestört. Die ursprünglich gleichmässig über die Stegbreite verteilten Spannungen  $\sigma_{cw}$  im Bild 4.17 (a) werden auf den Bereich  $t_c$  im Bild 4.17 (b) zusammengedrängt. Das Spannungsfeld wird weiterhin konstant angenommen. Der Sprung der Diagonalspannungen in der Ebene A-A von der effektiven Druckfestigkeit  $f_c$  auf den Wert null ist statisch zulässig. Die Gleichgewichtsbeziehungen werden neu formuliert.

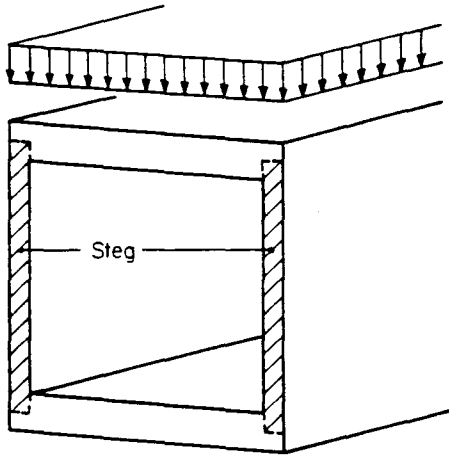


Bild 4.16

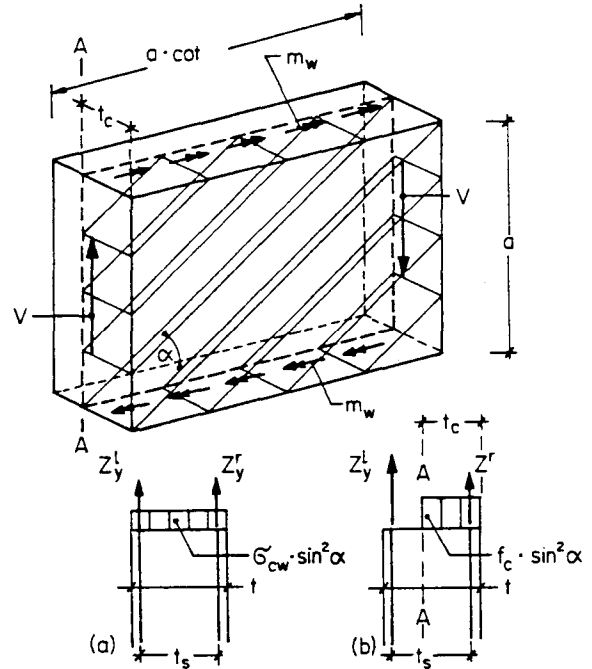


Bild 4.17

$$z_y^l + z_y^r = \frac{A_{sw} \cdot \sigma_s}{s} = f_c \cdot t_c \cdot \sin^2 \alpha \quad (4.55)$$

$$V = f_c \cdot t_c \cdot a \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = (z_y^l + z_y^r) \cdot \cot \alpha \quad (4.56)$$

$$m_w = (z_y^l - z_y^r) \cdot \frac{t_s}{2} + (z_y^l + z_y^r) \cdot \frac{t - t_c}{2} \quad (4.57)$$

Mit den Gleichungen (4.55) und (4.56) kann der Neigungswinkel  $\alpha$  eliminiert werden.

$$\frac{V}{a} = \sqrt{(z_y^l + z_y^r) \cdot (f_c \cdot t_c - z_y^l - z_y^r)} \quad (4.58)$$

Aus der Beziehung (4.58) resultiert im allgemeinen die maximale Beanspruchung, wenn die Bedingungen

$$z_y^l \geq z_y^r \quad \text{und} \quad \frac{z_y^l + z_y^r}{f_c \cdot t_c} \leq \frac{1}{2} \quad (4.59)$$

eingehalten werden.

Für die praktische Bemessung ist es vorteilhaft, die gewonnenen Resultate in einer anderen Form darzustellen. Dazu werden neue Bezugsgrößen eingeführt.

$$m_{wo} = z_y^l \cdot t_s \quad (4.60)$$

$$\lambda = \frac{z_y^l}{z_y^l + z_y^r} \quad (4.61)$$

$$\sigma_{cw} \cdot t = f_c \cdot t_c \quad \text{oder} \quad \frac{\sigma_{cw}}{f_c} = \frac{t_c}{t} \quad (4.62)$$

Mit diesen Beziehungen kann die Gleichung (4.57) umgewandelt werden in den Ausdruck

$$\frac{m_w}{m_{w0}} = 1 + \frac{1}{2 \cdot \lambda} \cdot \left\{ \frac{t}{t_s} \cdot \left( 1 - \frac{\sigma_{cw}}{f_c} \right) - 1 \right\} \quad (4.63)$$

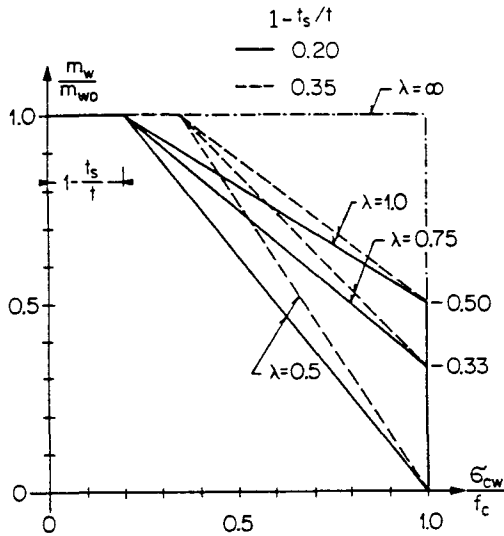


Bild 4.18

Diese Gleichung wird im Achsensystem  $m_w/m_{w0}$  und  $\sigma_{cw}/f_c$  für verschiedene  $\lambda$  und auch  $t_s/t$ -Verhältnisse im Bild 4.18 dargestellt. Damit die Bedeutung der Kurven verstanden wird, müssen die verschiedenen  $\lambda$ -Werte gemäss Gl. (4.61) erläutert werden.

Für  $\lambda = 0.5$  wirken beide Bewehrungsanteile des Bügels symmetrisch:  $z^r = z_y^1$ . Ist  $\lambda = 1.0$ , wird die gesamte Querkraft  $V$  durch den linken Bügelanteil  $z_y^1$  übernommen. Ueberträgt der rechte Bewehrungsanteil  $z^r$  eine Druckkraft, ergeben sich auch Werte  $\lambda > 1$ . Dieser Fall ist allerdings nicht von praktischer Bedeutung, da das Querbiegemoment nur unwesentlich gesteigert werden kann und gleichzeitig die vom Steg übertragene Querkraft  $V$  abnimmt. Im Grenzfall  $z^r = -z_y^1$  mit dem Wert  $\lambda = \infty$  führen die Gleichungen (4.63) und (4.58) zu den Resultaten

$$\frac{m_w}{m_{w0}} = 1.0 \quad \text{und} \quad \frac{V}{a} = 0$$

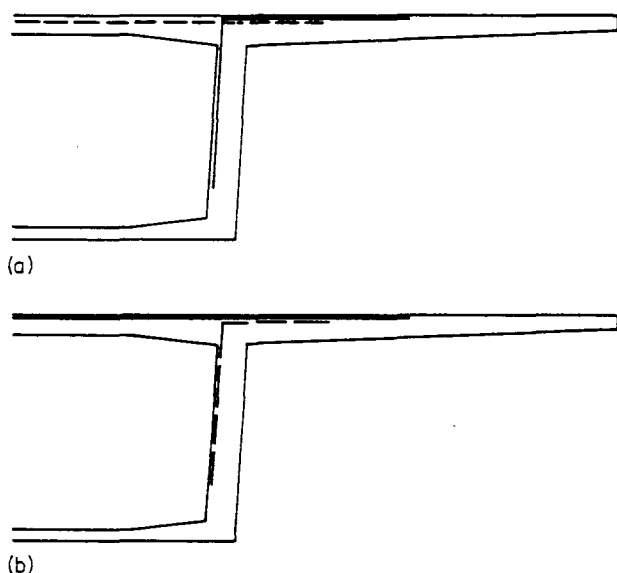
Die Kurven mit der Gl. (4.58) werden für geringe Diagonalspannungen  $\sigma_{cw}$  durch die Näherung  $m_w = m_{w0}$  abgeschnitten (Bild 4.18). Für die Bedingung

$$z_y^1 < (t - t_s) \cdot f_c - z^r \quad (4.64)$$

ist diese Annahme auf der sicheren Seite.

In der Dissertation von MARTI [4.3] ist das durch Querbiegemomente beanspruchte Schubwandelement mit über die Stegbreite sich änderndem Neigungswinkel  $\alpha$  ausführlich und umfassend behandelt worden.

Für die praktische Bemessung genügen die in diesem Abschnitt hergeleiteten Beziehungen. Zuerst wird der Steg nur für die Querkraft  $V$  und für eine symmetrische Bügelbewehrung gemäss den Ausführungen im Abschnitt 4.3 bemessen. Falls der Steg durch grosse Querbiegemomente beansprucht ist, darf aufgrund des Diagramms im Bild 4.18 die wirksame Druckfestigkeit  $f_c$  nicht ausgenützt werden. Wenn es die Grenzwerte der Schnittgrössen erlauben, kann eine Umverteilung der rechten und der linken Bewehrungsanteile vorgenommen werden. In extremen Fällen ist der Steg zu verbreitern.



Der Ingenieur muss sich in jedem Fall überlegen, ob er allzu grosse Querbiegemomente in den Steg einleiten will. Werden die Kragmomente einer Brückenplatte nur beschränkt mit einer Steg-Platten-Bewehrung angeschlossen, lassen sich extreme Beanspruchungen der Stege vermeiden (Bild 4.19). Dabei wird nicht aufgrund homogener Steifigkeitsverhältnisse bemessen, sondern es wird ein vernünftiger, statisch zulässiger Spannungszustand (M-Verteilung in Querrichtung) gewählt.

Bild 4.19

#### LITERATUR

- [4.1] Thürlimann B., Grob J., Lüchinger P.: "Torsion, Biegung und Schub in Stahlbetonträgern", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Autographie zum Fortbildungskurs für Bauingenieure, 1975.
- [4.2] Müller P.: "Plastische Berechnung von Stahlbetonscheiben und -balken", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Bericht Nr. 83, 1978. Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart.
- [4.3] Marti P.: "Zur plastischen Berechnung von Stahlbeton", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Bericht Nr. 104, 1980. Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart.
- [4.4] Schweizer Ingenieur- und Architekten-Verein (SIA) Zürich: Vernehmlassungsentwurf Norm SIA 162 'Betonbauten', August 1984.
- [4.5] Schweizer Ingenieur- und Architekten-Verein (SIA) Zürich: Norm SIA 162 'Norm für die Berechnung, Konstruktion und Ausführung von Bauwerken aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton' (1968), Richtlinie 34 (1976).
- [4.6] Kopenhagen: Sorensen H.C.: "Shear Tests on 12 Reinforced Concrete T-Beams", Danmarks Tekniske Højskole, Rapport Nr. R60, Kopenhagen 1974.  
Lyngberg B.S.: "Ultimate Shear Resistance of Partially Prestressed RC I-Beams", Struct. Res. Laboratory, Techn. Univ. of Denmark, Kopenhagen 1974.
- [4.7] London: Regan P.: "Shear in Reinforced Concrete", Imperial College of Science and Technology, Dept. of Civil Engineering, 1971.
- [4.8] Stuttgart: Leonhardt F., Walther R.: "Schubversuche an Plattenbalken mit unterschiedlicher Schubbewehrung", DAFStb, Heft 156, Berlin, Wilhelm Ernst + Sohn, 1963.  
Leonhardt F., Walther R.: "Schubversuche an einfeldrigen Stahlbetonbalken mit und ohne Schubbewehrung", DAFStb, Heft 151, Berlin, Wilhelm Ernst + Sohn, 1962.
- [4.9] Caflisch R., Thürlimann B.: "Schubversuche an teilweise vorgespannten Betonbalken", Institut für Baustatik + Konstruktion, ETH Zürich, Bericht Nr. 6504-2, 1970.  
Caflisch R., Krauss R., Thürlimann B.: "Biege- und Schubversuche an teilweise vorgespannten Betonbalken, Serie C", Institut für Baustatik + Konstruktion, ETH Zürich, Bericht Nr. 6504-3, 1971.
- [4.10] Trondheim: Hagberg T.: "Versuche an indirekt gelagerten Plattenbalken", Institut für Beton und Betonkonstruktionen, TH Trondheim, 1967.

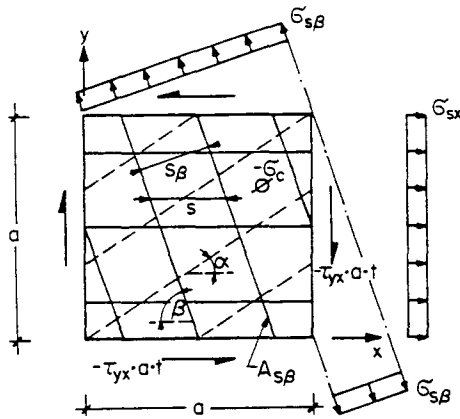


Bild 4.20

Anstelle der orthogonalen Bewehrungen  $\omega_x$  und  $\omega_y$  können auch schiefe Bewehrungen eingeführt werden. Mit einer unter dem Winkel  $\beta$  zur x-Achse geneigten Bewehrung  $A_{s\beta}$  lauten die entsprechenden Gleichgewichtsbedingungen gemäss Bild 4.20:

$$0 = \frac{A_{s\beta} \cdot \sigma_{s\beta}}{s_\beta} \cdot a \cdot \cos^2 \beta + \sigma_c \cdot a \cdot t \cdot \cos^2 \alpha + A_{sx} \cdot \sigma_{sx} \quad (4.65)$$

$$0 = \frac{A_{s\beta} \cdot \sigma_{s\beta}}{s_\beta} \cdot a \cdot \sin^2 \beta + \sigma_c \cdot a \cdot t \cdot \sin^2 \alpha \quad (4.66)$$

$$-\tau_{yx} \cdot a \cdot t = \frac{A_{s\beta} \cdot \sigma_{s\beta}}{s_\beta} \cdot a \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta - \sigma_c \cdot a \cdot t \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad (4.67)$$

oder ausgedrückt mit den mechanischen Bewehrungsgehalten

$$\omega_\beta = \frac{A_{s\beta} \cdot f_y}{s_\beta \cdot t \cdot f_c} \quad \text{und} \quad \omega_x \text{ gemäss Gl. (4.6):}$$

$$-\frac{\sigma_c}{f_c} \cdot \cos^2 \alpha = \omega_\beta \cdot \frac{\sigma_{s\beta}}{f_y} \cdot \cos^2 \beta + \omega_x \cdot \frac{\sigma_{sx}}{f_y} \quad (4.68)$$

$$-\frac{\sigma_c}{f_c} \cdot \sin^2 \alpha = \omega_\beta \cdot \frac{\sigma_{s\beta}}{f_y} \cdot \sin^2 \beta \quad (4.69)$$

$$-\frac{\tau_{yx}}{f_c} = \omega_\beta \cdot \frac{\sigma_{s\beta}}{f_y} \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta - \frac{\sigma_c}{f_c} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad (4.70)$$

Wie beim Schubwandelement mit orthogonaler Bewehrung lassen sich wieder vier Fälle unterscheiden.

Fall 1: Fließen der Bewehrungen  $A_{sx}$  und  $A_{s\beta}$

$$\sigma_{sx} = \sigma_{s\beta} = f_y$$

$$-\frac{\sigma_c}{f_c} = \omega_x + \omega_\beta \leq 1$$

$$-\frac{\tau_{yx}}{f_c} = \omega_\beta \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta + \sqrt{\omega_\beta \cdot \sin^2 \beta \cdot (\omega_x + \omega_\beta \cdot \cos^2 \beta)} \quad (4.71)$$



$$\tan\alpha = \sqrt{\omega_{\beta} \cdot \sin^2\beta / (\omega_x + \omega_{\beta} \cdot \cos^2\beta)} \quad (4.72)$$

Für die weiteren Fälle gilt auch hier  $\omega_x + \omega_{\beta} > 1$ .

Fall 2: Fließen der  $A_{s\beta}$ -Bewehrung und Stauchen des Betons

$$\sigma_{s\beta} = f_y, \quad \sigma_c = -f_c \quad \text{und} \quad \omega_{\beta} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \cos\beta}, \quad \omega_x > 1 - \omega_{\beta}$$

$$\frac{\sigma_{sx}}{f_y} \cdot \omega_x = \cos^2\alpha - \omega_{\beta} \cdot \cos^2\beta$$

$$\sin^2\alpha = \omega_{\beta} \cdot \sin^2\beta \quad \text{und} \quad \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \omega_{\beta} \cdot \sin^2\beta$$

$$-\frac{\tau_{yx}}{f_c} = \omega_{\beta} \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta + \sqrt{\omega_{\beta} \cdot \sin^2\beta \cdot (1 - \omega_{\beta} \cdot \sin^2\beta)} \quad (4.73)$$

$$\tan\alpha = \sqrt{\omega_{\beta} \cdot \sin^2\beta / (1 - \omega_{\beta} \cdot \sin^2\beta)} \quad (4.74)$$

Fall 3: Fließen der  $A_{sx}$ -Bewehrung und Stauchen des Betons

$$\sigma_{sx} = f_y, \quad \sigma_c = -f_c \quad \text{und} \quad \omega_x \leq 1 - \frac{1}{1 - \cos\beta}, \quad \text{mit } \beta > \frac{\pi}{3}$$

$$\cos^2\alpha = \omega_x \cdot \sin^2\beta + \cos^2\beta \quad \text{und} \quad \sin^2\alpha = \sin^2\beta \cdot (1 - \omega_x)$$

$$-\frac{\tau_{xy}}{f_y} = (1 - \omega_x) \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta + \sqrt{(1 - \omega_x) \cdot \sin^2\beta \cdot (\cos^2\beta + \omega_x \cdot \sin^2\beta)} \quad (4.75)$$

$$\tan\alpha = \sqrt{(1 - \omega_x) \cdot \sin^2\beta / (\cos^2\beta + \omega_x \cdot \sin^2\beta)} \quad (4.76)$$

Die Gleichungen (4.75) und (4.76) können direkt aus den Beziehungen (4.73) und (4.74) gewonnen werden, indem  $\omega_{\beta}$  durch  $(1 - \omega_x)$  ersetzt wird.

Fall 4: Nur Stauchen des Betons

$$\sigma_c = -f_c, \quad \sigma_{sx} < f_y \quad \text{und} \quad \sigma_{s\beta} < f_y$$

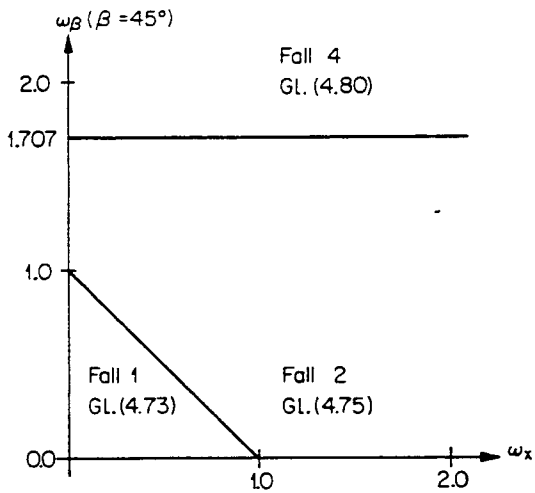
$$-\frac{\tau_{yx}}{f_c} = \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cot\beta$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial \alpha} = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cot\beta = 0$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\beta}{1 - \cos\beta} \quad \text{oder} \quad \tan 2\alpha = -\tan\beta \quad \text{resp.} \quad \alpha = \pi - \frac{\beta}{2} \quad (4.77)$$

$$-\frac{\tau_{yx}}{f_c} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin\beta}{1 - \cos\beta} \quad (4.78)$$

Die vertikalen Bügel entsprechen einem Winkel  $\beta = 90^\circ$ . Das wird durch die Auswertung der Gleichungen (4.71) bis (4.78) und durch den Vergleich mit den früher hergeleiteten Beziehungen im Abschnitt 4.2 bestätigt.



Für den Winkel  $\beta = 45^\circ$  sind die Gültigkeitsbereiche der möglichen Fälle in Abhängigkeit von den mechanischen Bewehrungsgehalten  $\omega_x$  und  $\omega_\beta$  im Bild 4.21 aufgezeichnet. Der Fall 3 fehlt, da die Zusatzbedingung  $\beta > 60^\circ$  verletzt wird.

In den Bildern 4.22 und 4.23 sind die Diagramme für unter  $45^\circ$  geneigte Schrägbügel dargestellt. Diese entsprechen den Bildern 4.6 und 4.7, die für die Vertikalbügel hergeleitet worden sind.

Bild 4.21

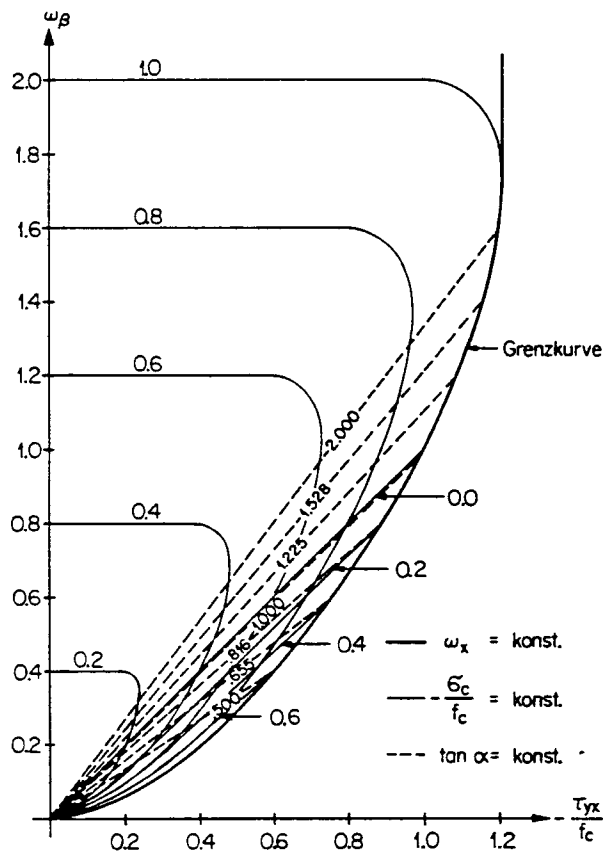


Bild 4.22

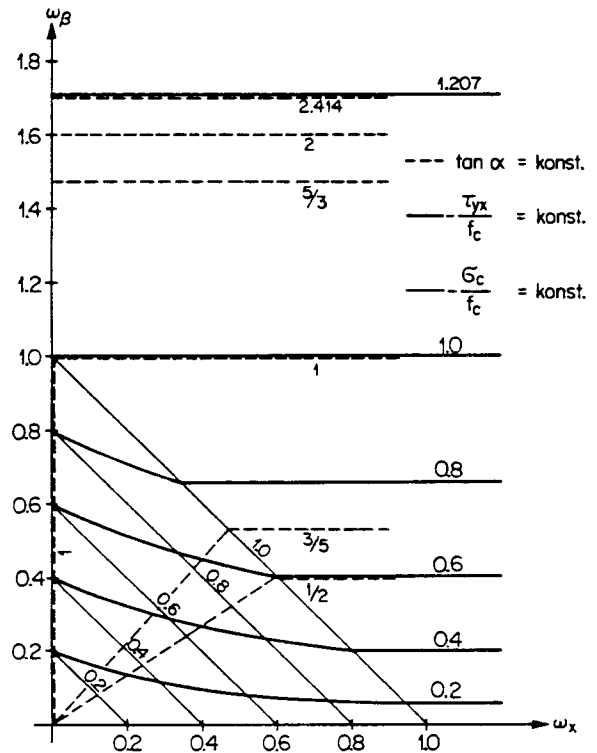


Bild 4.23

Für die Schubbemessung von Balken mit unter  $45^\circ$  geneigten Schrägbügeln ist die Grenzkurve von Bild 4.22 zu beachten.

Interessant ist auch ein Vergleich der Grenzkurven für Vertikalbügel und für unter  $45^\circ$  geneigte Schrägbügel. Dabei lassen sich zwei wichtige Unterscheidungsmerkmale aus Bild 4.24 herauslesen:

1. Mit unter  $45^\circ$  geneigten Schrägbügeln kann, wenn die Betonfestigkeit ausgenutzt wird, eine bedeutend höhere Schubbeanspruchung aufgenommen werden als mit Vertikalbügeln.
2. Beim gleichen Neigungswinkel  $\alpha$  für das Betondruckspannungsfeld und unter gleicher Schubbeanspruchung sind im Bereich  $\tan \alpha < 1$  mehr Schrägbügel und im Bereich  $\tan \alpha > 1$  weniger Schrägbügel als Vertikalbügel erforderlich.

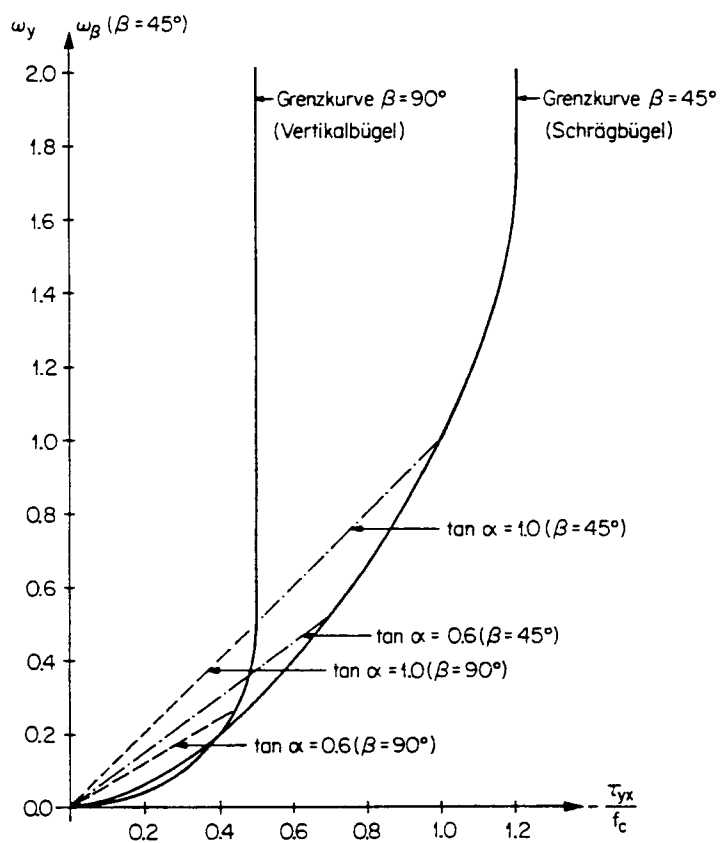


Bild 4.24

Aus der allgemein gültigen Gleichung für die Hauptspannungsrichtungen

$$\tan 2\alpha_0 = - \frac{2 \cdot \tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (4.79)$$

resultiert für den reinen Schubspannungszustand  $\tau_{yx}$  mit verschwindenden Membranspannungen  $\sigma_x = \sigma_y \equiv 0$  der Neigungswinkel  $\alpha_0 = 45^\circ$ . Aufgrund dieses Resultates wird angenommen, dass der Maximalwert der effektiven Druckfestigkeit gerade unter dem Winkel  $\alpha_0$  der Hauptspannungsrichtungen erreicht wird. Damit lässt sich die effektive Druckfestigkeit  $f_c$  in der verallgemeinerten Form

$$f_{cv} = f_{c0} \cdot \cos(2\alpha - 2\alpha_0) \quad (4.80)$$

anschreiben, wobei  $\alpha_0$  mit den vorhandenen Membranspannungen nach Gl. (4.79) berechnet wird.

Für  $\alpha_0 = 45^\circ$  kann der in der Beziehung (4.80) verwendete Winkel  $\alpha_0$  eliminiert werden. Dadurch resultiert der in der Gl. (4.29) angenommene Ausdruck

$$f_{cv} = f_{c0} \cdot \sin 2\alpha$$

Der Verlauf von  $f_{cv}$  in Abhängigkeit der beiden Winkel  $\alpha_0$  und  $\alpha$  ist im Bild 4.25 dargestellt.

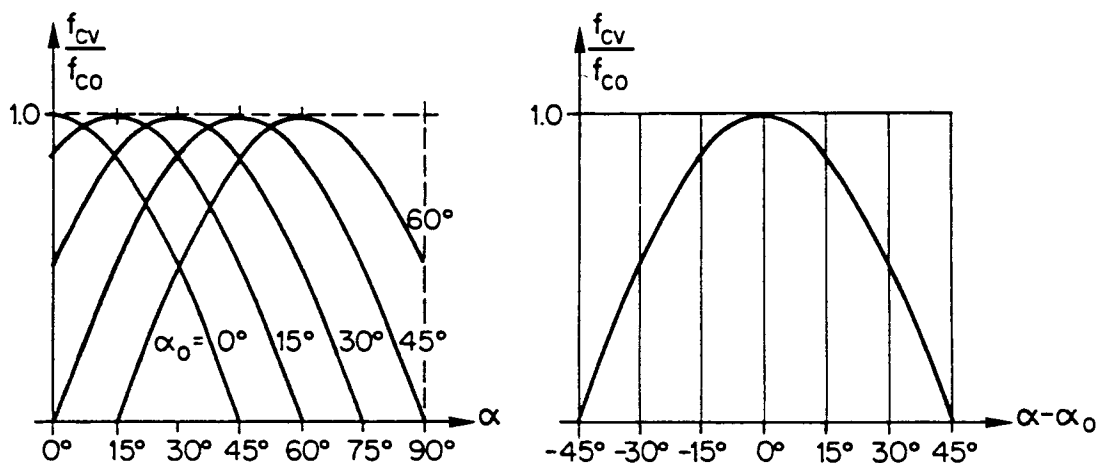


Bild 4.25

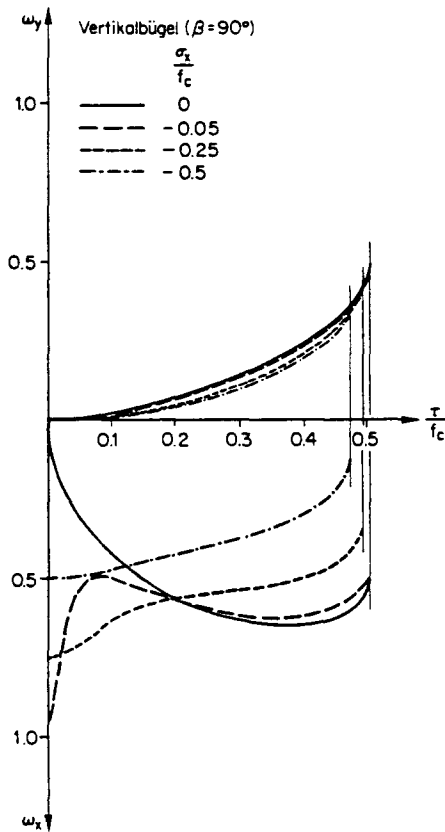
Der Wert von  $f_{c0}$  wird durch die Normen festgelegt. Dabei ist es denkbar, dass die wirksame "Schub"-Druckfestigkeit mit dem Winkel  $\alpha_0$  variiert wird, damit ein stetiger Uebergang vom Wert  $f_{c0}$  für den Winkel  $\alpha_0 = 45^\circ$  auf den Wert  $f_c$  für den Winkel  $\alpha_0 = 0^\circ$  erreicht werden kann. Der Verlauf von  $f_{c0}$  kann nicht aus Versuchsergebnissen ermittelt werden, da in den vorhandenen Daten zu viele Parameter mitgeführt sind.

Mit den Beziehungen (4.79) und (4.80) kann das Schubwandelement mit fließender  $A_{sy}$ -Bewehrung und ausgenützter Druckfestigkeit  $f_{co} = f_c$  neu berechnet werden:

$$-\frac{\tau_{yx}}{f_c} = \cos(2\alpha - 2\alpha_0) \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha \quad (4.81)$$

$$\omega_y = \cos(2\alpha - 2\alpha_0) \cdot \sin^2\alpha \quad (4.82)$$

$$\omega_x = \cos(2\alpha - 2\alpha_0) \cdot \cos^2\alpha + \frac{\sigma_x}{f_c} \quad (4.83)$$



Diese Gleichungen sind für verschiedene  $\sigma_x = \text{konstant}$  ausgewertet und im Bild 4.26 aufgezeichnet worden. Die Diagramme zeigen, dass mit der Einführung der effektiven Druckfestigkeit der Einfluss der äusseren Druckbeanspruchung  $\sigma_x$  qualitativ richtig erfasst wird, indem die erforderliche Bügelbewehrung  $A_{sy}$  mit einer zunehmenden Druckspannung  $\sigma_x$  reduziert wird. Die flacheren Neigungswinkel  $\alpha$  für geringe Schubbeanspruchungen  $\tau_{yx}$  unter zunehmendem äusserem Druck entsprechen ebenfalls den Beobachtungen an geprüften Schubwandelementen.

Grenzen und allgemeine Gültigkeit der vorgeschlagenen Näherungsberechnung können nur mit entsprechenden Versuchen ermittelt werden. Berücksichtigt man allerdings den Streubereich der Messungen an den Prüfkörpern und die unterschiedlichen Randbedingungen zwischen den Testmodellen und den wirklichen Tragsystemen, dürften die erwarteten Abweichungen einer exakten Theorie von den Lösungen des Näherungsvorschlages gar nicht so stark ins Gewicht fallen.

Bild 4.26

Die vorgeschlagene Näherungsberechnung wird auch auf den Fall einer zur x-Achse parallelen Längsbewehrung  $A_{sx}$  und einer unter dem Winkel  $\beta$  geneigten Schrägbügelbewehrung  $A_{s\beta}$  übertragen. Die Gleichgewichtsbeziehungen eines Schubwandelementes, bei dem die geneigte Bügelbewehrung  $A_{s\beta}$  fließt, die Druckfestigkeit im diagonalen Druckspannungsfeld ausgenutzt ist und die Membranbeanspruchung  $\sigma_y$  verschwindet, lauten:

$$-\frac{\tau_{yx}}{f_c} = \cos(2\alpha - 2\alpha_0) \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \omega_\beta \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta \quad (4.84)$$

$$\omega_\beta = \cos(2\alpha - 2\alpha_0) \cdot \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta} \quad (4.85)$$

$$\omega_x(V) = \cos(2\alpha - 2\alpha_0) \cdot \cos^2\alpha - \omega_\beta \cdot \cos^2\beta + \frac{\sigma_x}{f_c} \quad (4.86)$$

Diese Gleichungen sind für den Neigungswinkel  $\beta = 45^\circ$  und verschiedene äussere Membranspannungen  $\sigma_x = \text{konstant}$  ausgewertet und im Bild 4.27 aufgezeichnet worden.

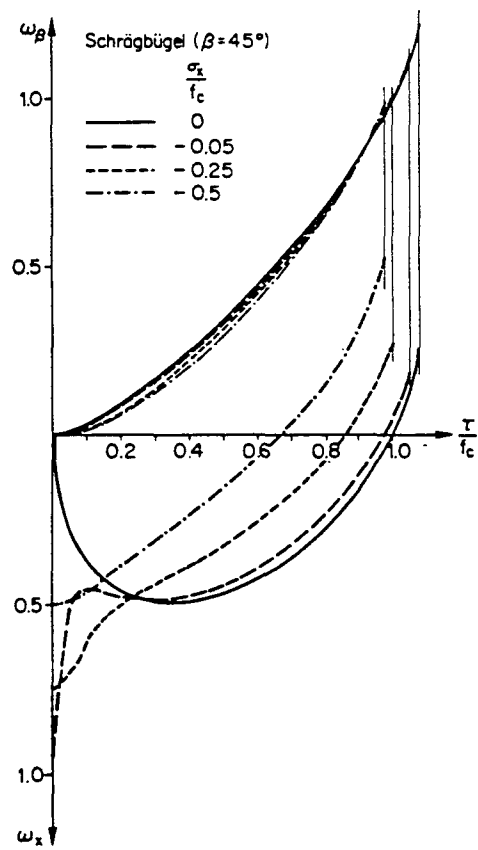


Bild 4.27

A N H A N G C von Kapitel 4: Bügelquerschnitte in Voutenträgern

---

Wird das Gleichgewicht gemäss Bild 4.28 formuliert, kann die Gl. (4.51) sehr einfach hergeleitet werden.

Bereich 1:

$$\frac{A_{sw1} \cdot f_y}{s_1} \cdot dx_1 \cdot \cos \delta = -\sigma_c \cdot t \cdot \frac{dx_1 \cdot \sin(\alpha - \delta)}{\cos \delta} \cdot \sin(\alpha - \delta)$$

$$-\sigma_c \cdot t = \frac{A_{sw1} \cdot f_y}{s_1} \cdot \frac{\cos^2 \delta}{\sin^2(\alpha - \delta)} \quad (4.87)$$

Bereich 2:

$$\frac{A_{sw2} \cdot f_y}{s_2} \cdot dx_2 = -\sigma_c \cdot t \cdot dx_2 \cdot \sin^2 \alpha$$

$$-\sigma_c \cdot t = \frac{A_{sw2} \cdot f_y}{s_2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (4.88)$$

Damit das Gleichgewicht erfüllt wird, müssen die Betonspannungen der Ausdrücke (4.87) und (4.88) entgegengesetzt gleich sein:

$$\frac{A_{sw1}}{s_1} \cdot \frac{\cos^2 \delta}{\sin^2(\alpha - \delta)} = \frac{A_{sw2}}{s_2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\frac{A_{sw1}}{s_1} \cdot \frac{\cos^2 \delta}{\sin^2(\alpha - \delta)} = \frac{A_{sw2}}{s_2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\frac{A_{sw1}}{s_1} \cdot \frac{s_2}{A_{sw2}} = \left\{ \frac{\sin \alpha \cdot \cos \delta - \cos \alpha \cdot \sin \delta}{\sin \alpha \cdot \cos \delta} \right\}^2 = (1 - \cot \alpha \cdot \tan \delta)^2 = \left\{ \frac{a_2}{a_1} \right\}^2 \quad (4.89)$$

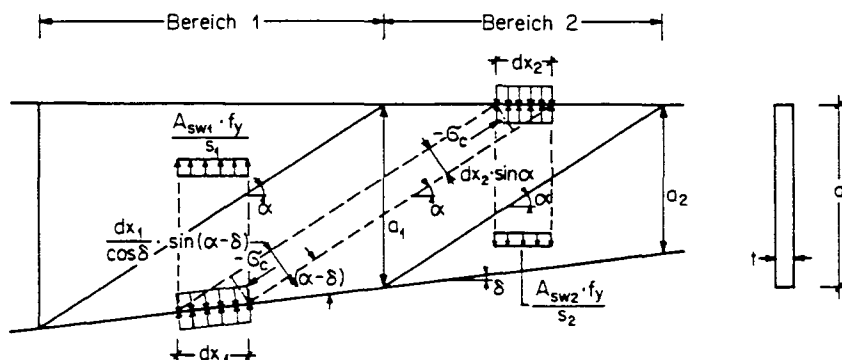


Bild 4.28

## A N H A N G D von Kapitel 4: Vergleich des Schubbemessungsmodells mit Versuchsergebnissen

In den Versuchsberichten, die für den Vergleich beigezogen wurden, sind Balken mit eindeutigem Schubversagen aussortiert worden. Wenn beim Bruch mit dem Fließen der Schubbewehrung auch die Betondiagonale gestaucht wurde, sind die Versuchswerte im Bild 4.29 für Vertikalbügel und im Bild 4.30 für unter  $45^\circ$  geneigte Schrägbügel eingetragen worden. Dabei sind die in den Versuchen gemessenen Festigkeitswerte von Beton und Stahl und keine abgeminderten rechnerischen Festigkeiten verwendet worden. Der Bemessungsvorschlag bildet über alle Beanspruchungsbereiche eine gute Umhüllende der Testresultate. Bei einigen Versuchswerten, die in den Bildern sehr weit rechts der Bemessungskurven liegen, kann sowohl der Einfluss der Betonfestigkeit, die sehr grossen Streuungen unterworfen ist, wie die direkte Abstützung der Last auf das Lager von Bedeutung sein.

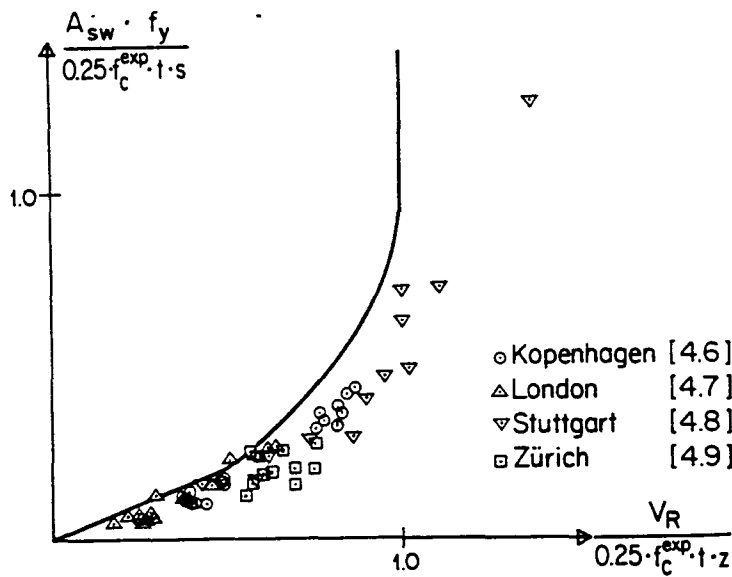


Bild 4.29

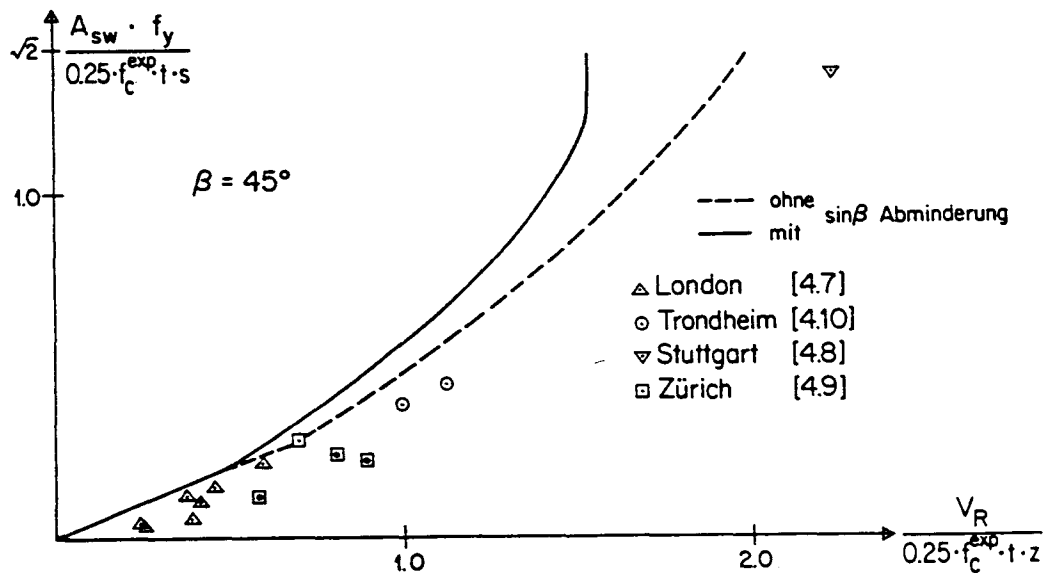


Bild 4.30



## A N H A N G E zu Kapitel 4: Zugfestigkeit im Schubwandelement

Wenn die Zugfestigkeit im Beton berücksichtigt wird, kann die im Bild E.1 dargestellte modifizierte Coulomb-Mohr-Fließbedingung verwendet werden, die MARTI [4.3] in seiner Dissertation erläutert und mit Versuchsergebnissen an Betonkörpern verglichen hat.

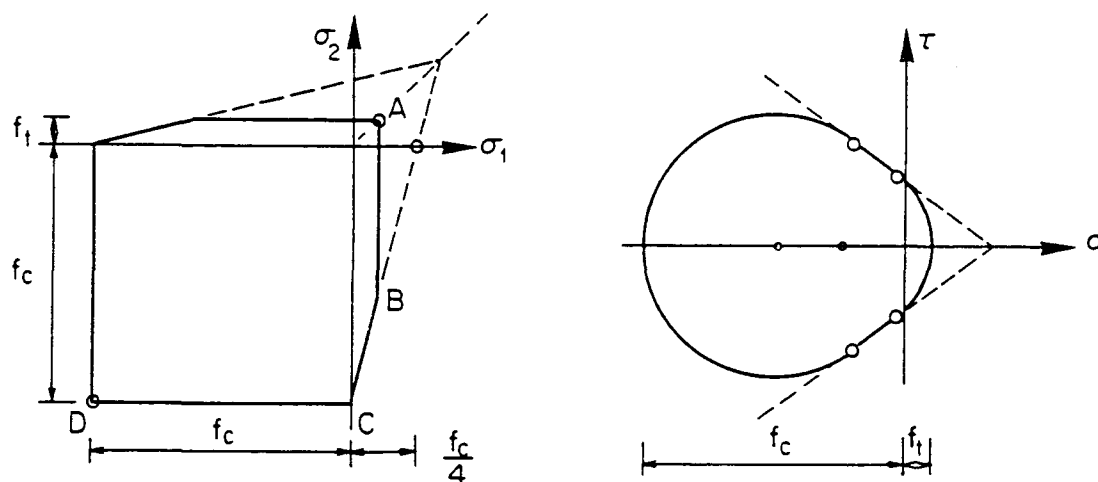


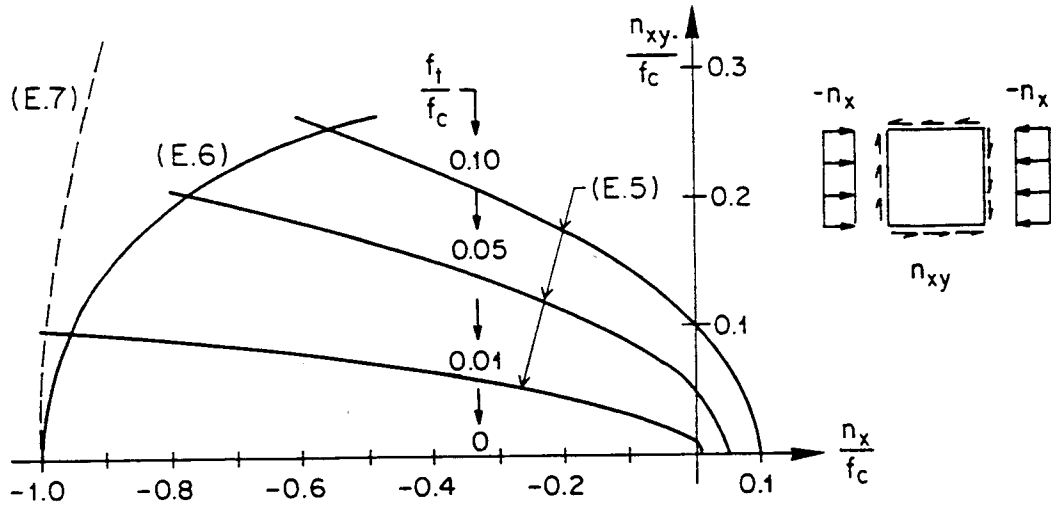
Bild E 1

Allerdings sollte die Zugfestigkeit nur zur Interpretation von Versuchsergebnissen beigezogen werden. In der Bemessung von Schubwandelementen darf die Zugfestigkeit  $f_t$  nicht berücksichtigt werden. Durch Eigenspannungen im Herstellungsprozess des Bauwerks oder durch Zwängungen im Einbau kann die Zugfestigkeit des Betons lokal überschritten sein.

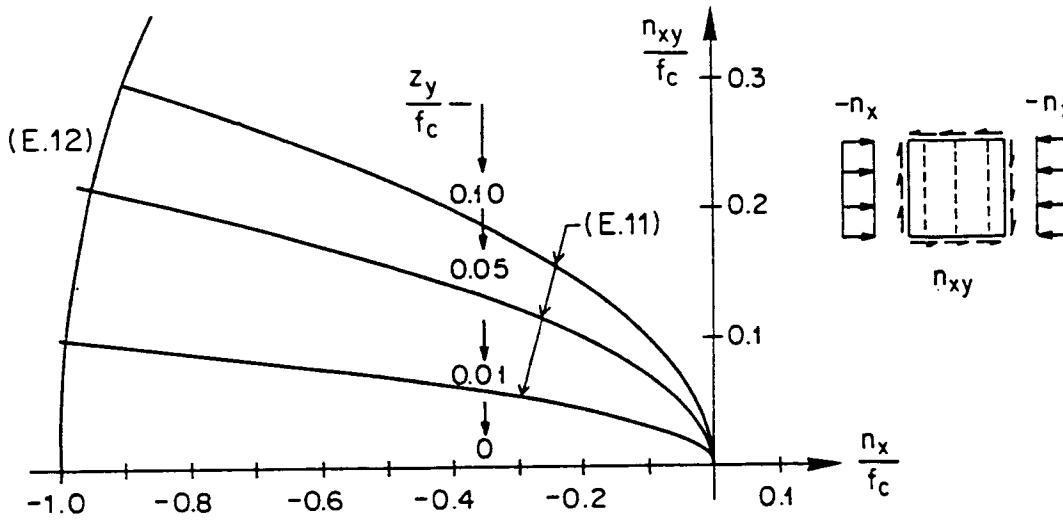
Fehlt eine Schubbewehrung, können lokale Risse im Schubwandelement zum Versagen des Tragwerks führen, falls das Gleichgewicht nicht durch die direkte Abstützung der Lasten auf die Auflager ermöglicht wird.

Damit die Streuung in den Resultaten ähnlicher Versuchsträger plausibel erklärt werden kann, müssen die Auswirkungen unterschiedlicher Zugfestigkeiten auf das Schubtragverhalten untersucht werden.

Im Bild E.2 werden ein Schubwandelement mit der Betonfließbedingung gemäss Bild E.1 (d.h. mit Zugfestigkeit), jedoch ohne Schubbewehrung, und ein zweites Schubwandelement mit der quadratischen Fließbedingung ohne Zugfestigkeit (Bild 4.4), jedoch mit Schubbewehrung, miteinander verglichen. Aufgetragen wird der Schubwiderstand  $n_{xy}$  in Funktion der Membranspannung  $n_x$  für verschiedene Betonzugfestigkeiten  $f_t$  (Bild E.2.1) resp. Bügelbewehrungen  $z_y$  (Bild E.2.2). Aus dem Vergleich kann geschlossen werden, dass schon kleine Betonzugfestigkeitswerte beachtliche Schubwiderstände erzeugen können.



E.2.1



E.2.2

Bild E.2

An dieser Stelle muss noch einmal betont werden, dass in der Baupraxis nicht mit diesen Widerständen gerechnet werden darf, da durch das äusserst spröde Spannungs-Dehnungs-Verhalten des Betons im Zugbereich anfänglich vorhandene Zugfestigkeiten in kürzester Zeit vollständig abgebaut werden können.

Die Gleichgewichtsbeziehungen für das Schubwandelement mit Zugfestigkeit lauten:

$$n_x = z_x + \sigma_c \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_t \cdot \sin^2 \alpha \quad (\text{E.1})$$

$$n_y = z_y + \sigma_c \cdot \sin^2 \alpha + \sigma_t \cdot \cos^2 \alpha \quad (\text{E.2})$$

$$n_{xy} = -\sigma_c \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \sigma_t \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad (\text{E.3})$$

Für das unbewehrte Schubwandelement verschwinden die Bewehrungsanteile  $z_x$  und  $z_y$ :

$$z_x = z_y = 0 \quad (\text{E.4})$$

Wie im Abschnitt 4.2 können wiederum verschiedene Fließregimes unterschieden werden:

Fließregime AB im Bild E.1

$$\begin{aligned} \sigma_t &= f_t \quad , \quad \sigma_c = -f_t \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \\ n_x &= -f_t \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \cdot \cos^2 \alpha + f_t \cdot \sin^2 \alpha = f_t \cdot \frac{\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{\sin^2 \alpha} = f_t \cdot \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \\ n_x &= f_t \cdot (1 - \cot^2 \alpha) \quad ; \quad \cot \alpha = \sqrt{1 - \frac{n_x}{f_t}} \\ n_{xy} &= f_t \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + f_t \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = f_t \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = f_t \cdot \cot \alpha \\ \frac{n_{xy}}{f_c} &= \frac{f_t}{f_c} \sqrt{1 - \frac{n_x}{f_t}} = \frac{f_t}{f_c} \sqrt{1 - \frac{n_x \cdot f_c}{f_c \cdot f_t}} \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Fließregime BC im Bild E.1

$$\begin{aligned} 4 \cdot \frac{\sigma_t}{f_c} - \frac{\sigma_c}{f_c} &= 1 \quad \text{oder} \quad \sigma_t = \frac{f_c + \sigma_c}{4} \\ n_x &= \sigma_c \cdot \cos^2 \alpha + \frac{f_c + \sigma_c}{4} \cdot \sin^2 \alpha \\ 0 &= \sigma_c \cdot \sin^2 \alpha + \frac{f_c + \sigma_c}{4} \cdot \cos^2 \alpha \end{aligned}$$

Die Summe der beiden Gleichungen ergibt:

$$\begin{aligned} n_x &= \sigma_c + \frac{f_c + \sigma_c}{4} \quad , \quad \sigma_c = \frac{4}{5} \cdot n_x - \frac{f_c}{5} \\ n_{xy} &= -\sigma_c \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \frac{f_c + \sigma_c}{4} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \left( \frac{9}{20} \cdot f_c - \frac{3}{5} \cdot n_x \right) \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ \tan^2 \alpha &= -\frac{f_c + \sigma_c}{4 \cdot \sigma_c} = \frac{f_c + n_x}{f_c - 4 \cdot n_x} \\ \sin \alpha \cdot \cos \alpha &= \frac{\sqrt{f_c + n_x} \cdot \sqrt{f_c - 4 \cdot n_x}}{2 \cdot f_c - 3 \cdot n_x} \end{aligned}$$

$$\frac{n_{xy}}{f_c} = \frac{3}{5} \cdot \left( \frac{3}{4} - \frac{n_x}{f_c} \right) \cdot \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{n_x}{f_c}\right) \cdot \left(1 - \frac{4 \cdot n_x}{f_c}\right)}}{2 - 3 \cdot \frac{n_x}{f_c}} \quad (\text{E.6})$$


---

Fließregime CD im Bild E.1

$$\sigma_c = -f_c$$

$$n_x = -f_c \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_t \cdot \sin^2 \alpha$$

$$0 = -f_c \cdot \sin^2 \alpha + \sigma_t \cdot \cos^2 \alpha$$

Die Summe der beiden Gleichungen ergibt:

$$n_x + f_c = \sigma_t$$

$$\tan^2 \alpha = \frac{\sigma_t}{f_c} = \frac{n_x + f_c}{f_c}$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\sqrt{f_c \cdot (f_c + n_x)}}{2 \cdot f_c + n_x} = \frac{\sqrt{1 + \frac{n_x}{f_c}}}{2 + \frac{n_x}{f_c}}$$

$$n_{xy} = f_c \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \sigma_t \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\sqrt{1 + \frac{n_x}{f_c}}}{2 + \frac{n_x}{f_c}} \cdot (2 \cdot f_c + n_x)$$

$$\frac{n_{xy}}{f_c} = \sqrt{1 + \frac{n_x}{f_c}} \quad (\text{E.7})$$


---

Die Gl. (E.7) wird nicht massgebend (Bild E.2.1).

Die Gleichgewichtsbeziehungen für das Schubwandelement ohne Betonzugfestigkeit, jedoch mit Schubbewehrung, sind im Abschnitt 4.2 mit den Gleichungen (4.3), (4.4) und (4.5) hergeleitet worden:

$$n_x = z_x + \sigma_c \cdot \cos^2 \alpha \quad (\text{E.8})$$

$$n_y = z_y + \sigma_c \cdot \sin^2 \alpha = 0 \quad (\text{E.9})$$

$$n_{xy} = -\sigma_c \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad (\text{E.10})$$

Der Bewehrungsanteil  $z_x$  fehlt und verschwindet daher in der Gl. (E.8):

$$z_x = 0$$

Wenn die Schubbewehrung ins Fließen kommt, lauten die Beziehungen:

$$\sigma_c = -\frac{z_y}{\sin^2\alpha} \quad , \quad n_x = -z_y \cdot \cot^2\alpha \quad , \quad n_{xy} = +z_y \cdot \cot\alpha$$

$$\underline{n_x + \frac{n_{xy}^2}{z_y} = 0} \quad (E.11)$$

Die Betondruckspannung  $\sigma_c$  ist durch die Festigkeit  $f_c$  begrenzt:

$$\sigma_c = -f_c$$

$$n_{xy} = +f_c \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \quad , \quad n_x = -f_c \cdot \cos^2\alpha \quad ; \quad \cos\alpha = \sqrt{-\frac{n_x}{f_c}}$$

$$\underline{\frac{n_{xy}}{f_c} = \sqrt{-\frac{n_x}{f_c} \cdot \left(1 + \frac{n_x}{f_c}\right)}} \quad (E.12)$$

Mit den Beziehungen (E.5), (E.6), (E.11) und (E.12) können die Interaktionskurven der Bilder E.2 konstruiert werden.

### 5.1 Torsion

Für die Untersuchung des Verhaltens von torsionsbeanspruchten Stahlbetonbauteilen im ungerissenen Zustand und für die Abschätzung von Risslasten stehen die bekannten Verfahren der Elastizitätstheorie zur Verfügung. Die folgenden Ausführungen beschränken sich auf den gerissenen und insbesondere auf den Bruchzustand.

Torsion tritt in der Praxis stets in Kombination mit anderen Beanspruchungskomponenten auf. Die Behandlung des allgemeinen Falls einer kombinierten Beanspruchung wird jedoch erleichtert, wenn zuerst der Sonderfall einer reinen Torsionsbeanspruchung untersucht wird.

#### 5.1.1 Kontinuumsbetrachtung

Im Bild 5.1 ist ein statisch zulässiger Spannungszustand für einen torsionsbeanspruchten Träger mit Rechteckquerschnitt dargestellt. Dieser Spannungszustand entspricht der im Anhang dargestellten, lediglich theoretisch interessanten Lösung für torsionsbeanspruchte Träger mit Kreisquerschnitt. Der Querschnitt wird gemäss Bild 5.1 (a) in neun verschiedene Bereiche aufgeteilt. Die Betonüberdeckung der Bügel ABCDEFGH wird als nicht wirksam betrachtet, da die Betonzugfestigkeit vernachlässigt wird. Das Trägerinnere IJKL ist spannungsfrei. Der Spannungszustand in den Scheiben AIHL, CJIB, EKJD und GLKF ist in den Bildern 5.1 (b), (c) und (d) dargestellt, und jener in den Eckbereichen ABI, CDJ, EFK und GHL im Bild 5.1 (e).

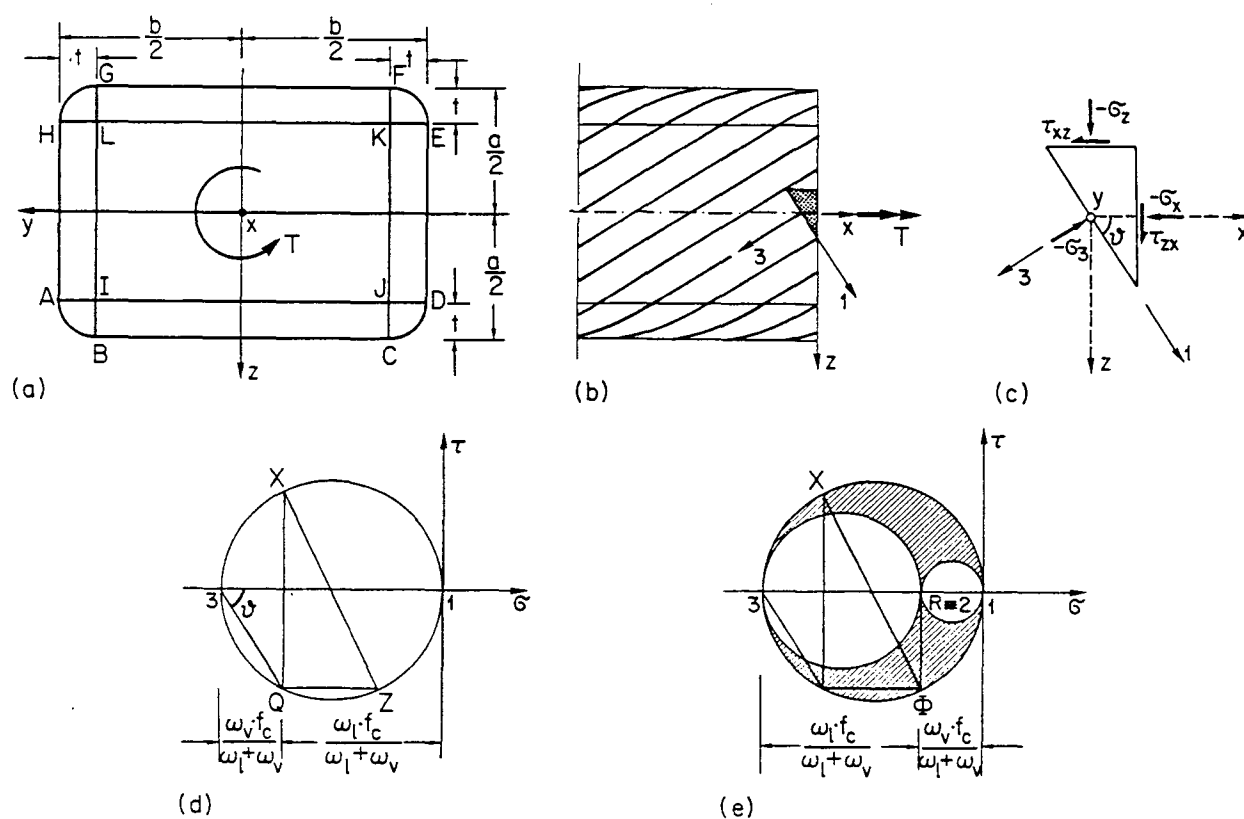


Bild 5.1

Dem einachsialen Druckspannungszustand  $\sigma_3 = -f_c$  in den vier Scheiben AIHL, CJIB, EKJD und GLKF entsprechen die Komponenten

$$\sigma_x = -\frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_v} \cdot f_c, \quad \sigma_z = -\frac{\omega_v}{\omega_1 + \omega_v} \cdot f_c, \quad \tau_{zx} = \frac{\sqrt{\omega_1 \cdot \omega_v}}{\omega_1 + \omega_v} \cdot f_c \quad (5.1)$$

$\omega_1$  und  $\omega_v$  sind durch die Gleichungen

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot (c_1 - \sqrt{c_1^2 - 4 \cdot c_2}), \quad \omega_v = \frac{A_v \cdot f_y}{a \cdot s \cdot f_c}, \quad (5.2)$$

$$c_1 = \frac{2 \cdot (1 + \frac{b}{a})}{(8 - \pi)} - \omega_v, \quad c_2 = \frac{A_1 \cdot f_y}{(8 - \pi) \cdot a^2 \cdot f_c}$$

bestimmt.  $A_v$  und  $s$  bezeichnen die Querschnittsfläche eines Bügels und den Bügelabstand, und  $A_1$  ist die Summe der Querschnittsflächen aller (symmetrisch verteilten) Längsbewehrungsstäbe. Für den Winkel  $\vartheta$  zwischen der x-Achse und der Hauptachse 1 gilt

$$\tan^2 \vartheta = \frac{\omega_1}{\omega_v} \quad (5.3)$$

und die Scheibendicke  $t$  ist

$$t = (\omega_1 + \omega_v) \cdot a \quad (5.4)$$

Die Umlenkkräfte der Bügel sind mit den radialen Hauptdruckspannungen

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = \frac{-\omega_v}{\omega_1 + \omega_v} \cdot f_c \quad (5.5)$$

in den Eckbereichen im Gleichgewicht, vgl. Bild 5.1 (e). Die Spannungskomponenten  $\sigma_x$  und  $\tau_{\varphi x}$  in den Eckbereichen sind durch die Ausdrücke rechterhand in den Gleichungen (5.1)<sub>1</sub> und (5.1)<sub>3</sub> bestimmt.

Das resultierende Torsionsmoment ist

$$T = 2 \cdot f_c \cdot a^3 \cdot \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_v} \cdot \left[ \frac{b}{a} - (\omega_1 + \omega_v) \cdot \left(1 + \frac{b}{a}\right) + \frac{\pi}{3} \cdot (\omega_1 + \omega_v)^2 \right] \quad (5.6)$$

Für den Fall eines sehr breiten Reckeckquerschnittes,  $b \gg a$ , erhält man aus Gl. (5.6)

$$T = 2 \cdot f_c \cdot a^2 \cdot b \cdot \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_v} \cdot (1 - \omega_1 - \omega_v) \quad (5.7)$$

Dieser Gleichung entspricht der untere Grenzwert

$$m_{xyR} = f_c \cdot a^2 \cdot \sqrt{\omega_x \cdot \omega_y} \cdot (1 - \omega_x - \omega_y) \quad (5.8)$$

für den Widerstand einer in den orthogonalen Richtungen  $x$  und  $y$  an ihrer Unter- und Oberseite entsprechend den mechanischen Bewehrungsgehalten  $\omega_x$  und  $\omega_y$  bewehrten Platte, die bezüglich der Bewehrungsrichtungen auf reine Drillung  $m_{xy}$  beansprucht ist,  $m_x = m_y = 0$ .

Sofern  $\omega_x = \omega_y = \omega$  ist, liefert Gl. (5.8) die Gl. (8.20), wenn noch  $a$  durch  $h$  ersetzt wird.

Für eine ausführliche Diskussion der Zusammenhänge und der Anwendungsgrenzen der hier und im Anhang dargestellten theoretischen Lösungen wird auf [5.1] und [5.2] verwiesen. Diese Veröffentlichungen enthalten auch Vergleiche mit Bruchversuchen an torsionsbeanspruchten Trägern. Im allgemeinen ergibt sich eine befriedigende Übereinstimmung der theoretischen mit den experimentellen Bruchlasten.

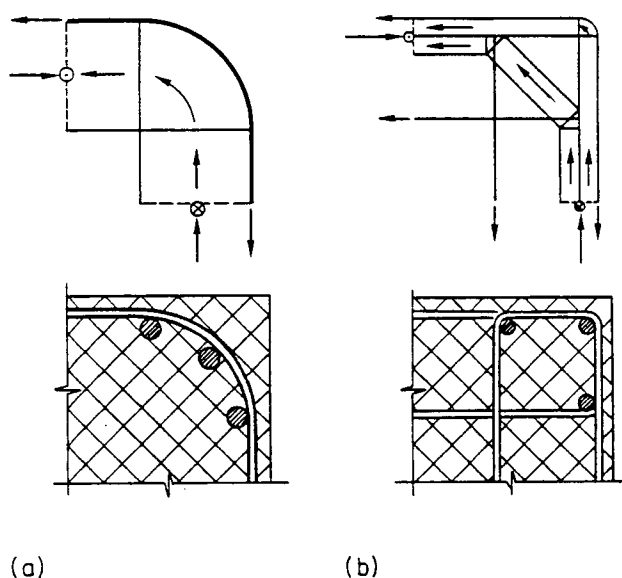


Bild 5.2

auf den Beton zwischen den Bügeln zu verteilen.

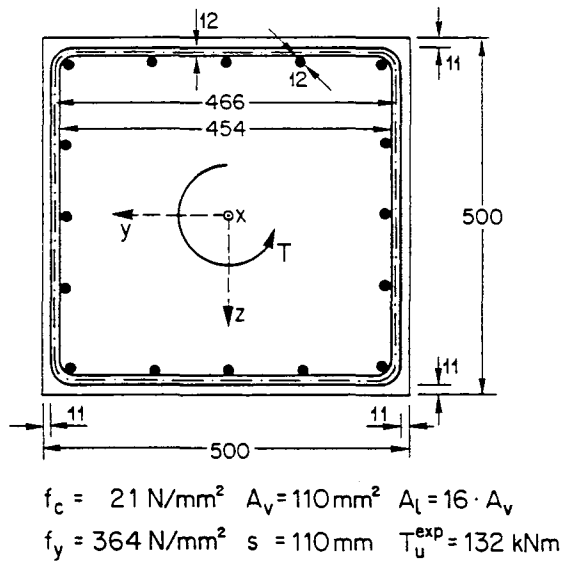
Aus dem im Bild 5.1 dargestellten Spannungszustand lassen sich Folgerungen für die konstruktive Ausbildung der Eckbereiche torsionsbeanspruchter Träger ziehen. Bild 5.2 (a) zeigt einen Ausschnitt aus dem Eckbereich EFK von Bild 5.1 (a) und eine entsprechende konstruktive Lösung. Die Kraftumlenkung im Eckbereich wird durch einen engen Bügelabstand und durch kräftige Längsbewehrungsstäbe positiv beeinflusst. Bild 5.2 (b) zeigt einen entsprechenden Spannungszustand für den Fall von sich überlappenden rechteckigen Stäben [5.1]. Auch in diesem Fall sind kräftige Längsstäbe an der Ecke vorteilhaft, weil sie mit ihrer Verdübelungswirkung dazu beitragen, die konzentrierten Bügelumlenkkräfte

### 5.1.2 Membrantheorie

Die im vorangehenden Unterabschnitt und im Anhang angewandte Kontinuumsbetrachtung erlaubt die Untersuchung der lokalen Spannungszustände in dem das Torsionsmoment übertragenden spiralförmigen Betondruckfeld. Insbesondere kann die aus dem Zusammenspiel mit der Bügelbewehrung sich einstellende Umlenkung der inneren Kräfte im Beton erklärt werden. Ferner zeigt diese Betrachtung, dass die Betonüberdeckung und ein innerer Bereich eines torsionsbeanspruchten Trägers nichts zum Torsionswiderstand beitragen, sofern die Betonzugfestigkeit vernachlässigt wird, und dass das Betondruckfeld beim Kollaps die kleinstmögliche Dicke aufweist, gleich wie die Betondruckzone im Druckflansch eines Trägers bei reiner Biegung.

In der Praxis verwendet man eine einfachere Membranbetrachtung, indem man die Spannungen in den spiralförmigen Betondruckfeldern durch die resultierenden Membrankräfte ersetzt. Die Kraftumlenkung an den Querschnittsecken wird nicht im Detail untersucht aber durch eine geeignete konstruktive Ausbildung sichergestellt. Bei Hohlkastenträgern werden in der Regel die Wirkungsebenen der Membrankräfte mit guter Näherung als mit den Mittelebenen der Flansche und Stege zusammenfallend angenommen. Bei Trägern mit Vollquerschnitt werden die Dicken der einzelnen die Membrankräfte aufnehmenden Scheiben und damit die Wirkungsebenen der Membrankräfte geschätzt oder iterativ bestimmt.





(a)

$i$	$t_i$	$u_i$	$A_i$	$S_i$	$T_i$	$\theta_i$	$t_{i+1}$
1	0	1864	.217	354	153.6	45.8	33.7
2	33.7	1729	.187	367	137.3	44.7	35.0
3	35.0	1724	.186	368	136.7	44.7	35.0
	mm	mm	m <sup>2</sup>	kN/m	kNm	°	mm

(b)

$i$	$t_i$	$u_i$	$A_i$	$S_i$	$T_i$	$\theta_i$	$t_{i+1}$
1	0	1816	.206	358	147.7	45.5	34.1
2	34.1	1679	.176	373	131.4	44.3	35.5
3	35.5	1674	.175	373	130.7	44.3	35.6
	mm	mm	m <sup>2</sup>	kN/m	kNm	°	mm

(c)

Bild 5.3

Zur Erläuterung wird mit Bild 5.3 der Träger T4 aus der Torsionsversuchsreihe von LAMPERT und THÜRLIMANN [5.3] untersucht. Die Abmessungen des quadratischen Vollquerschnittes und diejenigen der Bewehrung sowie die Festigkeiten von Stahl und Beton sind aus Bild 5.3 (a) ersichtlich. Das maximale im Versuch aufgebrachte Torsionsmoment  $T_u^{\text{exp}}$  betrug 132 kNm. In den Bildern 5.3 (b) und (c) ist die iterative Bestimmung der Scheibendicke  $t$  in Tabellenform zusammengefasst, wobei angenommen wird, dass die Aussenseiten der Scheiben mit den Achsen der Bügel (b) oder mit den Innenseiten der Bügel (c) zusammenfallen. In beiden Fällen wird von einer initialen Dicke  $t_1 = 0$  ausgegangen.  $u_i$  bezeichnet den Umfang der vom Schubfluss  $S_i$  umflossenen Fläche  $A_i$

$$u_i = 4 \cdot (466 \text{ mm} - t_i) \quad \text{bzw.} \quad 4 \cdot (454 \text{ mm} - t_i),$$

$$A_i = (466 \text{ mm} - t_i)^2 \quad \text{bzw.} \quad (454 \text{ mm} - t_i)^2,$$

$$S_i = \sqrt{\frac{A_l \cdot A_v}{u_i \cdot s}} \cdot f_y$$

und  $T_i = 2 \cdot A_i \cdot S_i$

ist das zugehörige Torsionsmoment. Der Winkel  $\Theta_i = \pi/2 - \vartheta_i$  zwischen der x-Achse und der Hauptdruckrichtung 3 in den einzelnen Scheiben folgt aus der Beziehung

$$\tan^2 \Theta_i = \frac{A_v \cdot u_i}{s \cdot A_l}$$

und die Scheibendicke  $t_{i+1}$  aus

$$t_{i+1} = \frac{S_i}{\sin \Theta_i \cdot \cos \Theta_i \cdot f_c}$$

wenn angenommen wird, dass die Hauptdruckspannung  $\sigma_3 = -f_c$  ist. Die Konvergenz des Interaktionsverfahrens ist sehr gut, und die Übereinstimmung der theoretischen Torsionsbruchmomente mit  $T_R^{\text{exp}}$  ist ebenfalls befriedigend. Die direkte Anwendung der Gleichungen (5.2), (5.3), (5.4) und (5.5) resultiert in

$$(b): a = b = 466 \text{ mm}, \quad \omega_V = 0.0372, \quad \omega_T = 0.0387, \\ \Theta = \frac{\pi}{2} - \vartheta = 44.4^\circ, \quad t = 35.4 \text{ mm}, \quad T = 137.7 \text{ kNm},$$

$$(c): a = b = 454 \text{ mm}, \quad \omega_V = 0.0382, \quad \omega_T = 0.0409, \\ \Theta = \frac{\pi}{2} - \vartheta = 44.0^\circ, \quad t = 35.9 \text{ mm}, \quad T = 131.8 \text{ kNm},$$

d.h. nur geringfügig abweichenden Werten.

Die auf der statischen Annahme eines konstanten Schubflusses

$$s = \frac{T}{2 \cdot A} \quad (5.9)$$

beruhende Untersuchung des Versuchsträgers T4 kann für beliebige, durch ein konstantes Torsionsmoment beanspruchte Träger mit konvexen, polygonalen Querschnitten und unterschiedlichen Bewehrungen in den einzelnen Scheiben verallgemeinert werden. Die entsprechenden statischen Beziehungen wurden von THÜRLIMANN, LAMPERT, GROB und LÜCHINGER [5.4], [5.5], [5.6] mit Hilfe von räumlichen Fachwerkmodellen mit optimaler Druckstrebenneigung entwickelt, und MÜLLER [5.7], [5.8], [5.9] vervollständigte die statischen Fachwerkmodell-Lösungen durch Angabe von verträglichen, kinematisch zulässigen Bruchmechanismen zu vollständigen Lösungen im Rahmen einer plastischen Membrantheorie, bei der die Betondruckfestigkeit als nicht massgebend betrachtet wird. Die Voraussetzung einer nicht massgebenden Betondruckfestigkeit bedeutet, dass  $f_c \rightarrow \infty$  angenommen wird, und dass dementsprechend die Dicken der einzelnen durch den Schubfluss (Gl. (5.9)) beanspruchten Scheiben theoretisch verschwinden,  $t \rightarrow 0$ .

Im Bruchzustand kann höchstens eine Scheibe starr bleiben. In allen anderen Scheiben fließen die Längs- und die Bügelbewehrung, und im Beton ergibt sich ein scheibenweise konstanter einachsialer Druckspannungszustand unter dem Winkel  $\Theta_k$  zur x-Achse

$$\tan \Theta_k = \frac{A_{vk} \cdot f_y}{s_k \cdot S} \quad (5.10)$$

vgl. Bilder 5.4 (a) und (b). Den geneigten Druckspannungsfeldern entsprechen die resultierenden Längskräfte  $S \cdot a_k \cdot \cot \Theta_k$  in den Scheibenmitten, d.h. mit den Gleichungen (5.10) und (5.9)

$$S \cdot a_k \cdot \cot \Theta_k = \frac{T^2 \cdot a_k \cdot s_k}{4 \cdot A^2 \cdot A_{vk} \cdot f_y} \quad (5.11)$$

Diese Kräfte sind mit den Kräften in der Längsbewehrung im Gleichgewicht. Momentengleichgewicht um die y-Achse in der starren Scheibe n bringt

$$\sum A_1 \cdot f_y \cdot z - \frac{T^2}{4 \cdot A^2} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\bar{z}_k}{\left( \frac{A_{vk} \cdot f_y}{s_k} \right)} \cdot a_k = 0 \quad (5.12)$$

Die Gleichung (5.12) ist im allgemeinen n mal zu formulieren, unter der Annahme, dass jede der n Scheiben der Reihe nach starr bleibt, während alle übrigen Scheiben plastisch verformt werden. Massgebend ist diejenige, Gl. (5.12), die das kleinste Torsionsmoment T liefert.

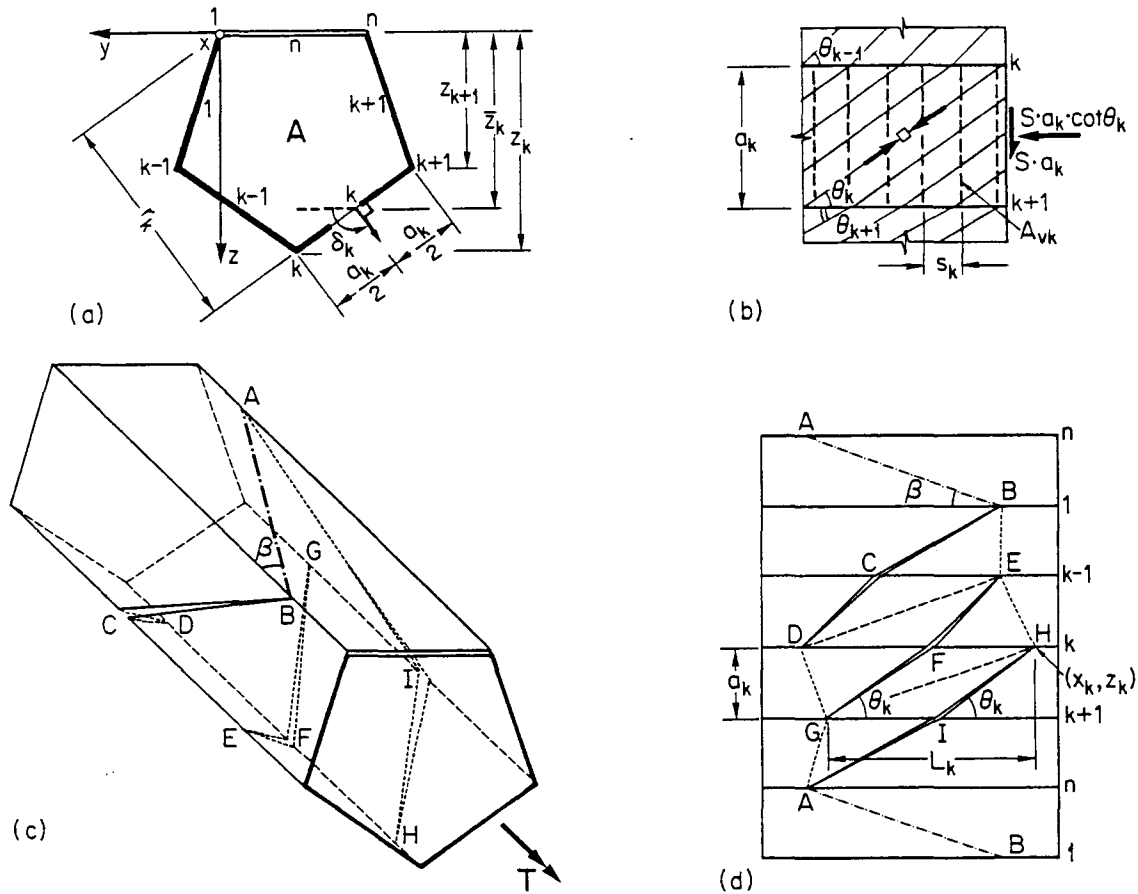


Bild 5.4

In den Bildern 5.4 (c) und (d) ist der von MÜLLER angegebene, mit dem beschriebenen Spannungszustand verträgliche, diskontinuierliche, räumliche Bruchmechanismus dargestellt. In den fließenden Scheiben öffnen sich Kollapsrisse BCD, EFG und HIA parallel zum Betondruckspannungsfeld, die insgesamt eine Starrkörperrotation des vorderen Trägarteil relativ zum hinteren Trägarteil um die Achse AB in der starren Scheibe ermöglichen. Für den Winkel  $\beta$  zwischen der Rotationsachse AB und der x-Achse gilt

$$\cot \beta = \frac{1}{A} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \bar{z}_k \cdot a_k \cdot \cot \theta_k \quad (5.13)$$

Die Länge  $L_k$  des Mechanismus in der Scheibe k ist gegeben durch

$$L_k = x_k - x_{k-1} + a_k \cdot \cot \theta_k + a_{k-1} \cdot \cot \theta_{k-1} \quad (5.14)$$

und unter Beachtung von

$$z_{k+1} = z_k + a_k \cdot \cos \delta_k \quad (5.15)$$

erhält man  $x_k$  aus der Rekursionsformel

$$z_{k+1} \cdot x_k = a_k \cdot r_k \cdot \cot \beta - z_k \cdot (a_k \cdot \cot \theta_k + a_{k-1} \cdot \cot \theta_{k-1}) + z_k \cdot x_{k-1} \quad (5.16)$$

Gemäss dieser Formel liegen die Rotationsachse AB und die Risswurzeln (an den Kanten k und k+1) der beiden Risse in der Scheibe k in einer Ebene.

Wie MÜLLER bemerkte, entsprechen im Rahmen einer Balkentheorie der statischen Annahme eines konstanten Schubflusses die kinematischen Annahmen, dass die Lasteinleitungsquerschnitte eben bleiben und nicht verformt werden, und dass sich vollplastifizierte Querschnitte unbehindert verwölben können. Im Rahmen der Balkentheorie müssten sich jedoch alle Querschnitte gleich verwölben, was beim Uebergang zu starren Endblöcken etc. zur Verletzung von kinematischen Randbedingungen führen würde. Die räumlichen Kollapsrissmechanismen zeigen, dass die Mechanismuslänge endlich sein kann, und dass demnach unbehinderte Verwölbung des vollplastifizierten Querschnittes vorausgesetzt werden darf, wenn die Balkenlänge (oder die Länge von unverstärkten Testbereichen bei Versuchsträgern) nicht kleiner ist als die Ausdehnung des massgebenden Kollapsrissmechanismus.

Wird die Annahme der Querschnittsformerverhaltung (ausserhalb des Kollapsrissbereichs) aufgegeben und der Träger als Falwerk aufgefasst, so ergeben sich tiefere oder höchstens gleich grosse Traglasten als nach der Balkentheorie. Im Gegensatz zur Balkentheorie, bei der die statischen Randbedingungen an den Balkenenden nur integral über den Querschnitt erfüllt zu sein brauchen, ist die Traglast des Falwerks von der Randspannungsverteilung abhängig, über die das Torsionsmoment eingeleitet wird.

### 5.1.3 Verformungen dünnwandiger Kastenträger

Im folgenden werden Formeln angegeben, mit denen die Verformungen dünnwandiger, torsionsbeanspruchter Kastenträger im ungerissenen und im gerissenen Zustand abgeschätzt werden können. Folgende Voraussetzungen werden gemacht:

1. Alle Grössen sind in Trägerlängsrichtung konstant. Die Querschnittskoordinate  $s$  im Bild 5.5 (a) ist die einzige unabhängige Variable.
2. Dem Torsionsmoment  $T$  entspricht der konstante Schubfluss, Gl. (5.9), und dieser wird von über die Wanddicke  $t$  gleichmässig verteilten Schubspannungen  $\tau_{xs}$  aufgenommen

$$S = \tau_{xs} \cdot t \quad (5.17)$$

3. Die Dehnungen  $\epsilon_x$  sind über den Querschnitt linear verteilt.
4. Die Querschnittsform bleibt erhalten.
5. Die Querschnitte können sich unbehindert verwölben.

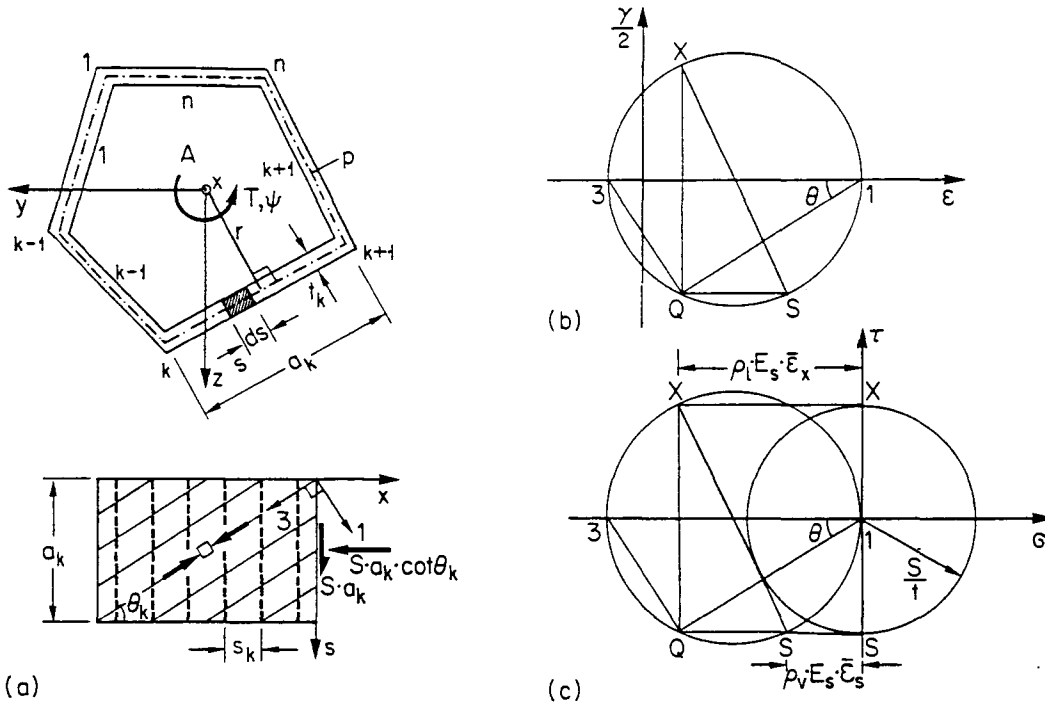


Bild 5.5

Für die Schiebungen  $\gamma_{XS}$  gilt gemäss Annahme 4:

$$\gamma_{XS} = \frac{\partial u}{\partial s} + r \cdot \psi \tag{5.18}$$

$u$  bezeichnet die Verschiebungskomponente in  $x$ -Richtung und  $\psi$  ist die Verdrehung pro Längeneinheit, vgl. Bild 5.5 (a). Integration von Gl. (5.18) bringt:

$$\oint \gamma_{XS} \cdot ds = 2 \cdot A \cdot \psi \tag{5.19}$$

Setzt man für den ungerissenen Zustand linear elastisches Verhalten voraus

$$\gamma_{XS} = \frac{\tau_{XS}}{G} \tag{5.20}$$

folgt mit den Gleichungen (5.19), (5.17) und (5.9)

$$\psi = \frac{T}{4 \cdot A^2 \cdot G} \cdot \oint \frac{ds}{t} \tag{5.21}$$

und sofern die Wanddicke  $t$  über den Umfang  $u$  konstant ist

$$\psi = \frac{T \cdot u}{4 \cdot A^2 \cdot G \cdot t} \tag{5.22}$$

Für die Untersuchung des Verhaltens im gerissenen Zustand wird angenommen, dass sich in den einzelnen Scheiben konstante einachsiale Betondruckspannungszustände ausbilden. Die Hauptspannungsrichtungen sollen sich mit ändernder Beanspruchung kontinuierlich anpassen können, und die Hauptrichtungen der zugehörigen Verzerrungen sollen mit jenen der Spannungs-

gen im Beton zusammenfallen. Aufgrund dieser Annahmen sind die Winkel  $\theta_k$  zwischen der x-Achse und den Trajektorien der Hauptdruckspannungen  $\sigma_3$  im Beton sowie die zugehörigen Stauchungen  $\epsilon_3$  pro Scheibe konstant, aber mit der Belastung veränderlich. Da gemäss Annahme 3 die Dehnungen  $\epsilon_x$  im allgemeinen über die Scheibenbreiten  $a_k$  linear variieren, müssen auch die Dehnungen  $\epsilon_s$  und  $\gamma_{xs}$  linear veränderlich sein

$$\epsilon_s = \epsilon_3 + (\epsilon_x - \epsilon_3) \cdot \cot^2 \theta, \quad \gamma_{xs} = \epsilon_x \cdot \cot \theta + \epsilon_s \cdot \tan \theta - \frac{\epsilon_3}{\sin \theta \cdot \cos \theta} \quad (5.23)$$

vgl. den Mohrschen Verzerrungskreis im Bild 5.5 (b). Ferner ist auch die Variation der Hauptdehnung  $\epsilon_1$  über  $a_k$  linear:

$$\epsilon_1 = \epsilon_x + \epsilon_s - \epsilon_3 \quad (5.24)$$

Die Verteilung der Dehnungen  $\epsilon_x$  ist vollständig bestimmt, wenn die Dehnungen  $\epsilon_{xk}$  an den Querschnittsecken oder die mittleren Dehnungen  $\bar{\epsilon}_{xk}$  aller Scheiben gegeben sind. Sofern auch die Winkel  $\theta_k$  und die Hauptwerte  $\epsilon_{3k}$  bekannt sind, können die Dehnungen  $\epsilon_{sk}$  und die Schiebungen  $\gamma_{xsk}$  sowie ihre Mittelwerte  $\bar{\epsilon}_{sk}$  und  $\bar{\gamma}_{xsk}$  mit Gl. (5.23) berechnet werden. Die lineare Variation von  $\epsilon_s$  über  $a_k$  hat keinen Einfluss auf den Spannungszustand in den Bügeln in s-Richtung. Aufgrund der Voraussetzungen wird nämlich implizit der Verbund zwischen der Bügelbewehrung und dem Beton über die Scheibenbreite  $a_k$  als gelöst betrachtet [5.1]. Deshalb müssen nur die mittleren Dehnungen  $\bar{\epsilon}_{sk}$  der an den Querschnittsecken verankerten Bügel in Rechnung gestellt werden.

Für einen Träger mit gleichmässig verteilter Längsbewehrung (Summe der Querschnittsflächen aller Stäbe in der k-ten Scheibe:  $A_{1k}$ ) und zu den Längsstäben orthogonalen Bügeln (Querschnittsfläche  $A_{vk}$ , Abstand  $s_k$ ) erhält man bei Voraussetzung eines linear elastischen Verhaltens von Bewehrung und Beton (Elastizitätsmoduli  $E_s$  und  $E_c$ ) die Gleichungen

$$\tan^4 \theta_k = \frac{\rho_{vk} \cdot (E_c + \rho_{1k} \cdot E_s)}{\rho_{1k} \cdot (E_c + \rho_{vk} \cdot E_s)} \quad (5.25)$$

für die Neigungswinkel  $\theta_k$  der Betondruckfelder in den verschiedenen Scheiben.  $\rho_{1k}$  und  $\rho_{vk}$  bezeichnen die geometrischen Bewehrungsgehalte

$$\rho_{1k} = \frac{A_{1k}}{t_k \cdot a_k}, \quad \rho_{vk} = \frac{A_{vk}}{t_k \cdot s_k} \quad (5.26)$$

Die Gl. (5.25) folgt aus der für die Mittelwerte  $\bar{\epsilon}_{xk}$  und  $\bar{\epsilon}_{sk}$  formulierten Gl. (5.23)<sub>1</sub>, wenn man beachtet, dass die mittleren Spannungen  $\rho_{1k} \cdot E_s \cdot \bar{\epsilon}_{xk}$  und  $\rho_{vk} \cdot E_s \cdot \bar{\epsilon}_{sk}$  infolge Längs- und Bügelbewehrung mit den gemäss Bild 5.5 (c) resultierenden Spannungskomponenten  $\sigma_{3k} \cdot \cos^2 \theta_k$  und  $\sigma_{3k} \cdot \sin^2 \theta_k$  im Beton im Gleichgewicht sein müssen, und dass  $\sigma_{3k} = E_c \cdot \epsilon_{3k}$  ist. Mit

$$\tau_{xsk} = -\sigma_{3k} \cdot \sin \theta_k \cdot \cos \theta_k \quad (5.27)$$

und den Gleichungen (5.9) und (5.17) folgen die mittleren Dehnungen

$$\bar{\epsilon}_{xk} = \frac{T \cdot a_k}{2 \cdot A \cdot E_s \cdot A_{1k}} \cdot \cot \theta_k, \quad \bar{\epsilon}_{sk} = \frac{T \cdot s_k}{2 \cdot A \cdot E_s \cdot A_{vk}} \cdot \tan \theta_k \quad (5.28)$$

und die Hauptdehnungen

$$\epsilon_{3k} = \frac{-T}{A \cdot E_c \cdot t_k \cdot \sin(2 \cdot \theta_k)} \quad (5.29)$$

Einsetzen in die Gleichungen (5.23) und (5.19) bringt

$$\psi = \frac{T}{4 \cdot A^2 \cdot E_s} \cdot \left( \sum_k \frac{a_k^2}{A_{1k}} \cdot \cot^2 \theta_k + \sum_k \frac{s_k \cdot a_k}{A_{vk}} \cdot \tan^2 \theta_k + \frac{E_s}{E_c} \cdot \sum_k \frac{a_k}{t_k \cdot \sin^2 \theta_k \cdot \cos^2 \theta_k} \right) \quad (5.30)$$

Sofern die Bewehrung und die Dicken aller Scheiben gleich sind

$$\frac{A_{1k}}{a_k} = \frac{A_1}{u}, \quad \frac{A_{vk}}{s_k} = \frac{A_v}{s}, \quad t_k = t$$

vereinfacht sich die Gl. (5.30) zu

$$\psi = \frac{T}{4 \cdot A^2 \cdot E_s} \cdot \left[ \frac{u^2}{A_1} \cdot \cot^2 \theta + \frac{s \cdot u}{A_v} \cdot \tan^2 \theta + \frac{E_s}{E_c} \cdot \frac{4 \cdot u}{t \cdot \sin^2(2 \cdot \theta)} \right] \quad (5.31)$$

und wenn näherungsweise  $\theta = 45^\circ$  gesetzt und der Beitrag der Betonstauchung zur Verdrehung vernachlässigt wird, erhält man

$$\psi \approx \frac{T}{4 \cdot A^2 \cdot E_s} \cdot \left( \frac{u^2}{A_1} + \frac{s \cdot u}{A_v} \right) \quad (5.32)$$

Für einen Träger mit an den Querschnittsecken konzentrierter Längsbewehrung (Querschnittsfläche  $A_{1k}$ ) erhält man aus Gl. (5.23)<sub>1</sub> durch Einsetzen der Gleichungen (5.28)<sub>2</sub> und (5.29) sowie des Mittelwertes

$$\bar{\epsilon}_{xk} = \frac{1}{2} \cdot (\epsilon_{xk} + \epsilon_{x,k+1}) = \frac{T}{8 \cdot A \cdot E_s} \cdot \left( \frac{a_{k-1} \cdot \cot \theta_{k-1} + a_k \cdot \cot \theta_k}{A_{1k}} + \frac{a_k \cdot \cot \theta_k + a_{k+1} \cdot \cot \theta_{k+1}}{A_{1,k+1}} \right) \quad (5.33)$$

ein System von n gekoppelten Gleichungen

$$\begin{aligned} \left( \frac{s_k}{A_{vk}} + \frac{E_s}{t_k \cdot E_c} \right) \cdot \tan^4 \theta_k &= \left( \frac{E_s}{t_k \cdot E_c} + \frac{a_k}{4} \cdot \frac{A_{1k} + A_{1,k+1}}{A_{1k} \cdot A_{1,k+1}} \right) \\ &+ \left( \frac{a_{k-1}}{4 \cdot A_{1k}} \cdot \cot \theta_{k-1} + \frac{a_{k+1}}{4 \cdot A_{1,k+1}} \cdot \cot \theta_{k+1} \right) \cdot \tan \theta_k \end{aligned} \quad (5.34)$$

für die Unbekannten  $\theta_k$ .

### 5.1.4 Berechnungsbeispiel

Im folgenden wird das Verhalten eines unsymmetrisch bewehrten, dünnwandigen Kastenträgers mit den im Bild 5.6 (a) zusammengefassten Abmessungen und Materialeigenschaften unter einem monoton wachsenden Torsionsmoment untersucht.

Für den ungerissenen Zustand liefert Gl. (5.22) mit  $G = 10 \text{ kN/mm}^2$  die Steifigkeit

$$\frac{T}{\psi} = \frac{4 \cdot (4 \text{ m}^2)^2 \cdot 10 \text{ kN/mm}^2 \cdot 0.2 \text{ m}}{4 \cdot 2 \text{ m}} = 16 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2$$

und für eine geschätzte Betonzugfestigkeit von  $1.5 \text{ N/mm}^2$  resultiert mit den Gleichungen (5.9) und (5.17) das Rissmoment

$$T = 2 \cdot 4 \text{ m}^2 \cdot 1.5 \text{ N/mm}^2 \cdot 0.2 \text{ m} = 2.4 \cdot 10^6 \text{ Nm}$$

Im Bild 5.6 ergibt sich die Strecke OA.

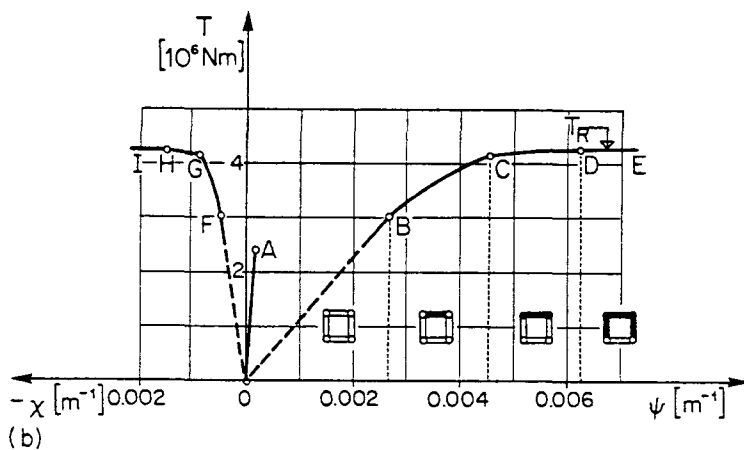
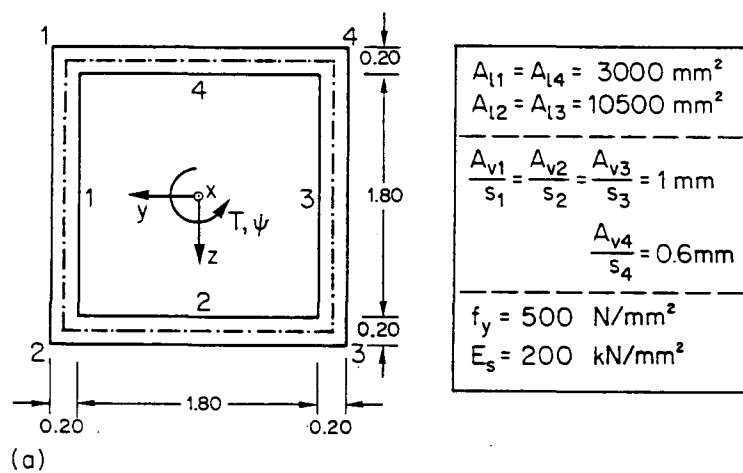


Bild 5.6



Für den gerissenen Zustand erhält man gemäss Gl. (5.34) das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 6 \cdot \tan^4 \theta_1 - \left( \frac{2}{7} \cdot \tan \theta_2 + \tan \theta_4 \right) \cdot \tan \theta_1 - \frac{9}{7} &= 0 \\ 21 \cdot \tan^4 \theta_2 - 2 \cdot \tan \theta_1 \cdot \tan \theta_2 - 2 &= 0 \\ 10 \cdot \tan^4 \theta_4 - 2 \cdot \tan \theta_1 \cdot \tan \theta_4 - 2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.35)$$

mit der Lösung

$$\tan \theta_1 = \tan \theta_3 = 0.83, \quad \tan \theta_2 = 0.64, \quad \tan \theta_4 = 0.79$$

wenn näherungsweise der Beitrag der Betonstauchung vernachlässigt wird. Mit der Abkürzung

$$\lambda = \frac{T}{2 \cdot a \cdot E_s \cdot A_{11}}$$

liefern die Gleichungen (5.33)<sub>2</sub>, (5.28)<sub>2</sub> und (5.23)<sub>2</sub> die Dehnungen

$$\epsilon_{x1} = \epsilon_{x4} = 1.24 \cdot \lambda, \quad \epsilon_{x2} = \epsilon_{x3} = 0.40 \cdot \lambda$$

und

$$\bar{\epsilon}_{s1} = \bar{\epsilon}_{s3} = 1.23 \cdot \lambda, \quad \bar{\epsilon}_{s2} = 0.96 \cdot \lambda, \quad \bar{\epsilon}_{s4} = 1.98 \cdot \lambda$$

sowie die Schiebungen

$$\bar{\gamma}_{xs1} = \bar{\gamma}_{xs3} = 2.00 \cdot \lambda, \quad \bar{\gamma}_{xs2} = 1.24 \cdot \lambda, \quad \bar{\gamma}_{xs4} = 3.14 \cdot \lambda$$

Aus der Gl. (5.19) erhält man die Steifigkeit

$$\frac{T}{\psi} = \frac{2 \cdot 4 \text{ m}^2 \cdot 2 \cdot 200 \text{ kN/mm}^2 \cdot 3000 \text{ mm}^2}{2.00 + 1.24 + 2.00 + 3.14} = 1.15 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2$$

entsprechend der Geraden OB im Bild 5.6 (b). Die Verdrehung ist kombiniert mit der negativen Krümmung

$$\chi = \frac{\epsilon_{x2} - \epsilon_{x1}}{a}$$

vgl. die Gerade OF im Bild 5.6 (b).

Unter dem Torsionsmoment

$$T = 3.04 \cdot 10^6 \text{ Nm}$$

beginnen die Bügel in der Scheibe 4 zu fließen. Die zugehörigen Verformungen sind:

$$\psi = 0.00265 \text{ m}^{-1} \quad \text{und} \quad \chi = -0.00053 \text{ m}^{-1}$$

In der anschliessenden ersten elastisch-plastischen Phase gilt:

$$\tan \theta_4 = \frac{A_{v4} \cdot f_y \cdot 2 \cdot A}{s_4 \cdot T} = \frac{2.4 \cdot 10^6 \text{ Nm}}{T}$$

Diese Gleichung ersetzt Gl. (5.35)<sub>3</sub>. Zusammen mit den Gleichungen (5.35)<sub>1</sub> und (5.35)<sub>2</sub> können  $\theta_1 = \theta_3$  und  $\theta_2$  und damit alle gewünschten Verzerrungskomponenten sowie  $\psi$  und  $\chi$  berechnet werden. Im Bild 5.6 (b) resultieren die Bogen BC und FG.

Unter dem Torsionsmoment

$$T = 4.14 \cdot 10^6 \text{ Nm}$$

beginnen die Längsbewehrungen an den Ecken 1 und 4 zu fließen. Die zugehörigen Neigungswinkel der Betondruckfelder sind gegeben durch

$$\tan\theta_1 = \tan\theta_3 = 0.85, \quad \tan\theta_2 = 0.64, \quad \tan\theta_4 = 0.58$$

und die Verdrehung und Verkrümmung durch

$$\psi = 0.00456 \text{ m}^{-1} \quad \text{und} \quad \chi = -0.00091 \text{ m}^{-1}$$

In der anschliessenden zweiten elastisch-plastischen Phase gilt

$$\cot\theta_1 = \cot\theta_3 = \frac{12 \cdot 10^6 \text{ Nm}}{T} - \frac{T}{2.4 \cdot 10^6 \text{ Nm}}$$

und  $\theta_2$  folgt aus Gl. (5.35)<sub>2</sub>. Im Bild 5.6 (b) ergeben sich die Bogen CD und GH.

Unter dem Torsionsmoment

$$T_R = 4.24 \cdot 10^6 \text{ Nm}$$

beginnen auch die Bügel in den Seitenwänden 1 und 3 zu fließen. Es gilt:

$$\tan\theta_1 = \tan\theta_3 = 0.94, \quad \tan\theta_2 = 0.63, \quad \tan\theta_4 = 0.57$$

und

$$\psi = 0.00625 \text{ m}^{-1}, \quad \chi = -0.00157 \text{ m}^{-1}$$

Die anschliessende plastische Phase ist gekennzeichnet durch das unbeschränkte Fließen der Bewehrungen in den Wänden 1, 3 und 4 unter dem konstanten Kollapsmoment  $T_R$ , das gemäss Gl. (5.12) mit einer starr-plastischen Analyse (starre Scheibe 2) direkt bestimmt werden kann.

Das Beispiel zeigt deutlich den für Torsionsträger typischen, ausgeprägten Abfall der Steifigkeit beim Uebergang vom ungerissenen zum gerissenen Zustand, nämlich eine Reduktion von  $16 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2$  auf  $1.15 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2$ , d.h. auf rund 7% des ursprünglichen Wertes. Dieser Abfall ist viel ausgeprägter als die vergleichbare Reduktion der Biegesteifigkeit, die im gerissenen Zustand üblicherweise rund einen Viertel bis einen Drittel der Steifigkeit im ungerissenen Zustand beträgt. Bei statisch unbestimmten Systemen ergibt sich dementsprechend beim Uebergang zum gerissenen Zustand eine Verminderung des Verhältnisses von Torsions- zu Biegemomenten. Dieser Sachverhalt kann bei der Berechnung und Bemessung berücksichtigt werden, indem das Verhältnis von Torsions- und Biegesteifigkeit auf etwa einen Drittel bis zu einem Viertel des für den ungerissenen Zustand gültigen Wertes abgemindert wird.

Das Beispiel zeigt im weiteren, dass eine aufwendige elastisch-plastische Analyse meist unnötig ist, können doch durch die mit viel kleinerem Aufwand verbundene Bestimmung der elastischen Steifigkeiten im ungerissenen und im gerissenen Zustand sowie der Riss- und Traglasten die Verformungen bereits recht gut abgeschätzt werden.

## 5.2 Kombinierte Beanspruchung

### 5.2.1 Membrantheorie

Die im Unterabschnitt 5.1.2 dargestellte plastische Membrantheorie für Torsionsträger mit konvexen, polygonalen Querschnitten kann für eine Beanspruchung durch konstante Normalkräfte, Biege- und Torsionsmomente verallgemeinert werden [5.7], [5.8], [5.9]. Auf der rechten Seite der Gl. (5.12) ist der Wert 0 lediglich durch das auf die in der starren Scheibe  $n$  von Bild 5.4 (a) liegende  $y$ -Achse bezogene Biegemoment  $M_y$  zu ersetzen:

$$\Sigma A_1 \cdot f_y \cdot z - \frac{T^2}{4 \cdot A^2} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\bar{z}_k}{\left( \frac{A_{vk} \cdot f_y}{s_k} \right)} \cdot a_k = M_y \quad (5.36)$$

Jeder der  $n$  Gleichungen (5.36) entspricht ein räumlicher Kollapsrissmechanismus gemäss Bild 5.4 (c), und insgesamt beschreiben diese Gleichungen die Interaktion zwischen Biege- und Torsionsmomenten sowie Normalkräften. Der räumliche Mechanismus veranschaulicht, dass die Interaktionsbeziehungen nicht für einen isolierten Querschnitt gelten, sondern für einen Trägerbereich, dessen Länge mindestens gleich der Mechanismusslänge ist.

Für den allgemeinen Fall einer Beanspruchung durch Normal- und Querkräfte und variable Biege- und Torsionsmomente sind bisher keine vollständigen Lösungen bekannt, ausser solchen, die auf speziellen Annahmen über die Abstufung der Längsbewehrung beruhen. Mit Hilfe der statischen und der kinematischen Methode, durch Verwenden von Fachwerkmodellen und Kollapsrissmechanismen, können jedoch Schranken gefunden werden, die für die meisten praktischen Problemstellungen ausreichen.

### 5.2.2 Allgemeines Vorgehen für die Bemessung auf Bruch

Aufgrund der statischen Methode kann die Bruchbemessung von Stahlbetonbauteilen unter kombinierten Beanspruchungen auf eine einheitliche Grundlage gestellt werden. Die Bemessung sollte in jedem Fall auf einem konsequent durchgedachten Gleichgewichtszustand der inneren Kräfte im Beton und in der Bewehrung aufbauen. Die Betonzugfestigkeit ist in der Regel zu vernachlässigen, und die erreichbare Betondruckfestigkeit ist vorsichtig anzusetzen.

Für das systematische Erarbeiten von Gleichgewichtszuständen wird folgendes Vorgehen empfohlen:

1. Wähle ein zur Aufnahme der vorgesehenen Lasten geeignetes Fachwerkmodell und untersuche damit die Kraftübertragung.
2. Ersetze die Fachwerkstäbe durch Streben mit endlicher Breite und kontrolliere, ob die inneren Kräfte sicher aufgenommen und weitergeleitet werden können, oder ob sie zu einer Ueberbeanspruchung des Materials führen würden.

3. Korrigiere falls nötig die ursprünglichen Annahmen und wiederhole das Vorgehen mit einem verbesserten Fachwerkmodell.
4. Zeichne das definitive, der Bemessung zugrunde gelegte Spannungsfeld und ziehe die notwendigen Konsequenzen bei der konstruktiven Durchbildung und bei der Ausarbeitung der Pläne. Lege besonderes Gewicht auf eine saubere Ausgestaltung der Knotenbereiche des der Bemessung zugrunde liegenden Fachwerkmodells.

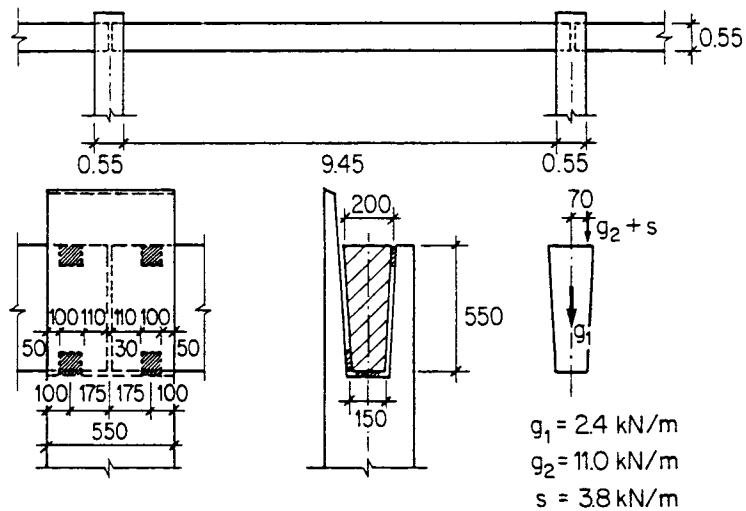
Zur Kontrolle der gewählten Bemessung ist es anschliessend oft nützlich, die kinematische Methode anzuwenden. Ferner können ergänzende Ueberlegungen hinsichtlich des Verhaltens im Gebrauchszustand etc. angestellt werden.

Die im Rahmen der Gleichgewichtsbedingungen grundsätzlich freie Wahl zwischen verschiedenen möglichen Gleichgewichtszuständen führt bei ungeübten Ingenieuren erfahrungsgemäss oft zu Unsicherheit. Die Tatsache, dass zur Wahl "vernünftiger" Gleichgewichtszustände die notwendige Umlagerung der inneren Kräfte im gerissenen Zustand und die damit verbundenen Deformationen im Auge behalten werden müssen, wird als unbequem aufgefasst. Es hat sich jedoch gezeigt, dass mit einiger Erfahrung für Bemessungszwecke ausreichende Lösungen gefunden werden, und dass für die Kontrolle der Deformationen einfache Abschätzungen genügen, d.h. aufwendige elastisch-plastische Analysen im allgemeinen nicht nötig sind. Wichtiger als die Suche nach dem "optimalen" Gleichgewichtszustand ist in jedem Fall, dass ein einmal gewählter Gleichgewichtszustand konsequent angewendet wird, und dass der vorausgesetzte Kräftefluss mit einer sorgfältigen konstruktiven Durchbildung ermöglicht wird.

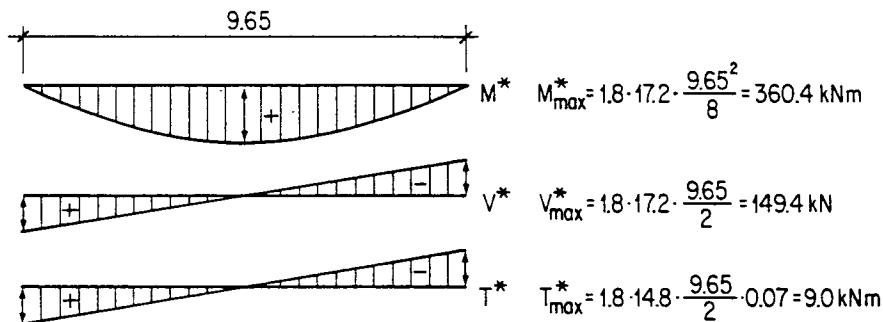
### 5.2.3 Vereinfachtes Bemessungsverfahren

Oft genügt für die Bestimmung der Abmessungen von Beton und Bewehrung ein vereinfachtes Verfahren, bei dem die aus einer Stabtragwerksanalyse sich ergebenden Schnittkräfte durch ein statisch äquivalentes System von Scheibenkräften in verschiedenen Scheiben innerhalb des Umfangs eines Querschnittes ersetzt werden und die einzelnen Scheiben dann für die Wirkung dieser Scheibenkräfte bemessen werden. Im allgemeinen müssen dazu die Scheibendicken und damit die Wirkungsebenen der Scheibenkräfte zunächst geschätzt und dann iterativ verbessert werden, ähnlich wie bei dem im Unterabschnitt 5.1.2 behandelten Beispiel. Die mit diesem Verfahren ermittelten Bemessungswerte sollten als mittlere Werte über einen Bereich betrachtet werden, der sich auf beiden Seiten des untersuchten Querschnittes über eine Länge von der Grössenordnung der Querschnittsabmessungen erstreckt. Das Verfahren sollte deshalb nur angewendet werden, wenn die Schnittkräfte, die Geometrie und die Bewehrung eines Trägers nicht abrupt ändern.

Zur Illustration wird der im Bild 5.7 (a) dargestellte, exzentrisch belastete, vorgefertigte Randträger untersucht, der an beiden Enden bezüglich Torsion eingespannt ist. Die Betonüberdeckung soll mindestens 20 mm sein, die Fließgrenze der Bewehrung beträgt 460 N/mm<sup>2</sup>, und die Zylinderdruckfestigkeit des Betons ist 36 N/mm<sup>2</sup>. Die unter Verwendung des Sicherheitsfaktors 1.8 gemäss Norm SIA 162 resultierenden Diagramme für das Biegemoment, die Querkraft und das Torsionsmoment sind im Bild 5.7 (b) angegeben.



(a)



(b)

Bild 5.7

Die erforderliche Querschnittsfläche der Längsbewehrung für  $M^*_{\max}$  ist

$$A_1 \approx \frac{360.4 \text{ kNm}}{0.85 \cdot 480 \text{ mm} \cdot 460 \text{ N/mm}^2} = 1920 \text{ mm}^2$$

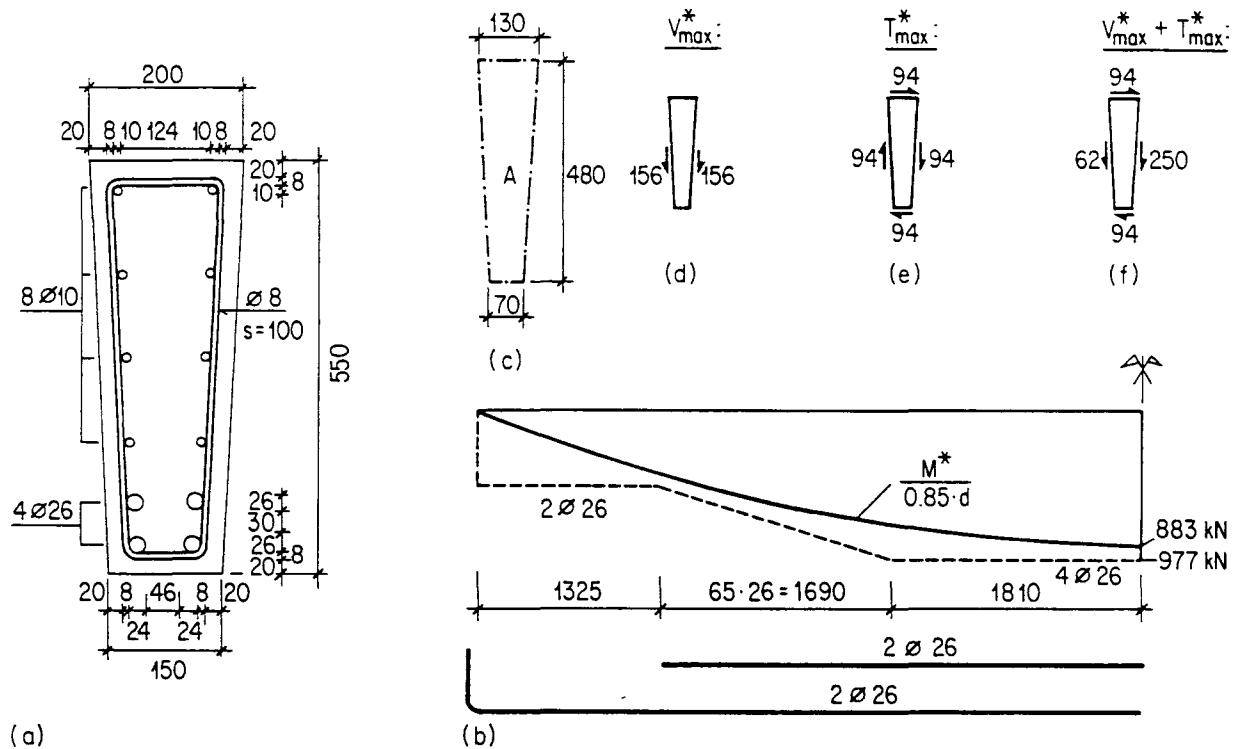
wenn der Hebelarm der inneren Kräfte näherungsweise zu 85% der geschätzten statischen Höhe  $d = 480 \text{ mm}$  angenommen wird. Gewählt werden vier Stäbe  $\varnothing 26 \text{ mm}$  mit einer totalen Querschnittsfläche von  $2124 \text{ mm}^2$ , vgl. Bild 5.8 (a) und (b).

Nimmt man an, die Wirkungsebenen der Scheibenkräfte zur Aufnahme von  $V^*$  und  $T^*$  bilden den im Bild 5.8 (c) dargestellten Trapezquerschnitt mit der Fläche  $A = 48000 \text{ mm}^2$ , so erhält man an den Auflagern die maximalen Schubflüsse

$$\frac{149.4 \text{ kN}}{2 \cdot 480 \text{ mm}} = 156 \text{ N/mm}$$

und

$$\frac{9.0 \text{ kNm}}{2 \cdot 48000 \text{ mm}^2} = 94 \text{ N/mm}$$



(a)

(b)

Bild 5.8

infolge  $V_{\max}^*$  und  $T_{\max}^*$ , vgl. Bild 5.8 (d) und (e). Überlagerung der Schubflüsse führt zu Bild 5.8 (f). Wird der maximale Schubfluss von 250 N/mm mit Bügeln  $\varnothing 8$  mm in einem Abstand von 100 mm entsprechend einem Widerstand von

$$\frac{50 \text{ mm}^2 \cdot 460 \text{ N/mm}^2}{100 \text{ mm}} = 230 \text{ N/mm}$$

aufgenommen, dann ist der notwendige Widerstand der verteilten Längsbewehrung

$$\frac{(250 \text{ N/mm})^2}{230 \text{ N/mm}} = 272 \text{ N/mm}$$

Gewählt werden 8 Längsstäbe  $\varnothing 10$  mm in einem Abstand von 120 mm entsprechend einem Widerstand von

$$\frac{78.5 \text{ mm} \cdot 460 \text{ N/mm}^2}{120 \text{ mm}} = 301 \text{ N/mm}$$

Der Neigungswinkel des Betondruckfeldes ist gegeben durch:

$$\tan \theta = \sqrt{\frac{230 \text{ N/mm}}{272 \text{ N/mm}}} = 0.92$$

Die Dicke der am stärksten beanspruchten Scheibe ist

$$\frac{230 \text{ N/mm} + 272 \text{ N/mm}}{0.6 \cdot 36 \text{ N/mm}^2} = 24 \text{ mm}$$

wenn die effektive Betondruckfestigkeit zu 60% der Zylinderdruckfestigkeit angesetzt wird.

Die Kontrolle der im Bild 5.8 (c) angenommenen Abmessungen zeigt, dass die Werte 480 mm und 130 mm auf 470 mm und 120 mm zu reduzieren sind, während der Wert 70 mm beibehalten werden kann. Dabei wird vorausgesetzt, dass alle Scheiben 24 mm dick sind, und dass ihre Aussenseiten mit der Innenseite der Bügel zusammen fallen. Die Schubflüsse infolge  $V_{max}^*$  und  $T_{max}^*$  werden zu 159 N/mm und 101 N/mm, und dementsprechend erhält man für die am stärksten beanspruchte Seite 260 N/mm anstatt 250 N/mm. Die gewählte Bewehrung ist aber ausreichend

$$\frac{(260 \text{ N/mm})^2}{230 \text{ N/mm}} = 294 \text{ N/mm} < 301 \text{ N/mm}$$

und die Scheibendicke wird nicht grösser:

$$\frac{230 \text{ N/mm} + 294 \text{ N/mm}}{0.6 \cdot 36 \text{ N/mm}^2} = 24 \text{ mm}$$

Der Bügelabstand 100 mm wird zwischen den Auflagern und den Viertelpunkten konstant gehalten. Im mittleren Trägerbereich wird der Bügelabstand verdoppelt (Minimalbewehrung). Die 8 Längsstäbe  $\varnothing 10$  mm werden über die ganze Trägerlänge durchgeführt, und 2 Längsstäbe  $\varnothing 26$  mm werden abgestuft (Verankerungslänge  $65 \cdot 26 \text{ mm} = 1.69 \text{ m}$ ).

Die Querkraft  $V_{max}^*$  und das Torsionsmoment  $T_{max}^*$  werden am Auflager gemäss Bild 5.9 (a) durch zwei Kräfte 74.7 kN und ein Kräftepaar  $18.75 \text{ kN} \cdot 0.48 \text{ m}$  aufgenommen. Die Kraftübertragung im Auflagerquerschnitt wird mit dem im Bild 5.9 (b) dargestellten Fachwerkmodell untersucht, das zeigt, wie die Differenzkraft

$$74.7 \text{ kN} - 29.4 \text{ kN} = 45.3 \text{ kN} = 120.0 \text{ kN} - 74.7 \text{ kN}$$

von der linken auf die stärker beanspruchte rechte Seite übertragen wird. Die horizontalen Zugkräfte 10.1 kN, 8.6 kN und 7.4 kN werden von den im Bild 5.9 (c) dargestellten  $\square$ -förmigen Bügeln  $\varnothing 10$  mm aufgenommen, welche mit den 8 Längsstäben  $\varnothing 10$  mm gestossen sind.

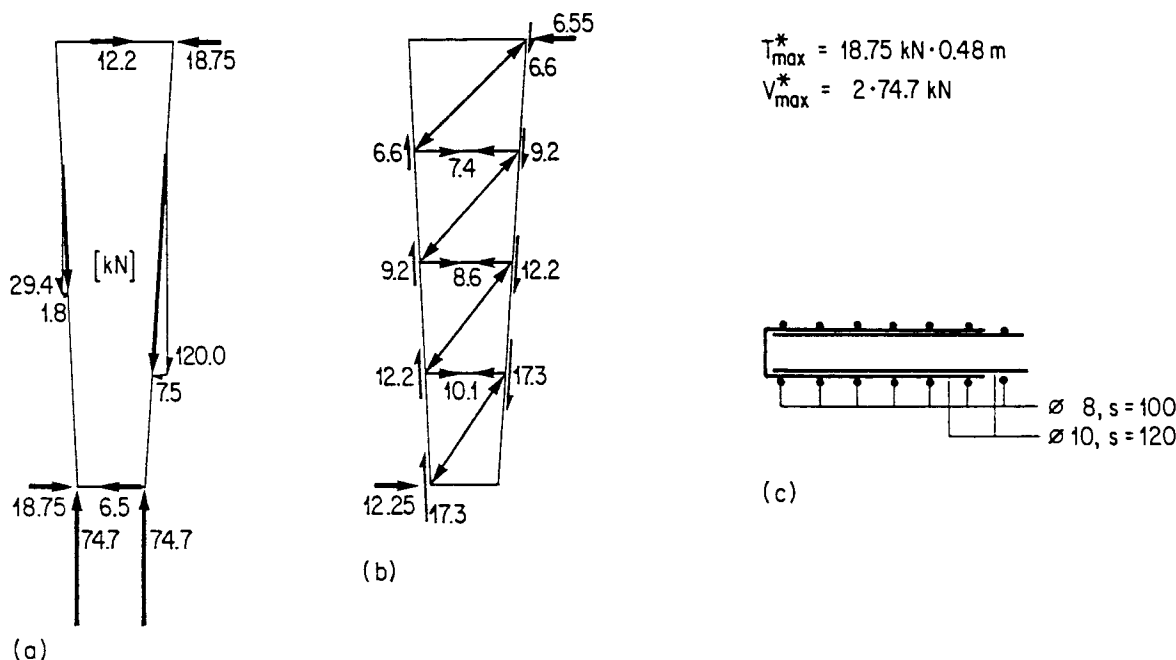


Bild 5.9

LITERATUR

- [5.1] Marti P.: "Strength and Deformations of Reinforced Concrete Members under Torsion and Combined Actions", CEB Bulletin d'information No 146, 1982, 97-138. Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Bericht Nr. 129, März 1982. Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart.
- [5.2] Marti P.: "Torsional Strength of Solid Reinforced Concrete Members", University of Toronto, Dept. of Civil Engineering, Report in preparation.
- [5.3] Lampert P., Thürlimann B.: "Torsionsversuche an Stahlbetonbalken", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Versuchsbericht Nr. 6506-2, Juni 1968. Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart.
- [5.4] Lampert P.: "Bruchwiderstand von Stahlbetonbalken unter Torsion und Biegung", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Bericht Nr. 26, 1970. Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart.
- [5.5] Thürlimann B., Grob J., Lüchinger P.: "Torsion, Biegung und Schub in Stahlbetonträgern", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Autographie zum Fortbildungskurs für Bauingenieure aus der Praxis, 1975.
- [5.6] Lüchinger P.: "Bruchwiderstand von Kastenträgern aus Stahlbeton unter Torsion, Biegung und Querkraft", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Bericht Nr. 69, 1977. Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart.
- [5.7] Müller P.: "Failure Mechanismus for Reinforced Concrete Beams in Torsion and Bending", IVBH-Abhandlungen 36-II, 1976, 147-163.
- [5.8] Müller P.: "Plastische Berechnung von Stahlbetonscheiben und -balken", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Bericht Nr. 83, 1978. Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart.
- [5.9] Müller P.: "Plastic Analysis of Torsion and Shear in Reinforced Concrete", IVBH-Kolloquium 'Plasticity in Reinforced Concrete', Kopenhagen 1979, Schlussbericht, IVBH Vol. 29, 1979, 103-110.



Vollständige Lösung

Bild 5.10 (a) zeigt den Querschnitt eines kreiszylindrischen, durch das Torsionsmoment  $T$  beanspruchten Trägers mit Aussenradius  $r_c$ . Der Träger sei mit einer achsialsymmetrisch verteilten Längsbewehrung (Querschnittsfläche  $A_l$ ) und mit kreisringförmigen Bügeln (Radius  $r_e$ , Querschnittsfläche  $A_v$ , Abstand  $s$ ) bewehrt.

Im folgenden wird eine plastizitätstheoretische Lösung für den Bruchzustand beschrieben [5.1], [5.2]. Es wird angenommen, der Beton folge einer Fließbedingung von Coulomb-Mohr,

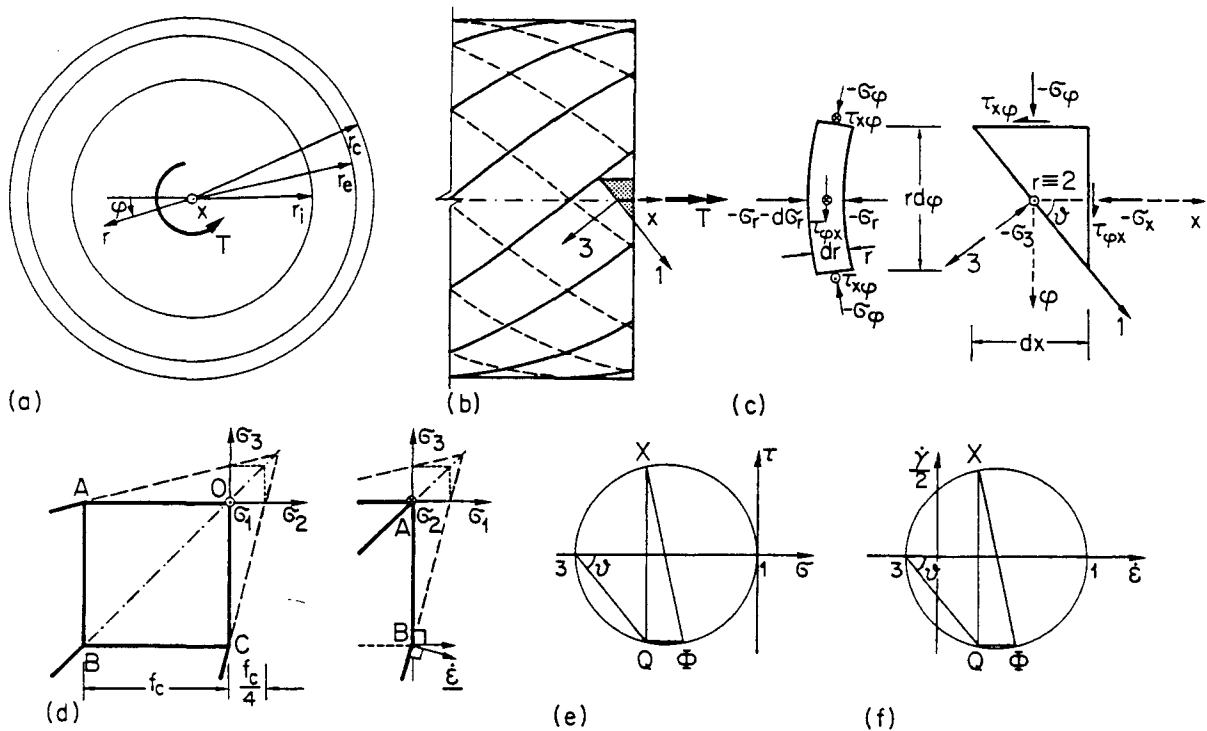


Bild 5.10

$$\sigma \leq 0, \quad 4 \cdot |\tau| + 3 \cdot \sigma - f_c \leq 0 \tag{5.37}$$

oder in Hauptspannungen ausgedrückt:

$$\sigma_i \leq 0, \quad 4 \cdot \sigma_i - \sigma_k - f_c \leq 0, \quad [\sigma_i \geq \sigma_j \geq \sigma_k] \tag{5.38}$$

Das Trägerinnere  $0 < r \leq r_i$  und die Betonüberdeckung  $r_e < r \leq r_c$  sind spannungsfrei. Im Bereich  $r_i < r \leq r_e$  ergibt sich ein zweiachsialer Druckspannungszustand mit den Hauptspannungen

$$\sigma_1 = 0, \quad 0 \geq \sigma_2 = \sigma_r \geq -f_c, \quad \sigma_3 = -f_c \tag{5.39}$$

Die Trajektorien der Hauptspannung  $\sigma_3$  sind Spiralen, die mit der  $x$ -Achse den von  $r$  abhängigen Winkel  $\pi/2 - \vartheta$  einschliessen, vgl. Bild 5.10 (b) und (c). Die Spannungskomponenten in achsialer und azimuthaler Richtung sind

$$\sigma_x = -f_c \cdot \sin^2 \vartheta, \quad \sigma_\varphi = -f_c \cdot \cos^2 \vartheta, \quad \tau_{\varphi x} = f_c \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \quad (5.40)$$

vgl. den im Bild 5.10 (e) dargestellten Mohrschen Spannungskreis. Die Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{1}{r} \cdot (\sigma_\varphi - \sigma_r) \quad (5.41)$$

liefert zusammen mit der Randbedingung  $\sigma_r(r_i) = 0$  die Hauptspannung in radialer Richtung:

$$\sigma_r = \sigma_2 = -\frac{f_c}{r} \cdot \int_{r_i}^r \cos^2 \vartheta \cdot dr \quad (5.42)$$

Den Schubspannungskomponenten  $\tau_{\varphi x}$  entspricht das Torsionsmoment

$$T = 2 \cdot \pi \cdot f_c \cdot \int_{r_i}^{r_e} \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot r^2 \cdot dr \quad (5.43)$$

Die Normalspannungskomponenten  $\sigma_x$  und die Kräfte in der Längsbewehrung sind im Gleichgewicht

$$A_l \cdot f_y = 2 \cdot \pi \cdot f_c \cdot \int_{r_i}^{r_e} \sin^2 \vartheta \cdot r \cdot dr \quad (5.44)$$

und die Radialspannungen  $\sigma_r(r_e)$  werden von den Bügeln aufgenommen

$$A_v \cdot f_y = f_c \cdot s \cdot \int_{r_i}^{r_e} \cos^2 \vartheta \cdot dr \quad (5.45)$$

Das Torsionsmoment (5.43) wird unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen (5.44) und (5.45) maximal, sofern  $\vartheta$  gemäss

$$\tan 2\vartheta = \frac{r^2}{\lambda_1 \cdot r \cdot r_e - \lambda_2 \cdot r_e^2} \quad (5.46)$$

variiert.  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  sind die Lagrangeschen Parameter für das durch die zu maximierende Funktion (5.43) und die beiden Nebenbedingungen (5.44) und (5.45) konstituierte isoperimetrische Variationsproblem, und (5.46) folgt aus der zugehörigen Eulerschen Gleichung.

Dem Spannungszustand (5.39) entsprechen Punkte an der Kante BC der im Bild 5.10 (d) dargestellten Fließfläche (5.38), und der Spannungszustand im Trägerinnern ( $0 < r \leq r_i$ ) und in der Betonüberdeckung ( $r_e < r \leq r_c$ ) ist durch den Punkt O im Bild 5.10 (d) charakterisiert.

Die Gleichungen

$$\dot{u} = x \cdot \dot{e}, \quad \dot{v} = \frac{r}{r_i} \cdot \dot{c}, \quad \dot{w} = x \cdot r \cdot \dot{\psi}, \quad [0 < r \leq r_i] \quad (5.47)$$

$$\dot{u} = x \cdot \dot{e}, \quad \dot{v} = \dot{c}, \quad \dot{w} = x \cdot r \cdot \dot{\psi}, \quad [r_i < r \leq r_e] \quad (5.48)$$

und

$$\dot{u} = x \cdot \dot{e}, \quad \dot{v} = k \geq \frac{r_c^3 \cdot \dot{\psi}^2}{4 \cdot \dot{e}}, \quad \dot{w} = x \cdot r \cdot \dot{\psi}, \quad [r_e < r \leq r_c] \quad (5.49)$$

für die Geschwindigkeitskomponenten  $\dot{u}$ ,  $\dot{v}$  und  $\dot{w}$  in achsialer, radialer und azimuthaler Richtung beschreiben ein mit dem untersuchten Spannungsfeld gemäss der Theorie des plastischen Potentials verträgliches Geschwindigkeitsfeld. Die Grössen  $\dot{e}$ ,  $\dot{c}$  und  $\dot{\psi}$  sind mit den Parametern  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  über die Beziehungen

$$\lambda_1 = \frac{\dot{e}}{r_e \cdot \dot{\psi}}, \quad \lambda_2 = \frac{\dot{c}}{r_e^2 \cdot \dot{\psi}^2} \quad (5.50)$$

verknüpft. Verträglichkeit mit dem Spannungszustand in der Bewehrung erfordert, dass  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  nicht negativ sein können.

Die Verzerrungsgeschwindigkeiten im Bereich  $r_i < r \leq r_e$  sind

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \dot{e}, & \dot{\epsilon}_r &= 0, & \dot{\epsilon}_\varphi &= \frac{\dot{c}}{r}, \\ \dot{\gamma}_{r\varphi} &= 0, & \dot{\gamma}_{x\varphi} &= r \cdot \dot{\psi}, & \dot{\gamma}_{xr} &= 0, \end{aligned} \quad (5.51)$$

und die entsprechenden Hauptwerte

$$\dot{\epsilon}_2 = \dot{\epsilon}_r = 0, \quad \dot{\epsilon}_{1,3} = \frac{1}{2} \cdot \left[ \dot{e} + \frac{\dot{c}}{r} \pm \sqrt{\left( \dot{e} - \frac{\dot{c}}{r} \right)^2 + r^2 \cdot \dot{\psi}^2} \right] \quad (5.52)$$

vgl. den Mohrschen Kreis im Bild 5.10 (f). Aus der Bedingung  $\dot{\epsilon}_3(r_i) = 0$  folgt zusammen mit Gl. (5.50)

$$\left( \frac{r_i}{r_e} \right)^3 = 4 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \quad (5.53)$$

und aus der Forderung  $r_i < r_e$  sowie aus der der Fließbedingung (5.38)<sub>2</sub> und dem zugeordneten Fließgesetz entsprechenden Bedingung  $\dot{\epsilon}_1 + 4 \cdot \dot{\epsilon}_3 \geq 0$  folgen die Restriktionen

$$4 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 1, \quad 16 \cdot \lambda_1^2 + 68 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 + 16 \cdot \lambda_2^2 \geq 9 \quad (5.54)$$

Im Trägerinnern ( $0 < r \leq r_i$ ) und in der Betonüberdeckung ( $r_e < r \leq r_c$ ) ist keine Hauptdehnungsgeschwindigkeit negativ. An der Stelle  $r = r_e$  weist die Geschwindigkeitskomponente  $\dot{v}$  in radialer Richtung einen Sprung  $\dot{k} - \dot{c}$  auf.

Wird anstelle von Bügeln eine Spiralbewehrung verwendet, so müssen die Gleichungen (5.43), (5.44) und (5.45) modifiziert werden. Bezeichnen  $A_s$  die Querschnittsfläche eines Spiralbewehrungsstabes,  $n$  die Anzahl Stäbe, die von einer Ebene  $x = \text{konstant}$  geschnitten werden, und  $\beta$  den Winkel zwischen den Spiralen und der  $x$ -Achse, so muss auf der rechten Seite von Gl. (5.43) der Ausdruck

$$n \cdot A_s \cdot f_y \cdot r_e \cdot \sin \beta \quad (5.55)$$

addiert werden, die linke Seite von Gl. (5.44) ist durch

$$A_1 \cdot f_y + n \cdot A_s \cdot f_y \cdot \cos \beta \quad (5.56)$$

zu ersetzen, und die Gl. (5.45) wird zu

$$n \cdot A_s \cdot f_y \cdot \frac{\sin^2 \beta}{\cos \beta} = 2 \cdot \pi \cdot f_c \cdot r_e \cdot \int_{r_i}^{r_e} \cos^2 \vartheta \cdot dr \quad (5.57)$$

Gemäss den Gleichungen (5.45) und (5.57) wird vorausgesetzt, dass die Bügel- oder Spiralbewehrung als Zugmembran wirkt, welche die radialen Druckspannungen  $\sigma_r(r_e)$  im Gleichgewicht hält. In Wirklichkeit ist der Abstand der Bewehrungsstäbe endlich, und es werden sich zwischen den einzelnen Stäben Druckgewölbe ausbilden, die die Umlenkkräfte verteilen. Der Aussenradius des spiralförmigen Betondruckfeldes wird demnach stets etwas geringer sein als der bis zur Achse der Bügel oder der Spiralbewehrungsstäbe gemessene Radius  $r_e$ .

### Statische Lösung

Sofern  $\vartheta$  im Bereich  $r_i < r \leq r_e$  als konstant angesetzt wird, ergibt sich eine einfache statische Lösung. Aus Gl. (5.42) folgt

$$\sigma_r = -f_c \cdot \cos^2 \vartheta \cdot \left(1 - \frac{r_i}{r}\right) \quad (5.58)$$

Die Gleichungen (5.44) und (5.45) liefern

$$\frac{r_i}{r_e} = \sqrt{\left(1 - \frac{\omega_v}{2}\right)^2 - 2 \cdot \omega_l} - \frac{\omega_v}{2}, \quad \cos^2 \vartheta = \frac{\omega_v}{1 - \frac{r_i}{r_e}} \quad (5.59)$$

wobei  $\omega_l$  und  $\omega_v$  die mechanischen Bewehrungsgehalte

$$\omega_l = \frac{A_l \cdot f_y}{2 \cdot \pi \cdot r_e^2 \cdot f_c}, \quad \omega_v = \frac{A_v \cdot f_y}{s \cdot r_e \cdot f_c} \quad (5.60)$$

bezeichnen. Aus Gl. (5.43) erhält man

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot f_c \cdot r_e^3}{3} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \omega_v \cdot \omega_l}{1 + \frac{r_i}{r_e}}} \cdot \left[1 + \frac{r_i}{r_e} + \left(\frac{r_i}{r_e}\right)^2\right] \quad (5.61)$$

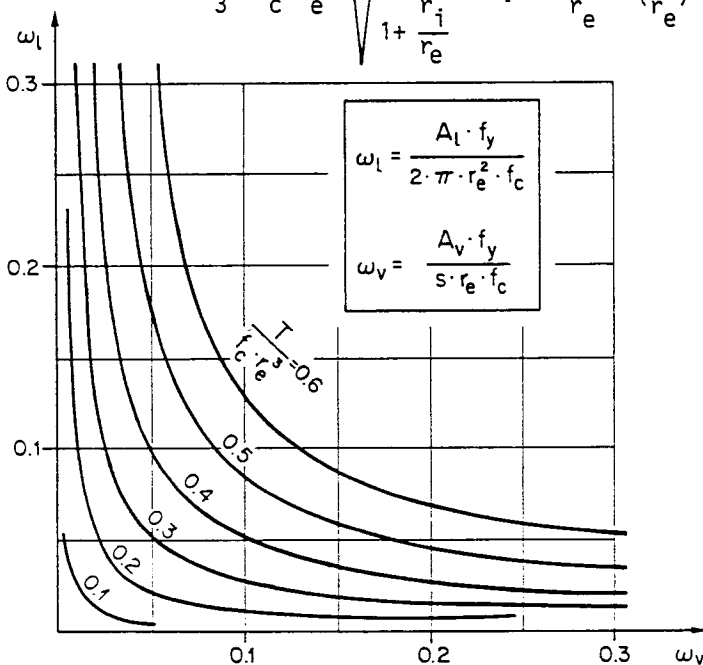


Bild 5.11

Die Gl. (5.61) ist im Bild 5.11 ausgewertet. Der untere Grenzwert Gl. (5.61) weicht nur unwesentlich vom exakten Wert (Gl. 5.43) der Traglast entsprechend der vollständigen Lösung mit variablem  $\vartheta$  ab [5.2].

### 6.1 Definitionen - Lösungsmethode

In statischer Hinsicht sind Wände Scheiben, die in ihrer Ebene beansprucht werden, d.h. es herrscht ein ebener Spannungszustand ( $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ). Typische Beispiele: Hohe Träger, Silowände, Scheiben von Hochhäusern, kurze Querträger, Konsolen, usw. Deren Traglast soll mit Hilfe des statischen Grenzwertsatzes bestimmt werden, d.h.:

1. Bestimmung eines statisch zulässigen Spannungszustandes (Gleichgewicht und statische Randbedingungen erfüllt).
2. Einhaltung der Fließbedingungen für Stahl und Beton.
3. Die Last muss maximiert werden, um eine genügende Plastifizierung zu erhalten, damit sich ein Mechanismus bildet.

Die Anwendung der statischen Methode hat folgende Vorteile:

1. Jede statisch bestimmte Traglast  $F_S$  ist ein unterer Grenzwert der Traglast  $F_R$ , d.h.  $F_S \leq F_R$ . Somit ist jede Lösung auf der sicheren Seite.
2. Die Lösung beschreibt einen Spannungszustand im ganzen Tragwerk. Dagegen sind bei einer kinematischen Lösung die Spannungen nur in den Gelenkzonen bekannt.
3. Somit kann das Tragwerk in allen Teilen dimensioniert werden.

### 6.2 Konsole mit konzentrierter Belastung

Als einleitendes Beispiel soll eine Konsole (Bild 6.1) untersucht werden.

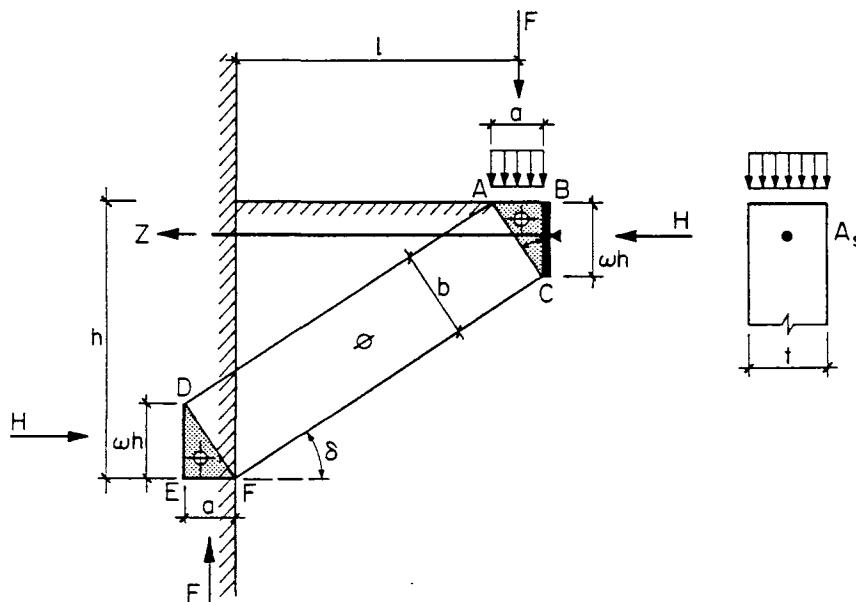


Bild 6.1

Für die gegebene Last  $F$ , die gegebenen Dimensionen  $l$ ,  $h$ ,  $t$  der Konsole und die effektive Betonfestigkeit  $f_c$  ergeben sich

Aufstandslänge  $a$ :

$$F = a \cdot t \cdot f_c \quad (6.1)$$

$$a = \frac{F}{t \cdot f_c}, \text{ wobei } a \leq 2 \cdot l \text{ gemäss Bild 6.1}$$

Abmessung  $\omega \cdot h$  aus der Momentenbedingung:

$$F \left(1 + \frac{a}{2}\right) = a \cdot t \cdot f_c \cdot \left(1 + \frac{a}{2}\right) = H \cdot (h - \omega \cdot h) = \omega \cdot h \cdot t \cdot f_c \cdot (h - \omega \cdot h)$$

mit:  $H = \omega \cdot h \cdot t \cdot f_c$

$$\text{folgt: } a \left(1 + \frac{a}{2}\right) = \omega \cdot h^2 \cdot (1 - \omega) \quad (6.2)$$

Und die Lösung für  $\omega$ :

$$\omega^2 - \omega + \frac{2 \cdot a \cdot l + a^2}{2 \cdot h^2} = 0$$

$$\omega = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4 \cdot a \cdot l + a^2}{h^2}}\right) \quad (6.3)$$

In den Dreiecken (Knotenpunkten) ABC und DEF herrscht ein zweiachsialer Druckzustand  $-f_c$  (Symbol  $\oplus$ ), während in der Druckstrebe ACFD eine einachsiale Druckspannung  $-f_c$  (Symbol  $\ominus$ ) vorhanden ist. Der Druck auf die Seite BC des oberen Knotenpunktes muss durch eine Zugbewehrung  $A_s$  mit der Kraft

$$Z = \omega \cdot h \cdot t \cdot f_c = A_s \cdot f_y \quad (\text{wobei } f_y = \text{Flie遝spannung des Stahls}) \quad (6.4)$$

aufgenommen werden. Das Verhältnis

$$\omega = \frac{A_s \cdot f_y}{t \cdot h \cdot f_c} \quad (6.5)$$

wird üblicherweise als mechanischer Bewehrungsgehalt bezeichnet.

Es sollen noch die Grenzen von  $\omega$  diskutiert werden. Die maximale Last wird für das Maximum der Aufstandslänge  $a$  erreicht. Aus der Gl. (6.2) ergibt sich:

$F_{\max}$ :

$$\frac{d}{d\omega} [\omega \cdot h^2 \cdot (1 - \omega)] = 1 - 2 \cdot \omega = 0 \rightarrow \omega = \frac{1}{2} \quad (6.6)$$

Gemäss Gl. (6.3) ergibt sich mit  $h^2 = 4 \cdot a \cdot l + a^2$  und mit dem Parameter  $\alpha = a/l$ , wobei aufgrund von Bild 6.1  $\alpha \leq 2$  sein muss:

$$\alpha^2 + 4 \cdot \alpha - \frac{h^2}{l^2} = 0 \quad (6.7)$$

$F_{\min} = 0$ : Damit wird die Aufstandslänge  $a = 0$  und somit auch  $\omega = 0$ .

Es folgt daraus, dass  $\omega$  nur zwischen 0 und 1/2 variieren kann. Folglich wurde in Gl. (6.3) nur das negative Vorzeichen vor der Wurzel festgehalten.

Für die praktische Rechnung wird man  $a$  gemäss Gl. (6.1) bestimmen. Dann schätzt man einen Wert  $\omega_1$ . Aus der Momentenbedingung ergeben sich die Zugkraft  $Z_1$  und die Bewehrung  $A_{s1}$ :

$$Z_1 = F \cdot \frac{1 + \frac{a}{2}}{h \cdot (1 - \omega_1)} = A_{s1} \cdot f_y \quad (6.8)$$

Anschliessend wird die Höhe  $\omega \cdot h$  kontrolliert:

$$\begin{aligned} \omega_2 \cdot h \cdot t \cdot f_c &= Z_1 \\ \omega_2 &= \frac{Z_1}{h \cdot t \cdot f_c} \end{aligned} \quad (6.9)$$

Ist  $\omega_2 < \omega_1$ , so ist man auf der sicheren Seite, d.h. die Bewehrung gemäss Gl. (6.8) ist zu gross. Eventuell ist ein zweiter Näherungsschritt mit  $\omega_3 < \omega_2$  zu machen, um die Bewehrung zu vermindern. Ist hingegen  $\omega_2 > \omega_1$ , so ist ein zweiter Schritt mit  $\omega_3 > \omega_2$  notwendig.

Konstruktiv ist die Seite BC des Knotens durch die Zugbewehrung zu umfassen. Die Druckstrebe ACDF wird versuchen, die Spannungen auszubreiten. Daher ist in diesem Bereich eine vernünftige konstruktive Spreizbewehrung vorzusehen, die nur zur Kontrolle der Risse im Gebrauchszustand dient.

Der im Bild 6.1 angenommene Spannungszustand ist durch Spannungsdiskontinuitäten gekennzeichnet. So springt die Spannung parallel zur Linie AD von  $-f_c$  unterhalb zu 0 oberhalb. Parallel zu den Linien AC und DF ist ebenfalls ein Spannungssprung von 0 auf  $-f_c$  vorhanden. Solche Spannungssprünge sind gemäss der Plastizitätstheorie durchaus zulässig, weil sie das Gleichgewicht nicht verletzen. Dies ist der Fall, wenn die Normalspannungen senkrecht zur Diskontinuitätslinie wie auch die Schubspannungen kontinuierlich verlaufen. Die Normalspannungen parallel zur Diskontinuitätslinie dürfen jedoch Sprünge aufweisen.

### 6.3 Grundaufgaben für Spannungsfelder

Im folgenden werden einige Grundfälle betrachtet, die sich zum Teil bereits aus dem Beispiel von Abschnitt 6.2 ergeben.

#### 1. Unstetige Spannungsfelder

Das Spannungsfeld muss die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen. Wie bereits erwähnt (Bild 6.1, Linie AD), darf entlang einer Diskontinuitätslinie die dazu parallele Normalspannung eine Unstetigkeit aufweisen, ohne dass die Gleichgewichtsbedingungen verletzt werden. Die dazu senkrechte Normalspannung und die Schubspannung müssen hingegen stetig verlaufen.

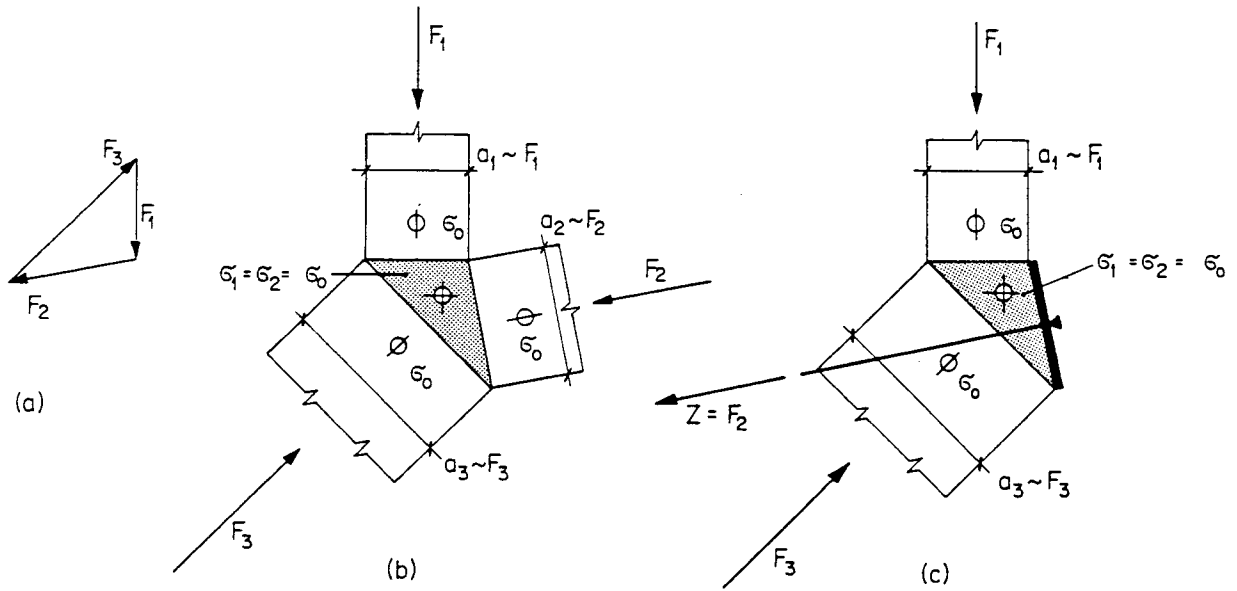


Bild 6.2

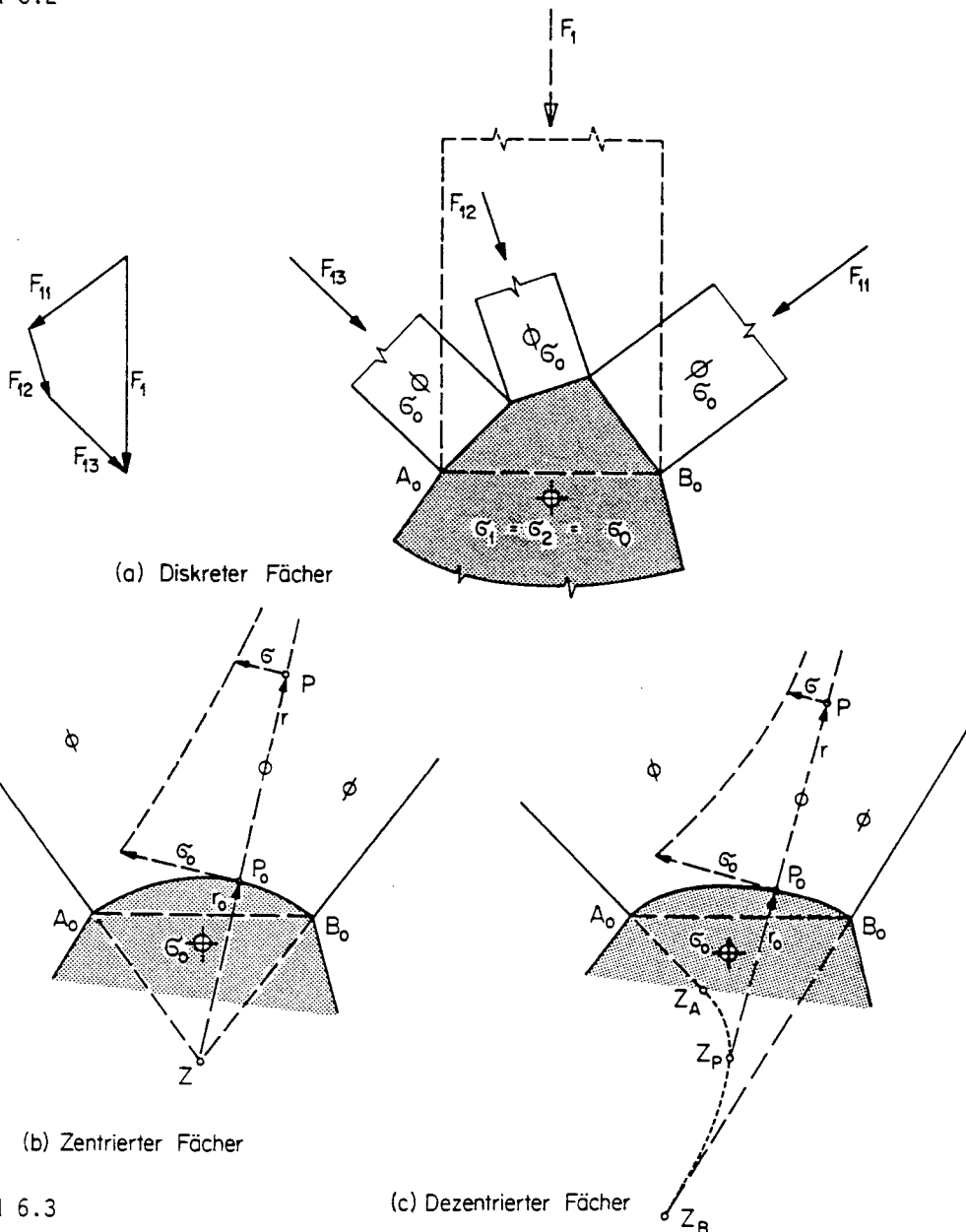


Bild 6.3



## 2. Knotenpunkte

Wie im Bild 6.2 dargestellt, stützen sich Druckstreben mit gleichen Druckspannungen  $\sigma_0$  ( $\ominus$ ) auf Knotenpunkte mit zweiachsigem Druckzustand  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_0$  ( $\oplus$ ) ab (oft der Kürze wegen als hydrostatischer Spannungszustand bezeichnet, wobei im zweidimensionalen Fall  $\sigma_3 = 0$  ist). Es ist klar, dass eine Druckstrebe, z.B.  $F_2$ , durch eine Zugstrebe ersetzt werden kann (Bild 6.1 (c)), wobei die entsprechende Seite des Knotenpunktes durch die Bewehrung umfasst oder durch eine Stahlplatte abgedeckt sein muss.

Haben die Druckstreben ungleiche Druckspannungen, so sind im allgemeinen Ausbreitungen notwendig, um im Knotenpunkt einen konstanten hydrostatischen Druckzustand zu erreichen. Solche Auffächerungen verursachen Spreizkräfte, die später unter 5. besprochen werden.

## 3. Auffächerung

Im Bild 6.3 (a) ist die Auffächerung der Strebe  $F_1$  in drei diskrete Teilstreben  $F_{11}$  bis  $F_{13}$  gezeigt. Anstelle der diskreten ist eine kontinuierliche und zentrierte Auffächerung möglich (Bild 6.3 (b)). Die Gerade  $A_0B_0$  wird durch einen Kreisbogen mit dem Zentrum  $Z$  und dem Radius  $r_0$  ersetzt. Die Spannungen variieren umgekehrt proportional mit dem Abstand  $r$ :

$$\sigma = \frac{r_0}{r} \cdot \sigma_0 \quad (6.10)$$

Schliesslich sind auch dezentrierte Fächer zu betrachten (Bild 6.3 (c)). Die Gerade  $A_0B_0$  ist durch eine gekrümmte Linie ersetzt, deren Krümmungsradius  $r_0$  und das Krümmungszentrum  $Z$  variieren. Auf jedem Strahl  $Z_p$ -P variiert die radiale Spannung gemäss Gl. (6.10).

## 4. Kreuzende Druckfelder

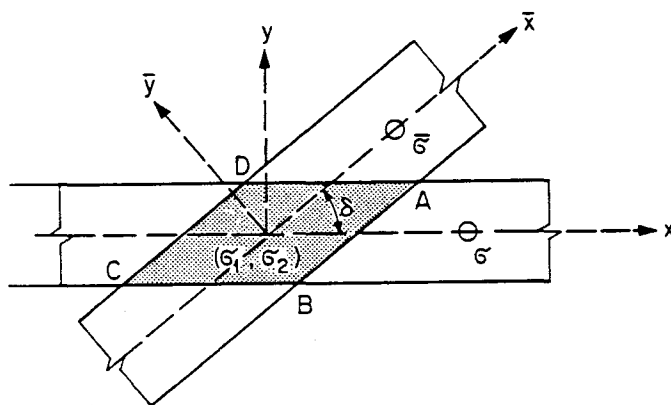


Bild 6.4

In zwei sich kreuzenden Druckfeldern überlagern sich die Spannungen. Im Bild 6.4 kreuzen sich zwei Druckspannungsfelder  $\sigma$  und  $\bar{\sigma}$  unter dem Winkel  $\delta$ . Mit Hilfe des Mohrschen Spannungskreises oder der Transformationsgleichungen kann gezeigt werden, dass die Überlagerung im Gebiet ABCD niemals Hauptzugspannungen erzeugt. Ist der Kreuzungswinkel  $\delta = 0$ , so addieren sich die Spannungen.

$$\sigma_1 = 0$$

$$\sigma_2 = \sigma + \bar{\sigma}$$

Beträgt  $\delta = \pi/2$ , so werden  $\sigma_1 = \bar{\sigma}$  und  $\sigma_2 = \sigma$ .

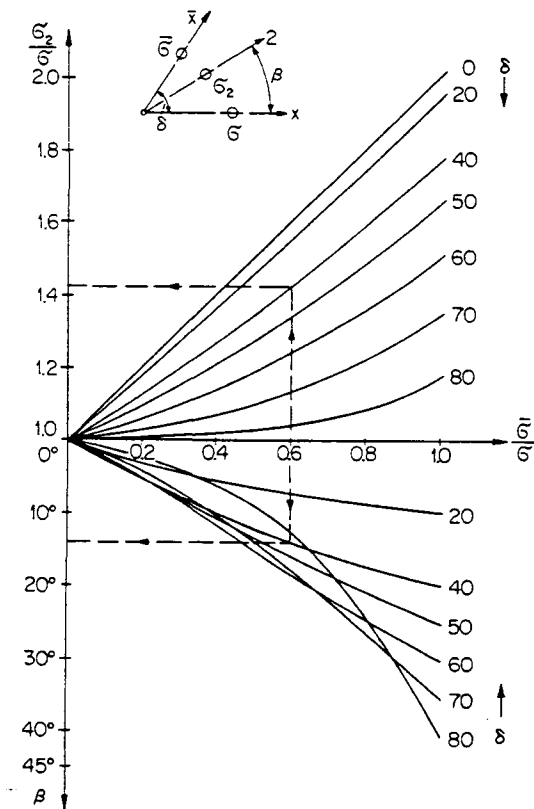


Bild 6.5 gibt ein Diagramm für die Überlagerung im allgemeinen Fall. Für das Verhältnis  $0 \leq \bar{\sigma}/\sigma \leq 1$  und den Zwischenwinkel  $\delta$  können der Extremalwert der Hauptspannung  $\sigma_2/\sigma$  und der zugehörige Winkel  $\beta$  herausgelesen werden.

Bild 6.5

### 5. Ausbreitung von Druckstreben

Die Ausbreitung einer Kraft  $F_0$  von einer Breite  $b_0$  auf eine Breite  $b$  ist im Bild 6.6 (a) dargestellt. Es ist eine Auffächerung mit einem zentrierten Fächer. Dabei gelten folgende Beziehungen:

$$\sigma_0 \cdot b_0 \cdot t = \sigma \cdot b \cdot t$$

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{b_0}{b} = \frac{r_0}{r} = \frac{h_0}{h}$$

$$r_0 = \frac{b_0}{2 \cdot \sin \alpha_0}$$

$$h_0 = r_0 (1 - \cos \alpha_0) = b_0 \cdot \frac{1 - \cos \alpha_0}{2 \cdot \sin \alpha_0}$$

Die Spreizkraft  $Z$ , die den Fächer wieder in eine parallele Richtung umlenkt, beträgt

$$Z = \sigma \cdot h \cdot t = \sigma_0 \cdot h_0 \cdot t = \sigma_0 \cdot b_0 \cdot t \cdot \frac{1 - \cos \alpha_0}{2 \cdot \sin \alpha_0} = \frac{F_0}{2} \cdot \frac{1 - \cos \alpha_0}{\sin \alpha_0} = \frac{F_0}{2} \tan \frac{\alpha_0}{2} \quad (6.11)$$

Interessanterweise ist die Spreizkraft  $Z$  nur von der Kraft  $F_0$  und dem angenommenen Ausbreitwinkel  $\alpha_0$  abhängig.

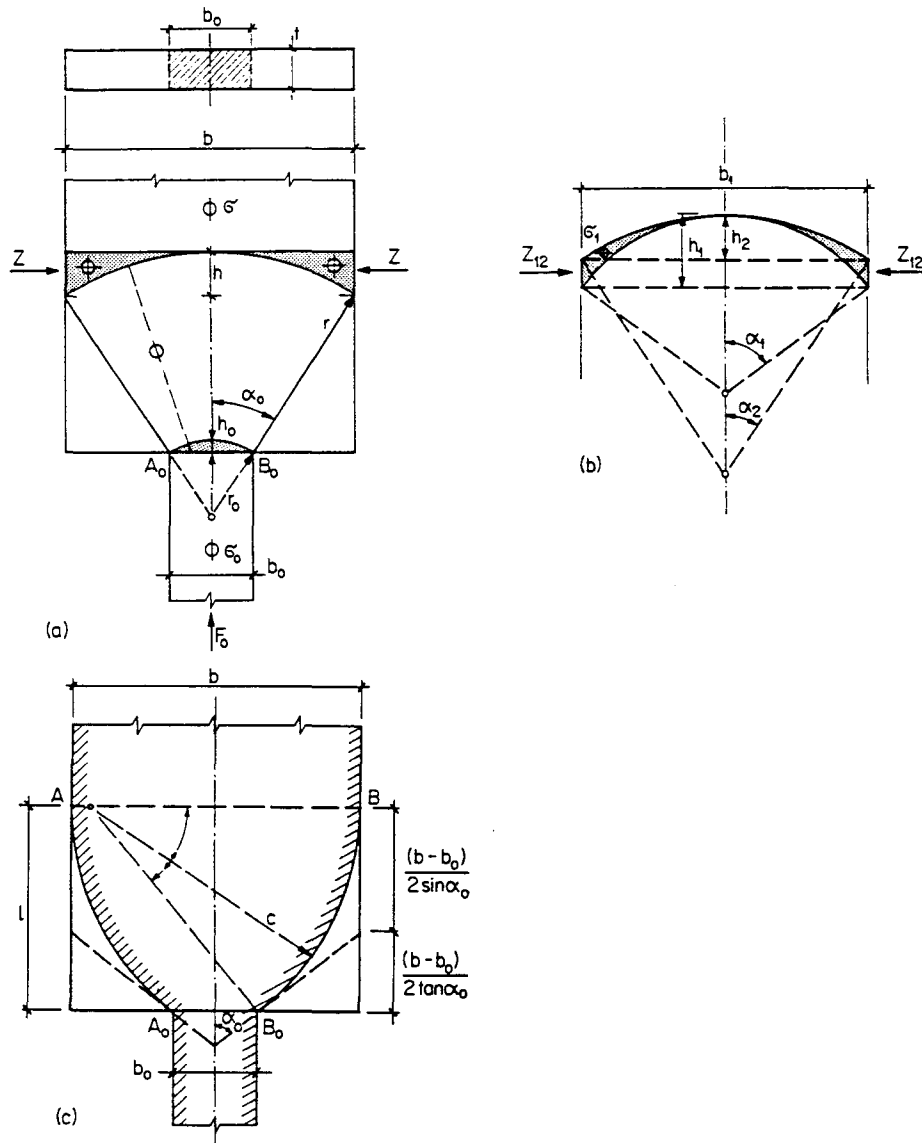


Bild 6.6

Im Bild 6.6 (b) wird eine diskrete Winkeländerung des Ausbreitwinkels  $\alpha_1$  auf einen kleineren Winkel  $\alpha_2$  angenommen. Die erforderliche Spreizkraft beträgt

$$Z_{12} = (h_1 - h_2) \cdot \sigma_1 \cdot t = \sigma_1 \cdot b_1 \cdot t \cdot \left( \frac{1 - \cos \alpha_1}{2 \cdot \sin \alpha_1} - \frac{1 - \cos \alpha_2}{2 \cdot \sin \alpha_2} \right) \quad (6.12)$$

mit: 
$$h_1 = b_1 \cdot \frac{1 - \cos \alpha_1}{2 \cdot \sin \alpha_1}$$

$$h_2 = b_1 \cdot \frac{1 - \cos \alpha_2}{2 \cdot \sin \alpha_2}$$

$$\sigma_1 \cdot b_1 \cdot t = F_0$$

Wird nur der anfängliche Ausbreitwinkel  $\alpha_0$  mit diskreten Winkeländerungen bis auf  $\alpha = 0$  reduziert, so ergibt sich die totale Spreizkraft zu:

$$Z_{\text{tot}} = \Sigma Z_{ik} = F_0 \cdot \left[ \frac{1 - \cos \alpha_0}{2 \cdot \sin \alpha_0} - \frac{1 - \cos \alpha_1}{2 \cdot \sin \alpha_1} + \frac{1 - \cos \alpha_1}{2 \cdot \sin \alpha_1} - \frac{1 - \cos \alpha_2}{2 \cdot \sin \alpha_2} + \dots - \frac{1 - \cos 0}{2 \cdot \sin 0} \right]$$

oder 
$$Z_{\text{tot}} = \frac{F_0}{2} \cdot \frac{1 - \cos \alpha_0}{\sin \alpha_0} = \frac{F_0}{2} \cdot \tan \frac{\alpha_0}{2} \quad (6.13)$$

also den gleichen Wert, wie für eine einmalige Ablenkung gemäss Bild 6.6 (a) und Gl. (6.11). In konstruktiver Hinsicht heisst dies, dass die total notwendige Spreizbewehrung, die sich aus dem angenommenen Ausbreitwinkel  $\alpha_0$  ergibt, auf eine Strecke verteilt werden kann, die auch für die Rissesicherung im Gebrauchszustand günstig ist.

Im Bild 6.6 (c) ist die Annahme getroffen worden, dass die Ausbreitung von  $A_0$  nach A, resp.  $B_0$  nach B, einem Kreisbogen mit Radius  $c$  folgt. Die Ausbreitungsstrecke  $l$  ergibt sich zu:

$$l = \frac{1}{2} \cdot (b - b_0) \cdot \left( \frac{1}{\tan \alpha_0} + \frac{1}{\sin \alpha_0} \right) = \frac{1}{2} \cdot (b - b_0) \cdot \cot \frac{\alpha_0}{2} \quad (6.14)$$

In der folgenden Tabelle sind für verschiedene Annahmen des Ausbreitwinkels  $\alpha_0$  die Werte für  $Z_{\text{tot}}$  und  $l$  angegeben.

$\alpha_0$ [Grad]	$\alpha_0$ [Rad]	$Z_{\text{tot}}/F_0$ (Gl. 6.13)	$l/(b-b_0)$ Gl. (6.14)
22.5	$\pi/8$	0.099	2.514
33.75	$3 \cdot \pi/16$	0.152	1.648
45	$\pi/4$	0.207	1.207

Tabelle 6.1

Im allgemeinen scheint die Annahme  $\alpha_0 = \pi/4$  hinsichtlich der Spreizbewehrung  $A_s = Z_{\text{tot}}/f_y$  und der Ausbreitstrecke  $l$  zu vernünftigen Resultaten zu führen. Eine Verteilung der Bewehrung von  $A_s/3$  auf die Anfangsstrecke  $l/2$  und von  $2 \cdot A_s/3$  auf die restliche Strecke ist in bezug auf das Rissverhalten vorteilhaft. Eine experimentelle Ueberprüfung sowohl hinsichtlich der Traglast als auch der Rissbildung im Gebrauchszustand wäre jedoch wünschenswert.

Die geäusserten Ueberlegungen lassen sich sinngemäss auch auf andere Fälle von Krafteinleitungen anwenden. Analog lässt sich die Einleitung und Ausbreitung eines Schubflusses in die Flanschen von T- und Kastenträgern behandeln.

Spreizkräfte können auch durch Haftspannungen auf die Spreizbewehrung übertragen werden, wie dies im folgenden dargelegt wird.

## 6. Ablenkung durch Haftung

Die Ablenkung eines Druckfeldes kann durch einen Stahlstab erfolgen, wie dies im Bild 6.7 gezeigt wird. Die Ablenkkraft  $Z$  wird durch Haftspannungen  $\tau_h$  in das Druckfeld eingeführt.

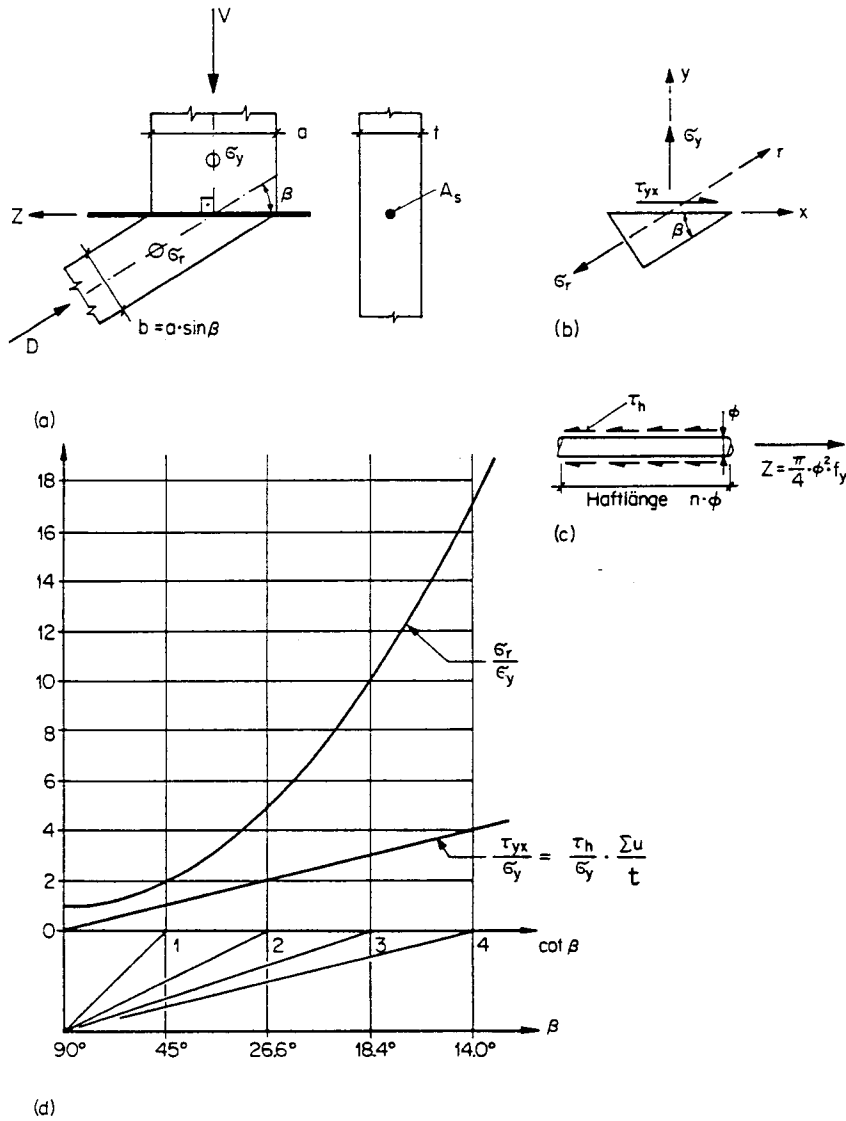


Bild 6.7

Aus Bild 6.7 (a) folgt:

$$\text{Ablenkkraft} : Z = V \cdot \cot \beta \tag{6.15}$$

$$\text{Diagonalkraft: } D = \frac{V}{\sin \beta} \tag{6.16}$$

Für die Spannungen gelten die Beziehungen (Bild 6.7 (b)):

$$\sigma_r = \frac{\sigma_y}{\sin^2 \beta} \tag{6.17}$$

$$\tau_{yx} = \sigma_r \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta = \sigma_y \cdot \cot \beta \tag{6.18}$$

Der Schubfluss  $\tau_{yx} \cdot t$  muss durch Haftspannungen  $\tau_h$  auf den Stahl übertragen werden

$$\tau_h = \frac{\tau_{yx} \cdot t}{\Sigma u} = \frac{\sigma_y \cdot t}{\Sigma u} \cdot \cot \beta \tag{6.19}$$

wobei  $\Sigma u$  die Summe der Stabumfänge ist. Im Bild 6.7 (d) sind die Spannungen  $\sigma_r$ ,  $\tau_{yx}$  und  $\tau_h$

als Funktion von  $\beta$  dargestellt. Es fällt auf, dass die Spannungen  $\sigma_r$  des Diagonalfeldes mit abnehmendem Winkel  $\beta$  sehr rasch ansteigen.

Ueber die Fließgrenze (d.h. Versagen) der Haftspannungen liegen keine zuverlässigen Versuchsergebnisse vor. Aufgrund der Norm SIA 162 (1968), Art. 3.15, lassen sich jedoch Abschätzungen machen. Dabei ist zu beachten, dass diese Haftlängen aus Ausziehversuchen hergeleitet worden sind und deshalb nicht direkt der untersuchten Situation entsprechen. Aus Bild 6.7 (c) ergibt sich

$$\tau_h \cdot \pi \cdot \phi \cdot n \cdot \phi = \frac{\pi}{4} \cdot \phi^2 \cdot f_y$$

d.h. die Haftlänge  $n \cdot \phi$  gewährleistet, dass der Stahl ins Fließen kommt.

$$\tau_h = \frac{1}{4 \cdot n} \cdot f_y \quad (6.20)$$

Mit der Fließspannung  $f_y = 460 \text{ N/mm}^2$  für den Bewehrungsstahl III ergeben sich folgende Haftspannungen:

Haftlänge	Bemerkung	$\tau_h$ [N/mm <sup>2</sup> ]
30 $\phi$	mit Querdruck	3.83
45 $\phi$	im allgemeinen	2.56
60 $\phi$	unvollständige Umhüllung	1.92

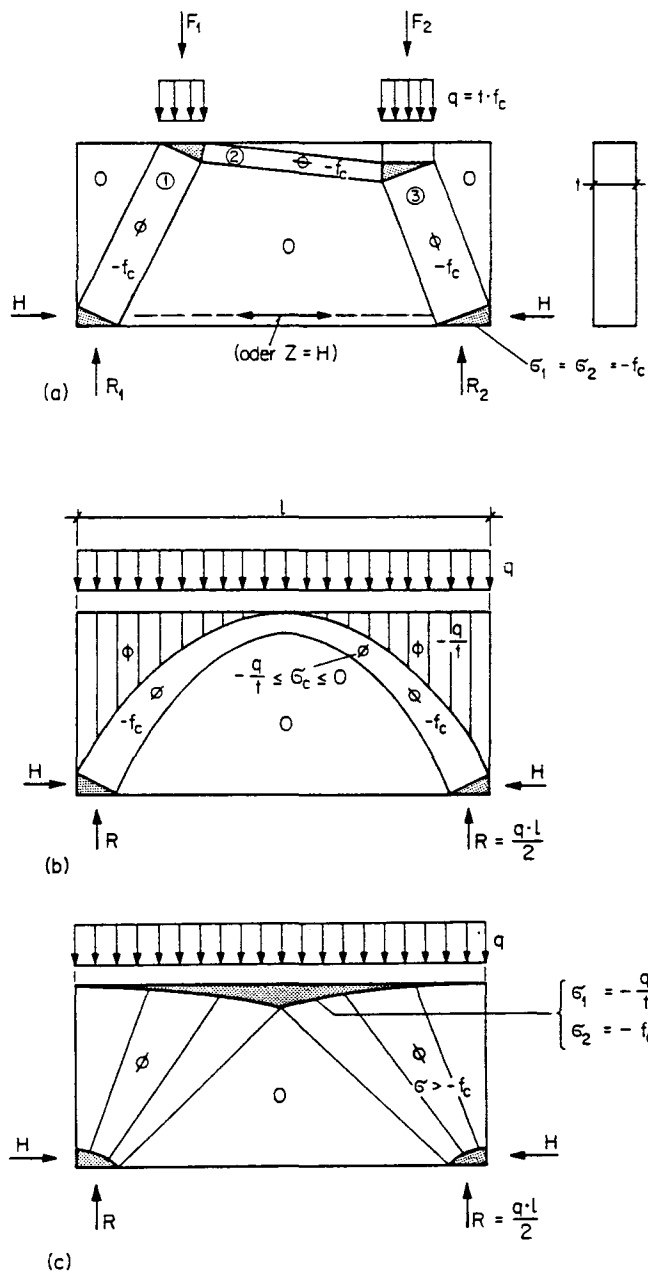
Tabelle 6.2

Liegen keine zutreffenden Versuchsergebnisse vor, können diese Werte als Richtgrößen verwendet werden.

## 7. Bogenwirkung

Im Bild 6.8 sind einige Beispiele dargestellt. Für konzentrierte Einzellasten  $F$  bildet sich als Druckfeld ein Sprengwerk aus (Bild 6.8 (a)). In den Druckstreben ist die Druckspannung gleich der effektiven Betonfestigkeit  $-f_c$ , in den Knotenpunkten herrscht ein hydrostatischer Spannungszustand  $\sigma_1 = \sigma_2 = -f_c$ . Werden die konzentrierten Lasten  $F$  über die Spannweite verschmiert, wird die verteilte Belastung  $q$  durch einen kontinuierlich gekrümmten Bogen abgetragen (Bild 6.8 (b)). Ein alternatives zulässiges Spannungsfeld ist im Bild 6.8 (c) gezeigt; es liefert die gleiche Traglast. Der Bogen ist hier aufgefächert. Im oberen Teil bildet sich ein zweiachsialer Spannungszustand mit den Hauptspannungen  $\sigma_1 = -q/t$  in vertikaler und  $\sigma_2 = -f_c$  in horizontaler Richtung. Der tatsächlich auftretende Spannungszustand liegt wahrscheinlich zwischen (b) und (c), je nachdem, ob die Wand lang oder hoch ist.

Damit sind einige wesentliche Grundfälle diskutiert, welche zur Bestimmung statisch zulässiger Spannungsfelder im Stahlbeton notwendig sind. Im wesentlichen versucht man, den Beton in Druckstreben auf einachsialen Druck zu beanspruchen. Als Umlenkstellen dienen Knotenpunkte mit hydrostatischem Spannungszustand. Die Bewehrung nimmt nur Kräfte in der



Stabrichtung auf. Bezüglich der konstruktiven Ausbildung muss darauf geachtet werden, dass die Bewehrung die Knotenpunkte genügend umfasst, so dass sich der hydrostatische Zustand auch ausbilden kann. Bei direkter Ablenkung durch Stahlstäbe mit Haftung sind insbesondere auch die Haftspannungen zu kontrollieren. Schliesslich ist zu beachten, dass die Kraft in einer Druckstrebe zwischen zwei Knotenpunkten (zum Beispiel ①, ②, ③ im Bild 6.8 (a)) versuchen wird, sich auszubreiten. Dadurch entstehen Spreizkräfte, die im Abschnitt 6.3 unter Punkt 5 besprochen worden sind. Mit Hilfe einer konstruktiven Bewehrung ist hier die Rissbildung zu kontrollieren.

Bild 6.8

6.4 Konsole mit verteilter Belastung

Die im Bild 6.9 dargestellte Konsole trägt eine gleichmässig verteilte Belastung  $q$ . Die Umlenkkraft am oberen Rand soll durch Haftspannungen auf die Zugbewehrung übertragen werden.

Im folgenden werden der Fall 1 'Volle Ausnützung des Betons' und der Fall 2 'Teilweise Ausnützung des Betons' besprochen.

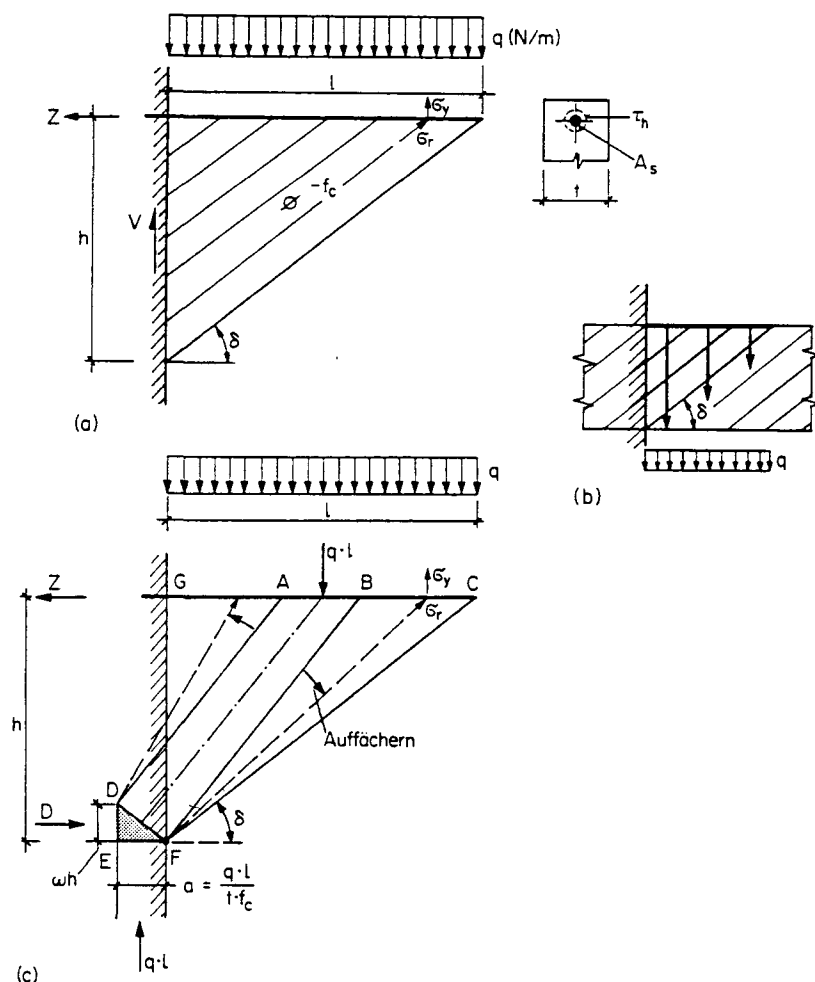


Bild 6.9

Fall 1: Volle Ausnützung des Betons

Es bildet sich ein paralleles Druckfeld mit  $\sigma_r = -f_c$ . Die entsprechenden Spannungen sind:

$$\sigma_y = -\frac{q}{t} \quad \sigma_r = \frac{\sigma_y}{\sin^2 \delta} = -f_c \quad (\text{Gl. 6.17})$$

$$\tau_{yx} = \sigma_y \cdot \cot \delta \quad (\text{Gl. 6.18})$$

$$\tau_h = \frac{\sigma_y \cdot t}{\Sigma u} \cdot \cot \delta \quad (\text{Gl. 6.19})$$

Daraus ergeben sich:

$$\sigma_y = -f_c \cdot \sin^2 \delta \quad ; \quad \tau_{yx} = -f_c \cdot \sin \delta \cdot \cos \delta$$

$$\text{Traglast } q_R = -\sigma_y \cdot t = f_c \cdot t \cdot \sin^2 \delta \quad (6.21)$$

$$\text{Zugkraft } Z = -\tau_{yx} \cdot t \cdot l = f_c \cdot t \cdot l \cdot \sin \delta \cdot \cos \delta = f_c \cdot t \cdot h \cdot \cos^2 \delta \quad (6.22)$$

$$\text{Vertikale Reaktion } V = q_R \cdot l = f_c \cdot t \cdot h \cdot \sin \delta \cdot \cos \delta = \frac{1}{2} \cdot f_c \cdot t \cdot h \cdot \sin 2\delta \quad (6.23)$$

mit:  $l = h \cdot \cot \delta$



Die vertikale Reaktion  $V$  wird maximal für

$$\frac{dV}{d\beta} = 0 = \cos 2\delta \rightarrow \delta = \frac{\pi}{4}$$

Mit  $V_{\max} = \frac{1}{2} \cdot f_c \cdot t \cdot h$  folgt

$$V = V_{\max} \cdot \sin 2\delta \quad (6.24)$$

Dieses Resultat ist bereits im Kapitel 4 bei der Bestimmung des Schubwiderstandes von Balken aufgetreten. Wie Bild 6.9 (b) zeigt, kann die Konsole als Dreieckstück des Diagonaldruckfeldes eines Balkens betrachtet werden. Die Belastung  $q$  entspricht der Wirkung der Bügel. Damit ist dieser Zusammenhang hergestellt.

### Fall 2: Teilweise Ausnützung des Betons

Wenn die Spannung für ein paralleles Feld (Bild 6.9 (a)) den Wert  $-f_c$  nicht erreicht, wird sich ein Druckfächer ausbilden mit einer Konzentration am unteren Ende der Konsole. Gemäss Bild 6.9 (c) wird die verteilte Belastung  $q$  [N/m] zu einer statisch äquivalenten konzentrierten Last zusammengefasst. Für den Fall einer gleichmässig verteilten Belastung  $q$  wirkt die Totallast  $q \cdot l$  im Abstand  $l/2$ . Die Aufstandslänge  $a$  für den unteren Knotenpunkt wird

$$a = \frac{q \cdot l}{t \cdot f_c} \quad (6.25)$$

Seine Höhe  $\omega \cdot h$  wird aus dem Gleichgewicht in horizontaler Richtung berechnet:

$$Z = A_s \cdot f_y = \omega \cdot h \cdot t \cdot f_c \quad (6.26)$$

$$\text{wobei } \omega = \frac{A_s}{h \cdot t} \cdot \frac{f_y}{f_c} \quad (\text{mechanischer Bewehrungsgehalt})$$

$$\text{und } q \cdot l \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{a}{2}\right) = Z \cdot h \cdot \left(1 - \frac{\omega}{2}\right) \quad (6.27)$$

Durch Einsetzen erhält man eine Gleichung für  $\omega$  und damit auch für die Bewehrung  $A_s$ :

$$(1 - \omega)^2 = 1 - \frac{q}{t \cdot f_c} \cdot \left(\frac{l}{h}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{q}{t \cdot f_c}\right) \quad (6.28)$$

Wird nun die Druckstrebe aufgefächert, so wird die Gerade DF des Knotens derart gekrümmt, dass die sich entlang der Zugbewehrung (Linie CG) bildenden Fächerspannungen  $\sigma_r$  nach Ablenkung in die Senkrechte gerade den vertikalen Spannungen  $\sigma_y = -q/t$  aus der Belastung entsprechen. Damit ist ein statisch zulässiges Spannungsfeld gefunden. Es bildet zugleich einen Mechanismus, der sich um Punkt D dreht. Somit ist die Traglast bestimmt.

Praktisch kann man den Hebelarm  $h \cdot (1 - \omega/2)$ , d.h.  $\omega$ , schätzen und daraus die Zugkraft  $Z$  berechnen. Dann kontrolliert man den Wert von  $\omega$  anhand der Gl. (6.26) und macht eine neue Schätzung, je nach dem Ergebnis. Daneben ist noch die Haftspannung an der oberen Ecke C gemäss Gl. (6.19) zu kontrollieren:

$$\tau_h(C) = \frac{\sigma_y \cdot t}{\Sigma u} \cdot \cot \delta = \frac{-q}{\Sigma u} \cdot \cot \delta \quad (6.29)$$

Der absolute Wert der Haftspannung darf die Fließgrenze der Haftspannungen nicht überschreiten.

In konstruktiver Hinsicht ist der Druckfächer CGDF mit einer geeigneten Bewehrung gegen Risse, die sich in der Richtung der Druckspannungen bilden, zu versehen.

### 6.5 Weitere Beispiele

Im folgenden werden weitere Beispiele skizziert, die sich mit den in den Abschnitten 6.3 und 6.4 gezeigten Ueberlegungen lösen lassen.

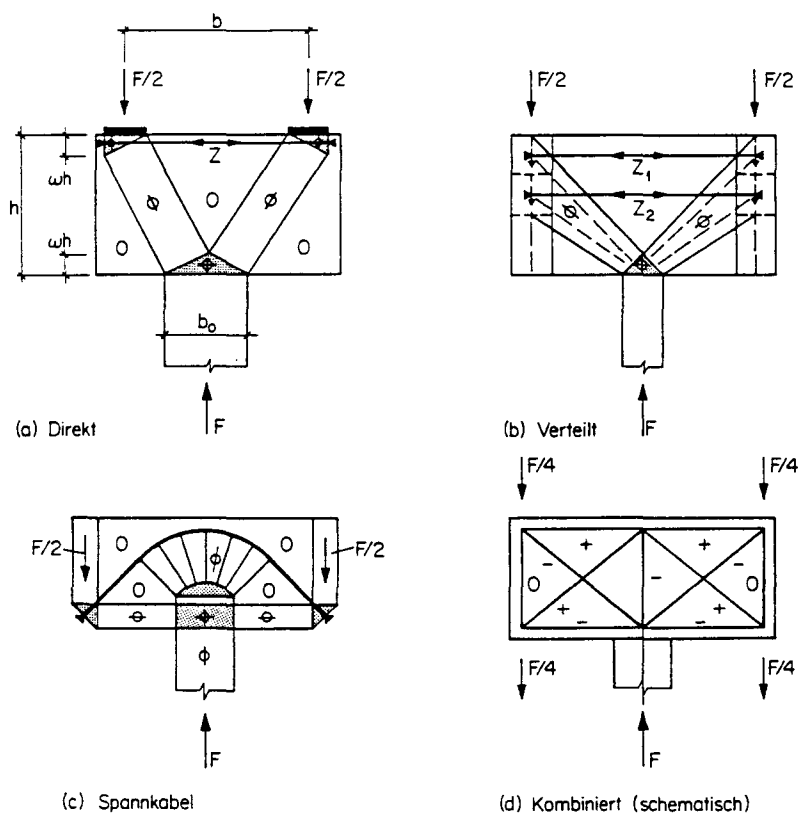
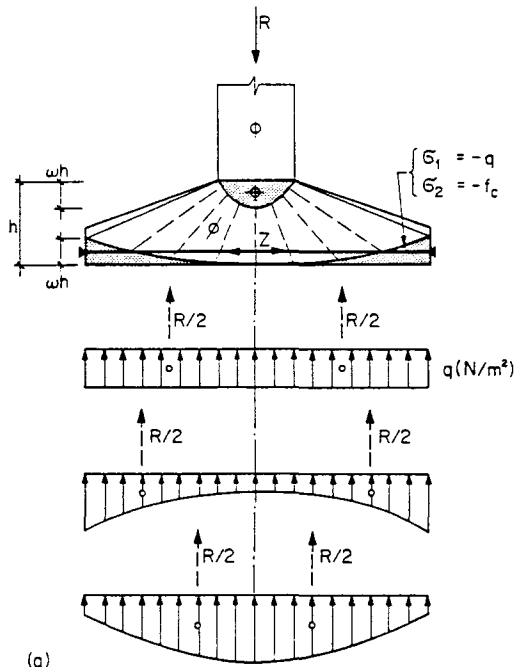


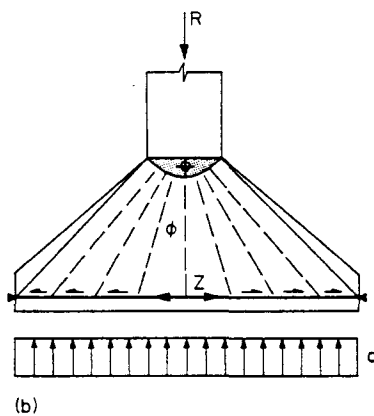
Bild 6.10

Im Bild 6.10 sind Spannungsfelder für verschiedene Querträger von Brücken dargestellt, je nachdem, ob die Belastung aufgesetzt ist oder stetig durch die Längsträger eingetragen wird.

Streifenfundamente lassen sich in gleicher Weise behandeln. Im Bild 6.11 (a) hält eine konstante Zugkraft die beiden Enden zusammen. Die Lösung entspricht derjenigen von Bild 6.8 (c). Ist das Fundament weniger flach, so kann die Zugkraft durch Haftspannungen aufgebaut werden (Bild 6.11 (b)). Offensichtlich entspricht diese Lösung jener einer Konsole (Bild 6.9 (c)).

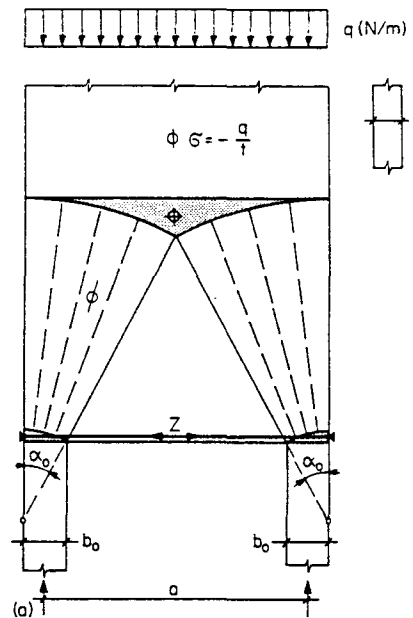


(a)

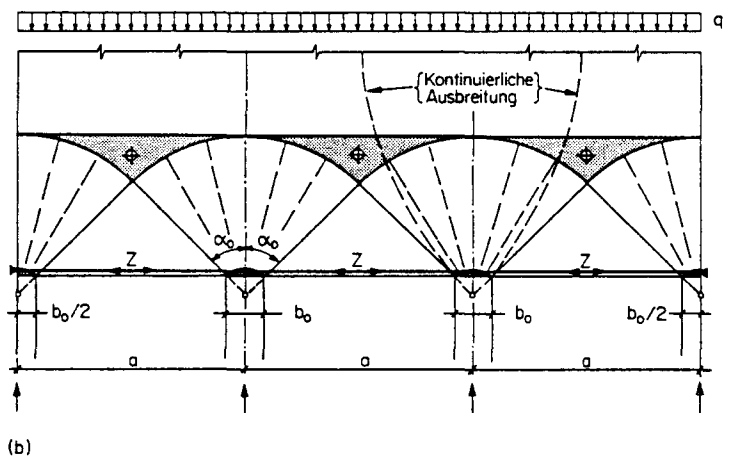


(b)

Bild 6.11



(a)



(b)

Bild 6.12

Auf gleiche Weise können Silowände bemessen werden (Bild 6.12). Dabei ist auf eine vernünftige Annahme des Ausbreitwinkels  $\alpha_0$  zu achten. Das grundsätzliche Vorgehen ist im Abschnitt 6.3 unter Punkt 5 beschrieben.

Die konzentrierte Umlenkung der Fächer in die Vertikale, wie sie Bild 6.12 zeigt, ist zwar statisch zulässig, doch wird sich eher eine kontinuierliche Umlenkung ausbilden. Die erforderliche Zugkraft ändert sich aber nicht, da sie nur vom Ausbreitwinkel  $\alpha_0$  und der totalen Belastung abhängig ist (siehe Gl. (6.13)). Zur Rissesicherung ist selbstverständlich in den Ausbreitungszonen eine vernünftige konstruktive Bewehrung orthogonal anzuordnen. Greift die Last an der Unterkante der Wand an, so ist sie mit einer Aufhängebewehrung über der Ausbreitungszone zu verankern.

Wichtig ist schliesslich der Hinweis, dass in allen besprochenen Fällen (Bilder 6.10 bis 6.12) kein Versagen auf Schub vorkommt. Entsprechend ist auch keine Schubbewehrung notwendig.

## 6.6 Kopplungsträger

Scheiben von Hochhäusern sind oft durch Kopplungsträger (KT) statisch gekoppelt. Analoge Fälle treten bei der Kopplung von Stützen durch Querträger, bei Trägern mit Aussparungen oder bei Vierendeel-Trägern auf (Bild 6.13).

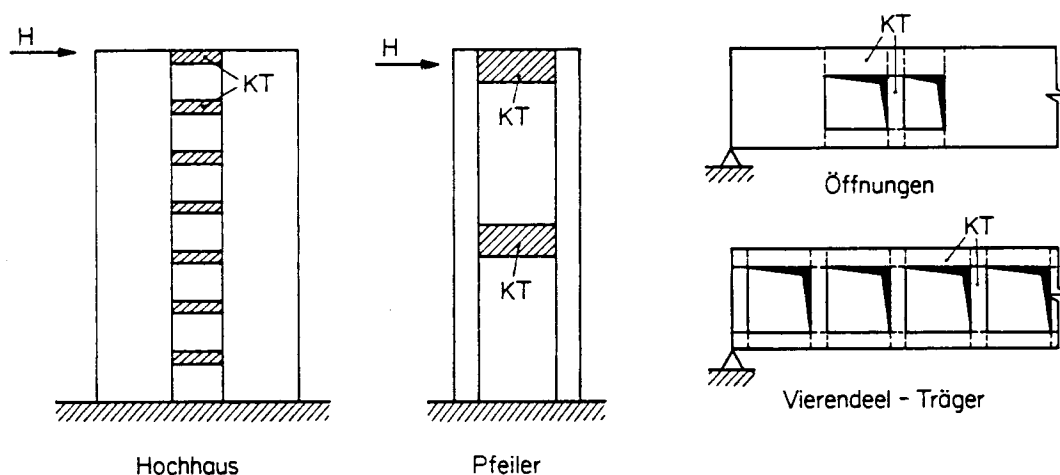
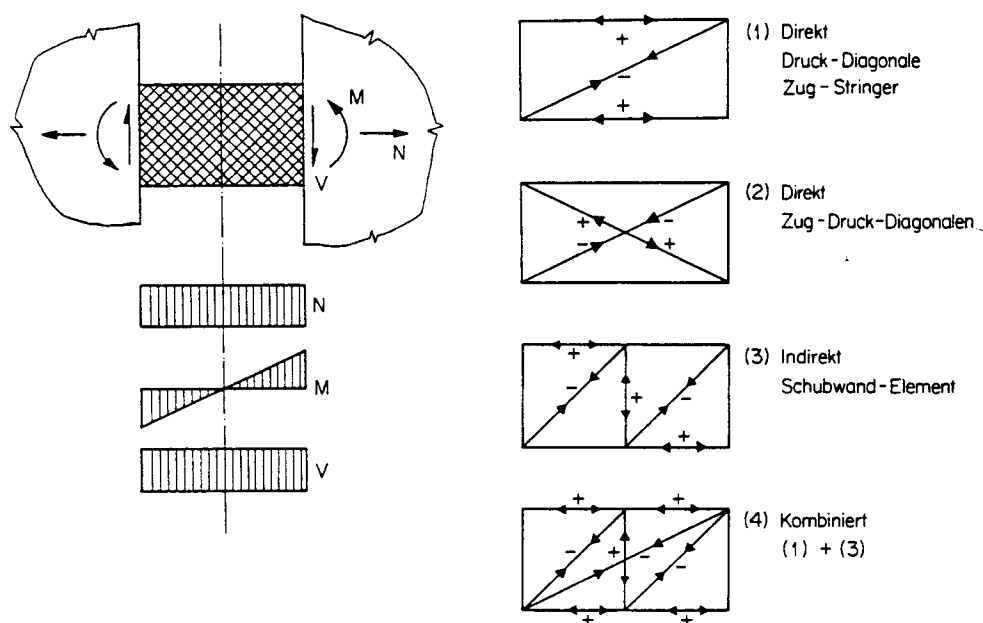


Bild 6.13



6.14

Die Schnittkräfte  $N$ ,  $M$  und  $V$  eines Kopplungsträgers sind im Bild 6.14 dargestellt. Mögliche Tragsysteme sind als Fachwerkmodelle skizziert: (1) Direkte Abstützung mit Zuggurten und einer Druckdiagonalen; (2) Direkte Abstützung mit einer Druck- und einer Zugdiagonalen; (3) Indirekte Uebertragung mit Druckfeld und Bügeln; (4) Kombinierte direkte und indirekte Abstützung.

Im folgenden soll nur der Fall (1) Direkte Abstützung näher untersucht werden.

Im Bild 6.15 ist ein statisch zulässiges Spannungsfeld skizziert.

Mit

$$x = h - l \cdot \tan \alpha$$

und  $b = x \cdot \cos \alpha$

folgt für die Diagonalkraft D

$$D = t \cdot b \cdot f_c = t \cdot h \cdot f_c \cdot \left(1 - \frac{1}{h} \cdot \tan \alpha\right) \cdot \cos \alpha$$

Das Gleichgewicht für einen Schnitt S-S gibt

$$V = D \cdot \sin \alpha$$

$$Z_{\text{sup}} + Z_{\text{inf}} - D \cdot \cos \alpha = N$$

wobei  $Z_{\text{sup}} = Z_{\text{inf}} = \frac{Z}{2}$

ferner

$$D \cdot \cos \alpha = V \cdot \cot \alpha$$

$$V = t \cdot h \cdot f_c \cdot \left(1 - \frac{1}{h} \cdot \tan \alpha\right) \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \cdot t \cdot h \cdot f_c \cdot \left[\sin 2\alpha - \frac{1}{h} \cdot (1 - \cos 2\alpha)\right] \quad (6.30)$$

Der Wert für V wird maximal für:

$$\frac{dV}{d(2\alpha)} = 0 = \cos 2\alpha - \frac{1}{h} \cdot \sin 2\alpha \rightarrow \frac{1}{h} = \cot 2\alpha \quad (6.31)$$

Wird  $1/h = \cot 2\alpha$  in die Gl. (6.30) eingesetzt, folgt:

$$V = \frac{1}{2} \cdot t \cdot h \cdot f_c \cdot \left[\sin 2\alpha - \cot 2\alpha \cdot (1 - \cos 2\alpha)\right] = \frac{1}{2} \cdot t \cdot h \cdot f_c \cdot \tan \alpha \quad (6.32)$$

Mit  $0 \leq 1/h = \cot 2\alpha \leq \infty$  ist  $1 \geq \tan \alpha \geq 0$ , so dass der Wert von Gl. (6.32) höchstens auf

$$\frac{1}{h} = 0 \rightarrow V_{\text{max}} = \frac{1}{2} \cdot t \cdot h \cdot f_c \quad (6.33)$$

ansteigen kann. Dieser Wert für die maximale Querkraft wurde bereits im Kapitel 4 für Schubwände oder Balken hergeleitet. Somit gilt:

$$V = V_{\text{max}} \cdot \tan \alpha \quad (6.34)$$

Die totale Zugkraft wird

$$Z = Z_{\text{sup}} + Z_{\text{inf}} = V \cdot \cot \alpha = V_{\text{max}} \quad (6.35)$$

d.h. sie ist unabhängig vom Winkel  $\alpha$ . Die Gleichungen (6.34) und (6.35) sind im Bild 6.15 (b) dargestellt.

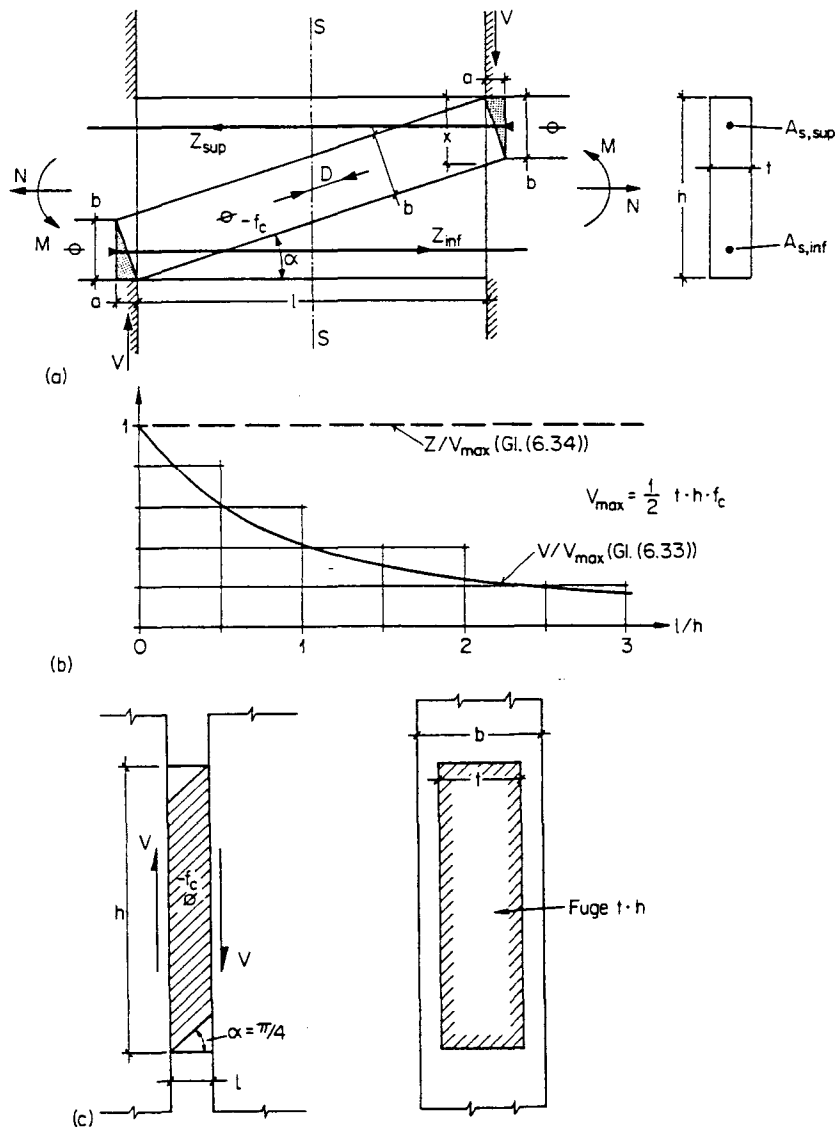


Bild 6.15

Der Wert  $l/h \ll 1$  bedeutet, dass der Träger sehr kurz und hoch ist. Eine Fuge zwischen zwei Fertigteilen entspricht dieser Situation (Bild 6.15 (c)). Dabei ist zu beachten, dass infolge Behinderung der seitlichen Dehnung die effektive Betondruckfestigkeit unter Umständen sogar grösser als die Zylinderdruckfestigkeit werden kann, je nach den geometrischen Verhältnissen  $l/t$  und  $t/b$ . Andererseits sind die Einfüll- und Erhärtungsbedingungen für den Fugenbeton nicht besonders günstig, so dass die Druckfestigkeit direkt beeinträchtigt werden kann.

Der Fall (3), Bild 6.14, entspricht einem Balken mit Bügelbewehrung (siehe Kapitel 4, Abschnitt 4.3). Die Fälle (2) und (4) werden im Kapitel 7 behandelt.

### 6.7 Effektive Betondruckfestigkeit

Sowohl in diesem als auch in vorangehenden Kapiteln ist die Frage nach der effektiven Betondruckfestigkeit  $f_c$  von Druckfeldern aufgetaucht. Gemäss Richtlinie 34 (1976) zur Norm SIA 162 (1968), Art. 2.2 beträgt der Rechenwert der Prismendruckfestigkeit  $\beta_r$  (5%-Fraktile)

$$\beta_r = 0.6 \cdot \beta_{w28}$$

In der folgenden Tabelle 6.3 sind die effektiven Druckspannungen  $f_c$  des Diagonaldruckfeldes als Funktion der maximalen nominellen Schubspannungen  $\tau_{\max} = 6 \cdot \tau_r$  (Art. 4.3) aufgeführt.

$\beta_{w28}$ (16%-Fraktile)	30 N/mm <sup>2</sup>	40 N/mm <sup>2</sup>	50 N/mm <sup>2</sup>
(1) $\beta_r$ (5%-Fraktile)	18	24	30
$\tau_r$	1	1.2	1.4
$\tau_{\max} = 6 \cdot \tau_r$	6	7.2	8.4
(2) $f_c = 2.27 \cdot \tau_{\max}$	13.6	16.3	19.0
$f_c / \beta_r$	0.75	0.70	0.63
$f_c / \beta_{w28}$	0.50	0.45	0.42

Tabelle 6.3

Bemerkungen zur Tabelle 6.3:

(1) Rechnerische Festigkeit für Biegung und Biegung mit Achsialkraft

$$\beta_r \text{ (5\%-Fraktile)} = 0.6 \cdot \beta_{w28} \text{ (16\%-Fraktile)}$$

↓

Umrechnung Würfel-Zylinder;

16%-Fraktile → 5%-Fraktile

(2) Für Neigungswinkel  $\tan \alpha = 1 \rightarrow f_c = 2 \cdot \tau_r$

Für Neigungswinkel  $\tan \alpha = \frac{3}{5} \rightarrow f_c = 2.27 \cdot \tau_r$

Es sind daher folgende Festigkeitswerte zu unterscheiden:

1. Würfeldruckfestigkeit (16%-Fraktile):  $\beta_{w28}$
2. Biegung - Achsialkraft: Rechnerische Festigkeit (5%-Fraktile):  $\beta_r = 0.6 \cdot \beta_{w28}$
3. Schub - Diagonaldruckfeld: Effektive Betondruckfestigkeit:  $f_c \approx \frac{2}{3} \cdot \beta_r$

Für grössere Abweichungen von der Neigung  $\alpha = \pi/4$  wurde im Kapitel 4, Gl. (4.29), der Ansatz  $f_c = \frac{5}{6} \cdot f_{ck} \cdot \sin 2\alpha$  eingeführt.

4. Für allgemeine Druckfelder in Wänden:

$$\frac{1}{2} \cdot \beta_r \leq f_c \leq \beta_r$$

$\downarrow$   $\downarrow$   
 Paralleles Feld mit Querdehnung Stark zentrierter Fächer  
(mit Querbehinderung  $f_c > \beta_r$ , Bilder 6.22 und 6.23)

Daraus ist ersichtlich, dass die effektive Betondruckfestigkeit nicht als konstant betrachtet werden darf, sondern vom Spannungszustand wie auch von vorhergehenden Umlagerungen und Rissbildungen beeinflusst ist. In der praktischen Anwendung wird die Betondruckfestigkeit in den meisten Fällen nicht massgebend (unterbewehrt), so dass eine konservative Annahme von  $f_c$  praktisch ohne Auswirkung auf die erforderliche Bewehrung ist.

Im folgenden sind einige Einflüsse aufgezählt, die bei der Festlegung der effektiven Betondruckfestigkeit  $f_c$  zu berücksichtigen sind, resp. bei der Interpretation von Versuchsergebnissen in Betracht gezogen werden müssen.

1. Querdehnung (Bild 6.16)

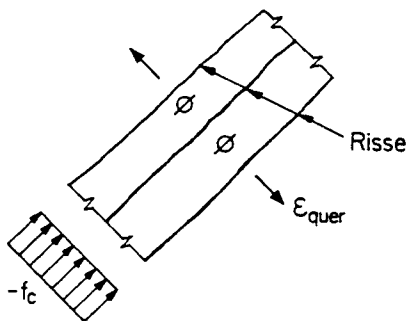


Bild 6.16

Infolge der Querdehnung  $\epsilon_{\text{quer}}$  treten diskrete Risse parallel zum Druckfeld auf. Die effektive Betonfestigkeit  $f_c$  wird vermindert.

2. Umlagerung des Spannungsfeldes von der Risslast bis zur Bruchlast (Bild 6.17)

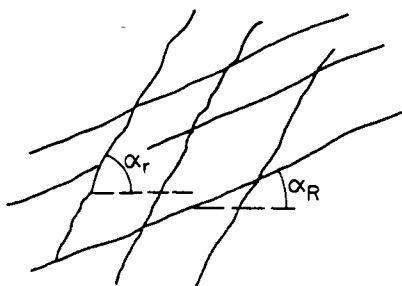


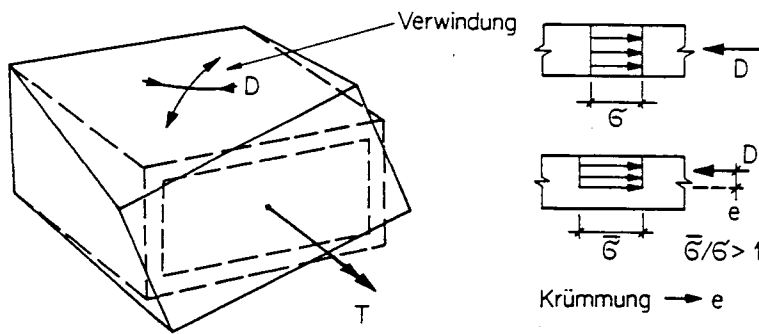
Bild 6.17

$\alpha_r$  : Risslast  
 $\alpha_R$  : Bruchlast

Die beiden Riss-Systeme lockern das Betongefüge; die effektive Betonfestigkeit  $f_c$  wird herabgesetzt.



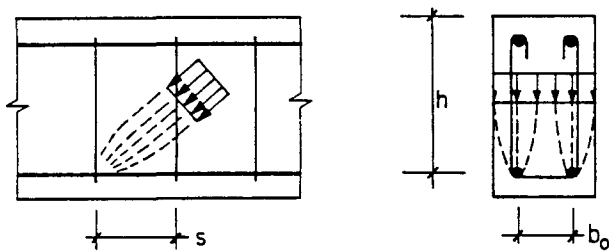
3. Sekundäre Effekte, z.B. Verwindung bei Torsion (Bild 6.18)



Die Spannungen werden durch sekundäre Effekte auf einen kleineren Querschnitt zusammengedrückt. Indirekt kann diesem Umstand durch eine Herabsetzung der effektiven Betonfestigkeit  $f_c$  Rechnung getragen werden.

Bild 6.18

4. Lokale Störungen



Das Druckfeld stützt sich auf die Bewehrung ab (Bild 6.19). An den lokalen Kontaktpunkten treten Spannungskonzentrationen auf. Der durchschnittliche Wert der effektiven Betonfestigkeit  $f_c$  muss diese Spitzen berücksichtigen.

Bild 6.19

Die Umlenkung des Diagonaldruckfeldes im Fall der Torsion führt zu örtlich hoher Pressung (Bild 6.20).

In Stegen vorgespannter Träger wird das Diagonaldruckfeld durch die Kabelrohre gestört (Bild 6.21). Es treten Spannungsspitzen und Spaltzugkräfte auf.

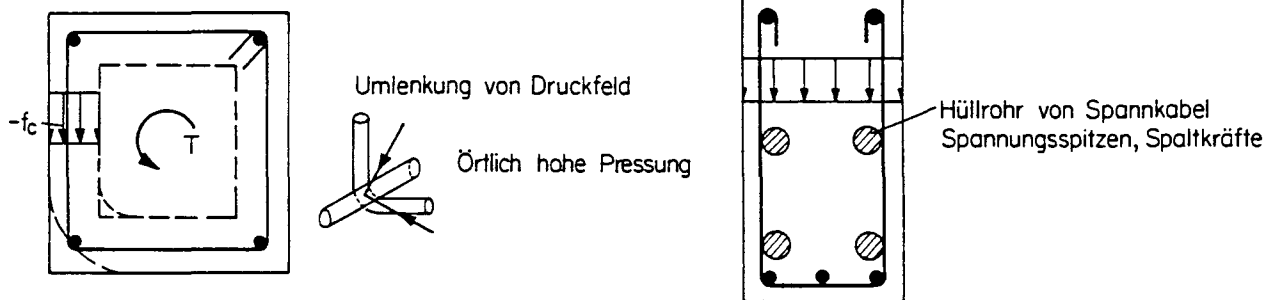


Bild 6.20

Bild 6.21

## 5. Lokale Konzentrationen (Bilder 6.22 und 6.23)

Fächer führen zu lokalen Konzentrationen. Ist durch die Umgebung die Querdehnung behindert ("confinement"), so sind bedeutende Festigkeitserhöhungen möglich. Auch durch Umschnürung mit einer Bewehrung kann eine Behinderung der Querdehnung erzielt werden.

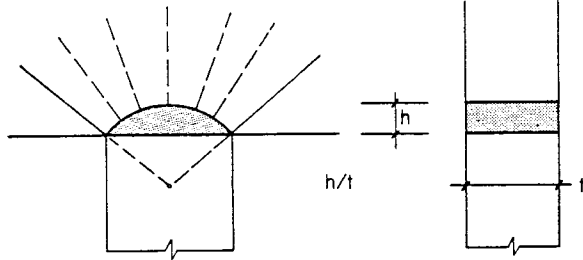


Bild 6.22

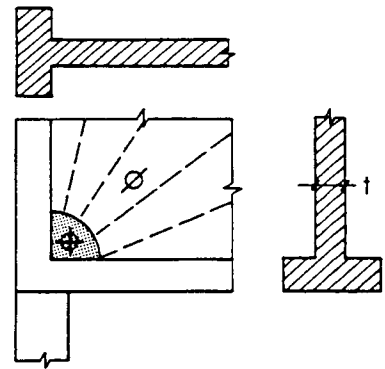


Bild 6.23

## 6. Ueberdeckung (Bild 6.24)

Die Verankerung der Stege und Schubwände spielt eine entscheidende Rolle. Je nach Situation ist mit Ueberdeckung ( $t$ ) oder ohne Ueberdeckung ( $t_0$ ) zu rechnen. Um einheitliche Dimensionen für alle Beanspruchungsfälle zu haben, wird im allgemeinen mit Ueberdeckung, d.h. mit  $t$  gerechnet. Entsprechend muss  $f_c$  konservativ gewählt werden.

Bei zyklischen Belastungen, z.B. Erdbeben, springt die Ueberdeckung ab, so dass in solchen Fällen ohne Ueberdeckung gerechnet wird.

Zur Beurteilung von Versuchsergebnissen ist die Wahl sehr wichtig:  $f_c(t)$ ;  $f_c(t_0)$ .

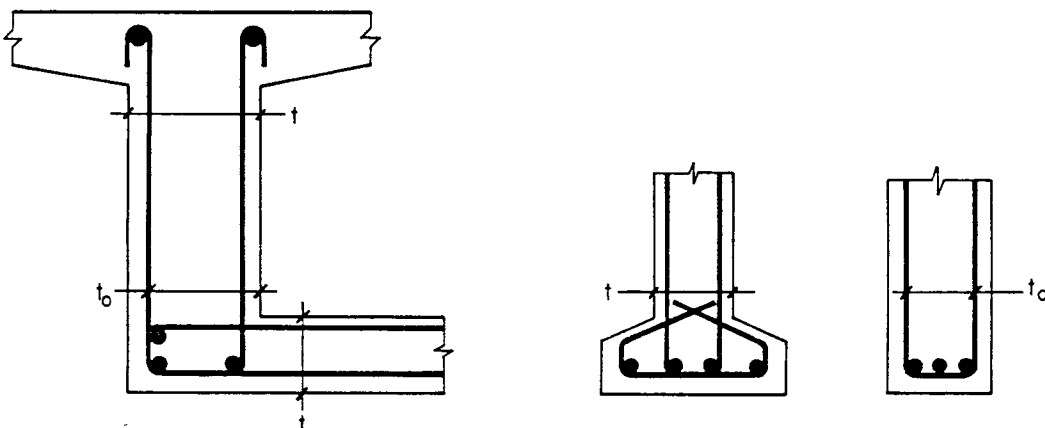


Bild 6.24

LITERATUR

- [6.1] International Association for Bridge and Structural Engineering (IABSE): "Plasticity in Reinforced Concrete", IABSE Colloquium Copenhagen 1979, Introductory Report (1978) and Final Report (1979). IABSE, ETH-Hönggerberg, Zürich.
- [6.2] Müller P.: "Plastische Berechnung von Stahlbetonscheiben und -balken", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Bericht Nr. 83, Juli 1978, Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart.



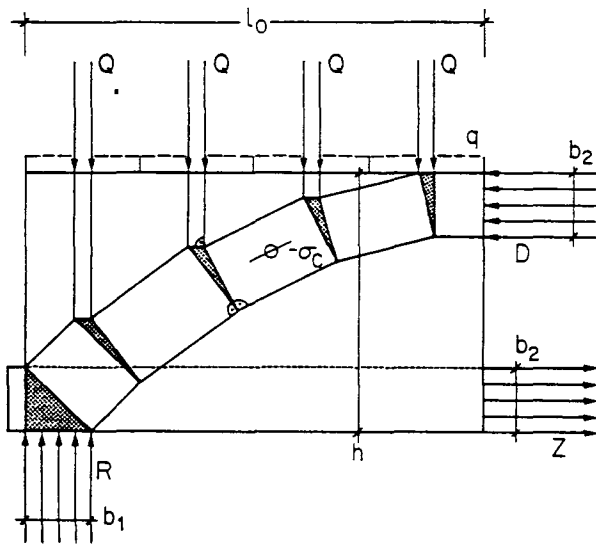


Bild 7.3

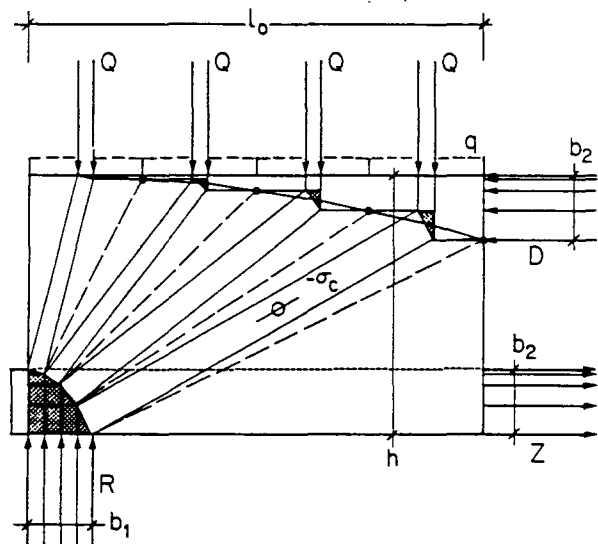


Bild 7.4

nach den äusseren Beanspruchungen und der Druckfestigkeit des Betons.

$$-f_c \leq \sigma_c \leq 0 \quad (7.1)$$

Durch die Grösse der einzelnen Stabkräfte im Kräftepolygon sind auch die Proportionen der Abmessungen der Druckspannungsfelder bestimmt. Stabkräfte und Abmessungen der Druckstreben verlaufen proportional zueinander. Dadurch führt auch die Ueberlagerung der Spannungsfelder in den Knotenpunkten automatisch zur richtigen Form. Die so erzeugten Spannungszustände in einem Knoten entsprechen einem hydrostatischen Spannungszustand, wie er im Kapitel 6 erläutert wird.

Beide Modellannahmen ergeben für die Kräfte D, Z und R die gleichen Gleichgewichtsbeziehungen.

$$R = 4 \cdot Q \quad (7.2)$$

$$Z = D = R \cdot \left( \frac{1}{1_0} - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1_0}{Z} \quad (7.3)$$

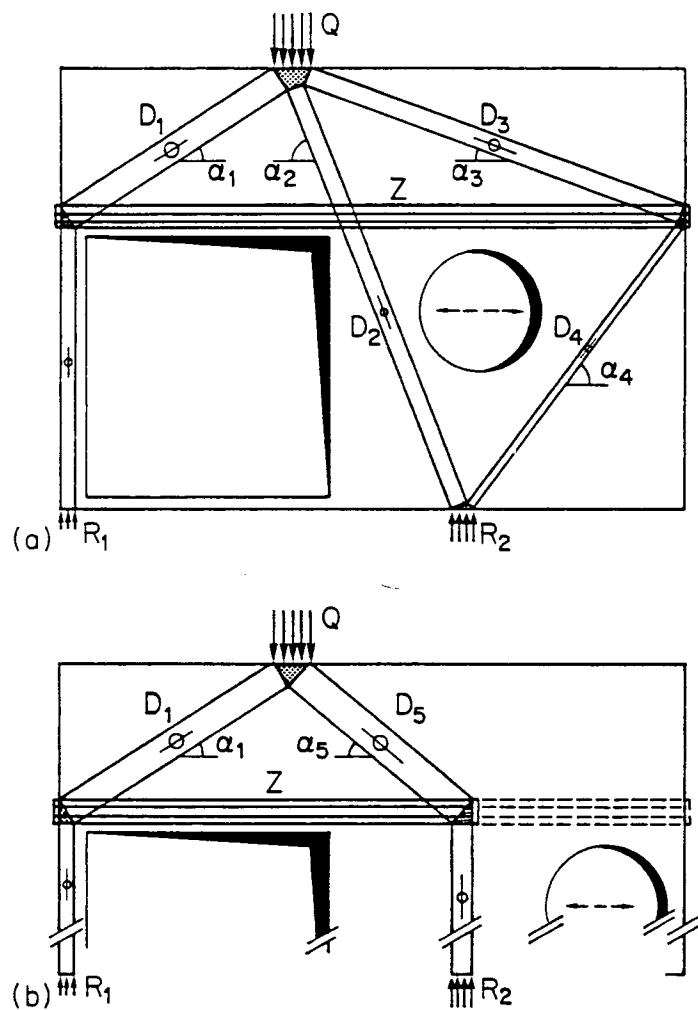
Mit  $R = f_c \cdot b_1 \cdot t$  und  $Z = D = f_c \cdot b_2 \cdot t$  können die Beziehungen zwischen den Spannungsfeldabmessungen  $b_1$  und  $b_2$  aufgrund der Gl. (7.3) formuliert werden.

$$2 \cdot \frac{b_2}{1_0} \cdot \left( \frac{h}{1_0} - \frac{b_2}{1_0} \right) = \frac{b_1}{1_0} \cdot \left( 1 - \frac{b_1}{1_0} \right) \quad (7.4)$$

Im Bild 7.4 wird auch ersichtlich, wie die diskontinuierlichen Druckstreben der konzentrierten Lasten Q zu einem kontinuierlichen Fächer der verteilten Lasten q übergehen.

Zusammenfassend kann für die beiden Bilder 7.3 und 7.4 festgehalten werden, dass

1. in beiden Lösungen ein statisch zulässiger Spannungszustand vorliegt,
2. für das betrachtete Tragsystem beide Spannungsfelder (Stabbogen und Fächer) die gleiche Traglast ergeben.



Im allgemeinen sind Scheiben und Wände mit Türöffnungen und Aussparungen durchsetzt. Wie diese Tragsysteme mit Fachwerkstäben nachgebildet werden können, soll an einigen Problemen, die sich in der Praxis immer wieder stellen, erläutert werden.

Bild 7.5 zeigt eine auf zwei Querwänden  $R_1$  und  $R_2$  gelagerte Wand, die mit einer Türöffnung und einer kreisförmigen Aussparung ausgestattet ist. Je nach Lage der Wanddurchbrüche ändert das System der Druckstreben, die die Auflast  $Q$  auf die vorgegebenen Auflagerstellen  $R_1$  und  $R_2$  übertragen. Das Zugband verläuft horizontal über der Türöffnung und hält die Druckstreben im Gleichgewicht. Die Kräfte in den Druckstreben und im Zugband können grafisch oder analytisch ermittelt werden.

Bild 7.5

Gleichungen zum Bild 7.5 (a):

$$\begin{aligned}
 R_1 + R_2 &= Q = D_1 \cdot \sin \alpha_1 + D_2 \cdot \sin \alpha_2 + D_3 \cdot \sin \alpha_3 \\
 Z &= D_1 \cdot \cos \alpha_1 = D_2 \cdot \cos \alpha_2 + D_3 \cdot \cos \alpha_3 = D_3 \cdot \cos \alpha_3 + D_4 \cdot \cos \alpha_4 \\
 D_2 \cdot \cos \alpha_2 &= D_4 \cdot \cos \alpha_4 \\
 R_1 &= D_1 \cdot \sin \alpha_1 \\
 R_2 &= D_2 \cdot \sin \alpha_2 + D_4 \cdot \sin \alpha_4 \\
 D_2 &= \frac{Q}{\sin \alpha_2 + \tan \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2 + \cos \alpha_2 \cdot \tan \alpha_4 + \tan \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2 \cdot \cot \alpha_3 \cdot \tan \alpha_4} \\
 D_1 &= \frac{Q + D_2 \cdot (\cos \alpha_2 \cdot \tan \alpha_3 - \sin \alpha_2)}{\sin \alpha_1 + \cos \alpha_1 \cdot \tan \alpha_3}
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

Gleichungen zum Bild 7.5 (b):

$$\begin{aligned}
 R_1 + R_2 &= Q = D_1 \cdot \sin\alpha_1 + D_5 \cdot \sin\alpha_5 \\
 Z &= D_1 \cdot \cos\alpha_1 = D_5 \cdot \cos\alpha_5 \\
 R_1 &= D_1 \cdot \sin\alpha_1 \\
 R_2 &= D_5 \cdot \sin\alpha_5 \\
 D_1 &= \frac{Q}{\sin\alpha_1 + \cos\alpha_1 \cdot \tan\alpha_5} \\
 D_2 &= \frac{Q}{\tan\alpha_1 \cdot \cos\alpha_5 + \sin\alpha_5}
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

Die numerischen Werte für die aufgezeichneten Bilder lauten:

Bild 7.5 (a):

$$\begin{aligned}
 \tan\alpha_1 &= 0.667 & \tan\alpha_2 &= 2.667 & \tan\alpha_3 &= 0.381 & \tan\alpha_4 &= 1.333 \\
 D_1 &= 0.773 \cdot Q & D_2 &= 0.407 \cdot Q & D_3 &= 0.535 \cdot Q & D_4 &= 0.238 \cdot Q \\
 Z &= 0.643 \cdot Q \\
 R_1 &= 0.429 \cdot Q & R_2 &= 0.571 \cdot Q
 \end{aligned}$$

Bild 7.5 (b):

$$\begin{aligned}
 \tan\alpha_1 &= 0.667 & \tan\alpha_5 &= 0.889 \\
 D_1 &= 0.773 \cdot Q & D_5 &= 0.860 \cdot Q \\
 Z &= 0.643 \cdot Q \\
 R_1 &= 0.429 \cdot Q & R_2 &= 0.571 \cdot Q
 \end{aligned}$$

Die eingezeichneten Breiten der Druckstreben richten sich nach den Grössen der Druckkräfte. Allerdings ist zu beachten, dass in Wirklichkeit die Kräfte nicht nur über die eingezeichneten schmalen Spannungsfelder übertragen werden. Die Druckstrebenkräfte breiten sich auch in die anschliessenden spannungsfrei gezeichneten Zonen aus. Die dadurch entstehenden Spreizkräfte müssen durch eine konstruktive Verteilbewehrung (vgl. Kapitel 6) abgedeckt werden. Die Hauptbewehrung richtet sich nach den in den Bildern eingetragenen Zugspannungsfeldern Z. Entspricht die Belastung Q gerade der erwarteten Bruchlast, kann die notwendige Bewehrungsfläche  $A_s$  angegeben werden:

$$A_s = \frac{Z}{f_y}$$

Die zugehörigen Bewehrungsstäbe werden über die Breite des Spannungsfeldes verteilt und an den Knotenstellen durch horizontale Bügel oder Ankerplatten verankert (vgl. Bild 7.5 (c)). Das Gewicht der Scheibe muss mit Bügeln (mindestens über den Druckstreben) aufgehängt werden.

Mit dem Wandbeispiel von Bild 7.6 soll gezeigt werden, dass es auch bei den Scheiben immer darum geht, einen möglichst grossen inneren Hebelarm zwischen den Druck- und Zugkräften zu erzeugen. Nur so führt der gewählte, statisch zulässige Spannungszustand zu einer wirtschaftlichen Bewehrung.

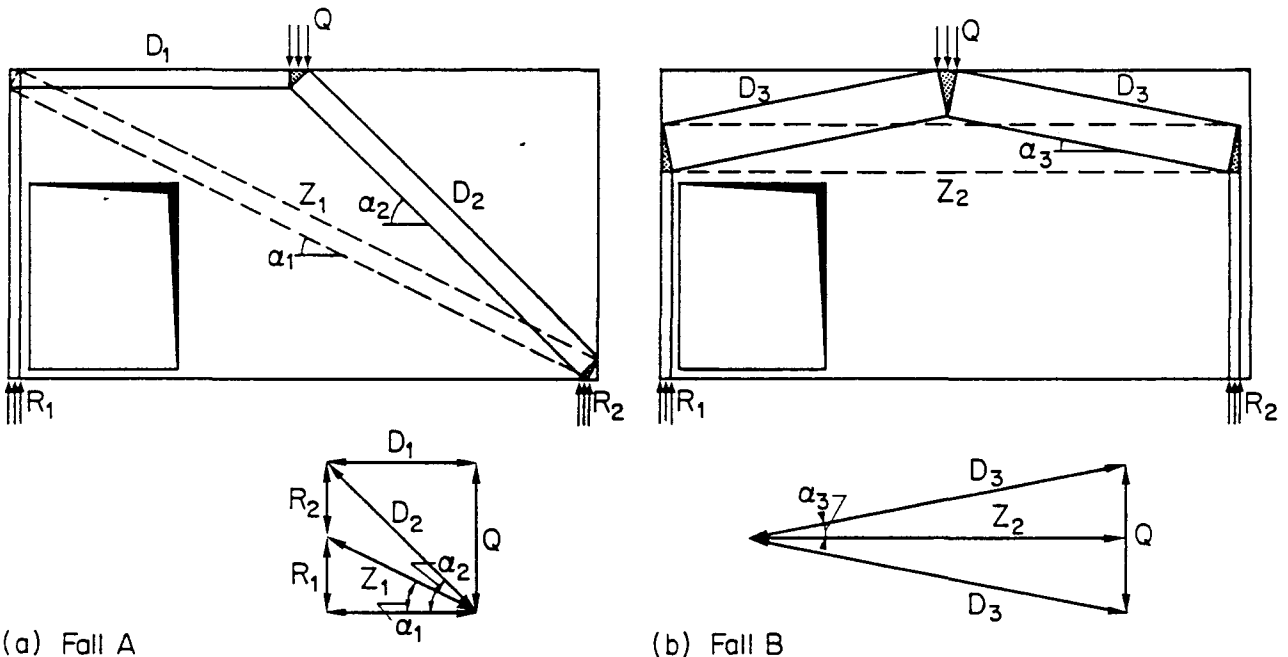


Bild 7.6

Gleichungen zum Bild 7.6:

Fall A:

$$D_2 \cdot \sin \alpha_2 = Q$$

$$D_1 = D_2 \cdot \cos \alpha_2 = Z_1 \cdot \cos \alpha_1$$

$$R_1 = Z_1 \cdot \sin \alpha_1$$

$$R_2 = D_2 \cdot \sin \alpha_2 - Z_1 \cdot \sin \alpha_1$$

(7.7)

Fall B:

$$D_3 \cdot \sin \alpha_3 = 0.5 \cdot Q$$

$$Z_2 = D_3 \cdot \cos \alpha_3$$

$$R_1 = R_2 = 0.5 \cdot Q$$

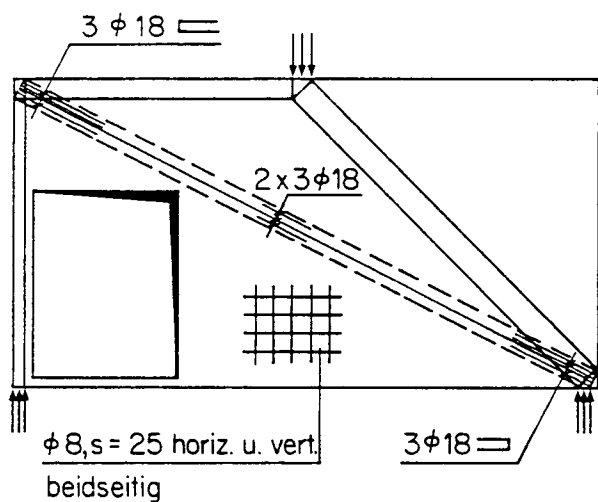
(7.8)

Die numerischen Werte für das gezeichnete Bild 7.6 lauten:

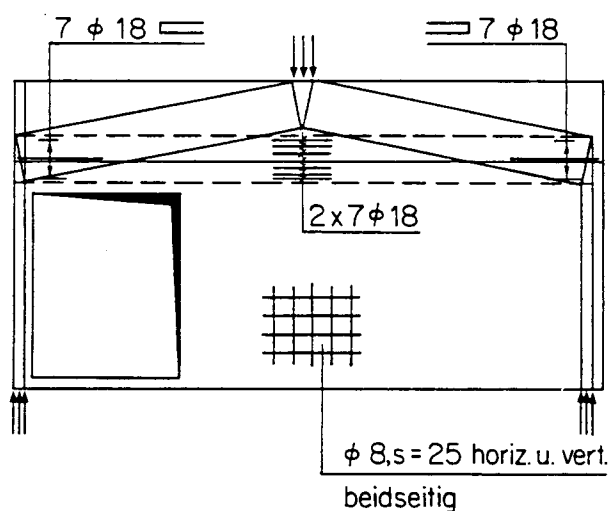
Fall A:  $D_1 = 1.000 \cdot Q$        $D_2 = 1.414 \cdot Q$        $Z_1 = 1.118 \cdot Q$   
 $R_1 = R_2 = 0.500 \cdot Q$

Fall B:  $D_3 = 2.550 \cdot Q$        $Z_2 = 2.500 \cdot Q$        $R_1 = R_2 = 0.500 \cdot Q$   
 $R_1 = R_2 = 0.500 \cdot Q$

Die Resultate ergeben für die Druckstreben und das Zugband die erwarteten geringeren Beanspruchungen im Fall A. So muss nicht einmal die Hälfte des Bewehrungsquerschnittes von Fall B aufgewendet werden. Eine mögliche Bewehrungsanordnung ist für beide Fälle im Bild 7.7 aufgezeichnet.



(a) Bewehrung Fall A



(b) Bewehrung Fall B

Bild 7.7

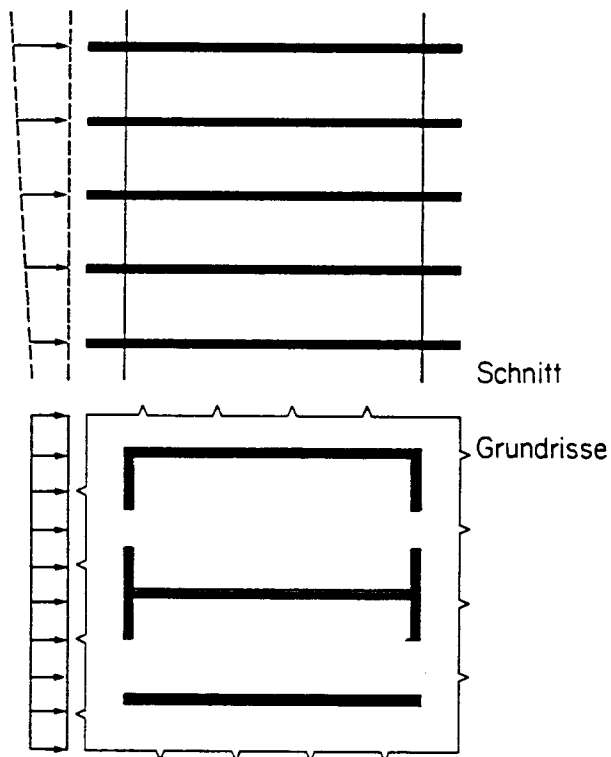


Bild 7.8

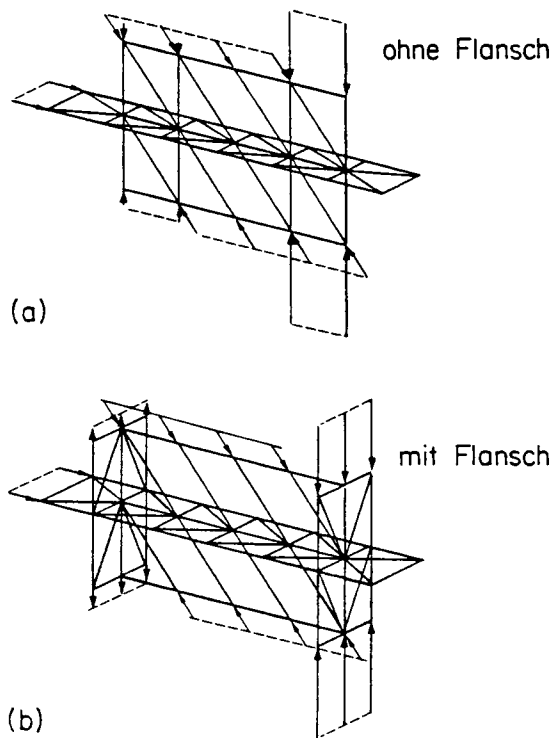


Bild 7.9

Im Bild 7.8 sind mehrgeschossige Schubwände aufgezeichnet, die ausser Vertikallasten vor allem auch Horizontallasten aufnehmen. Im Grundriss werden die Schubwände von den Decken umfasst oder sind in diesen starr verankert. Der massgebende Deckenbereich wird so stark bewehrt, dass er einem starren Bügel in der Schubwand entspricht. Unterschieden werden Wände mit einseitigem, beidseitigem oder ohne Flansch.



Damit rasch ein Ueberblick über den Kräfteverlauf in einer Schubwand gewonnen werden kann, wird sie mit einem diskreten Fachwerk nachgebildet. Für den Ausschnitt einer von der Decke umfassten Schubwand ist im Bild 7.9 ein mögliches Fachwerk über zwei Stockwerke eingezeichnet. Normalkraft und Querkraft werden im Schubbereich mit den diagonalen Betondruckstreben übertragen. Am Rand werden die Diagonalen durch die Druck- und Zuggurtungen und senkrecht dazu durch ein weiteres Fachwerk in der Deckenebene, mit welcher die Horizontal-lasten auf die Schubwand übertragen werden, im Gleichgewicht gehalten. Die Zugstäbe des Decken- und Wandfachwerks sind mit entsprechenden Bewehrungen abzudecken.

Werden die Abmessungen der diskreten Fachwerkstäbe in der Scheibenebene erweitert, entstehen in der Schubwand Spannungsfelder, wie sie im Kapitel 4 behandelt worden sind. Die Bügel werden durch die starren Deckenebenen gebildet. Mehrgeschossige Schubwände können somit wie durch Querkraft- und Biegemomente beanspruchte Träger (analog Kapitel 4) bemessen werden. Eine eingehendere Diskussion dieser Tragsysteme erübrigt sich.

Im allgemeinen sind in den Schubwänden Oeffnungsreihen für Durchgänge eingebaut (Bild 7.10). Dadurch entstehen über den Türausparungen gedrungene Kopplungsträger, die die in zwei Teile geschnittenen Schubwände stockwerksweise miteinander verbinden. Wie Bild 7.10 zeigt, können die durch die Oeffnungsreihen entstandenen Einzelscheiben wieder mit Fachwerken nachgebildet werden. Die Mehrfachfachwerke von Bild 7.10 (b) deuten an, dass die beiden Schubwandteile wie auf Schub und Biegung beanspruchte Kragbalken behandelt werden können, wenn die diskreten Fachwerkstäbe zu Spannungsfeldern erweitert werden. Nur die Kopplungsträger müssen eingehender untersucht werden.

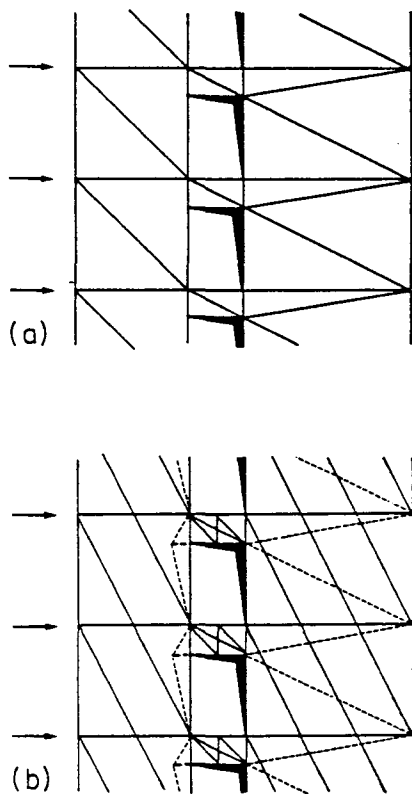


Bild 7.10

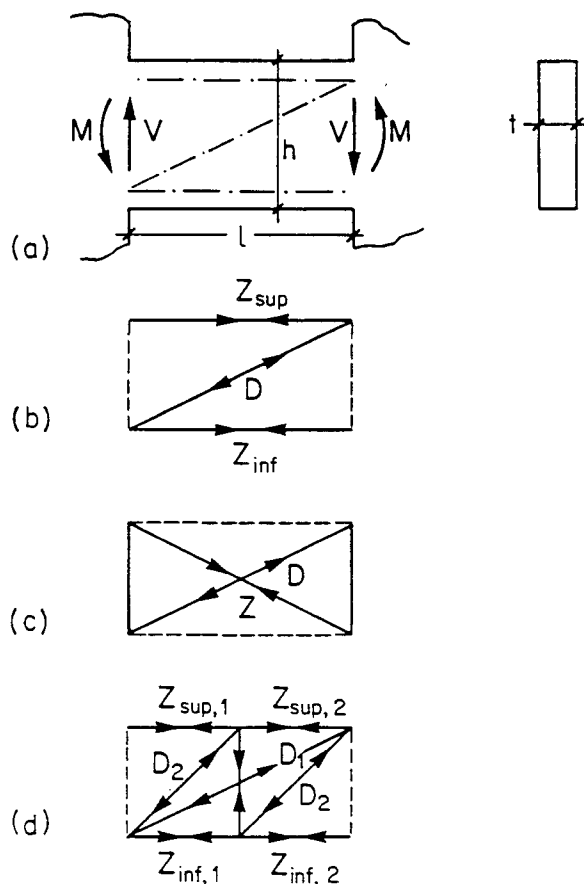


Bild 7.11

Die meist gedrungenen Balken werden durch die im Bild 7.11 (a) dargestellten Schnittgrößen  $M$  und  $V$  beansprucht. Wird der Kopplungsträger mit Fachwerken nachgebildet, sind grundsätzlich drei verschiedene Tragmodelle denkbar. Im Bild 7.11 (b) wird die Betondruckdiagonale, die sich direkt auf die anschliessenden Schubwände abstützt, durch ein oberes und ein unteres Zugband im Gleichgewicht gehalten. Im Bild 7.11 (c) werden die beiden Zugbänder am Rand durch ein Zugband in den Diagonalen ersetzt. Die Betondruckdiagonale stützt sich weiterhin direkt auf die Wände ab. Im Gegensatz dazu werden im Bild 7.11 (d) nebst einer diagonalen Direktabstützung  $D_1$  zusätzlich auf einen Vertikalpfosten (Bügel) abgestützte Druckdiagonalen  $D_2$  angenommen, wodurch wieder parallel zum Rand verlaufende Zugstäbe erforderlich sind.

Mit dem Fachwerkmodell von Bild 7.12 soll abgeklärt werden, in welchem Umfang die Anschlussbereiche der Kopplungsträger in die Bemessung einzubeziehen sind. Dazu werden die diskreten Fachwerkstäbe, die für das Kräftespiel des Kopplungsträgers notwendig sind, in der Scheibenebene zu Spannungsfeldern erweitert. Das Gleichgewicht der Knoten und die zugehörigen Betondruckspannungsfelder sind im Bild 7.12 (b) dargestellt. Es wird daraus ersichtlich, dass die Spannungsfelder des Riegels auf verschiedene Arten fortgesetzt werden können, ohne dass dadurch die Spannungsverteilung in den Wänden allzu stark gestört wird. Im allgemeinen wird es daher genügen, den unmittelbaren Anschlussbereich eines Kopplungsträgers zu betrachten. Schematisch ist der zu untersuchende Knotenbereich im Bild 7.12 (c) hervorgehoben.

Der Fall der direkten Abstützung von Bild 7.13 (a) ist schon im Kapitel 6 behandelt worden. Die Resultate werden für die spätere Verwendung nochmals zusammengestellt.

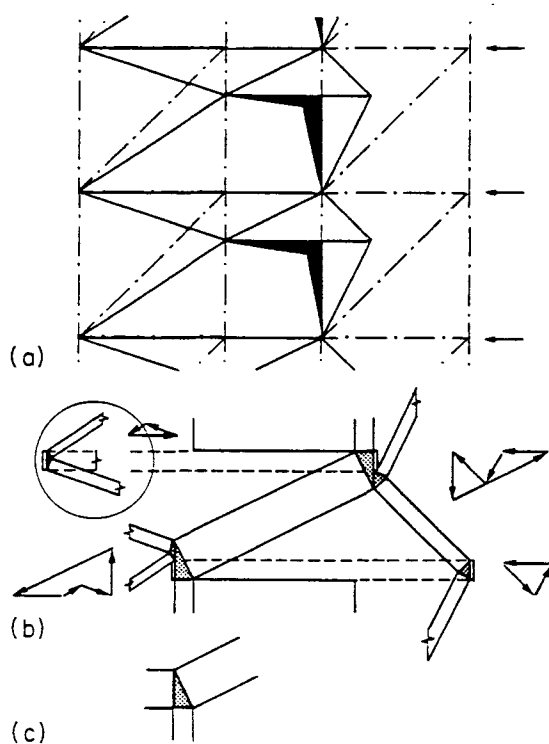


Bild 7.12

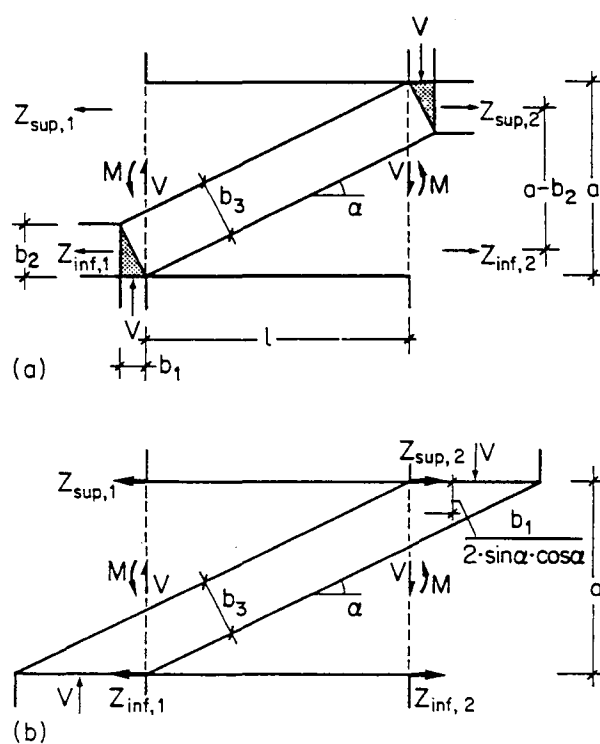


Bild 7.13

$$Z_{\text{inf},1} = Z_{\text{sup},1} = Z_{\text{inf},2} = Z_{\text{sup},2} = \frac{V \cdot \cot \alpha}{2} \quad (7.9)$$

$$M = V \cdot \frac{1 + b_1}{2} \quad (7.10)$$

$$V = D \cdot \sin \alpha = f_c \cdot t \cdot b_3 \cdot \sin \alpha = V_0 \cdot \left\{ \sin 2\alpha - \frac{1}{a} \cdot (1 - \cos 2\alpha) \right\} \quad (7.11)$$

$$V_0 = \frac{f_c \cdot a \cdot t}{2} \quad (7.12)$$

$$\frac{V_{\text{max}}}{V_0} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{a}\right)^2} - \frac{1}{a}, \quad \tan 2\alpha = \frac{a}{1} \quad (7.13)$$

$$\frac{Z(V_{\text{max}})}{V_0} = \frac{V_{\text{max}}}{V_0} \cdot \cot \alpha = 1.0 \quad (7.14)$$

Das diagonale Druckspannungsfeld von Bild 7.13 (a) wird mit einer Druckverankerung, deren Resultierende einen Randabstand  $b_2/2$  aufweist, abgestützt. Im Bild 7.13 (b) wird das diagonale Druckspannungsfeld bis auf die am Rand liegende Bewehrung weitergeführt und auf dieser verankert. Der Momentenwiderstand bleibt unverändert, da die Resultierende der Zugkräfte im Schwerpunkt der Scheibe angreift.

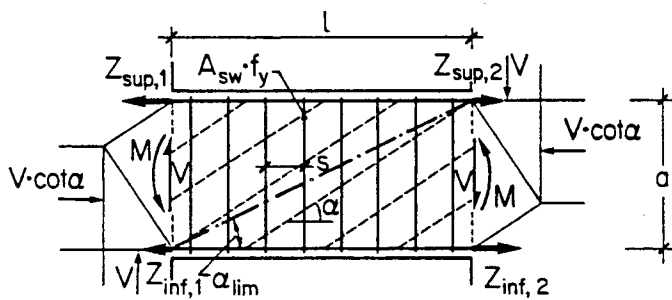


Bild 7.14

$$\omega_y = \frac{A_{\text{sw}} \cdot f_y}{t \cdot s \cdot f_c}$$

Die im Kapitel 4 für das Schubwandelement hergeleiteten Beziehungen werden nochmals zusammengestellt.

$$\text{Fall 1: } \omega_y \geq \frac{1}{2} \quad \tan \alpha = 1.0 \quad (7.15)$$

$$V = f_c \cdot t \cdot a \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \cdot f_c \cdot t \cdot a \quad (7.16)$$

$$Z_{\text{sup},1} - Z_{\text{sup},2} = Z_{\text{sup},1} - Z_{\text{inf},1} = f_c \cdot t \cdot l \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \cdot f_c \cdot t \cdot l = V \cdot \frac{1}{a}$$

$$Z_{\text{sup},1} + Z_{\text{inf},1} = f_c \cdot t \cdot a \cdot \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} \cdot f_c \cdot t \cdot a = V \cdot \cot \alpha = V$$

$$Z_{\text{sup},1} = \frac{1}{4} \cdot f_c \cdot t \cdot a \cdot \left(1 + \frac{1}{a}\right) = \frac{V}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{a}\right) \quad (7.17)$$

$$Z_{\text{inf},1} = \frac{1}{4} \cdot f_c \cdot t \cdot a \cdot \left(1 - \frac{1}{a}\right) = \frac{V}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{a}\right) \quad (7.18)$$

Anstelle einer direkten Abstützung von Wand zu Wand wird im Bild 7.14 angenommen, dass sich die diagonalen Druckspannungsfelder vollständig auf die Bügel des Kopplungsträgers abstützen. Dabei lassen sich aufgrund der Ausführungen im Kapitel 4 drei verschiedene Fälle unterscheiden. Diese richten sich nach dem Wert des mechanischen Bewehrungsgehaltes der Bügel.

$$\text{Fall 2: } \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{a}\right)^2} \leq \omega_y < \frac{1}{2} \quad (7.19)$$

Die untere Grenze von  $\omega_y$  wird durch die Riegeldiagonale von Wand zu Wand unter dem Winkel  $\alpha_{lim}$  (Bild 7.14) bestimmt.

$$\omega_y = \sin^2 \alpha \quad \tan \alpha_{lim} = \frac{a}{l} \quad \sin \alpha_{lim} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{a}\right)^2}}$$

$$\omega_{y,lim} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{a}\right)^2}$$

$$V = f_c \cdot t \cdot a \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{f_c \cdot t \cdot a}{2} \cdot \sin 2\alpha = f_c \cdot t \cdot a \cdot \sqrt{\omega_y \cdot (1 - \omega_y)} \quad (7.20)$$

$$Z_{sup,1} - Z_{sup,2} = Z_{sup,1} - Z_{inf,1} = f_c \cdot t \cdot l \cdot \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

$$Z_{sup,1} + Z_{inf,1} = V \cdot \cot \alpha$$

$$Z_{sup,1} = \frac{1}{2} \cdot f_c \cdot t \cdot a \cdot \left( \cos^2 \alpha + \frac{1}{a} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{2} \right) = \frac{V}{2} \cdot \left( \cot \alpha + \frac{1}{a} \right) \quad (7.21)$$

$$Z_{inf,1} = \frac{1}{2} \cdot f_c \cdot t \cdot a \cdot \left( \cos^2 \alpha - \frac{1}{a} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{2} \right) = \frac{V}{2} \cdot \left( \cot \alpha - \frac{1}{a} \right) \quad (7.22)$$

$$\text{Fall 3: } \omega_y < \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{a}\right)^2} \quad \text{sowie } \omega_y < \frac{1}{2} \quad (7.23)$$

Für diesen Fall geht das parallele Betondruckspannungsfeld in einen Fächer über (Bild 7.15).

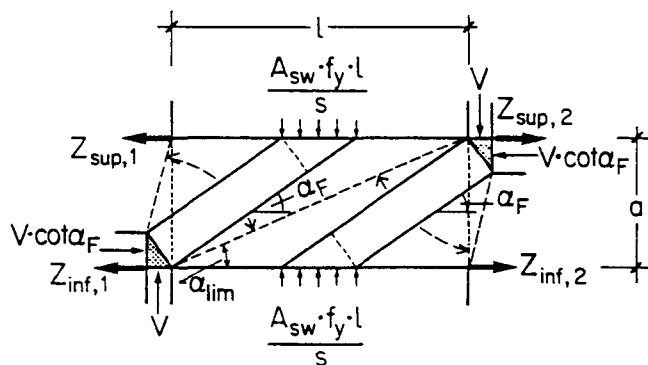


Bild 7.15

$$V = A_{sw} \cdot f_y \cdot \frac{l}{s} = \omega_y \cdot f_c \cdot t \cdot l \quad (7.24)$$

$$Z_{sup,1} + Z_{inf,1} = V \cdot \cot \alpha_F \quad Z_{sup,1} = V \cdot \cot \alpha_F \quad (7.25)$$

$$Z_{sup,1} - Z_{inf,1} = V \cdot \cot \alpha_F \quad Z_{inf,1} = 0 \quad (7.26)$$

$$\cot \alpha_F = \frac{\frac{a}{l} - \sqrt{\left(\frac{a}{l}\right)^2 - \omega_y^2 - \omega_y}}{\omega_y} \quad (7.27)$$

Falls gleichzeitig mit der Bedingung für  $\omega_y$  die Stringer  $Z_{\text{sup}}$  und  $Z_{\text{inf}}$  die Ungleichung

$$Z_{\text{sup}} = Z_{\text{inf}} > \omega_y \cdot f_c \cdot t \cdot l \cdot \cot \alpha_F \quad (7.28)$$

erfüllen, entsteht der im Bild 7.16 dargestellte Fall. Ausser der fächerförmigen Abstützung des Druckspannungsfeldes auf die Bügel entsteht auch noch die früher behandelte direkte Abstützung des Druckspannungsfeldes von Wand zu Wand.

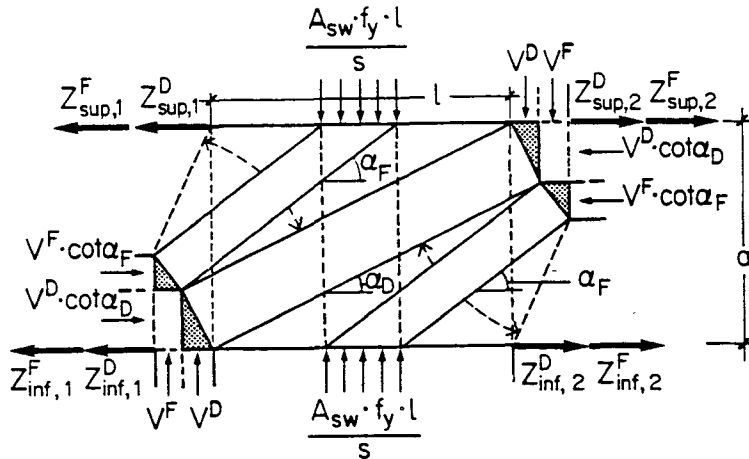


Bild 7.16

$$V = V^D + V^F$$

$$V^D = \frac{f_c \cdot a \cdot t}{2} \cdot \left\{ \sin 2\alpha_D - \frac{1}{a} \cdot (1 - \cos 2\alpha_D) \right\}$$

$$V^F = \omega_y \cdot f_c \cdot t \cdot l$$

$$V = \frac{f_c \cdot t \cdot a}{2} \cdot \left\{ 2 \cdot \frac{1}{a} \cdot \omega_y + \sin 2\alpha_D - \frac{1}{a} \cdot (1 - \cos 2\alpha_D) \right\} \quad (7.29)$$

$$Z_{\text{sup},1}^D = Z_{\text{inf},1}^D = \frac{V^D}{2} \cdot \cot \alpha_D$$

$$Z_{\text{sup},1}^F = V^F \cdot \cot \alpha_F \quad Z_{\text{inf},1}^F = 0$$

$$Z_{\text{sup},1} = Z_{\text{sup},1}^D + Z_{\text{sup},1}^F = \frac{V^D}{2} \cdot \cot \alpha_D + V^F \cdot \cot \alpha_F \quad (7.30)$$

$$Z_{\text{inf},1} = Z_{\text{inf},1}^D + Z_{\text{inf},1}^F = \frac{V^D}{2} \cdot \cot \alpha_D \quad (7.31)$$

Gemäss Bild 7.16 sind die beiden Winkel  $\alpha_F$  und  $\alpha_D$  voneinander abhängig:

$$\cot \alpha_F = \frac{\xi - \sqrt{\xi^2 - 4 \cdot \omega_y \cdot \left( \frac{a}{l} \cdot \sin 2\alpha_D + \cos 2\alpha_D + \omega_y \right)}}{2 \cdot \omega_y}$$

$$\xi = \frac{a}{l} \cdot (1 - \cos 2\alpha_D) + \sin 2\alpha_D$$

Für den Anteil der direkten Abstützung kann der Maximalwert von Gl. (7.13) übernommen werden:

$$\frac{V_{\max}}{V_0} = 2 \cdot \frac{1}{a} \cdot \omega_y + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{a}\right)^2} - \frac{1}{a} \quad (7.32)$$

Das auf die Bügel abgestützte Spannungsfeld wird durch die Ausdehnung des direkt abgestützten Spannungsfeldes begrenzt:

$$\omega_y \leq \sin^2 \alpha_D = \frac{\sqrt{\left(\frac{a}{l}\right)^2 + 1} - 1}{2 \cdot \sqrt{\left(\frac{a}{l}\right)^2 + 1}} \quad (7.33)$$

$$\cot \alpha_F(V_{\max}) = \frac{\frac{a}{l} - \sqrt{\left(\frac{a}{l}\right)^2 - 4 \cdot \omega_y \cdot (\omega_y + \sqrt{\left(\frac{a}{l}\right)^2 + 1})}}{2 \cdot \omega_y} \quad (7.34)$$

Eine direkte Abstützung stellt sich ein, sobald die Bügel zu schwach sind, um einen steileren Winkel zu erzwingen. Gleichzeitig muss die Längsbewehrung in der Lage sein, die mit flachen Neigungswinkeln zunehmende Längsbeanspruchung zu übernehmen.

Nebst den diskutierten Spannungsfeldern gibt es noch andere Möglichkeiten. So können geneigte Bügel mit gekreuzten Zugdiagonalen kombiniert werden. Zuggurtungen am Rand lassen sich auch mit Vorspanngliedern ausführen.

Die Diskussion der Wände wird damit abgeschlossen. Es zeigt sich, dass die Vielzahl der praktischen Wandbeispiele immer wieder auf einfache Grundfälle zurückgeführt werden kann.

Weitere Anwendungen des Kopplungsträgers, wie Aussparungen, Fugen und Pylonverbindungen, sind im Kapitel 6 skizziert.

## 7.2 Bemessung von Rahmenecken

Rahmenecken entstehen durch die biegesteife Verbindung von Riegeln und Stützen in Stockwerkrahmen (Bild 7.17). Dabei bewirkt die horizontale Belastung an den Rahmenknoten positive und negative Momentenbeanspruchungen.

Die Grundfälle der möglichen ebenen Eckverbindungen sind im Bild 7.18 schematisch dargestellt. Rahmenecken treten aber nicht nur bei Rahmensystemen auf. Auch andere Bauwerke weisen Verbindungen auf, die Rahmenecken entsprechen. Bild 7.19 zeigt eine Winkelstützmauer und einen Wasserkanal mit U-Form. Die Liste der Beispiele kann fast beliebig fortgesetzt werden.

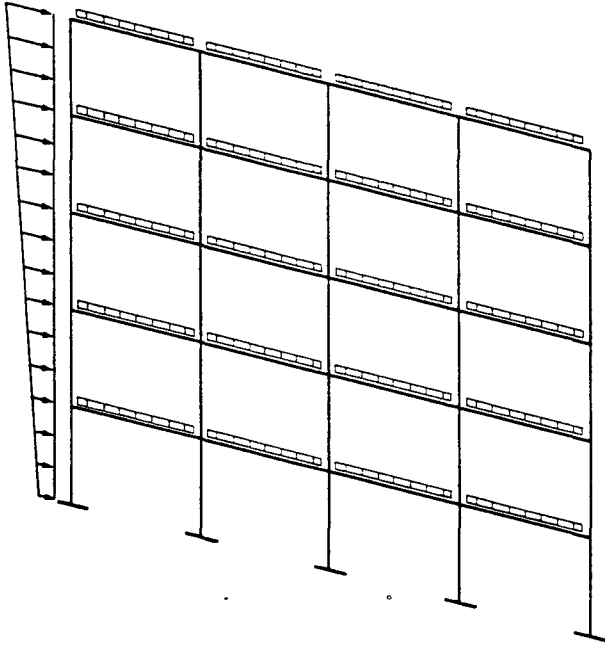


Bild 7.17

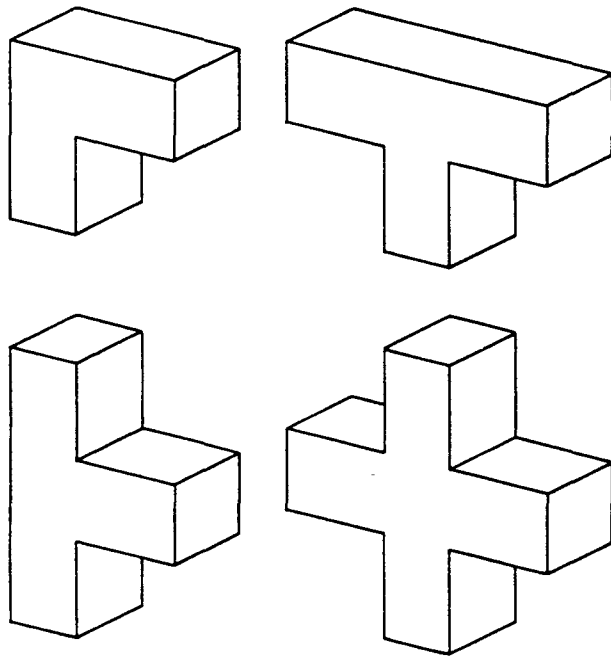


Bild 7.18

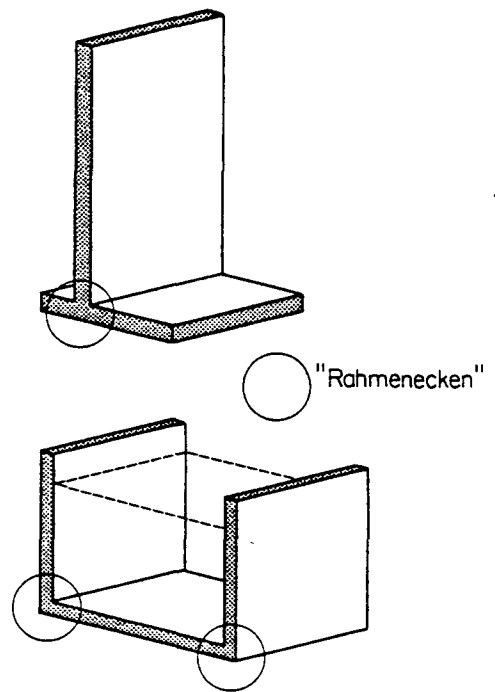


Bild 7.19

Der bewehrte Rahmenausschnitt von Bild 7.20 zeigt eine durch die Schnittgrößen  $M$  und  $V = N$  beanspruchte Eckverbindung. Auch in diesem Fall kann der betrachtete Tragwerksteil durch ein Fachwerk nachgebildet werden. Die diskreten Fachwerkstäbe werden im Bild 7.21 wieder zu Spannungsfeldern erweitert. Das Biegemoment und die Normalkraft werden wie bei gewöhnlichen Balken durch Zug und Druckstringer übertragen. Die Querkraft wird durch ein diagonales Druckspannungsfeld aufgebaut. Im Eckbereich bilden sich die fächerförmigen Krafteinleitungsstellen. Die Querkraftbemessung kann analog zu den Balkenträgern von Kapitel 4 durchgeführt werden. In den weiteren Untersuchungen werden nur noch die Beanspruchungen aus den Biegemomenten berücksichtigt.

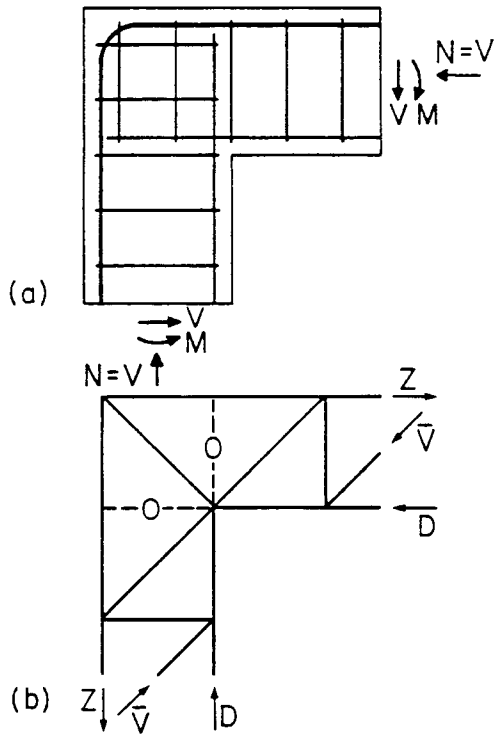


Bild 7.20

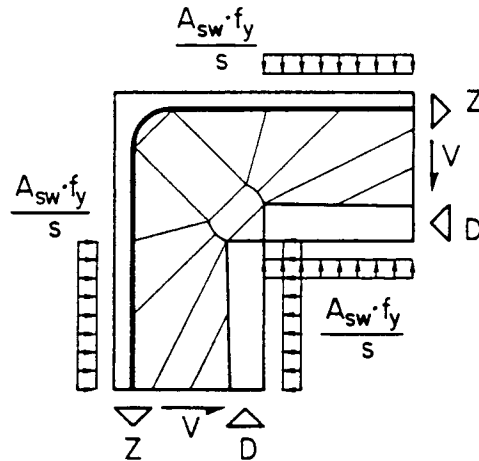


Bild 7.21

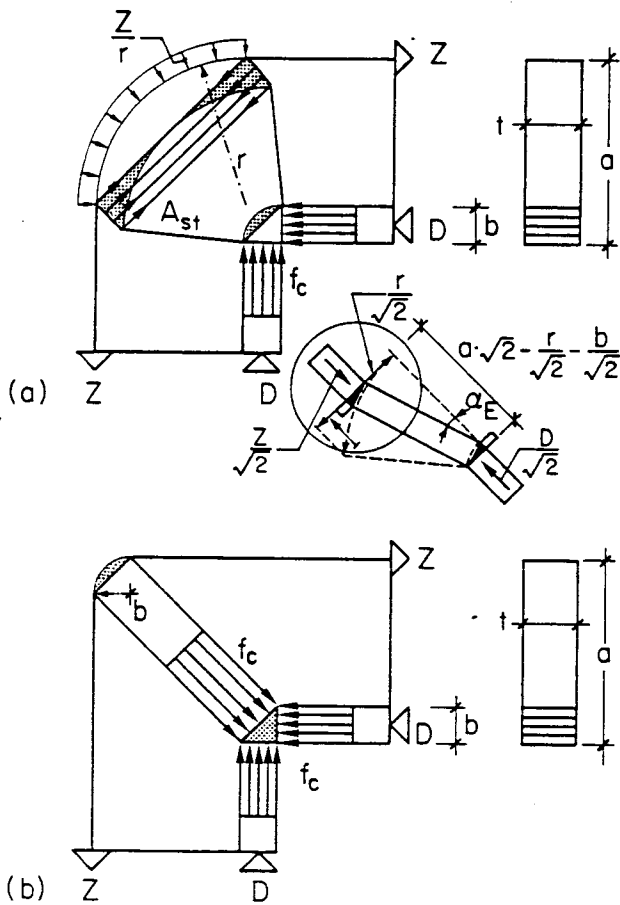


Bild 7.22

Bild 7.22 zeigt, wie die Stringerdruckkräfte über die Diagonale der Rahmenecke auf die Zugbewehrung abgestützt werden. Die Spannungsfelder werden dadurch auch lokal ins Gleichgewicht gebracht. Unter idealen Verhältnissen entspricht der Radius der Eckbewehrung im Bild 7.22 (b) gerade der Breite  $b$  des Druckspannungsfeldes. Im Bild 7.22 (a) wird der Radius  $r$  bedeutend grösser als der Idealradius  $b$  von Bild 7.22 (b) gewählt. Dadurch wird das diagonale Druckspannungsfeld aufgefächert. Das Gleichgewicht wird durch eine entsprechende Spreizbewehrung  $A_{st}$  wieder hergestellt:

$$D = f_c \cdot b \cdot t = Z = A_s \cdot f_y$$

$$Z_t = A_{st} \cdot f_y$$



In guter Näherung kann die Spreizkraft  $Z_t$  mit dem Winkel  $\alpha_E$  bestimmt werden:

$$\frac{Z_t \cdot \sqrt{2}}{D} = \tan \alpha_E = \frac{r - b}{4 \cdot a - 2 \cdot r - 2 \cdot b} \quad (7.35)$$

Wird für den geometrischen Bewehrungsgehalt  $\rho_t$  die Diagonalfäche der Rahmenecke eingeführt

$$\rho_t = \frac{A_{st}}{a \cdot \sqrt{2} \cdot t}$$

lautet die Beziehung für den mechanischen Bewehrungsgehalt:

$$\omega_t = \frac{1}{4} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{\frac{r}{b} - 1}{2 \cdot \frac{a}{b} - \frac{r}{b} - 1} \quad (7.36)$$

Durch die Geometrie des Knotens sind dem Radius  $r$  der Bewehrung Grenzen gesetzt:

$$b \leq r \leq a$$

Damit sind auch die Grenzwerte von  $\omega_t$  fixiert:

$$\begin{aligned} \frac{r}{b} = 1.0 & \quad \omega_t = 0 \\ \frac{r}{b} = \frac{a}{b} & \quad \omega_t = \frac{1}{4} \cdot \frac{b}{a} \end{aligned} \quad (7.37)$$

Da durch die Querschnittsgeometrie auch die Bedingung

$$\frac{b}{a} \leq \frac{1}{2}$$

erfüllt sein muss, kann  $\omega_t$  nicht über eine vorbestimmte Grenze anwachsen

$$\omega_{t,\max} \leq 0.125$$

Bei einem Rechteckquerschnitt entspricht dieser Wert einem maximalen geometrischen Bewehrungsgehalt  $\rho_{t,\max}$  von ungefähr 0.5% der Diagonalfäche.

Rahmenecken, die nur durch negative Biegemomente beansprucht sind, und deren Längs- und Bügelbewehrungen gemäss Bild 7.20 ausgelegt werden, weisen im Eckbereich gleiche Widerstände  $M_E$  auf wie in den Anschlussquerschnitten von Stütze und Riegel. In den abgebogenen Bewehrungsstäben müssen die Minimalradien, die in den Normen vorgeschrieben sind, eingehalten werden. Werden diese Vorschriften nicht eingehalten, ist mit einer Spaltung des Betons im Knotenbereich zu rechnen.

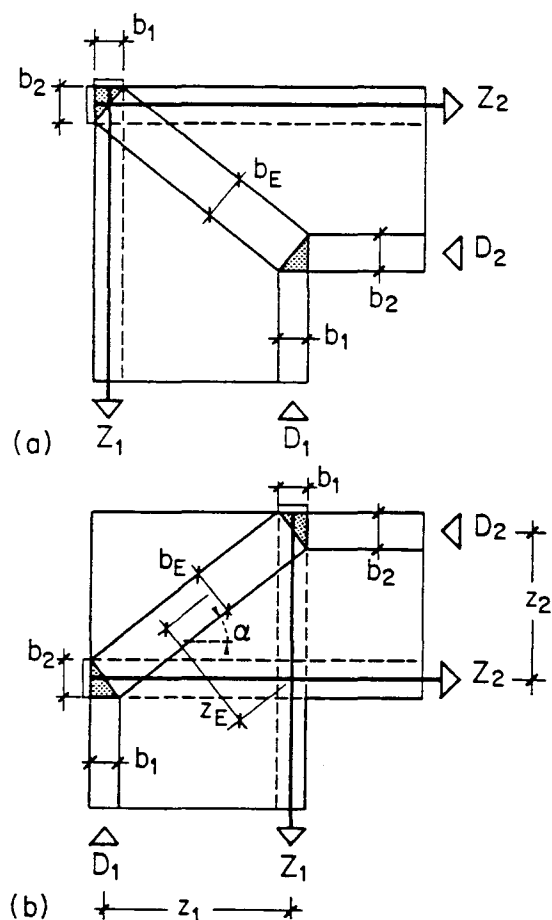


Bild 7.23

Die abgegebene Aussenbewehrung der Rahmenecke kann auch durch gerade Bewehrungsstäbe mit Ankerplatten ersetzt werden. Bild 7.23 (a) zeigt eine schematische Darstellung mit dem Gleichgewichtszustand der Spannungsfelder im Knoten. Die Abmessungen der Ankerplatten müssen mindestens der Querschnittsfläche der Druckspannungsfelder  $D_1$  und  $D_2$  entsprechen. Das diagonale Druckspannungsfeld  $b_E$  erzeugt durch die zwängläufige Aufweitung im mittleren Bereich Spreizkräfte, die durch eine konstruktive Verteilbewehrung über die ganze Rahmenecke abzudecken sind (vgl. Kapitel 6).

Im Bild 7.23 (b) wird die gleiche Bewehrungsausführung mit den Ankerplatten auch für eine positive Momentenbeanspruchung angewendet. Dabei ändert das diagonale Druckspannungsfeld  $b_E$  seine Richtung. Das Moment der Anschlussquerschnitte von Stütze und Riegel wird im Knotenbereich vollständig übertragen. Der reduzierte Hebelarm  $z_E$  wird durch das breitere Druckspannungsfeld  $b_E$  kompensiert.

$$M = f_c \cdot t \cdot b_1 \cdot z_1 = f_c \cdot t \cdot b_2 \cdot z_2 = f_c \cdot t \cdot b_E \cdot z_E = M_E \quad (7.38)$$

Die Gleichgewichtsbeziehung (7.38) wird durch die geometrischen Verhältnisse der eingezeichneten Spannungsfelder bestätigt:

$$b_E \cdot z_E = \frac{b_1}{\sin \alpha} \cdot z_1 \cdot \sin \alpha = \frac{b_2}{\cos \alpha} \cdot z_2 \cdot \cos \alpha \quad (7.39)$$

Mit einer konstruktiven Eckbewehrung wird das Ausbrechen des spannungslosen äusseren Eckbereichs verhindert, und wie in allen Fällen werden die Spreizkräfte infolge der Ausweitung des diagonalen Druckspannungsfeldes zwischen den Ankerstellen abgedeckt.

Im Bild 7.24 wird eine mögliche Anordnung einer Stabbewehrung mit Ankerplatten für eine durch positive und negative Momente beanspruchte Rahmenecke dargestellt.

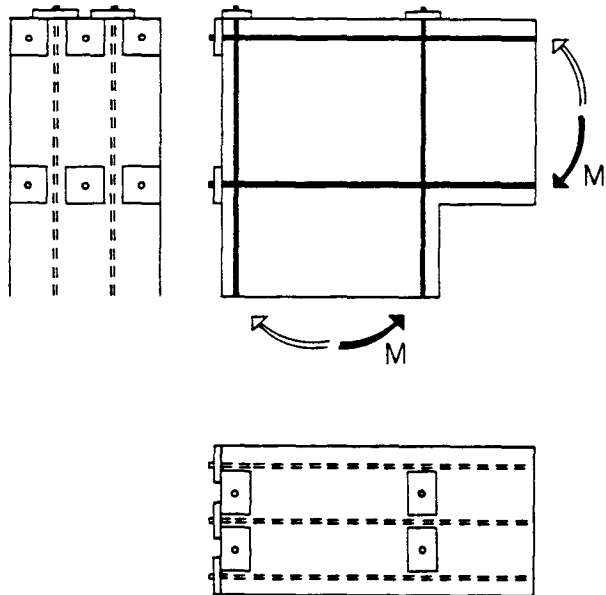


Bild 7.24

In vielen Fällen werden für positive Momentenbeanspruchungen Lösungen verlangt, die ohne das vorgeschlagene Bewehrungssystem mit den Ankerplatten auskommen müssen. Im Normalfall wird aber dennoch verlangt, dass der Eckbereich die von der Stütze und vom Riegel anfallenden Momente im Bruchzustand gerade noch übertragen kann. Es werden also Bewehrungsanordnungen gesucht, für die der Knotenbereich nicht versagt, bevor die Bewehrung in den Anschlussquerschnitten fließt.

Bild 7.25 zeigt eine konventionell bewehrte Rahmenecke mit und ohne Schrägbügel, deren Funktion noch zu erklären sein wird. Durch die Überlappung der abgelenkten Bewehrungsstäbe entsteht im Knotenbereich ein von der Bewehrung umschlossener Betonkern, der in der Lage ist, die Druckspannungsfelder im Aussenbereich (jedoch innerhalb der Bewehrung) der Rahmenecke zu übertragen. Entsprechende Druckspannungsfelder, die mit der Zugbewehrung im Gleichgewicht sind, werden im Bild 7.26 schematisch dargestellt. Die Druckspannungsfelder über-

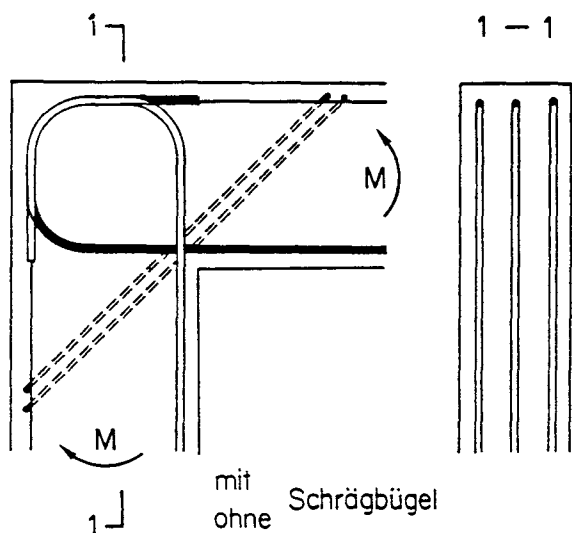


Bild 7.25

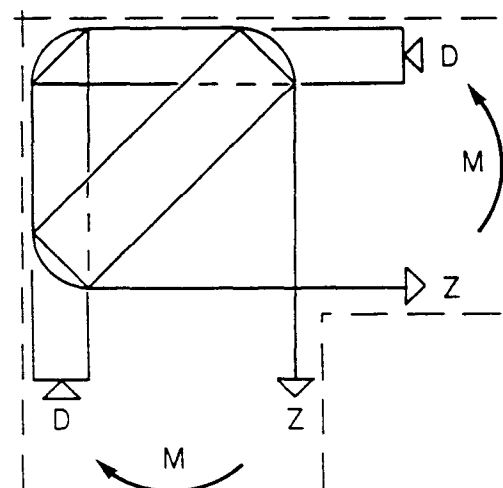
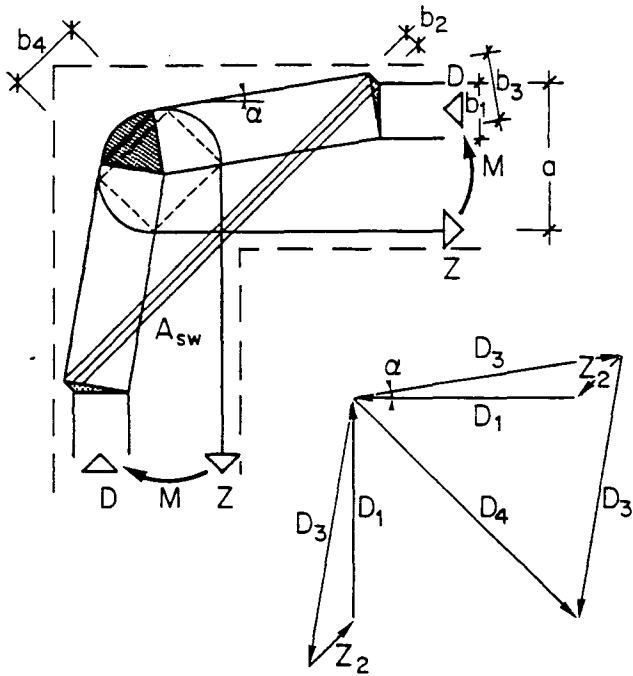


Bild 7.26



lagern sich teilweise innerhalb der von der Bewehrung umschnürten Betonzone. Wird diese Eckzone in Querrichtung verbügelt (oder durch anschließende Bauteile seitlich abgestützt), sind Spannungen zugelassen, die über der einachsialen Druckfestigkeit liegen können.

Welche Funktion den Schrägbügeln zgedacht ist, zeigt Bild 7.27. Mit der schiefen Bewehrung wird das randparallele Druckspannungsfeld ins Rahmeneckeninnere abgelenkt. Aus dem Kräftepolygon im Bild 7.27 kann die Ablenkkraft  $Z_2$  der Schrägbügel bestimmt werden. Zudem bestimmen die Verhältnisse der Kräfte zueinander die Breiten der Spannungsfelder.

Bild 7.27

$$D_1 : Z_2 : D_3 : D_4 = b_1 : b_2 : b_3 : b_4 \quad (7.40)$$

Der Wert der Kraft  $Z_2$  ist vom Ablenkwinkel  $\alpha$  abhängig

$$Z_2 = A_{sw} \cdot f_y = D_1 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\tan \alpha}{1 - \tan \alpha} \quad (7.41)$$

Der mechanische Bewehrungsgehalt der Ablenkkraft  $Z_2$  wird definiert mit der Gleichung

$$\omega_w = \frac{A_{sw} \cdot f_y}{a \cdot t \cdot f_c}$$

NILSSON [7.1] hat aufgrund seiner Versuche an Rahmenecken mit positiver Momentenbeanspruchung die in der Tabelle 7.1 zusammengestellten Bemessungsregeln formuliert.

Pkt.	$\omega_x$	Schrägbügel	Voute
1	$\leq 0.07$	keine	keine
2	$\leq 0.21$	$\omega_w \geq 0.50 \cdot \omega_x$	keine
3	$> 0.21$	—	erforderlich

Tabelle 7.1: Bemessungsvorschriften [7.1] und [7.2]

Führt man die Minimalbedingung der Schrägbügel unter Pkt. 2 der Tabelle 7.1 in die Gl. (7.41) ein, resultiert für den Winkel  $\alpha$  die Gleichung

$$\tan \alpha = \frac{1}{1 + 2 \cdot \sqrt{2}} \quad (7.42)$$

Das bedeutet, dass in den Versuchen Ablenkungen der Druckspannungsfelder bis ca.  $15^\circ$  erforderlich waren, um den vollen Momentenwiderstand der Anschlussquerschnitte von Stütze und Riegel zu erreichen. Dem ist allerdings noch beizufügen, dass die schief eingelegte Bewehrung der Versuche nicht aus geschlossenen Bügeln bestand. Daher konnten diese die abgelenkten Druckspannungsfelder auch nicht genügend abstützen. Dem entspricht auch der relativ geringe mechanische Bewehrungsgehalt, bei dem die Rahmenecke durch eine Voute zu verstärken ist, in Pkt. 3 der Bemessungsvorschrift von Tabelle 7.1.

Die Resultate der bisherigen Rahmeneckendiskussion sollen noch einmal zusammengefasst werden:

1. Für die negative Momentenbeanspruchung der Rahmenecke sind im allgemeinen ausser einer durchgehenden konstruktiven Verteilbewehrung keine zusätzlichen Massnahmen zu ergreifen. Nur unter hohen Druckstringerkräften und bei gleichzeitiger Fächerung des diagonalen Druckspannungsfeldes - bedingt durch ein grosses  $r/b$ -Verhältnis gemäss Bild 7.22 - wird eine zusätzliche Spreizbewehrung  $A_{st}$  notwendig.
2. Bei positiver Momentenbeanspruchung der Rahmenecke ist der Abstützung der Druckspannungsfelder im Knotenbereich besondere Aufmerksamkeit zu schenken. Bewehrungsstäbe mit Ankerplatten (Bild 7.24) oder sich überlappende Bewehrungsschlaufen kombiniert mit Schrägbügeln (Bild 7.25) dürfen als die konstruktiv einfachsten und gleichzeitig auch tragfähigsten Lösungen betrachtet werden. Bei sehr hohen Bewehrungsgehalten in den Anschlussquerschnitten ist es ratsam, die Rahmenecke durch eine Voute zu verstärken.

Im Bild 7.28 werden einige Bewehrungsausführungen demonstriert, die bei positiver Momentenbeanspruchung schwerwiegende Mängel aufweisen können. Die frühere Standardausführung für Bewehrungsdetails von Rahmenecken in Bild 7.28 (a) weist schon bei geringen Momentenbeanspruchungen einen klaffenden Diagonalriss auf. Da keine genügende Verankerung für das rissparallele Druckspannungsfeld vorhanden ist, tritt abhängig vom Bewehrungsgehalt schon lange

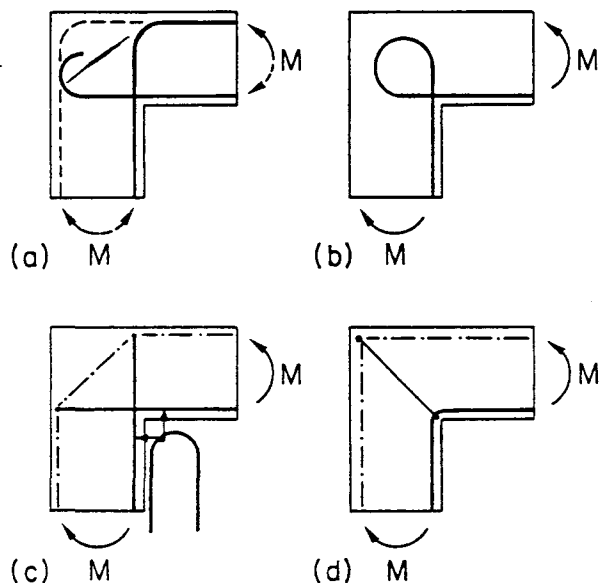


Bild 7.28

vor dem Fließen der Längsbewehrung ein Bruchversagen im Knotenbereich auf. Die Schlaufe im Bild 7.28 (b) schafft zwar grundsätzlich einen starren Betonkern in der Rahmenecke. Da aber die Bewehrung nicht bis an den äussersten Rand reicht, fehlen Schrägbügel, die das randparallele Druckspannungsfeld ins Innere des Knotenbereichs ablenken können. Im Bild 7.28 (c) ist die Ankerfläche der geschlossenen Längsbewehrung zu klein, um bei hohen Momentenbeanspruchungen das diagonale Druckspannungsfeld genügend abzustützen. Der Bügel von Bild 7.28 (d) bringt die Zugkräfte der über den Innenrand laufenden Bewehrung mit den Druckkräften auf der Aussenseite ins Gleichgewicht. Damit der Bügel genügend Zugkraft

entwickeln kann, muss er zuerst gedehnt werden. Die daraus resultierende Diagonaldeformation ist jedoch so gross, dass die Längsbewehrung vom Beton abgetrennt wird, bevor die FlieBskräfte erreicht sind. Ein vorgespannter Bügel, der die Diagonaldeformationen eliminiert, könnte die Tragfähigkeit des Knotens auf das Niveau der Anschlussquerschnitte bringen. Technisch dürfte dieser vorgespannte Bügel allerdings nur schwer zu realisieren sein.

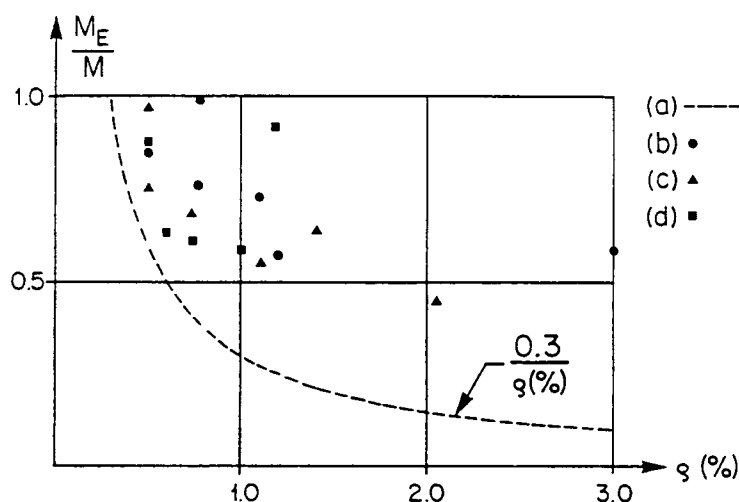


Bild 7.29 zeigt eine Zusammenstellung von Versuchsergebnissen [7.2] der bemängelten Bewehrungsanordnungen. Die Tragfähigkeit  $M_E$  des Eckbereichs im Vergleich mit den Anschlussquerschnitten  $M$  von Stütze und Riegel nimmt mit zunehmendem Bewehrungsgehalt allgemein ab.

T-förmige Rahmenverbindungen, an denen die Biegemomente nach der Art von Bild 7.30 angreifen, haben immer einen positiv und einen negativ beanspruchten Arm. Damit der Verlauf der Spannungsfelder leichter zu verstehen ist, wird zuerst wieder ein Schema von Bewehrungsstäben mit Ankerplatten betrachtet. Die Gleichgewichtszustände können direkt aus der Zeichnung herausgelesen werden. Die Ankerplatten könnte man sich auch durch eine genügende Anzahl Bügel ersetzt denken.

Bild 7.29

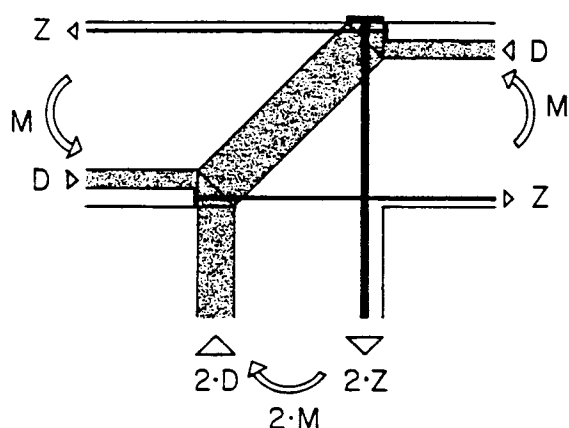


Bild 7.30

Im allgemeinen werden T-Verbindungen wie im Bild 7.31 bewehrt sein. Der Knotenbereich erhält dadurch wieder einen von der Bewehrung umschürzten Betonkern. Bei hohen mechanischen Bewehrungsgehalten sorgen auch bei T-Verbindungen die Schrägbügel dafür, dass die randparallelen Druckspannungsfelder in die von der Zugbewehrung umschlossene Betonzone abgelenkt werden. Im übrigen sind die bei den einfachen Rahmenecken angestellten Ueberlegungen auch hier gültig. Wichtig ist allerdings bei T-Verbindungen die Tatsache, dass wegen der statischen Unbestimmtheit dieses Systems vor dem Versagen Umlagerungen stattfinden können. Bewehrungsverteilung und Verhältnis der Querschnittsflächen von Stütze und Riegel beeinflussen daher die Traglast wesentlich.

Mangelhafte Bewehrungsausführungen (Bild 7.32) können mit lokalen Unzulänglichkeiten in der Abstützung der diagonalen Druckspannungsfelder begründet werden. Im Bild 7.32 (a) mit der früheren Standardausführung für die Bewehrungsanordnung in T-Verbindungen tritt schon

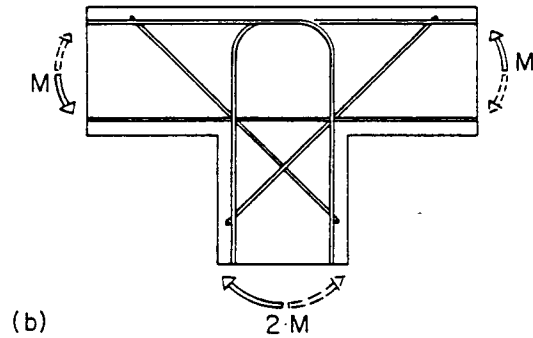
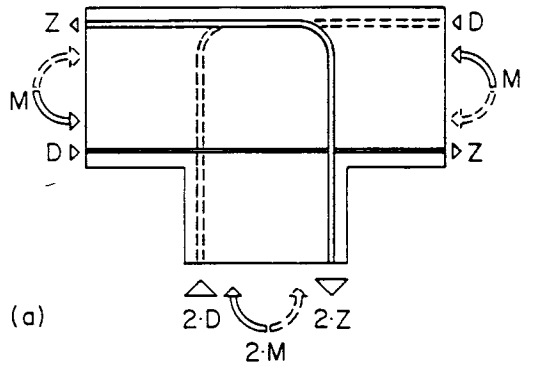


Bild 7.31

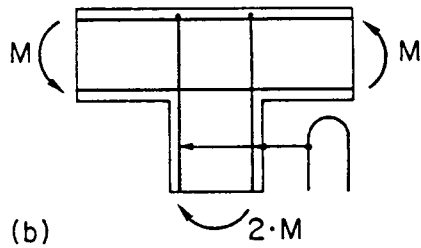
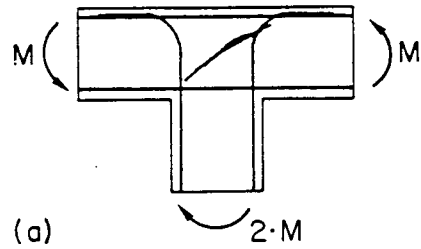


Bild 7.32

früh ein klaffender Diagonalriss auf. Da das diagonale Druckspannungsfeld ungenügend auf der oberen Randbewehrung des Riegels abgestützt ist, versagt der Eckbereich abhängig vom Bewehrungsgehalt und vom Verhältnis zwischen Riegel- und Stützenquerschnitt vor dem Fließen der Längsbewehrung in den Anschlussquerschnitten. Im Bild 7.32 (b) ist einmal mehr die ungenügende Verankerungsfläche der Bügel für das diagonale Druckspannungsfeld am vorzeitigen Versagen der T-Verbindung schuld. Für beide Bewehrungsdetails sind im Bild 7.33 Versuchsergebnisse aus [7.1] für verschiedene Bewehrungsgehalte und Querschnittsabmessungen zusammengestellt.

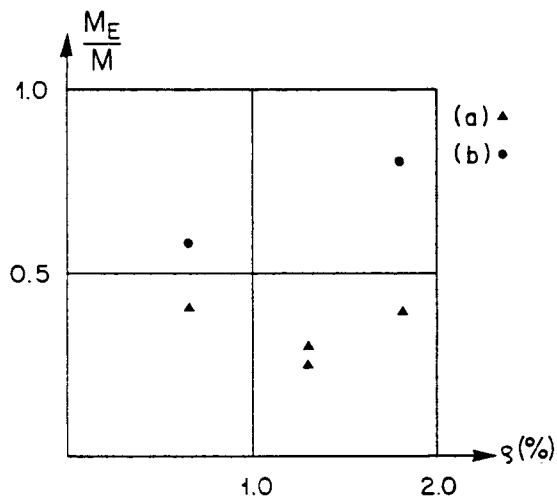


Bild 7.33

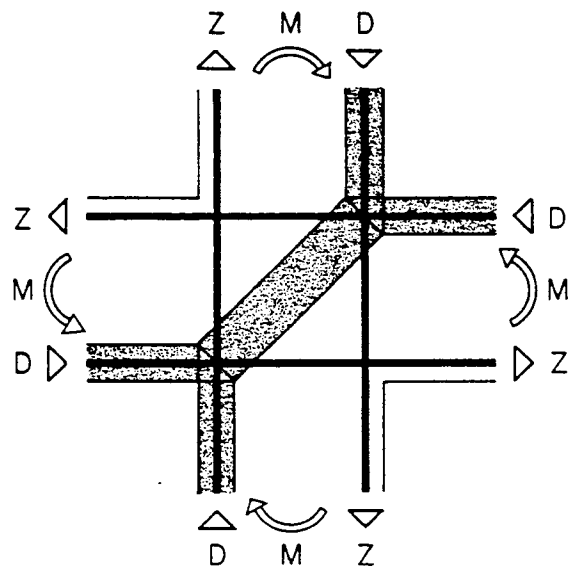


Bild 7.34

In der Kreuzverbindung von Bild 7.34 wird die Längsbewehrung gerade durch den Knoten hindurch geführt. Das Schema zeigt, dass sich die Druckspannungsfelder gegenseitig über die Diagonale abstützen können. Die parallel zum Druckspannungsfeld verlaufenden Diagonalrisse müssen durch eine konstruktive Verteilbewehrung oder durch starke Diagonalbügel abgedeckt werden.

### 7.3 Bemessung von aus Rahmen bestehenden Hohlkasten

Hohlkasten, die aus Stahlbetonrahmen bestehen, sind für schlanke Hochhäuser besonders geeignet. Sie werden aus gedrungenen Scheibenelementen aufgebaut. Im Bild 7.35 ist ein typischer Grundriss mit einem vergrößerten Ausschnitt des zugehörigen Aufrisses dargestellt. Innenstützen übertragen im allgemeinen nur Vertikallasten und sind daher gar nicht eingezeichnet. Sämtliche Horizontallasten werden damit durch die äussere Stahlbetonhaut übertragen. Die gedrungenen Scheibenelemente sollen nur Membranspannungen übertragen. Die Plattenwirkung wird in der Berechnung vernachlässigt. Stützen- und Riegelemente nehmen aufgrund dieser Annahmen keine Torsionsmomente auf.

Das Tragsystem wird hier behandelt, weil es eine Kombination der in den Abschnitten 7.1 und 7.2 untersuchten Probleme darstellt. So entsprechen die Stützen- und Riegelemente den im Abschnitt 7.1 berechneten Verbindungsbalken in Stahlbetonwänden. Die Kreuzverbindungen führen zurück auf die Ueberlegungen für Rahmenecken im Abschnitt 7.2.

Im Bild 7.36 werden zwei Elementausschnitte betrachtet, die in den Momentennullpunkten durch Querkräfte  $V$  und Normalkräfte  $N$  (in den Stützen) beansprucht werden. Die Spannungs-

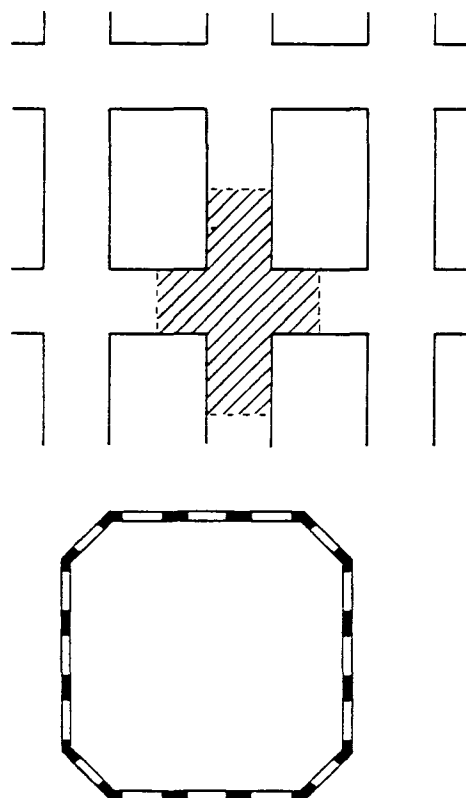


Bild 7.35

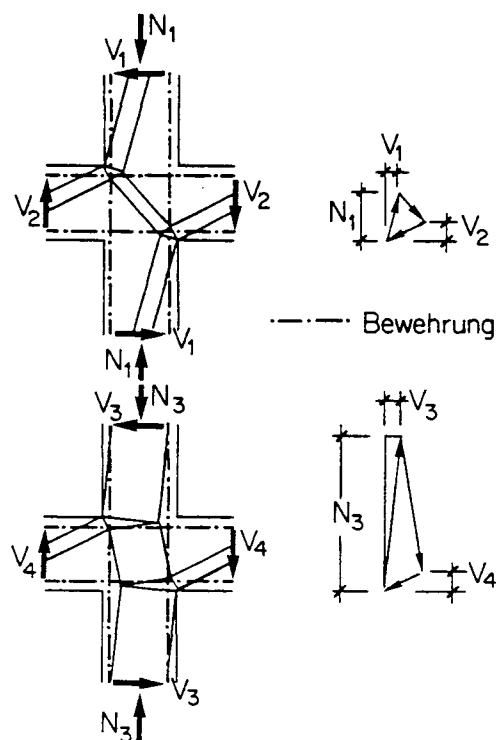


Bild 7.36



felder und das zugehörige Kräftepolygon sind für den Fall einer direkten Abstützung (ohne Bügelbewehrung in den Elementen) eingezeichnet.

Damit ist es gelungen, ein in der Praxis sehr aufwendiges Bemessungsproblem auf die einfachen Grundlagen und Ueberlegungen der ersten beiden Abschnitte des Kapitels 7 zurückzuführen. Der Ingenieur darf nach diesen Ausführungen überzeugt sein, dass mit einfachen Gleichgewichtsmodellen auch komplizierte Aufgaben sinnvoll gelöst werden können.

#### LITERATUR

- [7.1] Nilsson I.: "Reinforced Concrete Corners and Joints Subjected to Bending Moment", National Swedish Building Research, D7, 1973.
- [7.2] Stroband J., Kolpa J.J.: "Corner Joints Subjected to Positive Moments", Delft University of Technology, Report 5.81.5, April 1981.

8. Platten I: Grundlagen

P. Marti

8.1 Gleichgewicht

8.1.1 Spannungsresultierende

Durch Zusammenfassen der Spannungen, die in den Schnittflächen des im Bild 8.1 (a) dargestellten Plattenelementes wirken, ergeben sich die im Bild 8.1 (b) eingetragenen Spannungsresultierenden, nämlich die Biegemomente

$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot z \cdot dz, \quad m_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \cdot z \cdot dz \quad (8.1)$$

die Drillmomente

$$m_{xy} = m_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \cdot z \cdot dz, \quad (8.2)$$

die Querkräfte

$$v_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zx} \cdot dz, \quad v_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zy} \cdot dz \quad (8.3)$$

und die Membrankräfte

$$n_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot dz, \quad n_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \cdot dz, \quad n_{xy} = n_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \cdot dz \quad (8.4)$$

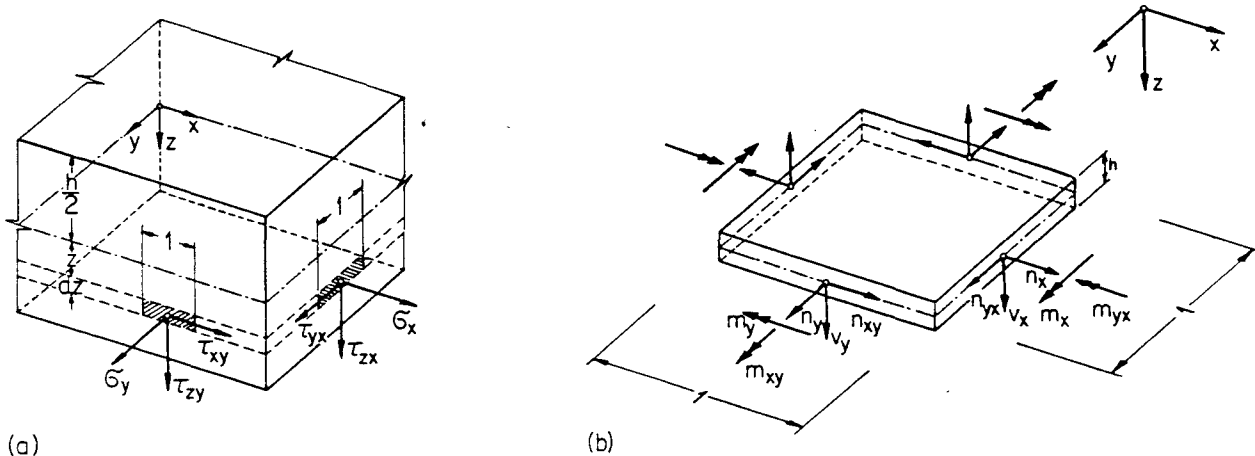


Bild 8.1

8.1.2 Gleichgewichtsbedingungen

Im folgenden werden ausschliesslich senkrecht zu ihrer Ebene belastete Platten betrachtet. Membrankräfte können deshalb vorderhand ausser acht gelassen werden. Kräftegleichgewicht in Vertikalrichtung an dem im Bild 8.2 (a) dargestellten Plattenelement verlangt

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + q = 0 \tag{8.5}$$

Momentengleichgewicht um die y- und die x-Achse liefert

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - v_x = 0 \tag{8.6}$$

$$\frac{\partial m_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} - v_y = 0$$

und durch Einsetzen in Gl. (8.5) ergibt sich

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + q = 0 \tag{8.7}$$

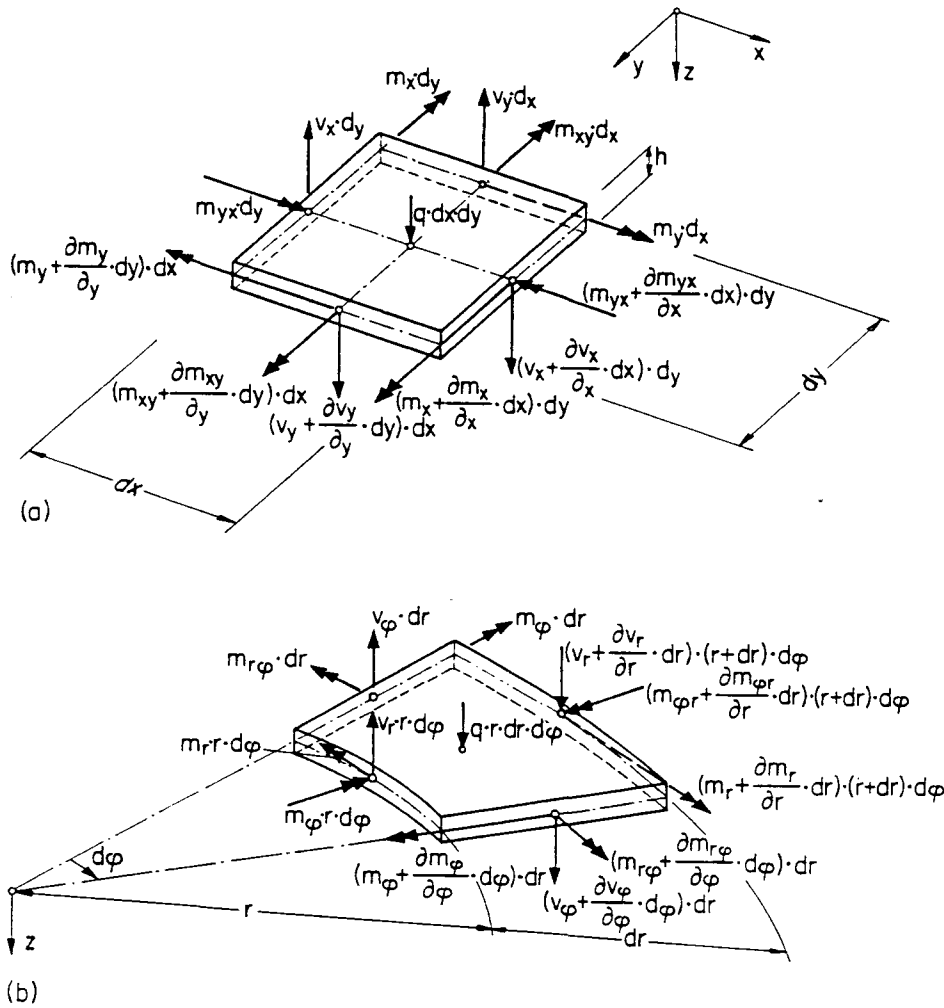


Bild 8.2

In Zylinderkoordinaten erhält man gemäss Bild 8.2 (b) die entsprechenden Beziehungen

$$\frac{\partial(r \cdot v_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + q \cdot r = 0 \tag{8.8}$$

$$\frac{\partial(r \cdot m_r)}{\partial r} - m_\varphi + \frac{\partial m_{r\varphi}}{\partial \varphi} - r \cdot v_r = 0 \tag{8.9}$$

$$\frac{2}{r} \cdot m_{r\varphi} + \frac{\partial m_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial m_\varphi}{\partial \varphi} - v_\varphi = 0$$

und

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2(r \cdot m_r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 m_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial m_\varphi}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial^2(r \cdot m_{r\varphi})}{\partial r \partial \varphi} + q = 0 \tag{8.10}$$

Für hinsichtlich Belastung und Lagerung rotationssymmetrische Fälle verschwinden  $m_{r\varphi}$  und  $v_\varphi$ , und die verbleibenden Spannungsresultierenden  $m_r$ ,  $m_\varphi$  und  $v_r$  sind nur von  $r$  abhängig. Aus Gl. (8.10) folgt

$$\frac{\partial(r \cdot m_r)}{\partial r} - m_\varphi + \int_0^r q \cdot r \cdot dr = 0 \tag{8.11}$$

In den Bildern 8.3 (a), (b) und (c) sind drei verschiedene Momentenfelder für eine quadratische Platte dargestellt. Die Momente  $m_x$  und  $m_y$  sind in allen drei Fällen gleich:

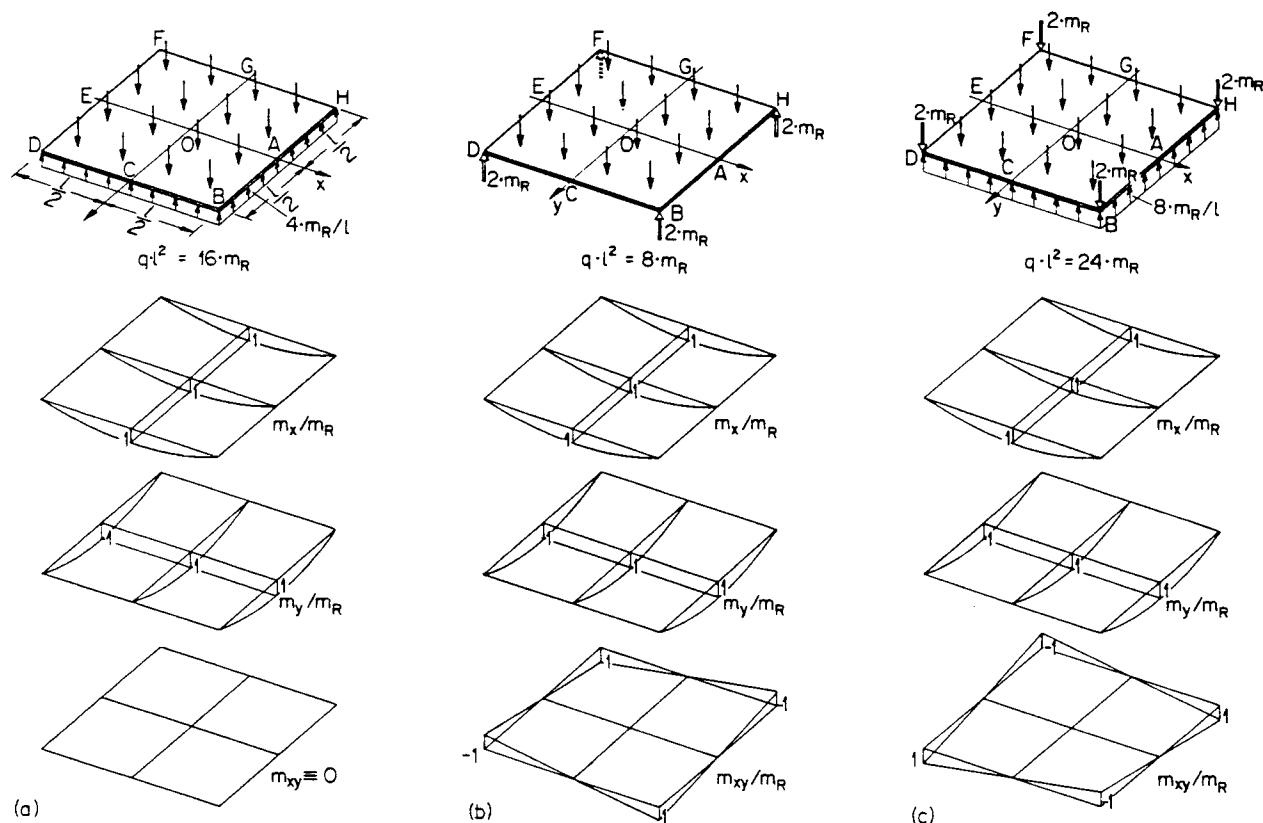


Bild 8.3

$$m_x = m_R \cdot \left(1 - \frac{4 \cdot x^2}{l^2}\right), \quad m_y = m_R \cdot \left(1 - \frac{4 \cdot y^2}{l^2}\right) \quad (8.12)$$

Die Drillmomente  $m_{xy}$  sind durch

$$(a): m_{xy} \equiv 0, \quad (b): m_{xy} = m_R \cdot \frac{4 \cdot x \cdot y}{l^2}, \quad (c): m_{xy} = -m_R \cdot \frac{4 \cdot x \cdot y}{l^2} \quad (8.13)$$

gegeben. Die Gleichgewichtsbedingung (8.7) liefert die gleichmässig verteilten Lasten

$$(a): q = 16 \cdot \frac{m_R}{l^2}, \quad (b): q = 8 \cdot \frac{m_R}{l^2}, \quad (c): q = 24 \cdot \frac{m_R}{l^2} \quad (8.14)$$

Die entsprechenden Randbedingungen für die drei Fälle werden im Unterabschnitt 8.1.4 erörtert.

### 8.1.3 Spannungstransformation

Momentengleichgewicht um die  $t$ - und die  $n$ -Achse an dem im Bild 8.4 (a) dargestellten Plattenelement erfordert:

$$m_n = m_x \cdot \cos^2 \varphi + m_y \cdot \sin^2 \varphi + m_{xy} \cdot \sin 2\varphi \quad (8.15)$$

$$m_{tn} = (m_y - m_x) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + m_{xy} \cdot \cos 2\varphi$$

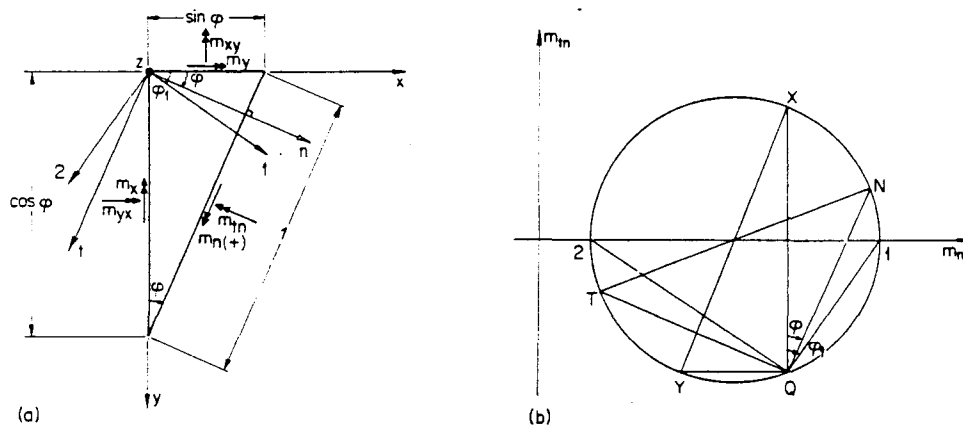


Bild 8.4

Der im Bild 8.4 (b) dargestellte Mohrsche Kreis erlaubt die graphische Deutung der Transformationsformeln (8.15) für die Biege- und Drillmomente in einem beliebigen Schnitt mit der Normalen  $n$ , deren Richtung durch den Winkel  $\varphi$  festgelegt ist. Der Punkt  $Q$  bezeichnet den Pol des Mohrschen Kreises. Drillmomente werden positiv gerechnet, wenn der ihnen entsprechende (rechtsdrehende) Momentenpfeil in die negative  $n$ -Richtung, also zum betrachteten Schnitttrand weist. Die Haupttrichtungen sind durch

$$\tan 2\varphi_1 = \frac{2 \cdot m_{xy}}{m_x - m_y} \quad (8.16)$$

bestimmt.

Für die beiden in den Bildern 8.3 (b) und (c) behandelten Fälle folgt aus Gl. (8.16) mit Gl. (8.12) und Gl. (8.13)  $\tan 2\varphi_1 = \pm 2 \cdot x \cdot y / (y^2 - x^2)$ . Damit ergeben sich die in den Bildern 8.5 (a) und (b) eingetragenen Trajektorien der Hauptmomente, nämlich die Hyperbeln  $x^2 - y^2 = \text{konst.}$  und  $x \cdot y = \text{konst.}$  sowie die Kreise  $x^2 + y^2 = \text{konst.}$  und die Geraden  $y/x = \text{konst.}$

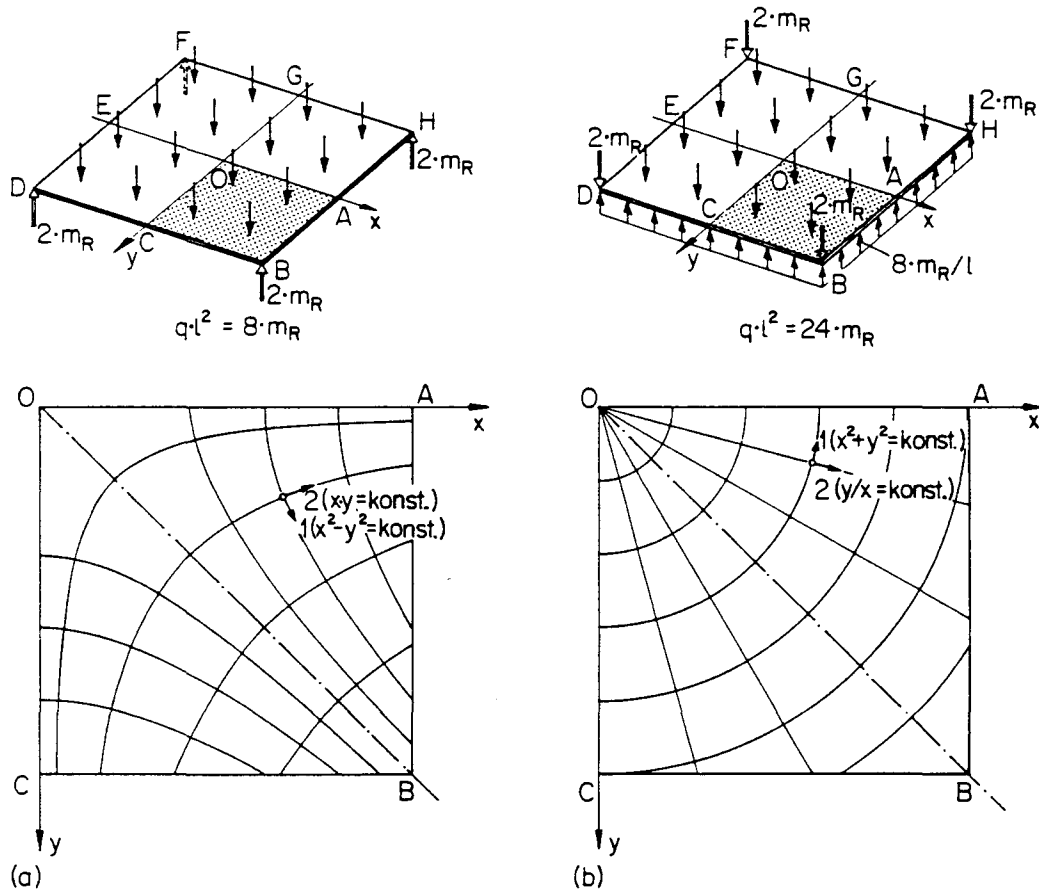


Bild 8.5

#### 8.1.4 Statische Randbedingungen

Nach der Kirchhoffschen Theorie dünner elastischer Platten mit kleinen Durchbiegungen ergibt sich für die Plattendurchbiegung eine inhomogene Bipotentialgleichung, deren Lösungen sich nur zwei Bedingungen für die Durchbiegung oder deren Ableitungen anpassen lassen, was zwei Bedingungen für die gemäss Bild 8.6 (a) an einem Plattenrand im allgemeinen auftretenden drei Spannungsresultierenden  $m_n$ ,  $m_{tn}$  und  $v_n$  entspricht. Bei der Behandlung von einfach gelagerten (frei gestützten) und freien Rändern wird deshalb nach einem auf Thomson und Tait zurückgehenden Vorschlag eine weitere Bedingung eingeführt, indem die Drillmomente  $m_{tn}$  gemäss Bild 8.6 (b) in Anlehnung an das Prinzip von de Saint Venant durch eine stetige Verteilung von Kräftepaaren ersetzt werden. An den Grenzen zwischen den Elementen mit der Länge  $dt$  heben sich die Kräfte jeweils bis auf den Zuwachs  $(\partial m_{tn} / \partial t) \cdot dt$  auf. Der auf die Längeneinheit bezogene Zuwachs  $\partial m_{tn} / \partial t$  ergibt zusammen mit der Querkraft  $v_n$  die im Bild 8.6 (c) eingetragene resultierende Stützkraft

$$v_n + \frac{\partial m_{tn}}{\partial t} \quad (8.17)$$

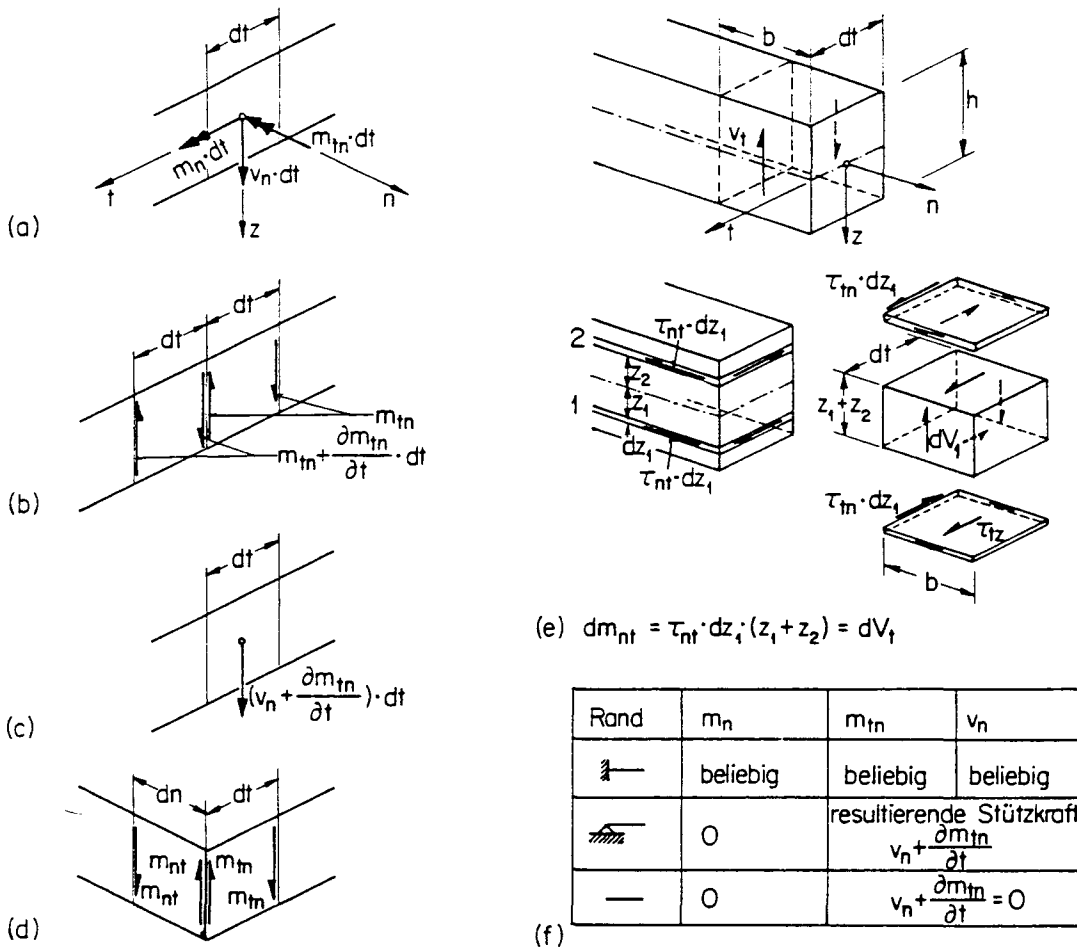


Bild 8.6

An einer Plattenecke addieren sich die  $m_{nt}$  gemäss Bild 8.6 (d) zur Eckkraft

$$2 \cdot m_{nt} \tag{8.18}$$

Aus der Sicht der statischen Methode der Plastizitätstheorie vermag die beschriebene Behandlung von Drillmomenten am Plattenrand nicht zu befriedigen. Erst kürzlich wurde deshalb versucht, eine nur auf Gleichgewichtsüberlegungen beruhende Erklärung für die Tragwirkung im Bereich von Plattenrändern zu geben, an denen Drillmomente auftreten. Es kann gezeigt werden, dass in einer schmalen Randzone gemäss Bild 8.6 (e) eine in z-Richtung wirkende Querkraft

$$V_t = m_{nt} \tag{8.19}$$

existiert, sofern die Spannungen  $\sigma_t$  in der Randzone beim Fortschreiten in t-Richtung konstant bleiben und an den Aussenflächen der Randzone keine Schubspannungen  $\tau_{tn}$  und  $\tau_{tz}$  auftreten. Aus der Existenz der Querkräfte  $V_t$  folgen das Ergebnis (8.18) für die Eckkraft und der zweite Summand in (8.17) für den Beitrag der Drillmomente zu den resultierenden Stützkraften.


Im Bild 8.6 (f) sind in Tabellenform die Bedingungen für die Spannungsresultierenden  $m_n$ ,  $m_{tn}$  und  $v_n$  an eingespannten, einfach gelagerten und freien Rändern zusammengestellt. An einge-

spannten Rändern gibt es keine statischen Randbedingungen, d.h. es können beliebige Spannungsresultierende  $m_n$ ,  $m_{tn}$  und  $v_n$  auftreten. An einfach gelagerten und freien Rändern verschwindet  $m_n$  und an freien Rändern zusätzlich auch die resultierende Stützkraft (8.17).

An den Rändern der im Bild 8.3 (b) dargestellten Platte verschwinden die Biegemomente und die resultierenden Stützkkräfte, d.h. die Bedingungen für freie Ränder sind erfüllt. Die gleichmässig verteilte Last  $q \cdot l^2 = 8 \cdot m_R$  wird gemäss (8.18) von Reaktionen  $2 \cdot m_R$  an den vier Plattenecken aufgenommen. Den Drillmomenten (8.13)<sub>2</sub> entsprechen gemäss Gl. (8.19) Querkräfte  $V_t$  in den Plattenrandzonen, deren Beträge von den Plattenecken bis zu den Randmitten linear von  $m_R$  auf null abnehmen.

Die im Bild 8.3 (c) dargestellte Platte ist an den Rändern einfach gelagert. Die Biegemomente an den Rändern verschwinden, und die resultierenden Stützkkräfte betragen  $8 \cdot m_R / l$ . Der Differenz zwischen der gleichmässig verteilten Last  $q \cdot l^2 = 24 \cdot m_R$  und der Summe  $32 \cdot m_R$  der resultierenden Stützkkräfte entsprechen nach unten wirkende Eckkräfte  $2 \cdot m_R$ . Den Drillmomenten (8.13)<sub>3</sub> entsprechen gemäss Gl. (8.19) Querkräfte  $V_t$  in den Plattenrandzonen, deren Beträge von den Plattenecken bis zu den Randmitten linear von  $m_R$  auf null abnehmen.

Die im Bild 8.3 (a) dargestellte Platte ist ebenfalls an den Rändern einfach gelagert. Die Biegemomente an den Rändern verschwinden, und die resultierenden Stützkkräfte betragen  $4 \cdot m_R / l$ , was der gleichmässig verteilten Last  $q \cdot l^2 = 16 \cdot m_R$  entspricht. Gemäss den Gleichungen (8.13)<sub>1</sub>, (8.18) und (8.19) ergeben sich keine Eckkräfte und Querkräfte  $V_t$  in den Plattenrandzonen. Die auf die Platte aufgebrachte Belastung wird über zwei Scharen paralleler Plattenstreifen in den beiden orthogonalen Richtungen  $x$  und  $y$  zu den Stützungen abgetragen. Die damit beschriebene einfache Vorstellung der Lastabtragung wird unter dem Begriff Streifenmethode in der Praxis oft verwendet. Die Streifenmethode ist in der Handhabung einfach und eignet sich auch für hinsichtlich Geometrie und Belastungskonfiguration komplizierte Fälle.

Aus der Existenz der Querkräfte (8.19) ergeben sich einige Konsequenzen für die Ausbildung der Bewehrung entlang einfach gelagerten oder freien Rändern von Stahlbetonplatten. Wird entlang solchen Rändern mit Drillmomenten gerechnet, so ist zur Aufnahme der Querkräfte  $V_t$  grundsätzlich eine entsprechende Bewehrung anzuordnen. Zur Veranschaulichung dient das im Bild 8.7 (b) dargestellte Fachwerkmodell für eine Ecke einer gemäss Bild 8.7 (a) einer reinen Torsionsbeanspruchung unterworfenen rechteckigen Platte. An der Plattenoberseite und an der Plattenunterseite bilden sich zueinander senkrechte, unter  $45^\circ$  zu den Plattenrändern geneigte Betondruckstreben aus. Die Komponenten der Druckstrebenkräfte in Richtung der Randnormalen werden durch Bewehrungen in  $x$ - und  $y$ -Richtung aufgenommen. Die zu den Plattenrändern parallelen Komponenten werden durch geneigte Betondruckstreben in den vertikalen Randebenen weitergeleitet. Die Vertikal-komponenten dieser Strebenkräfte entsprechen den Querkräften (8.19). Zu ihrer Aufnahme dient eine Bewehrung in  $z$ -Richtung. Diese kann beispielsweise aus Steckbügeln gebildet werden, mit denen die Bewehrungen an der Plattenunterseite und -oberseite miteinander verbunden werden oder mit -förmigen Enden dieser Bewehrungsstäbe, vgl. Bild 8.7 (c).

Die im Bild 8.7 (b) dargestellten Druckstreben entsprechen Betondruckfeldern, die eine be-



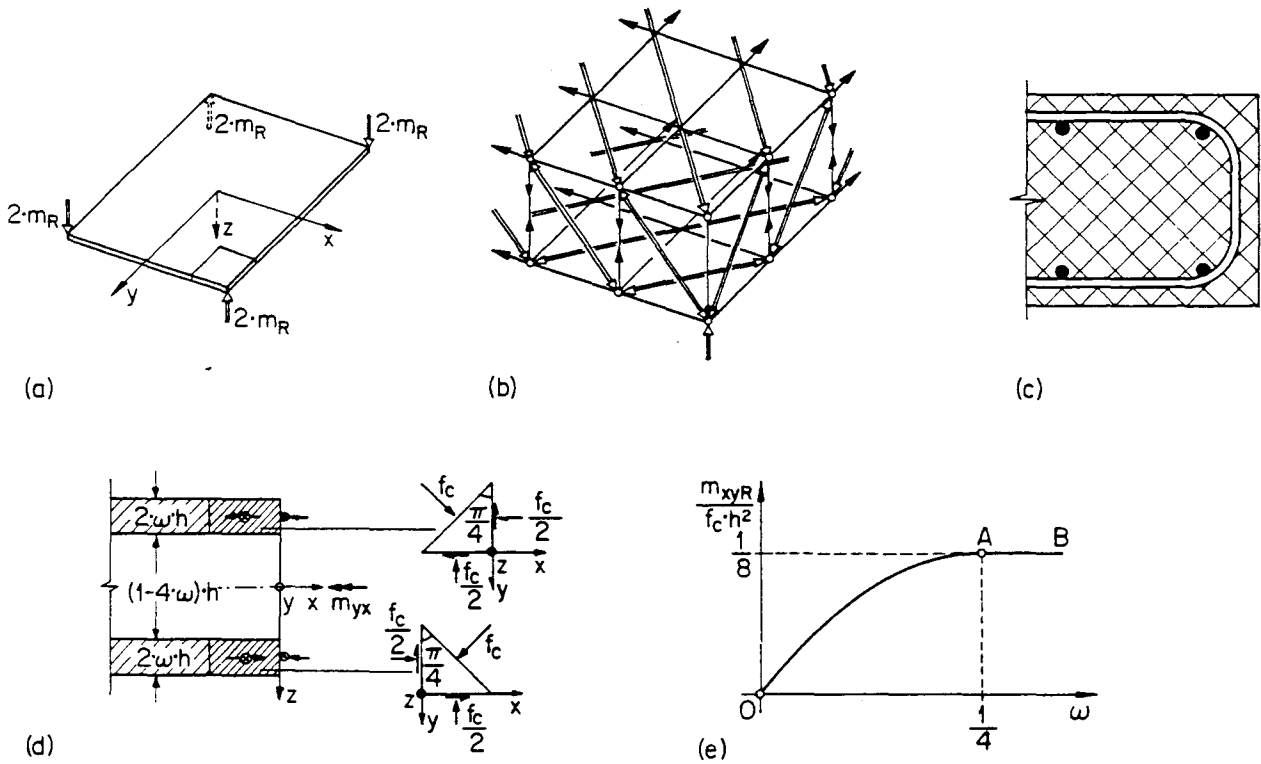


Bild 8.7

stimmte Dicke aufweisen, vgl. Bild 8.7 (d). Bezeichnen  $h$ ,  $f_c$  und  $\omega$  die Plattendicke, die Betondruckfestigkeit und den mechanischen Bewehrungsgehalt der an der Plattenoberseite und -unterseite in  $x$ - und  $y$ -Richtung angeordneten Bewehrungen, so beträgt die Dicke eines der unter  $45^\circ$  zu den Achsen geneigten Betondruckfelder  $2 \cdot \omega \cdot h$ , und für das zugehörige Drillmoment folgt

$$m_{xyR} = f_c \cdot h^2 \cdot \omega \cdot (1 - 2 \cdot \omega) \quad (8.20)$$

Der Beziehung (8.20) entspricht die Parabel OA im Bild 8.7 (e). Für  $\omega = 1/4$  wird der Maximalwert  $m_{xyR} = f_c \cdot h^2 / 8$  erreicht. Eine Vergrößerung von  $\omega$  bewirkt keine Erhöhung von  $m_{xyR}$ , da die Betondruckfestigkeit über die ganze Plattendicke erschöpft ist.

## 8.2 Fließbedingungen

### 8.2.1 Allgemeines

Grundsätzlich kann man den Widerstand von Stahlbetonplatten mit Hilfe der Plastizitätstheorie untersuchen, indem man die lokalen Spannungen und Verformungen im Platteninnern sowie entsprechende Fließbedingungen und Fließgesetze für den Beton und die Bewehrung betrachtet. Dieses allgemeine Verfahren führt stets zum Ziel, seine Anwendung ist aber nur für besondere Fälle gerechtfertigt. Für die meisten praktischen Fragestellungen kann man sich darauf beschränken, die statischen und kinematischen Beziehungen sowie die Fließbedingungen und Fließgesetze in sogenannten verallgemeinerten Spannungen und Verformungen zu formulieren, d.h. die Betrachtung der Spannungsergebnisse, Gleichungen (8.1) bis

(8.4), sowie entsprechender kinematischer Parameter ist ausreichend, die lokale Spannungs- und Verformungsverteilung ist unwesentlich.

Fliessbedingungen in verallgemeinerten Grössen erhält man üblicherweise mit der kinematischen Methode, indem man die tatsächlich möglichen Verformungen durch Einführen gewisser kinematischer Annahmen auf eine bestimmte Klasse theoretisch möglicher Verformungen beschränkt, die sich mit einer endlichen Anzahl kinematischer Parameter beschreiben lassen. Als Beispiel sei die Theorie dünner plastischer Platten mit kleinen Durchbiegungen erwähnt, die von der Annahme ausgeht, dass Normalen zur Mittelebene der Platte gerade und senkrecht zur verformten Mittelfläche bleiben. Grundlagen dieser Theorie sind im Anhang A dargestellt. Hier sei lediglich bemerkt, dass gemäss der Theorie dünner plastischer Platten der Einfluss der senkrecht zur Plattenebene wirkenden Spannungskomponenten auf den Widerstand einer Platte vernachlässigt wird. Die Interaktion der Querkräfte mit den Momenten und Membrankräften wird nicht erfasst.

Für die meisten praktischen Anwendungen werden Fliessbedingungen benützt, die sich gemäss der Fliessgelenklinientheorie ergeben. Auf diese Theorie, die einen Sonderfall der Theorie dünner plastischer Platten mit kleinen Durchbiegungen darstellt, wird im folgenden Unterabschnitt eingegangen.

Fliessbedingungen in verallgemeinerten Grössen können auch mit der statischen Methode ermittelt werden. Dabei untersucht man statisch zulässige Spannungszustände im Platteninnern und verlangt, dass die Fliessbedingungen des Betons und der Bewehrung nicht verletzt werden. Beispielsweise kann man eine Platte theoretisch in drei Scheiben auftrennen, von denen die beiden äusseren primär die Momente und Membrankräfte aufnehmen, während die innere in erster Linie der Uebertragung der Querkräfte dient. Eine derartige Idealisierung einer Platte als Sandwichplatte eignet sich gut für Bemessungszwecke. Ein Beispiel dazu ist im Anhang B enthalten. Ferner sei auf die im Kapitel 11 dargestellte Modellvorstellung zur theoretischen Behandlung des Durchstanzens hingewiesen, die auf denselben Grundgedanken beruht. Abschliessend sei noch bemerkt, dass die mit der statischen Methode erhaltenen Resultate streng genommen nicht als eigentliche Fliessbedingungen aufgefasst werden dürfen, sondern lediglich als untere Grenzwerte, da im allgemeinen keine mit den statisch zulässigen Spannungen verträglichen Verformungen angegeben werden können.

Bei der Anwendung von Fliessbedingungen und der zugeordneten Fliessgesetze auf Plattenprobleme sind vier verschiedene Fälle zu unterscheiden, je nachdem, ob die statische oder die kinematische Methode angewendet wird (vgl. Abschnitt 8.3), und ob die Fliessbedingungen selbst statischen oder kinematischen Ursprung haben. Verwendet man auf statischem Weg gewonnene untere Grenzwerte für die "wahre" Fliessbedingung, so erhält man bei Anwendung der statischen Methode sicher untere Grenzwerte der Traglast, während bei Anwendung der kinematischen Methode sowohl obere als auch untere Grenzwerte der Traglast erhalten werden können. Umgekehrt liefern auf kinematischem Weg gewonnene obere Grenzwerte für die "wahre" Fliessbedingung bei Anwendung der kinematischen Methode sicher obere Grenzwerte der Traglast, während bei Anwendung der statischen Methode sowohl untere als auch obere Grenzwerte erhalten werden können.

### 8.2.2 Fließgelenklinien

Die Fließgelenklinientheorie geht von der Betrachtung von Fließgelenklinien aus, entlang denen der Biege­widerstand einer Platte mobilisiert wird, und die insgesamt einen Bruch­mechanismus der Platte konstituieren.

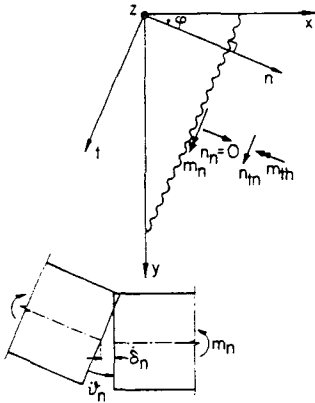


Bild 8.8

Bild 8.8 zeigt ein Element einer Fließgelenklinie in einer Platte, die an ihrer Unter- und Oberseite in x- und y-Richtung bewehrt ist. Die mechanischen Bewehrungsgehalte unten und oben werden mit  $\omega_x$  und  $\omega_y$  sowie mit  $\omega'_x$  und  $\omega'_y$  bezeichnet.  $\dot{\delta}_n$  und  $\dot{\delta}_n$  bezeichnen die relative Rotationsgeschwindigkeit der beiden entlang der Fließgelenklinie miteinander verbundenen starren Plattenteile und die zugehörige relative Extensionsgeschwindigkeit der Plattenmittelebene. Die an einer Fließgelenklinie pro Längeneinheit dissipierte Leistung ist gleich

$$L = m_n \cdot \dot{\delta}_n + n_n \cdot \dot{\delta}_n \quad (8.21)$$

$m_n$  und  $n_n$  bezeichnen die zu den kinematischen Parametern  $\dot{\delta}_n$  und  $\dot{\delta}_n$  gehörigen statischen Größen, nämlich das Biegemoment

$$m_n = f_c \cdot h^2 \cdot (\omega_x \cdot \cos^2 \varphi + \omega_y \cdot \sin^2 \varphi) - \frac{f_c}{2} \cdot \left( \frac{h}{2} - \frac{\dot{\delta}_n}{\dot{\delta}_n} \right)^2 - \frac{h}{2} \cdot n_n \quad (8.22)$$

und die Normalkraft

$$n_n = -f_c \cdot \left( \frac{h}{2} - \frac{\dot{\delta}_n}{\dot{\delta}_n} \right) + h \cdot f_c \cdot [(\omega_x - \omega'_x) \cdot \cos^2 \varphi + (\omega_y - \omega'_y) \cdot \sin^2 \varphi] \quad (8.23)$$

Verlangt man  $n_n = 0$ , so folgt aus den Gleichungen (8.22) und (8.23):

$$m_n = f_c \cdot h^2 \cdot \left[ \omega_x - \frac{1}{2} \cdot (\omega_x - \omega'_x)^2 \right] \cdot \cos^2 \varphi + f_c \cdot h^2 \cdot \left[ \omega_y - \frac{1}{2} \cdot (\omega_y - \omega'_y)^2 \right] \cdot \sin^2 \varphi + \frac{f_c \cdot h^2}{8} \cdot (\omega_x - \omega'_x - \omega_y + \omega'_y)^2 \cdot \sin^2(2\varphi) \quad (8.24)$$

oder bei Vernachlässigung des positiv definiten dritten Summanden die Näherung

$$m_n \approx f_c \cdot h^2 \cdot \left[ \omega_x - \frac{1}{2} \cdot (\omega_x - \omega'_x)^2 \right] \cdot \cos^2 \varphi + f_c \cdot h^2 \cdot \left[ \omega_y - \frac{1}{2} \cdot (\omega_y - \omega'_y)^2 \right] \cdot \sin^2 \varphi = m_{xR} \cdot \cos^2 \varphi + m_{yR} \cdot \sin^2 \varphi \quad (8.25)$$

$m_{xR}$  und  $m_{yR}$  sind die plastischen Momente entlang Fließgelenklinien parallel zu den Achsen y und x.

Wie im Bild 8.8 angedeutet ist, ergeben sich aus der Betrachtung des Fließgelenklinienmechanismus Reaktionskräfte

$$n_{tn} = -f_c \cdot h \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot (\omega_x - \omega'_x - \omega_y + \omega'_y) \quad (8.26)$$

und Reaktionsmomente

$$m_{tn} = f_c \cdot h^2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot (\omega_y - \omega'_x) - \frac{h}{2} \cdot n_{tn} \quad (8.27)$$

die im allgemeinen nicht verschwinden.

Wird ausser  $\dot{\vartheta}_n$  und  $\dot{\delta}_n$  ein dritter kinematischer Parameter  $\dot{\delta}_{tn}$  eingeführt, der einer relativen Gleitung entlang einer Fließgelenklinien entspricht, so ist der Ausdruck rechterhand in Gl. (8.21) um den Summanden  $n_{tn} \cdot \dot{\delta}_{tn}$  zu ergänzen. Man spricht in diesem Fall von einer verallgemeinerten Fließgelenklinie.  $m_{tn}$  ist weiterhin als Reaktion zu betrachten. Für  $n_n = n_{tn} = 0$  folgen die Verhältnisse  $\dot{\delta}_n / \dot{\vartheta}_n$  und  $\dot{\delta}_{tn} / \dot{\vartheta}_n$ , und die Näherung (8.25) für  $m_n$  könnte wiederum hergeleitet werden.

Die Betrachtung von Fließgelenklinien ist kinematisch restriktiver als das im Anhang A diskutierte allgemeine Verfahren zur Gewinnung von Fließbedingungen nach der Theorie dünner plastischer Platten. Nach der Fließgelenklinientheorie erhält man deshalb grundsätzlich einen rechnerischen Widerstand, der nicht unter demjenigen liegt, der sich nach dem allgemeinen Verfahren für den Fall verschwindender Membrankräfte ergibt. Am deutlichsten zeigt sich dieser Sachverhalt für eine an der Plattenoberseite und -unterseite in x- und y-Richtung bewehrte Platte mit  $\omega_x = \omega'_x = \omega_y = \omega'_y = \omega$ , die auf reine Drillung  $m_{xy}$  beansprucht ist. Nach der Fließgelenklinientheorie können Fließgelenklinien in den Winkelhalbierenden der Achsen auftreten. Gl. (8.24) liefert den Widerstand  $m_{xyR} = f_c \cdot h^2 \cdot \omega$  oder  $f_c \cdot h^2 \cdot \omega \cdot (1 - \omega/2)$ , wenn der Beitrag der gedrückten Bewehrung vernachlässigt wird. Im Vergleich zu Gl. (8.20) ergibt sich für mittlere und grosse  $\omega$  ein beträchtlicher Unterschied, während für kleine Bewehrungsgehalte die Differenz vernachlässigt werden kann.

Bei der Bearbeitung praktischer Probleme ist zu beachten, dass sich die Verformungen in der Plattenebene in der Regel aus Kompatibilitätsgründen und wegen vorgeschriebener Randbedingungen nicht frei einstellen können und mithin im allgemeinen die Membrankräfte nicht verschwinden. Oft wird die Tragfähigkeit von Platten wesentlich unterschätzt, weil diese Kräfte vernachlässigt werden.

Die mit der Annahme von Fließgelenklinien verbundene Ueberschätzung des Widerstandes für den Fall verschwindender Membrankräfte wird in vielen Fällen durch die tatsächlich vorhandene Interaktion mit Membrankräften kompensiert oder sogar überkompensiert. Da der Einbezug von Membrankräften zu einer wesentlich schwierigeren theoretischen Behandlung führen würde, wird die Fließgelenklinientheorie aber in der Regel trotz ihrer theoretischen Nachteile als für praktische Anwendungen geeignete Näherung gerne verwendet. Im folgenden werden deshalb spezielle Fließbedingungen erörtert, die sich nach der Fließgelenklinientheorie für die Biegemomente in Stahlbetonplatten ergeben.

Bezeichnen  $m_{xR}$ ,  $m_{yR}$ ,  $-m'_{xR}$  und  $-m'_{yR}$  die plastischen Momente einer in x- und y-Richtung bewehrten Platte, so erhält man gemäss Gl. (8.25) mit den Näherungen

$$m_{nR} = m_{xR} \cdot \cos^2 \varphi + m_{yR} \cdot \sin^2 \varphi, \quad m'_{nR} = m'_{xR} \cdot \cos^2 \varphi + m'_{yR} \cdot \sin^2 \varphi \quad (8.28)$$

aus der Forderung

$$-m'_{nR} \leq m_n \leq m_{nR} \quad (8.29)$$

für alle Richtungen n die Bedingungen

$$\begin{aligned} m_{xR} - m_x &\geq 0, & m_{yR} - m_y &\geq 0, & (m_{xR} - m_x) \cdot (m_{yR} - m_y) - m_{xy}^2 &\geq 0 \\ m'_{xR} + m_x &\geq 0, & m'_{yR} + m_y &\geq 0, & (m'_{xR} + m_x) \cdot (m'_{yR} + m_y) - m_{xy}^2 &\geq 0 \end{aligned} \quad (8.30)$$

und die Richtungen n, für welche  $m_n = m_{nR}$  beziehungsweise  $m_n = -m'_{nR}$  ist, sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \tan \varphi_R &= \sqrt{\frac{m_{xR} - m_x}{m_{yR} - m_y}} = \frac{m_{xy}}{m_{yR} - m_y} = \frac{m_{xR} - m_x}{m_{xy}} \\ \tan \varphi'_R &= \sqrt{\frac{m'_{xR} + m_x}{m'_{yR} + m_y}} = \frac{-m_{xy}}{m'_{yR} + m_y} = \frac{m'_{xR} + m_x}{-m_{xy}} \end{aligned} \quad (8.31)$$

Für isotrope Platten mit  $m_{xR} = m_{yR} = m_R$  und  $-m'_{xR} = -m'_{yR} = -\lambda \cdot m_R$  fällt die Fließgelenklinienrichtung mit einer Hauptmomentenrichtung zusammen. Im Bild 8.9 (a) ist die entsprechende Fließbedingung im Koordinatensystem  $m_1/m_R$ ,  $m_2/m_R$  dargestellt, und Bild 8.9 (b) zeigt die entsprechende Darstellung in den Koordinaten  $m_x/m_R$ ,  $m_y/m_R$ ,  $m_{xy}/m_R$ . Gemäss Gl. (8.30)<sub>3</sub> und Gl. (8.30)<sub>6</sub> ergeben sich als Fließflächen die beiden elliptischen Kegel ABD und CDB, deren Spitzen A und C in der Ebene  $m_{xy} = 0$  liegen, und die sich entlang BED schneiden.

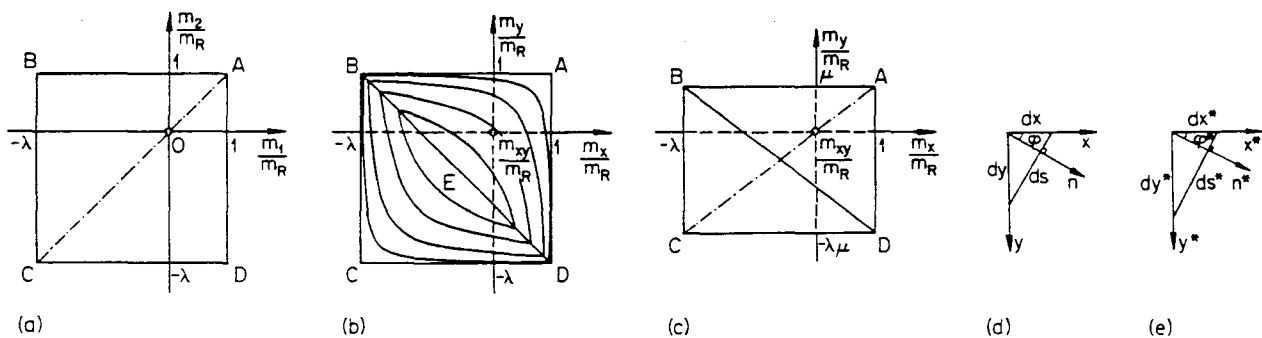


Bild 8.9

Probleme sogenannt einfach affiner Platten, deren plastische Momente in x- und y-Richtung gemäss Bild 8.9 (c) den Beziehungen  $m_{xR} = m_R$ ,  $m_{yR} = \mu \cdot m_R$ ,  $-m'_{xR} = -\lambda \cdot m_R$  und  $-m'_{yR} = -\mu \cdot \lambda \cdot m_R$  folgen, können auf solche isotroper Platten zurückgeführt werden. Im folgenden werden Grössen der zugeordneten isotropen Platten mit einem Stern (\*) gekennzeichnet. Lösungen für

isotrope Platten behalten ihre Gültigkeit beim Uebergang zu einer einfach affinen Platte (und umgekehrt), wenn folgende Transformationen beachtet werden:

$$\begin{aligned}
 m_x^* &= m_x, & m_y^* &= \frac{m_y}{\mu}, & m_{xy}^* &= \frac{m_{xy}}{\sqrt{\mu}} \\
 x^* &= x, & y^* &= \frac{y}{\sqrt{\mu}}, & & \\
 \dot{\chi}_x^* &= \dot{\chi}_x, & \dot{\chi}_y^* &= \dot{\chi}_y \cdot \mu, & \dot{\chi}_{xy}^* &= \dot{\chi}_{xy} \cdot \sqrt{\mu} \\
 q^* &= q, & \dot{w}^* &= \dot{w}
 \end{aligned}
 \tag{8.32}$$

Für den Uebergang von Bild 8.9 (d) zu Bild 8.9 (e) gelten die Transformationen

$$\tan \varphi^* = \tan \varphi \cdot \sqrt{\mu} \tag{8.33}$$

$$ds = \frac{dx}{\sin \varphi} = \frac{ds^* \cdot \sin \varphi^*}{\sin \varphi} = \sqrt{\sin^2 \varphi^* + \mu \cdot \cos^2 \varphi^*} \cdot ds^*$$

und entsprechend die Formeln

$$\begin{aligned}
 m_{nR} &= m_R \cdot (\cos^2 \varphi + \mu \cdot \sin^2 \varphi) = \frac{\mu \cdot m_R}{(\sin^2 \varphi^* + \mu \cdot \cos^2 \varphi^*)} \\
 \dot{\chi}_n &= \frac{\dot{\chi}_x}{\cos \varphi} = \frac{\dot{\chi}_n^* \cdot \cos \varphi^*}{\cos \varphi} = \frac{\dot{\chi}_n^* \cdot \sqrt{\sin^2 \varphi^* + \mu \cdot \cos^2 \varphi^*}}{\sqrt{\mu}}
 \end{aligned}
 \tag{8.34}$$

Eine Einzellast  $F$  auf einer einfach affinen Platte entspricht der Einzellast  $F^* = F/\sqrt{\mu}$  auf der zugeordneten isotropen Platte, und eine Linienlast  $\bar{q}$  parallel zur  $n$ -Achse im Bild 8.9 (d) wird gemäss der Formel  $\bar{q}^* = \bar{q} \cdot ds^*/ds$  transformiert.

Für den allgemeinen Fall orthotroper Platten fällt die Fließgelenklinienrichtung nicht mit einer Hauptmomentenrichtung zusammen. Im Raum  $m_x, m_y, m_{xy}$  ergeben sich gemäss Gl. (8.30)<sub>3</sub> und Gl. (8.30)<sub>6</sub> als Fließflächen zwei sich schneidende elliptische Kegel, vgl. Bild 8.10 (a). In dem im Bild 8.10 (b) dargestellten Koordinatensystem entsprechen Punkte im schraffierten Bereich rechts von der durch Gl. (8.30)<sub>3</sub> bestimmten Hyperbel ABC einer sicheren Bemessung. Vielfach werden Punkte in den SpickeIn ABD und CBE vernachlässigt, indem mit den linearisier-

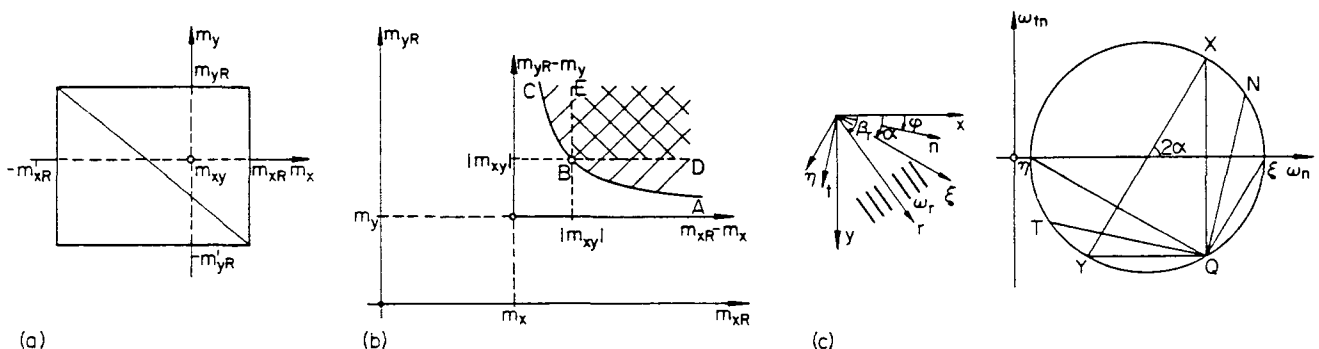


Bild 8.10

ten Bedingungen

$$m_{xR} \geq m_x + |m_{xy}|, \quad m_{yR} \geq m_y + |m_{xy}| \quad (8.35)$$

und den analogen Beziehungen

$$m'_{xR} \geq -m_x + |m_{xy}|, \quad m'_{yR} \geq -m_y + |m_{xy}| \quad (8.36)$$

für negative Momente gearbeitet wird. Man bemerkt anhand von Bild 8.10 (b) noch, dass die Summe  $m_{xR} + m_{yR}$  der plastischen Momente in den Bewehrungsrichtungen für den Punkt B minimal ist. Für diesen Punkt gelten die Relationen (8.35) als Gleichungen.

Fließende Bewehrungen in mehreren zueinander schiefen Richtungen  $r$  können gemäss Bild 8.10 (c) stets durch eine äquivalente orthogonale Bewehrung in  $\xi$ - und  $\eta$ -Richtung ersetzt werden, wenn näherungsweise angenommen werden darf, dass alle Stäbe in einer Lage angeordnet sind. Durch Summation über alle Bewehrungen erhält man die fiktiven mechanischen Bewehrungsgehalte

$$\omega_x = \sum \omega_r \cdot \cos^2 \beta_r, \quad \omega_y = \sum \omega_r \cdot \sin^2 \beta_r, \quad \omega_{xy} = \sum \omega_r \cdot \sin \beta_r \cdot \cos \beta_r \quad (8.37)$$

die den im Bild 8.10 (c) dargestellten Mohrschen Kreis bestimmen. Für beliebige Richtungen  $n$  und  $t$  gilt analog zu Gl. (8.15):

$$\omega_n = \omega_x \cdot \cos^2 \varphi + \omega_y \cdot \sin^2 \varphi + \omega_{xy} \cdot \sin 2\varphi, \quad \omega_{tn} = (\omega_y - \omega_x) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + \omega_{xy} \cdot \cos 2\varphi \quad (8.38)$$

Mit den den Hauptwerten  $\omega_\xi$  und  $\omega_\eta$  entsprechenden plastischen Momenten  $m_{\xi R}$  und  $m_{\eta R}$  erhält man die zu Gl. (8.30) analogen Bedingungen:

$$m_{\xi R} - m_\xi \geq 0, \quad m_{\eta R} - m_\eta \geq 0, \quad (m_{\xi R} - m_\xi) \cdot (m_{\eta R} - m_\eta) - m_{\xi\eta}^2 \geq 0 \quad (8.39)$$

Mit den Ausdrücken

$$\begin{aligned} m_{xR} &= m_{\xi R} \cdot \cos^2 \alpha + m_{\eta R} \cdot \sin^2 \alpha \\ m_{yR} &= m_{\xi R} \cdot \sin^2 \alpha + m_{\eta R} \cdot \cos^2 \alpha \\ m_{xyR} &= (m_{\xi R} - m_{\eta R}) \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \end{aligned} \quad (8.40)$$

kann Gl. (8.39) durch die äquivalenten Bedingungen

$$m_{xR} - m_x \geq 0, \quad m_{yR} - m_y \geq 0, \quad (m_{xR} - m_x) \cdot (m_{yR} - m_y) - (m_{xyR} - m_{xy})^2 \geq 0 \quad (8.41)$$

ersetzt werden. Es ist zu beachten, dass  $m_{xyR}$  positiv oder negativ sein kann. Als Fließflächen im Raum  $m_x, m_y, m_{xy}$  ergeben sich gemäss Gl. (8.41)<sub>3</sub> und den hier nicht aufgestellten analogen Beziehungen für negative Momente zwei sich schneidende elliptische Kegel, deren Spitzen nicht in der Ebene  $m_{xy} = 0$  liegen. Anstelle der Gl. (8.35) erhält man die entspre-

chenden linearisierten Bedingungen

$$m_{xR} \geq m_x + |m_{xyR} - m_{xy}|, \quad m_{yR} \geq m_y + |m_{xyR} - m_{xy}| \quad (8.42)$$

Schliesslich sei noch bemerkt, dass die Grössen  $m_{xR}$ ,  $m_{yR}$  und  $m_{xyR}$  direkt aus den Ausdrücken (8.37) ermittelt werden können, wenn die Hebelarme der inneren Kräfte näherungsweise als konstant angenommen werden dürfen. Der Umweg über  $m_{\xi R}$  und  $m_{\eta R}$  ist in diesem Fall nicht nötig.

### 8.3 Statische und kinematische Methode

Für die Bemessung von Stahlbetonplatten werden zunehmend Verfahren verwendet, die auf der Plastizitätstheorie beruhen. Recht bekannt ist die Fliessgelenklinientheorie. Mit dieser werden nach der kinematischen Methode der Plastizitätstheorie ausgehend von kinematisch zulässigen Bewegungszuständen obere Grenzwerte für die Traglast von Platten berechnet, indem die Leistung der äusseren Kräfte beim angenommenen Mechanismus mit der entlang den Fliessgelenklinien dissipierten Leistung gleichgesetzt wird. Andererseits gibt es verschiedene Verfahren, mit denen nach der statischen Methode der Plastizitätstheorie untere Grenzwerte für die Traglast von Platten berechnet werden. Dabei wird von statisch zulässigen Spannungszuständen ausgegangen, welche die Gleichgewichtsbedingungen und die statischen Randbedingungen erfüllen und die Fliessbedingungen nirgends verletzen.

Vielfach werden die mit einer elastischen Berechnung ermittelten Momente einer Bruchbemessung zugrunde gelegt. Dabei werden oft die linearisierten Fliessbedingungen (8.35) und (8.36) verwendet. Dies ist ein spezielles Vorgehen nach der statischen Methode. Ein weiteres Beispiel für die Anwendung der statischen Methode ist die Streifenmethode, vgl. den Hinweis im Unterabschnitt 8.1.4. Wird die Streifenmethode mit bekannten Lösungen für punktgestützte oder durch Säulen gestützte Platten kombiniert, so ergibt sich eine wesentliche Erweiterung ihres Anwendungsbereichs. Flachdecken und durch konzentrierte Lasten beanspruchte Platten können dann behandelt werden [8.3], [8.5]. Für die Behandlung allgemeiner Probleme werden in der Regel Polynomansätze für die Momente verwendet. Die in den Ansätzen auftretenden Konstanten werden unter Beachtung der Gleichgewichtsbedingungen, der Rand- und allfälliger Symmetriebedingungen sowie der Fliessbedingungen derart bestimmt, dass die zugehörige Belastung möglichst gross wird.

Lösungen nach der statischen Methode enthalten Aussagen über die Momente in allen Punkten der betrachteten Platte und können deshalb für die Bemessung unmittelbar verwendet werden. Im Gegensatz dazu erscheinen in einer Fliessgelenklinien-Lösung nur die Biegemomente entlang den Fliessgelenklinien. Die Betrachtung eines einzelnen Bruchmechanismus liefert hinsichtlich der Bemessung zugrunde zu legenden Momente im Vergleich zu einer Lösung nach der statischen Methode keine gleichwertigen Aussagen. Allerdings ist auch der für eine Fliessgelenklinien-Lösung erforderliche Aufwand geringer als der für eine Lösung nach der statischen Methode notwendige Aufwand. Darum ist es meist viel leichter, gute obere Grenzwerte für die Traglast zu gewinnen als gute untere Grenzwerte.

Fliessgelenklinien-Lösungen eignen sich in erster Linie für die Ueberprüfung einer im Ent-



wurf vorliegenden, nach der statischen Methode durchgeführten Bemessung. Für hinsichtlich Geometrie und Belastungskonfiguration einfache Systeme leisten Fliessgelenklinien-Lösungen aber auch bei der Bemessung direkt nützliche Dienste. Dies gilt vor allem für den in der Praxis häufig auftretenden Fall, dass in einer Platte von vornherein bereichsweise konstante Widerstände auftreten, deren Grössen noch festzulegen sind.

Im allgemeinen sollte man nicht die statische oder die kinematische Methode bevorzugen, sondern versuchen, diese je nach der Problemstellung derart einzusetzen, dass sie sich gegenseitig ergänzen und bei möglichst geringem Aufwand zu einer der Problemstellung angepassten, sicheren Bemessung führen.

#### LITERATUR

- [8.1] Thürlimann B. und Marti P.: "Plastizität im Stahlbeton", Vorlesungsautographie, Abteilung für Bauingenieurwesen, ETH Zürich, 1981. (
- [8.2] Sawczuk A. und Jaeger T.: "Grenztragfähigkeits-Theorie der Platten", Springer Verlag Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1963.
- [8.3] Hillerborg A.: "Design of Reinforced Concrete Slabs according to the Strip Method", Cement and Concrete Association, London, 1975.
- [8.4] Nielsen M.P.: "The Theory of Plasticity for Reinforced Concrete Slabs", IVBH-Kolloquium 'Plasticity in Reinforced Concrete', Kopenhagen 1979, Einführungsbericht, IVBH Vol. 28, Zürich, 1978, S. 93-114.
- [8.5] Marti P.: "Gleichgewichtslösungen für Flachdecken", Schweizer Ingenieur und Architekt 99, Heft 38, 1981, S. 799-809. (

A N H A N G A von Kapitel 8: Grundlagen der Theorie dünner plastischer Platten mit  
kleinen Durchbiegungen

---

Die Theorie dünner Platten geht von der Annahme aus, dass Normalen zur Mittelebene der Platte gerade und senkrecht zur verformten Mittelfläche bleiben. Demzufolge erhält man für die Verschiebung eines beliebigen Punktes P im Abstand  $z$  von der Mittelebene die Geschwindigkeitskomponenten

$$\dot{u} = -z \cdot \frac{\partial \dot{w}}{\partial x}, \quad \dot{v} = -z \cdot \frac{\partial \dot{w}}{\partial y}, \quad \dot{w} = \dot{w} \quad (8.43)$$

in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung, vgl. Bild 8.11 (a), und aus den kinematischen Relationen

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{\partial \dot{u}}{\partial x}, \dots, \quad \dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial x}, \dots \quad (8.44)$$

die Verzerrungsgeschwindigkeiten

$$\dot{\epsilon}_x = -z \cdot \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2}, \quad \dot{\epsilon}_y = -z \cdot \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2}, \quad \dot{\gamma}_{xy} = -2 \cdot z \cdot \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x \partial y}, \quad \dot{\epsilon}_z = \dot{\gamma}_{zy} = \dot{\gamma}_{zx} = 0 \quad (8.45)$$

oder bei Verwendung der Krümmungsgeschwindigkeiten

$$\dot{\chi}_x = -\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2}, \quad \dot{\chi}_y = -\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2}, \quad \dot{\chi}_{xy} = -\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x \partial y} \quad (8.46)$$

die Formeln

$$\dot{\epsilon}_x = z \cdot \dot{\chi}_x, \quad \dot{\epsilon}_y = z \cdot \dot{\chi}_y, \quad \frac{\dot{\gamma}_{xy}}{2} = z \cdot \dot{\chi}_{xy} \quad (8.47)$$

Im allgemeinen ist die Mittelebene nicht verzerrungsfrei, sondern weist die Verzerrungsgeschwindigkeiten  $\dot{\bar{\epsilon}}_x$ ,  $\dot{\bar{\epsilon}}_y$  und  $\dot{\bar{\gamma}}_{xy}$  auf. Anstelle der Formeln (8.47) erhält man

$$\dot{\epsilon}_x = \dot{\bar{\epsilon}}_x + z \cdot \dot{\chi}_x, \quad \dot{\epsilon}_y = \dot{\bar{\epsilon}}_y + z \cdot \dot{\chi}_y, \quad \frac{\dot{\gamma}_{xy}}{2} = \frac{\dot{\bar{\gamma}}_{xy}}{2} + z \cdot \dot{\chi}_{xy} \quad (8.48)$$

Gemäss Gl. (8.48) ist die Verformung eines Plattenelementes im allgemeinen durch einen Satz von sechs Parametern festgelegt.

Man kann zeigen, dass die Annahme der Theorie dünner Platten verbunden mit der Annahme der Theorie des plastischen Potentials für das als isotrop und ideal plastisch vorausgesetzte Material einer Platte dazu führt, dass der Spannungszustand in allen Schichten der Platte theoretisch eben sein muss. Umgekehrt führt die Betrachtung statisch zulässiger ebener Spannungszustände in einer Platte aus isotropem, ideal plastischem Material, das der Theorie des plastischen Potentials genügt, auf die Gleichungen (8.48), wenn man verlangt, dass die Spannungsergebenden (8.1), (8.2) und (8.4) maximal werden. Der wirkliche Spannungszustand wird im allgemeinen natürlich nur annähernd eben sein, und die Anwendung der Theorie dünner Platten ist nur gerechtfertigt, wenn die senkrecht zur Plattenebene wirkenden Spannungskomponenten klein sind.

Mit bekannten Fließbedingungen für den ebenen Spannungszustand in allen Schichten einer Platte kann aus den Hauptwerten der Verzerrungsgeschwindigkeiten, die mit Gl. (8.48) für alle Schichten bestimmt werden können, auf die zugehörigen Spannungen geschlossen werden, und durch Integration über die Plattendicke können die zu den Parametern  $\dot{\bar{\epsilon}}_x$ ,  $\dot{\bar{\epsilon}}_y$ ,  $\dot{\bar{\gamma}}_{xy}$  und  $\dot{\bar{\chi}}_x$ ,  $\dot{\bar{\chi}}_y$ ,  $2\dot{\bar{\chi}}_{xy}$  gehörigen Membrankräfte  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_{xy}$  und die Biege- und Drillmomente  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_{xy}$  ermittelt werden. Mit den Gleichungen (8.1), (8.2), (8.4) und (8.48) erhält man für die spezifische Dissipationsleistung

$$L = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \cdot \dot{\bar{\epsilon}}_x + \sigma_y \cdot \dot{\bar{\epsilon}}_y + \tau_{xy} \cdot \dot{\bar{\gamma}}_{xy}) \cdot dz$$

$$= n_x \cdot \dot{\bar{\epsilon}}_x + n_y \cdot \dot{\bar{\epsilon}}_y + n_{xy} \cdot \dot{\bar{\gamma}}_{xy} + m_x \cdot \dot{\bar{\chi}}_x + m_y \cdot \dot{\bar{\chi}}_y + m_{xy} \cdot 2 \cdot \dot{\bar{\chi}}_{xy} \quad (8.49)$$

Die im Ausdruck (8.49)<sub>2</sub> auftretenden Membrankräfte und Momente werden als verallgemeinerte Spannungen bezeichnet, und die zu ihnen gehörigen, in den einzelnen Summanden von Gl. (8.49)<sub>2</sub> auftretenden Faktoren als verallgemeinerte Verformungsgeschwindigkeiten. Die Querkräfte Gl. (8.3) sind als für das Gleichgewicht notwendige Reaktionskräfte zu betrachten, die nicht zur Dissipation beitragen, gleich wie innere Kräfte eines starren Körpers.

Im allgemeinen gelingt es nicht, eine explizite Formulierung der Fließbedingung anzugeben, sondern man muss sich mit einer parametrischen Darstellung genügen. Vielfach werden aber einzelne verallgemeinerte Verformungsgeschwindigkeiten gleich null gesetzt oder bestimmte verallgemeinerte Spannungen als bekannt vorausgesetzt. In solchen Fällen wird oft eine explizite Formulierung ermöglicht.

Für den Beton im ebenen Spannungszustand wird oft die im Bild 8.11 (b) dargestellte, sogenannte 'quadratische' Fließbedingung verwendet, mit der Normalspannungen  $\sigma_n$  in beliebigen Richtungen auf das Intervall

$$0 \geq \sigma_n \geq -f_c \quad (8.50)$$

beschränkt werden.  $f_c$  bezeichnet die effektive Druckfestigkeit des Betons, und die Betonzugfestigkeit wird vernachlässigt.

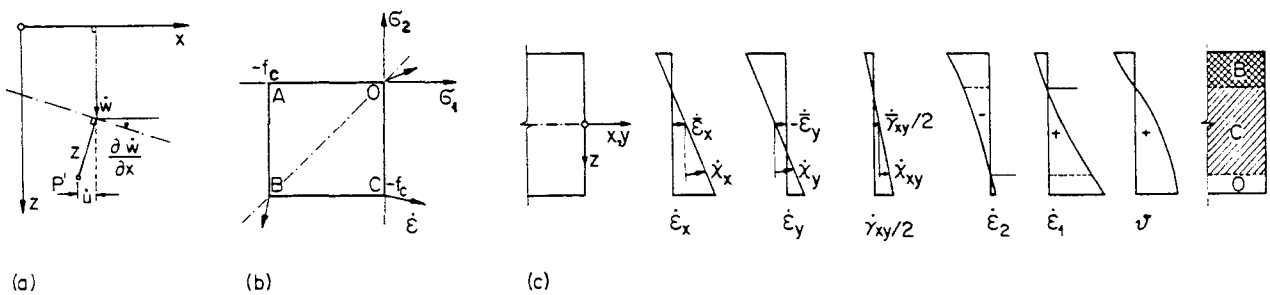


Bild 8.11

Im Bild 8.11 (c) sind die für einen angenommenen Satz von verallgemeinerten Verformungsgeschwindigkeiten resultierenden Hauptwerte

$$\dot{\epsilon}_1 = \frac{1}{2} \cdot (\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y) \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y)^2 + \dot{\gamma}_{xy}^2} \quad (8.51)$$

und der mit

$$\tan 2\vartheta = \frac{\dot{\gamma}_{xy}}{\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y} \quad (8.52)$$

bestimmte Winkel  $\vartheta$  zwischen der x-Achse und der ersten Hauptrichtung als Funktionen von z aufgetragen. Die Hauptwerte  $\dot{\epsilon}_1$  und  $\dot{\epsilon}_2$  variieren im allgemeinen hyperbolisch über die Plattendicke. Sofern  $\dot{\epsilon}_x \cdot \dot{\epsilon}_y = (\dot{\gamma}_{xy}/2)^2$  ist, d.h. mit Gl. (8.48)

$$z^2 \cdot (\dot{\chi}_x \cdot \dot{\chi}_y - \dot{\chi}_{xy}^2) + z \cdot (\dot{\bar{\epsilon}}_x \cdot \dot{\chi}_y + \dot{\bar{\epsilon}}_y \cdot \dot{\chi}_x - \dot{\gamma}_{xy} \cdot \dot{\chi}_{xy}) + (\dot{\bar{\epsilon}}_x \cdot \dot{\bar{\epsilon}}_y - \frac{\dot{\gamma}_{xy}^2}{4}) = 0 \quad (8.53)$$

gilt, verschwindet einer der Hauptwerte (8.51), und als mit dem Verzerrungszustand verträgliche Spannungszustände kommen alle Punkte auf der zugehörigen Quadratseite im Bild 8.11 (b) in Frage. Im allgemeinen liefert aber die quadratische Gleichung (8.53) nicht mehr als zwei Lösungen  $z_1$  und  $z_2$ , und damit ergeben sich im Maximum drei Bereiche mit den den Punkten O, C und B im Bild 8.11 (b) entsprechenden Spannungszuständen, vgl. die äusserste Figur rechts im Bild 8.11 (c).

Für die Bewehrung wird üblicherweise angenommen, dass sie nur Spannungen in Stabrichtung aufnimmt, und dass sie sich an den Fließsgrenzen  $\pm f_y$  ideal plastisch verhält. Die Verteilung und Verankerung der Bewehrung werden als derart vorausgesetzt, dass ihre Wirkung durch äquivalente mittlere Spannungen erfasst werden kann. Damit kann der Beitrag der Bewehrung zu den verallgemeinerten Spannungen für jeden angenommenen Satz verallgemeinerter Verformungsgeschwindigkeiten bestimmt und zu demjenigen des Betons hinzugefügt werden.

A N H A N G B von Kapitel 8: Bemessungsverfahren für kombinierte Beanspruchung durch Momente und Membrankräfte

Oft ist es nützlich, eine Platte als Sandwichplatte zu idealisieren. Die an einem Plattenelement angreifenden Momente und Membrankräfte werden durch statisch äquivalente Membrankräfte in den einzelnen Sandwichscheiben ersetzt und diese für deren Wirkung bemessen. Das Prinzip solcher Verfahren wird im folgenden anhand eines Beispiels erläutert.

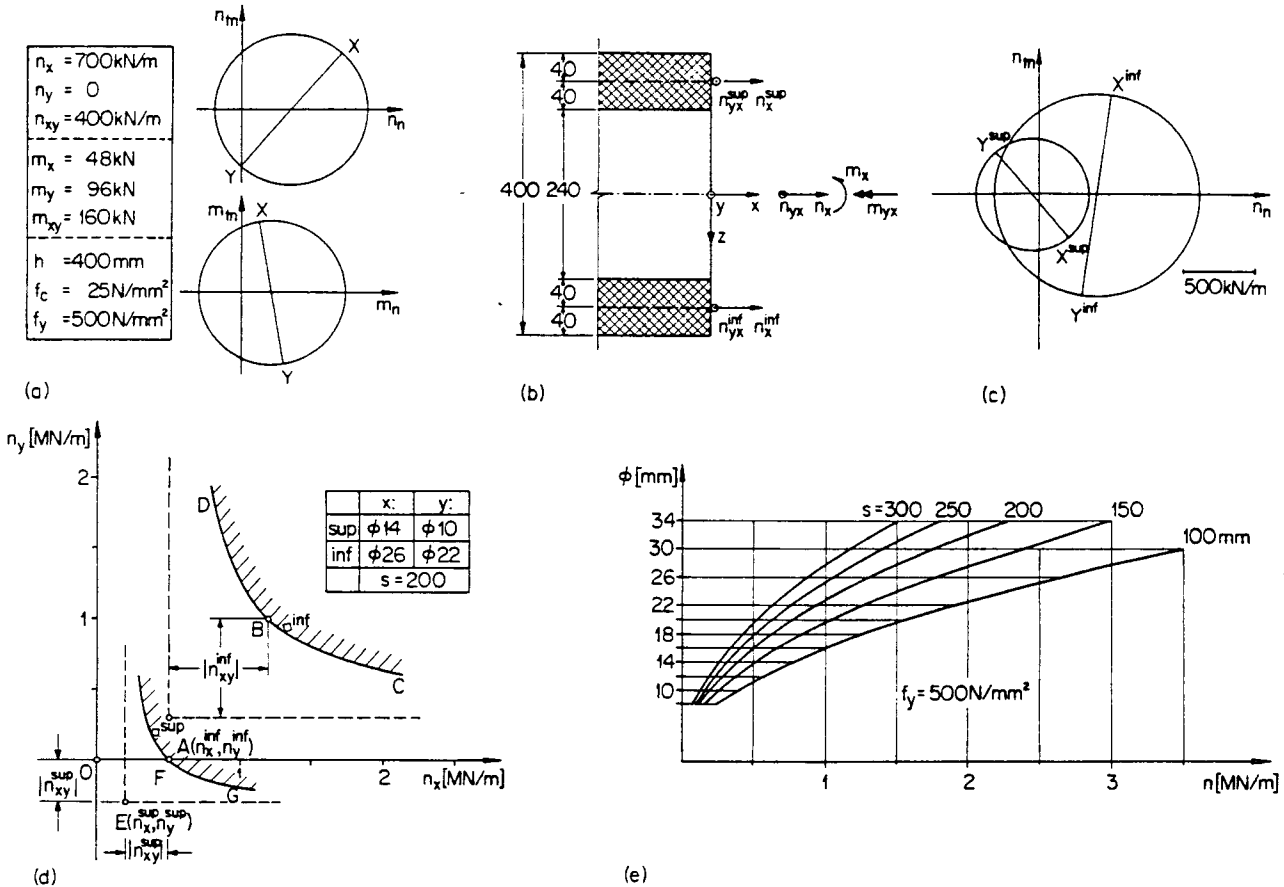


Bild 8.12

Eine 40 cm dicke Platte ist für die im Bild 8.12 (a) angegebenen Beanspruchungen zu bemessen. In einem ersten Schritt wird die Platte durch die im Bild 8.12 (b) dargestellte Sandwichplatte ersetzt. Die mittlere Scheibe wird für die Uebertragung von eventuell vorhandenen Querkraften reserviert. Die Dicke der beiden äusseren Scheiben wird zu 8 cm oder 20% der Plattendicke gewählt. Die Mittelebenen dieser Scheiben fallen mit guter Näherung mit den Bewehrungsebenen zusammen. In einem zweiten Schritt werden die Beanspruchungen durch die in den Mittelebenen der beiden äusseren Scheiben wirkenden Membrankräfte

$$\begin{aligned}
 n_x^{\text{sup}} &= \frac{700 \text{ kN/m}}{2} - \frac{48 \text{ kN}}{0.32 \text{ m}} = 200 \text{ kN/m}, & n_x^{\text{inf}} &= \frac{700 \text{ kN/m}}{2} + \frac{48 \text{ kN}}{0.32 \text{ m}} = 500 \text{ kN/m} \\
 n_y^{\text{sup}} &= -\frac{96 \text{ kN}}{0.32 \text{ m}} = -300 \text{ kN/m}, & n_y^{\text{inf}} &= +\frac{96 \text{ kN}}{0.32 \text{ m}} = 300 \text{ kN/m} \\
 n_{xy}^{\text{sup}} &= \frac{400 \text{ kN/m}}{2} - \frac{160 \text{ kN}}{0.32 \text{ m}} = -300 \text{ kN/m}, & n_{xy}^{\text{inf}} &= \frac{400 \text{ kN/m}}{2} + \frac{160 \text{ kN}}{0.32 \text{ m}} = 700 \text{ kN/m}
 \end{aligned}
 \tag{8.54}$$

ersetzt, vgl. die zugehörigen Mohrschen Kreise im Bild 8.12 (c). In einem dritten Schritt werden die beiden Scheiben für die Membrankräfte (8.54) bemessen. Im Beton herrscht ein einachsialer Druckspannungszustand mit den Komponenten

$$n_{xc} = n_x - n_{xs}, \quad n_{yc} = n_y - n_{ys}, \quad n_{xyc} = n_{xy} \quad (8.55)$$

wenn die durch eine orthogonale Bewehrung in x- und y-Richtung aufgenommenen Membrankräfte  $n_{xs}$  und  $n_{ys}$  derart gewählt werden, dass

$$n_{xc} \cdot n_{yc} = n_{xyc}^2 = (n_{xs} - n_x) \cdot (n_{ys} - n_y) = n_{xy}^2 \quad (8.56)$$

ist. Die Gl. (8.56)<sub>3</sub> definiert im Bild 8.12 (d) die beiden Hyperbeln DBC und HFG für die beiden Scheiben. Punkte mit den Koordinaten  $n_{xs}$  und  $n_{ys}$  in den schraffierten Bereichen entsprechen einer sicheren Bemessung. Zur Wahl der Durchmesser und der Abstände der Bewehrungsstäbe kann das im Bild 8.12 (e) dargestellte Diagramm verwendet werden, das für eine Fließgrenze  $f_y = 500 \text{ N/mm}^2$  gilt. Die gewählte Bemessung mit Stäben  $\emptyset 14$  und  $\emptyset 10$  sowie  $\emptyset 26$  und  $\emptyset 22$  in x- und y-Richtung oben und unten in einem einheitlichen Abstand  $s = 20 \text{ cm}$  ist im Bild 8.12 (d) eingetragen. In einem vierten Schritt ist schliesslich noch zu kontrollieren, ob die in den Hauptdruckrichtungen auftretenden Membrankräfte  $n_{xc} + n_{yc}$  durch den Beton aufgenommen werden können. Für die 8 cm dicken Scheiben erhält man mit der effektiven Betondruckfestigkeit  $f_c = 25 \text{ N/mm}^2$  eine kritische Membrankraft vom Betrag  $2 \cdot 10^6 \text{ N/m}$ . Für die im Bild 8.12 (d) eingetragenen Bemessungspunkte inf und sup ergeben sich demgegenüber Werte, deren Beträge etwas grösser als  $1.4 \cdot 10^6 \text{ N/m}$  und  $0.6 \cdot 10^6 \text{ N/m}$  sind, d.h. zulässige Grössen.

Die Idealisierung einer Platte als Sandwichplatte entspricht einem Vorgehen nach der statischen Methode und liefert untere Grenzwerte für die Tragfähigkeit. Leider sind die Anwendungsgrenzen derartiger Verfahren bisher erst zum Teil abgeklärt. Es fehlen insbesondere für den Fall beträchtlicher Membrandruckkräfte und für mittlere bis grosse Bewehrungsgehalte verlässliche Informationen aus Versuchen. Ferner sind auch die Fragen des Verhaltens unter Gebrauchslasten und der Kräfteumlagerung in Platten, die nach den obigen Grundsätzen auf Bruch bemessen werden, noch nicht befriedigend beantwortet.

### 9.1 Einleitung

Lösungen der Plattenprobleme können mit Hilfe der Grenzwertsätze der Plastizitätstheorie gefunden werden. Tabelle 9.1 zeigt eine qualitative Zusammenstellung dieser Grenzwertsätze und deren Bedingungen.

1	Gleichgewicht + stat. Randbedingungen	erfüllt: $L_a = -L_i$	$L_a = -L_i$
2	Fließbedingung	erfüllt	?
3	Mechanismus + geom. Randbedingungen	?	erfüllt
4	Methode	STATISCHE METHODE	KINEMATISCHE METHODE
	Resultate	$q_S \leq q_R \leq q_K$	

Tabelle 9.1

Die Vor- und Nachteile beider Methoden sind im Kapitel 8 erwähnt.

### 9.2 Statische Methode

Die Differentialgleichung des Gleichgewichtes, Gl. (8.7), kann in drei Teile aufgespalten werden (Bezeichnungen siehe Bild 8.2):

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} = -q_x \quad ; \quad 2 \cdot \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \cdot \partial y} = -q_{xy} \quad ; \quad \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -q_y \quad (9.1)$$

Einsetzen in Gl. (8.7) gibt

$$q_x + q_{xy} + q_y = q \quad (9.2)$$

Physikalisch bedeutet dies, dass eine Platte in drei ideale Platten zerlegt wird, von denen eine nur Momente in x-Richtung, eine zweite nur Momente in y-Richtung und die dritte nur Drillungsmomente  $m_{xy}$  aufnehmen kann.

Die Anwendung der statischen Methode wird mit Hilfe ausgewählter Grundbeispiele vorgestellt. Zur Entwicklung statischer Lösungen wird folgendes Vorgehen verwendet:

1. Wahl einer Momentenverteilung (Ansatz), welche die statischen Randbedingungen erfüllt.
2. Bestimmung der Last aus der Gleichgewichtsbedingung (Gl. 8.7).
3. Einhaltung der Fließbedingung.

Die Wahl der Ansätze kann aufgrund der Gl. (9.2) erfolgen. Drei Grundfälle werden unterschieden.

	x-Richtung	y-Richtung	Drillung	Methode
I	—	$q_y$	—	Balken
II	$q_x$	$q_y$	—	Streifen
III	$q_x$	$q_y$	$q_{xy}$	Platten

Tabelle 9.2

### 9.3 Kinematische Methode

Mit Hilfe der kinematischen Methode können obere Grenzwerte der Traglast einer Platte berechnet werden. Das folgende Vorgehen wird verwendet:

1. Wahl eines Mechanismus, der die geometrischen Randbedingungen erfüllt.
2. Bestimmung der Gleichgewichtslast mit dem Prinzip der virtuellen Leistungen (PVL) (oder direkt mit Gleichgewicht):

$$L_a = -L_i$$

3. Auffinden des Minimums für den oberen Grenzwert.

Die Leistungen der inneren und äusseren Kräfte können wie folgt berechnet werden:

$$L_a = \iint_A q(x,y) \cdot w(x,y) \cdot dx \cdot dy \quad (9.3)$$

$$-L_i = \vartheta_x \cdot m_{xR} \cdot l_y + \vartheta_y \cdot m_{yR} \cdot l_x \quad (\text{Komponente in x- und y-Richtung}) \quad (9.4)$$



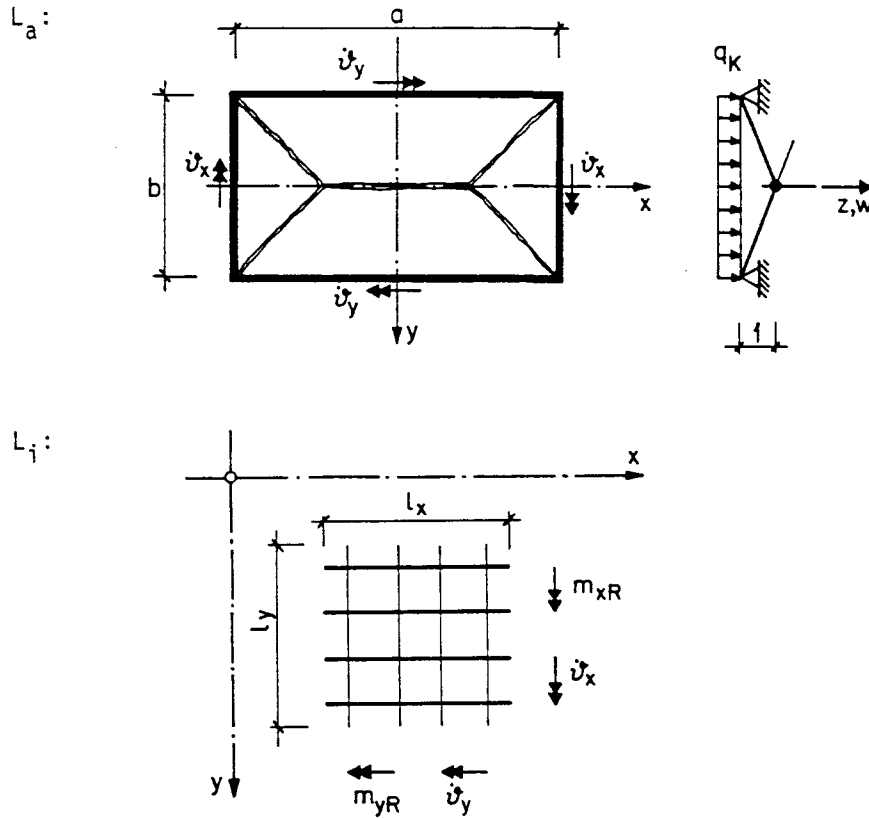
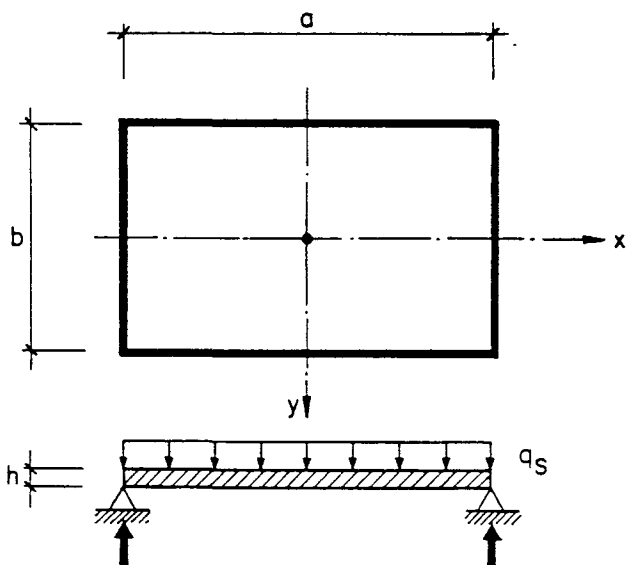


Bild 9.1: Bestimmung der  $L_a$ - und der  $L_i$ -Leistung

9.4 Anwendungen

9.4.1 Beispiel 1: Gleichmässig belastete rechteckige isotrope Platte mit frei drehbar gestützten Rändern



Gegeben:

- Geometrie:  $a, b, h, d$
- Belastung: gleichmässig verteilt
- Biegesteifigkeit: isotrop

$$m_{xR} = m_{yR} = m'_{xR} = m'_{yR} = m_R$$

Gesucht:

Grenzwerte der Traglast

Bild 9.2

A. Statische MethodeLösung 1: Balkenmethode1. Ansatz

Balkenwirkung in y-Richtung:

- parabelförmige Momentenverteilung in y-Richtung

$$m_y = m_{y0} \cdot (1 - A \cdot y^2)$$

- statische Randbedingungen

$$y = \pm \frac{b}{2}; \quad m_y = 0; \quad \text{daraus folgt: } A = \frac{4}{b^2}$$

$$\underline{m_y = m_{y0} \cdot \left(1 - \frac{4}{b^2} \cdot y^2\right)} \quad (9.5)$$

2. Gleichgewicht

- Ableitung von Gl. (9.5):

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} = - 8 \cdot m_{y0} \cdot \frac{y}{b^2}$$

$$\frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = - 8 \cdot m_{y0} \cdot \frac{1}{b^2}$$

- Einsetzen in Gl. (8.7):

$$q_S = 8 \cdot m_{y0} \cdot \frac{1}{b^2}$$

3. Fließbedingung und Traglast

$$(m_R - m_{y0}) \geq 0 \quad \underline{q_S = 8 \cdot \frac{m_R}{b^2}} \quad (9.6)$$

4. Querkräfte und Reaktionen

Mit Hilfe der Gl. (8.6) können die Verteilung und der maximale Wert der Querkräfte direkt berechnet werden:

$$v_x = 0$$

$$v_y = - 8 \cdot m_R \cdot \frac{y}{b^2} \quad ; \quad v_{y,\max} = \pm 4 \cdot \frac{m_R}{b} = \text{konst.}$$

Lösung 2: Streifenmethode1. Ansatz

Balkenwirkung in x- und y-Richtung:

- parabelförmige Momentenverteilung in x- und y-Richtung

$$m_x = m_{x0} \cdot (1 - A \cdot x^2)$$

$$m_y = m_{y0} \cdot (1 - B \cdot y^2)$$

- statische Randbedingungen

$$x = \pm \frac{a}{2} ; \quad m_x = 0 ; \quad \text{daraus folgt: } A = \frac{4}{a^2}$$

$$y = \pm \frac{b}{2} ; \quad m_y = 0 ; \quad \text{daraus folgt: } B = \frac{4}{b^2}$$

$$m_x = m_{x0} \cdot \left(1 - 4 \cdot \frac{x^2}{a^2}\right) ; \quad m_y = m_{y0} \cdot \left(1 - 4 \cdot \frac{y^2}{b^2}\right) \quad (9.7)$$

2. Gleichgewicht

- Ableitungen von Gl. (9.7):

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} = -8 \cdot m_{x0} \cdot \frac{x}{a^2} ; \quad \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} = -8 \cdot m_{x0} \cdot \frac{1}{a^2}$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} = -8 \cdot m_{y0} \cdot \frac{y}{b^2} ; \quad \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -8 \cdot m_{y0} \cdot \frac{1}{b^2}$$

- Einsetzen in Gl. (8.7)

$$q_S = 8 \cdot m_{x0} \cdot \frac{1}{a^2} + 8 \cdot m_{y0} \cdot \frac{1}{b^2}$$

3. Fließbedingung und Traglast

$$(m_R - m_{x0}) \geq 0$$

$$(m_R - m_{y0}) \geq 0 \quad \underline{q_S = \frac{8 \cdot m_R}{b^2} \cdot \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)} \quad (9.8)$$

4. Querkräfte und Reaktionen

Aus der Gl. (8.6):

$$v_x = -8 \cdot m_R \cdot \frac{x}{a^2} ; \quad v_{x,\max} = \pm 4 \cdot \frac{m_R}{a} = \text{konst.}$$

$$v_y = -8 \cdot m_R \cdot \frac{y}{b^2} ; \quad v_{y,\max} = \pm 4 \cdot \frac{m_R}{b} = \text{konst.}$$

Lösung 3: Plattenmethode1. Ansatz

Plattenwirkung:

- parabelförmige Momentenverteilung in x- und y-Richtung:

$$m_x = m_{x0} \cdot (1 - A \cdot x^2)$$

$$m_y = m_{y0} \cdot (1 - B \cdot y^2)$$

- Verteilung der Drillung:

$$m_{xy} = C \cdot x \cdot y$$

- statische Randbedingungen:

$$x = \pm \frac{a}{2} ; \quad m_x = 0 ; \quad \text{daraus folgt: } A = \frac{4}{a^2}$$

$$y = \pm \frac{b}{2} ; \quad m_y = 0 ; \quad \text{daraus folgt: } B = \frac{4}{b^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \pm \frac{a}{b} \\ y = \pm \frac{b}{2} \end{array} \right\} ; \quad m_{xy} = -m'_0 \quad \quad C = -4 \frac{m'_0}{a \cdot b}$$

$$m_x = m_{x0} \cdot (1 - 4 \cdot \frac{x^2}{a^2}) ; \quad m_y = m_{y0} \cdot (1 - 4 \cdot \frac{y^2}{b^2}) ; \quad m_{xy} = -4 \cdot m'_0 \cdot \frac{x \cdot y}{a \cdot b} \quad (9.9)$$

2. Gleichgewicht

- Ableitungen von Gl. (9.9):

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} = -8 \cdot m_{x0} \cdot \frac{x}{a^2} ; \quad \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} = -8 \cdot m_{x0} \cdot \frac{1}{a^2}$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} = -8 \cdot m_{y0} \cdot \frac{y}{b^2} ; \quad \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -8 \cdot m_{y0} \cdot \frac{1}{b^2}$$

$$\frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = -4 \cdot m'_0 \cdot \frac{y}{a \cdot b} ; \quad \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \cdot \partial y} = -4 \cdot m'_0 \cdot \frac{1}{a \cdot b}$$

- Einsetzen in Gl. (8.7):

$$q_S = 8 \cdot m_{x0} \cdot \frac{1}{a^2} + 8 \cdot m'_0 \cdot \frac{1}{a \cdot b} + 8 \cdot m_{y0} \cdot \frac{1}{b^2}$$

### 3. Fließbedingung und Traglast

- isotrope Bewehrung:  $m_{xR} = m_{yR} = m'_{xR} = m'_{yR} = m_R$

- Fließbedingung:  $(m_R - m_x) \cdot (m_R - m_y) \geq m_{xy}^2$

Durch Einsetzen von  $m_x$ ,  $m_y$  und  $m_{xy}$  aus Gl. (9.9) lässt sich verifizieren, dass die Fließbedingung nirgends verletzt wird.

$$\underline{q_S = 8 \cdot \frac{m_R}{b^2} \cdot \left(1 + \frac{b^2}{a^2} + \frac{b}{a}\right)} \quad (9.10)$$

Die Kontrolle der Fließbedingung kann auch mit Hilfe der Hauptmomente durchgeführt werden:

$$\begin{aligned} m_{1,2} &= \frac{1}{2} \cdot (m_x + m_y) \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(m_x - m_y)^2 + 4 \cdot m_{xy}^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(2 \cdot m_R - 4 \cdot \frac{m_R}{a^2} \cdot x^2 - 4 \cdot \frac{m_R}{b^2} \cdot y^2\right) \pm \frac{1}{2} \cdot \left(4 \cdot \frac{m_R}{a^2} \cdot x^2 + 4 \cdot \frac{m_R}{b^2} \cdot y^2\right) \end{aligned}$$

$$m_1 = m_R$$

$$m_2 = m_R \cdot \left(1 - 4 \cdot \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\right) \quad \text{mit} \quad -m_R \leq m_2 \leq m_R$$

Die extremen Werte für  $m_2$  liegen an den Stellen ( $x = 0, y = 0$ ) und ( $x = \pm a/2, y = \pm b/2$ ) und betragen  $m_R = \pm m_R$ .

Die Richtung der Hauptmomente wird wie folgt bestimmt:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot m_{xy}}{m_x - m_y} = \frac{-8 \cdot m_R \cdot \frac{x \cdot y}{a \cdot b}}{4 \cdot m_R \cdot \left(-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)} = \frac{2}{\frac{x \cdot b}{a \cdot y} - \frac{a \cdot y}{x \cdot b}}$$

aber

$$\tan 2\alpha = \frac{2}{\cot \alpha - \tan \alpha} = \frac{2}{\frac{x \cdot b}{a \cdot y} - \frac{a \cdot y}{x \cdot b}}, \quad \text{daraus folgt } \tan \alpha = \frac{\frac{y}{b}}{\frac{x}{a}}$$

Mit  $y/b = \eta$  und  $x/a = \xi$  können die Trajektorien für die Hauptmomente graphisch dargestellt werden (Bild 9.3).

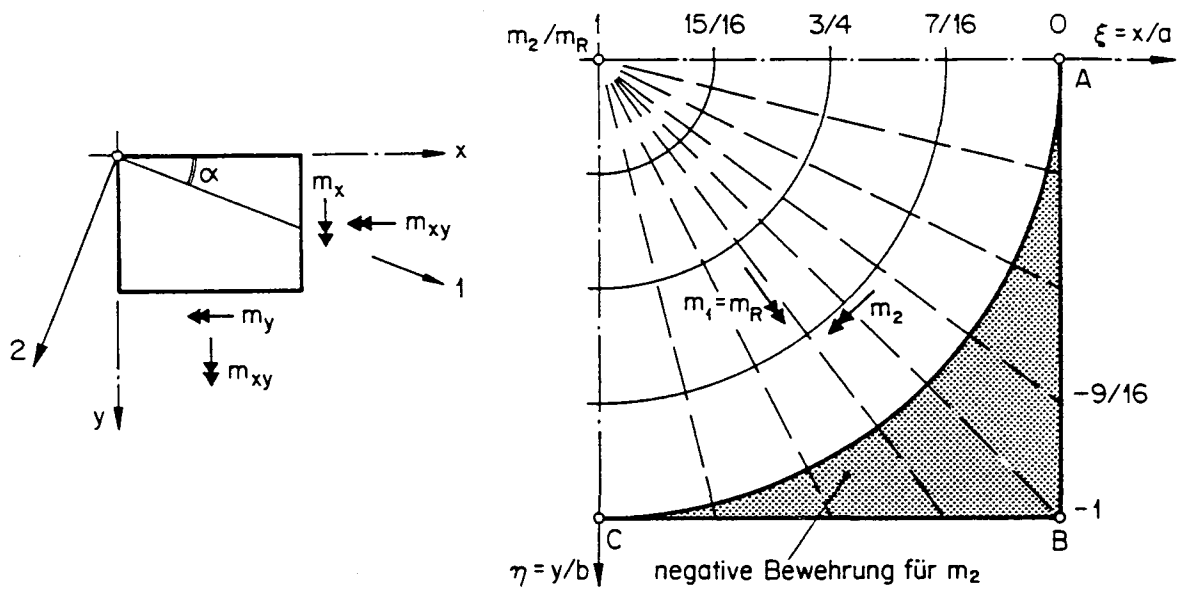


Bild 9.3: Isotrope Platte: Hauptmomentenfeld

Die Kreise sind Trajektorien für die Hauptmomente  $m_1 = m_R$ . Damit ist gezeigt, dass nicht nur in den Gelenklinien, d.h. in den Diagonalen im Fall der einfach gelagerten Rechteckplatte,  $m_R$  auftritt, sondern entlang jedem Strahl.

Die Strahlen sind Trajektorien für  $m_2$ . Die Werte  $m_2/m_R$  sind in der Figur eingetragen. Sie variieren von +1 im Zentrum bis -1 an den Ecken. Somit benötigt eine einfach gelagerte Platte, die an den Ecken gehalten ist, eine obere Bewehrung in den Ecken und zwar innerhalb des gerasterten Bereichs ABC. Das Bild 9.4 zeigt eine Perspektive des Momentenfeldes.

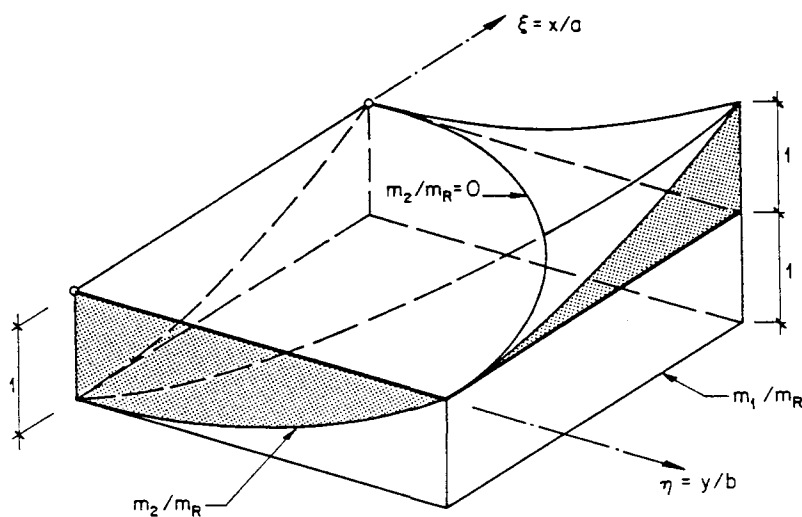


Bild 9.4: Verteilung der Hauptmomente  $m_1$  und  $m_2$

#### 4. Querkräfte und Reaktionen

Die Stützenreaktionen pro Einheitslänge der Auflagerung betragen:

$$r_x = v_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial m_x}{\partial x} + 2 \cdot \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = -4 \cdot m_R \cdot \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \text{konst.}$$

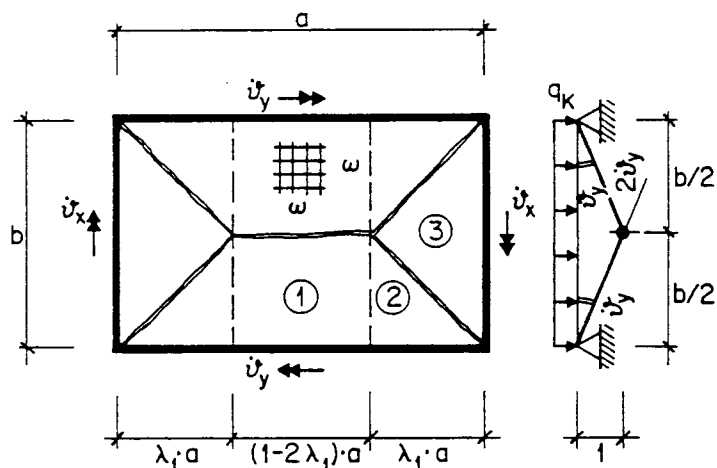
$$r_y = v_y + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial m_y}{\partial y} + 2 \cdot \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = -4 \cdot m_R \cdot \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right) = \text{konst.}$$

Die Intensitäten der Auflagerkräfte ergeben sich für das angenommene statisch zulässige Spannungsfeld als konstant und einander gleich.

Die an den Plattenecken abwärts auf die Platte wirkende konzentrierte Kraft beträgt

$$R = -2 \cdot m_{xy} \left( x = \pm \frac{a}{2}, y = \pm \frac{b}{2} \right) = 2 \cdot m_R$$

## B. Kinematische Methode



### 1. Mechanismus

- Mechanismus wie in Bild 9.5  
eingezeichnet

- Rotationen:  $\dot{\varphi}_x = \frac{1}{\lambda_1 \cdot a}$

$$\dot{\varphi}_y = \frac{2}{b}$$

Bild 9.5:

### 2. Leistungen

- Leistung der äusseren Kräfte, Gl. (9.3):

$$L_a = q_K \cdot \underbrace{\left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot b \cdot (1-2\lambda_1) \cdot a \right)}_1 + 4 \cdot \underbrace{\left( \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \lambda_1 \cdot a \right)}_2 + 2 \cdot \underbrace{\left( \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot b \cdot \lambda_1 \cdot a \right)}_3$$

$$L_a = q_K \cdot a \cdot b \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \lambda_1 \right)$$

- Leistung der inneren Kräfte, Gl. (9.4):

$$- L_i = \frac{1}{\lambda_1 \cdot a} \cdot m_R \cdot b \cdot 2 + 2 \cdot \frac{2}{b} \cdot m_R \cdot a$$

$$- L_i = 2 \cdot m_R \cdot \left( \frac{b}{\lambda_1 \cdot a} + 2 \cdot \frac{a}{b} \right)$$

- Gleichsetzen der Leistungen:

$$q_K = 8 \cdot \frac{m_R}{b^2} \cdot \frac{6 \cdot \alpha^2 \cdot \lambda_1 + 3}{6 \cdot \alpha^2 \cdot \lambda_1 - 4 \cdot \alpha^2 \cdot \lambda_1^2} \quad \text{mit } \alpha = \frac{a}{b}$$

### 3. Minimum

Der Parameter wird aus der Minimalbedingung für den oberen Grenzwert der Traglast ermittelt:

$$\frac{\partial q_K}{\partial \lambda_1} = 8 \cdot \frac{m_R}{b^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \left\{ \frac{f_1(\lambda_1)}{f_2(\lambda_1)} \right\} = 8 \cdot \frac{m_R}{b^2} \cdot \frac{f_1' \cdot f_2 - f_1 \cdot f_2'}{f_2^2}$$

$$\frac{\partial q_K}{\partial \lambda_1} = 0 ; \quad \text{daraus folgt: } f_1' f_2 - f_1 f_2' = 0 ; \quad \frac{f_1'}{f_2'} = \frac{f_1}{f_2}$$



Es ergibt sich die quadratische Gleichung

$$\alpha^2 \cdot \lambda_1^2 + \lambda_1 - \frac{3}{4} = 0$$

Deren Lösung ist

$$\lambda_{1K} = \frac{1}{2 \cdot \alpha^2} \cdot (\sqrt{1 + 3 \cdot \alpha^2} - 1) \quad (9.11)$$

$$q_K = 8 \cdot \frac{m_R}{b^2} \cdot \frac{f_1}{f_2} = 8 \cdot \frac{m_R}{b^2} \cdot \frac{f_1'}{f_2'}$$

$$q_K = 8 \cdot \frac{m_R}{b^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{3} \cdot \lambda_{1K}} \quad (9.12)$$

### Grenzfälle

- quadratische Platte:

$$\alpha = 1, \quad \lambda_{1K} = 0.50$$

$$q_K = 24 \cdot \frac{m_R}{b^2}$$

- unendlich langer Plattenstreifen:

$$\alpha = \infty, \quad \lambda_{1K} \rightarrow 0$$

$$q_K = 8 \cdot \frac{m_R}{b^2}$$

### Graphische Darstellung

Das Bild zeigt die graphische Darstellung der statischen und kinematischen Lösungen für die Grenzlast einfach gelagerter isotroper Platten.

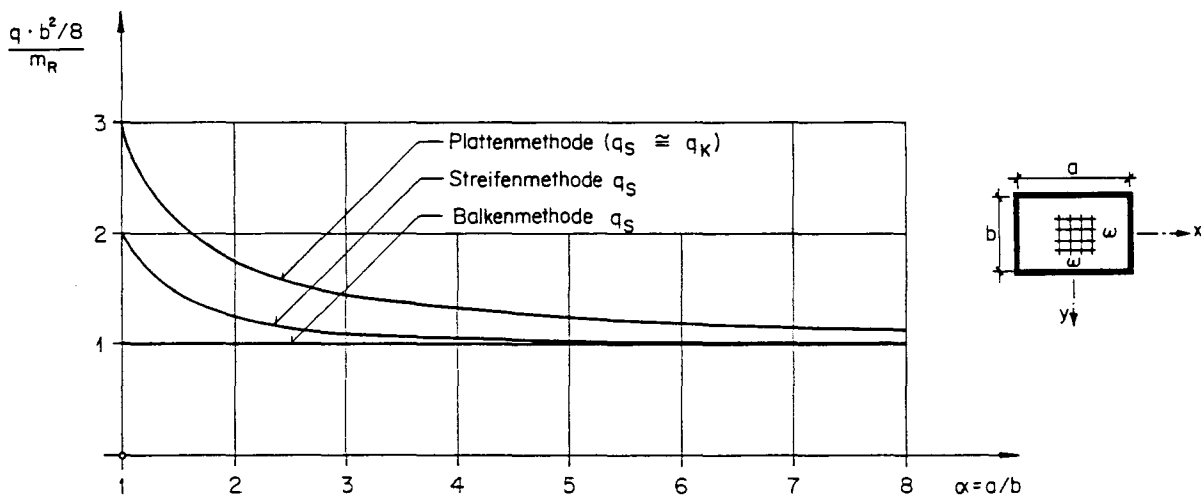
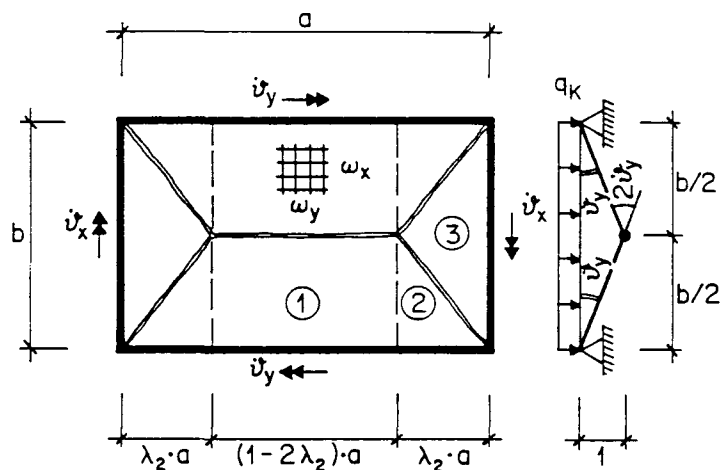


Bild 9.6

9.4.2 Beispiel 2: Gleichmässig belastete rechteckige orthotrope Platte mit frei drehbar gestützten Rändern



Gegeben:

- Geometrie:  $a, b, h, d$
- Belastung: gleichmässig verteilt
- Biegesteifigkeit: orthotrop

$$m_{xR} = k_1 \cdot m_R, \quad m_{yR} = m_R, \quad k_1 \leq 1,$$

$k_1$  = Orthotropiekoeffizient

Gesucht:

oberer Grenzwert  $q_K$

Bild 9.7

1. Mechanismus

Wegen der Symmetrie der Stützung und Belastung hat der Mechanismus eine symmetrische Form (Bild 9.7).

Rotationen:

$$\dot{\varphi}_x = \frac{1}{\lambda_2 \cdot a}, \quad \dot{\varphi}_y = \frac{2}{b}$$

2. Leistungen

- Leistung der äusseren Kräfte, Gl. (9.3):

$$L_a = q_K \cdot a \cdot b \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \lambda_2 \right) \quad \text{ähnlich der isotropen Platte}$$

- Leistung der inneren Kräfte, Gl. (9.4):

$$\begin{aligned} -L_i &= \frac{1}{\lambda_2 \cdot a} \cdot k_1 \cdot m_R \cdot b \cdot 2 + 2 \cdot \frac{2}{b} \cdot m_R \cdot a \\ &= 2 \cdot m_R \cdot \left( k_1 \cdot \frac{b}{\lambda_2 \cdot a} + 2 \cdot \frac{a}{b} \right) \end{aligned}$$

- Gleichsetzen der Leistungen:

$$q_K = 8 \cdot \frac{m_R}{b^2} \cdot \frac{6 \cdot \alpha^2 \cdot \lambda_2 + 3 \cdot k_1}{6 \cdot \alpha^2 \cdot \lambda_2 - 4 \cdot \alpha^2 \cdot \lambda_2^2} \quad \text{mit } \alpha = \frac{a}{b}$$

3. Minimum

Der Parameter  $\lambda_2$  wird analog  $\lambda_1$  ermittelt.

$$\frac{\partial q_K}{\partial \lambda_2} = 0$$

Es ergibt sich die quadratische Gleichung

$$\alpha^2 \cdot \lambda_2^2 + k_1 \cdot \lambda_2 - \frac{3}{4} \cdot k_1 = 0$$

Deren Lösung ist

$$\lambda_{2K} = \frac{k_1}{2 \cdot \alpha^2} \left( \sqrt{1 + \frac{3 \cdot \alpha^2}{k_1}} - 1 \right)$$

Mit der Einführung von  $\beta^2 = \alpha^2/k_1$  werden der Wert  $\lambda_{2K}$  sowie die Grenzlast eine Funktion eines einzigen Parameters

$$\lambda_{2K} = \frac{1}{2 \cdot \beta^2} \cdot (\sqrt{1 + 3 \cdot \beta^2} - 1) \quad \text{mit } \beta > 1 \quad (9.13)$$

$$q_K = 8 \cdot \frac{m_R \cdot f_1}{b^2 \cdot f_2} = 8 \cdot \frac{m_R \cdot f_1'}{b^2 \cdot f_2'}$$

$$q_K = 8 \cdot \frac{m_R}{b^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{3} \cdot \lambda_{2K}} \quad (9.14)$$

### Grenzfall

- isotrope quadratische Platte:

$$k_1 = 1, \quad \alpha = 1, \quad \beta^2 = \alpha^2 = 1, \quad \lambda_{2K} = 0.50$$

$$q_K = 24 \cdot \frac{m_R}{b^2}$$

### Graphische Darstellung

Das Bild 9.8 zeigt die graphische Darstellung der Gleichungen (9.13) und (9.14).

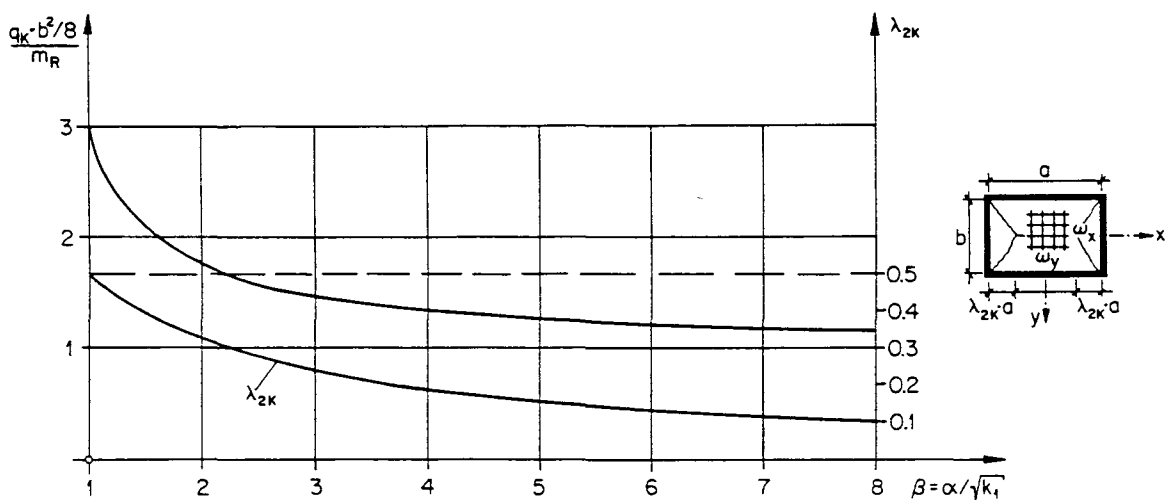


Bild 9.8: Grenzlast einer einfach gelagerten orthotropen Platte

Im Bild 9.9 ist die graphische Darstellung des "optimalen" Orthotropiekoeffizienten in Funktion von  $\alpha$  ersichtlich. Dies wurde von SAWCZUK [9.2] durch Variation von  $k_1$  ermittelt.

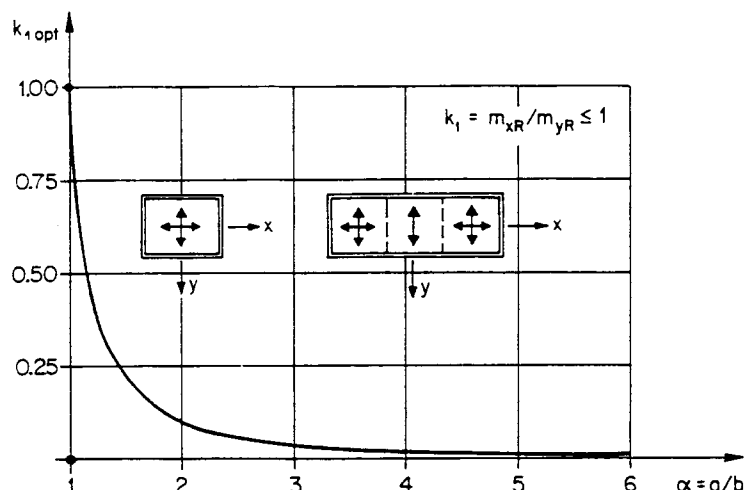
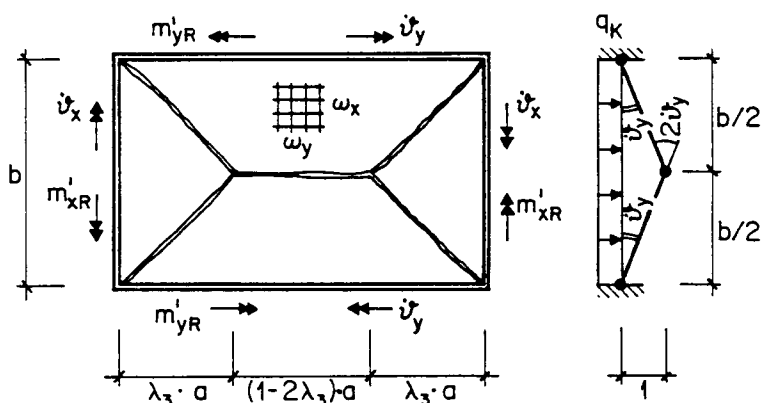


Bild 9.9: Wirtschaftliche Orthotropie (SAWCZUK)

9.4.3 Beispiel 3: Gleichmässig belastete rechteckige orthotrope Platte mit eingespannten Rändern



Gegeben:

- Geometrie:  $a, b, h, d$
- Belastung: gleichmässig verteilt
- Biegesteifigkeiten:
  - positiv  $m_{xR}, m_{yR}$
  - negativ  $m'_{xR}, m'_{yR}$

Gesucht:

oberer Grenzwert  $q_K$

Bild 9.10

Annahme:

Die an einander gegenüberliegenden Seiten wirkenden Momente sind gleich gross. Daraus folgen folgende Orthotropiekoeffizienten:

$$\frac{m_{xR}}{m_{yR}} = k_1 \quad ; \quad \frac{m'_{xR}}{m'_{yR}} = k'_1 \quad ; \quad \frac{m'_{xR}}{m_{xR}} = k'_x \quad ; \quad \frac{m'_{yR}}{m_{yR}} = k'_y$$

Bezugswert  $m_{yR} = m_R$

1. Mechanismus

Aus den Symmetriebedingungen der Geometrie und der Bewehrung folgt eine symmetrische Fließgelenkfigur.

Rotationen:

$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{1}{\lambda_3 \cdot a} \quad , \quad \dot{\varepsilon}_y = \frac{2}{b}$$

## 2. Leistungen

- Leistung der äusseren Kräfte, Gl. (9.3):

$$L_a = q_K \cdot a \cdot b \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \lambda_3 \right) \quad \text{analog zum Beispiel 2}$$

- Leistung der inneren Kräfte, Gl. (9.4):

$$- L_i = 2 \cdot \left[ \underbrace{b \cdot k_1 \cdot m_R \cdot \frac{1}{\lambda_3 \cdot a} + a \cdot m_R \cdot \frac{2}{b}}_{\text{positive Momente}} + \underbrace{b \cdot k_1 \cdot k'_x \cdot m_R \cdot \frac{1}{\lambda_3 \cdot a} + a \cdot k'_y \cdot m_R \cdot \frac{2}{b}}_{\text{negative Momente}} \right]$$

$$- L_i = 2 \cdot m_R \cdot \left[ \frac{k_1}{\lambda_3 \cdot a} \cdot (1 + k'_x) + 2 \cdot \alpha \cdot (1 + k'_y) \right] \quad \text{mit } \alpha = \frac{a}{b}$$

- Gleichsetzen der Leistungen:

$$q_K = 8 \cdot \frac{m_R \cdot 6 \cdot \alpha^2 \cdot \lambda_3 \cdot (1 + k'_y) + 3 \cdot k_1 \cdot (1 + k'_x)}{b^2 \cdot 6 \cdot \alpha^2 \cdot \lambda_3 - 4 \cdot \alpha^2 \cdot \lambda_3^2}$$

## 3. Minimum

Der Parameter  $\lambda_3$  wird analog zu  $\lambda_1$  ermittelt.

$$\frac{\partial q_K}{\partial \lambda_3} = 0$$

Es ergibt sich die quadratische Gleichung

$$\alpha^2 \cdot \lambda_3^2 + k_1 \cdot \frac{(1 + k'_x)}{(1 + k'_y)} \cdot \lambda_3 - \frac{3}{4} \cdot k_1 \cdot \frac{(1 + k'_x)}{(1 + k'_y)} = 0$$

oder mit Einsetzen von  $k_0 = \frac{1 + k'_x}{1 + k'_y} < 1$

Deren Lösung ist:

$$\lambda_{3K} = \frac{k_0 \cdot k_1}{2 \cdot \alpha^2} \cdot \left( \sqrt{1 + \frac{3 \cdot \alpha^2}{k_0 \cdot k_1}} - 1 \right)$$

Mit Einführen von  $\beta^{*2} = \alpha^2/k_0 \cdot k_1$  wird der Wert  $\lambda_{3K}$  eine Funktion eines Parameters.

$$\lambda_{3K} = \frac{1}{2 \cdot \beta^{*2}} \cdot (\sqrt{1 + 3 \cdot \beta^{*2}} - 1) \quad \text{mit } \beta^* > 0 \quad (9.15)$$

$$q_K = 8 \cdot \frac{m_R}{b^2} \cdot (1 + k'_y) \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{3} \cdot \lambda_{3K}} \quad (9.16)$$

### Grenzfälle

- orthotrope Platte mit einfach gelagerten Rändern:

$$k'_x = k'_y = 0$$

daraus folgt:

$$k_0 = 1, \quad \beta^{*2} = \beta^2, \quad \lambda_{3K} = \lambda_{2K}$$

$$q_K = 8 \cdot \frac{m_R}{b^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{3} \cdot \lambda_{2K}} \quad (9.14)$$

- gleiche Orthotropie der negativen und positiven Bewehrung:

$$k'_x = k'_y = k'$$

daraus folgt:

$$k_0 = 1, \quad \lambda_{3K} = \lambda_{2K}$$

$$q_K = 8 \cdot \frac{m_R}{b^2} \cdot (1 + k') \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{3} \cdot \lambda_{2K}} \quad (9.17)$$

- isotrope allseitig eingespannte quadratische Platte:

$$\alpha = 1, \quad k_1 = 1$$

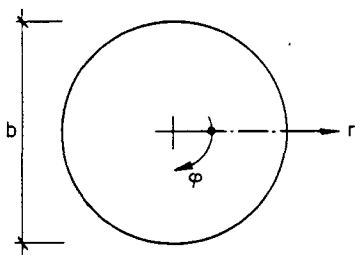
daraus folgt:

$$\lambda_{2K} = \lambda_{1K} = 0.50$$

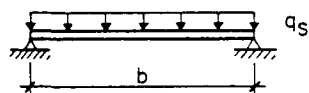
$$q_K = 24 \cdot \frac{m_R}{b^2} \cdot (1 + k') \geq 42.88 \cdot \frac{m_R}{b^2} \quad (9.18)$$

bester oberer Grenzwert, MANSFIELD (1957), wenn  $k' = 1$

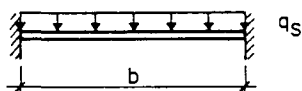
#### 9.4.4 Beispiel 4: Gleichmässig belastete isotrope Kreisplatte mit frei gelagerten oder eingespannten Rändern



Mit einfacher Lagerung



Mit Einspannung



#### Gegeben:

- Geometrie:  $b, h, d$
- Belastung: gleichmässig verteilt
- Lagerung: einfach gelagert oder eingespannt
- Biegewiderstände:

. positiv  $m_{rR} = m_{\varphi R} = m_R$

. negativ  $m'_{rR} = m'_{\varphi R} = k_1 \cdot m_R$

#### Gesucht:

Grenzwerte der Traglast

Bild 9.11

### A. Statische Methode

#### 1. Ansatz

- konstante Verteilung des positiven tangentialen Momentes  $m_{\varphi}$

$$m_{\varphi} = \text{konstant}$$

#### 2. Gleichgewicht

- Differentialgleichung des Gleichgewichtes in Zylinderkoordinaten

$$\frac{\partial}{\partial r}(r \cdot v_r) + q \cdot r = 0 \quad (9.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r \cdot m_r) - m_{\varphi} - r \cdot v_r = 0 \quad (9.20)$$

Wird die Gl. (9.19) integriert, ergibt sich

$$r \cdot v_r + q \cdot \frac{r^2}{2} + C_1 = 0$$

$$2 \cdot \pi \cdot r \cdot v_r = - 2 \cdot \pi \cdot q \cdot \frac{r^2}{2} + C_1', \quad \text{somit } C_1' = 0$$

$$v_r = - q \cdot \frac{r}{2} \quad (9.21)$$

Wird  $v_r$  in Gl. (9.20) durch  $-q \cdot r/2$  (Gl. (9.21)) ersetzt und die Gleichung integriert, ergibt sich

$$r \cdot m_r - r \cdot m_\varphi + q \cdot \frac{r^3}{6} + C_2 = 0$$

Aus  $r = 0$  folgt  $C_2 = 0$

$$m_r - m_\varphi + q \cdot \frac{r^2}{6} = 0 \quad (9.22)$$

### 3. Fließbedingung und Traglast

- Fließbedingung:

$$(m_R - m_r) \geq 0$$

$$(m_R - m_\varphi) \geq 0$$

$m_r, m_\varphi = \text{Hauptmomente}$

- Einfach gelagerte Kreisplatte:

statische Randbedingung

$$m_r\left(\frac{b}{2}\right) = 0$$

$$q_S = 24 \cdot \frac{m_R}{b^2} \quad (9.23)$$

Momentenfeld

$$m_\varphi = m_R$$

$$m_r = m_R \cdot \left(1 - 4 \cdot \frac{r^2}{b^2}\right) \leq m_R \quad (9.24)$$

- Eingespannte Kreisplatte:

statische Randbedingung

$$m_r\left(\frac{b}{2}\right) = -k_1 \cdot m_R$$

$$q_S = 24 \cdot \frac{m_R}{b^2} \cdot (1 + k_1) \quad (9.25)$$

Momentenfeld

$$m_\varphi = m_R$$

$$m_r = m_R \cdot \left(1 - 4 \cdot (1 + k_1) \cdot \frac{r^2}{b^2}\right) ; \quad -k_1 \cdot m_R \leq m_r \leq m_R \quad (9.26)$$



B. Kinematische Methode

1. Mechanismus

Als Mechanismus bildet sich ein Kegel mit radialen Gelenklinien und einer negativen Gelenklinie entlang dem Rand aus (Bild 9.12).

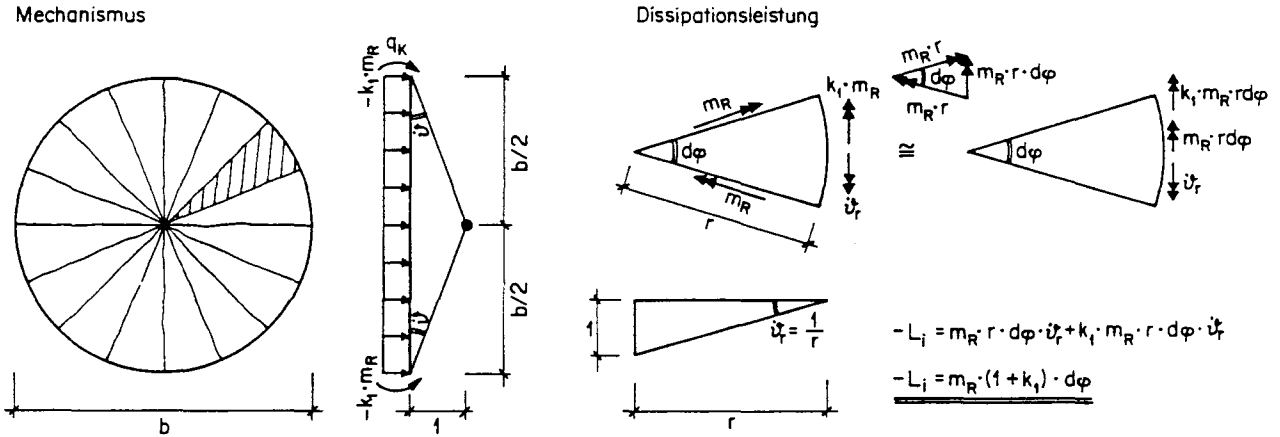


Bild 9.12: Kreisplatte; Mechanismus

2. Leistungen

- Leistung der äusseren Kräfte, Gl. (9.3):

$$L_a = q_K \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{b^2}{4} = q_K \cdot \frac{1}{12} \cdot \pi \cdot b^2$$

- Leistung der inneren Kräfte, Gl. (9.4):

eingespannte Kreisplatte:

$$-L_i = m_R \cdot (1 + k_1) \cdot 2 \cdot \pi$$

- Gleichsetzen der Leistungen:

$$q_K = 24 \cdot \frac{m_R}{b^2} \cdot (1 + k_1) \tag{9.25}$$

- Grenzfall:

frei aufgelagerte Kreisplatte:

$$k_1 = 0$$

$$q_K = 24 \cdot \frac{m_R}{b^2} \tag{9.23}$$

Die Gleichungen (9.23) und (9.25) stellen somit die vollständigen Lösungen im Sinn der Plastizitätstheorie dar.

Die Momentenfelder sind im Bild 9.13 dargestellt.

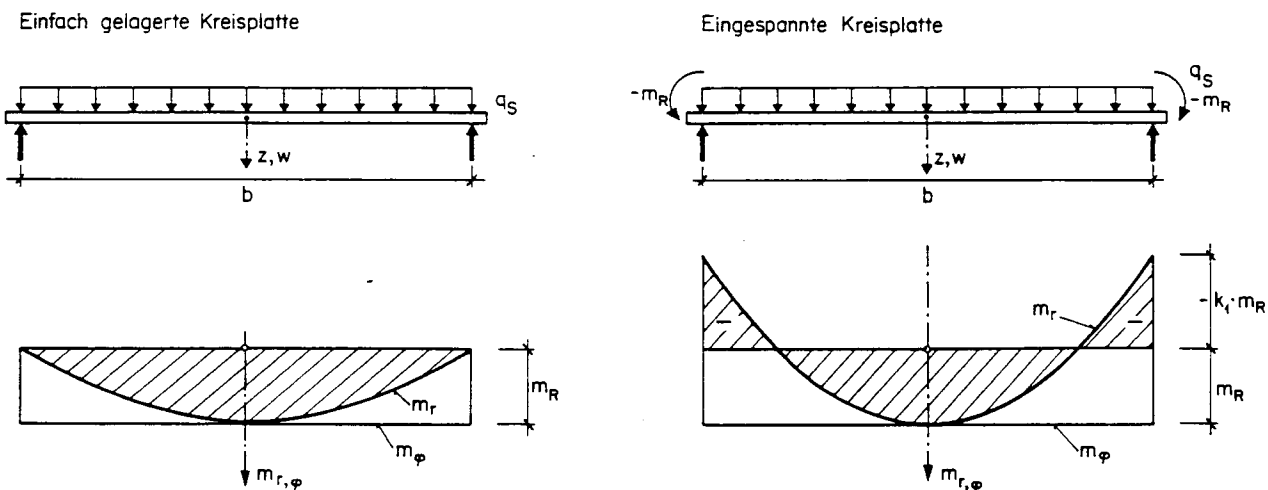
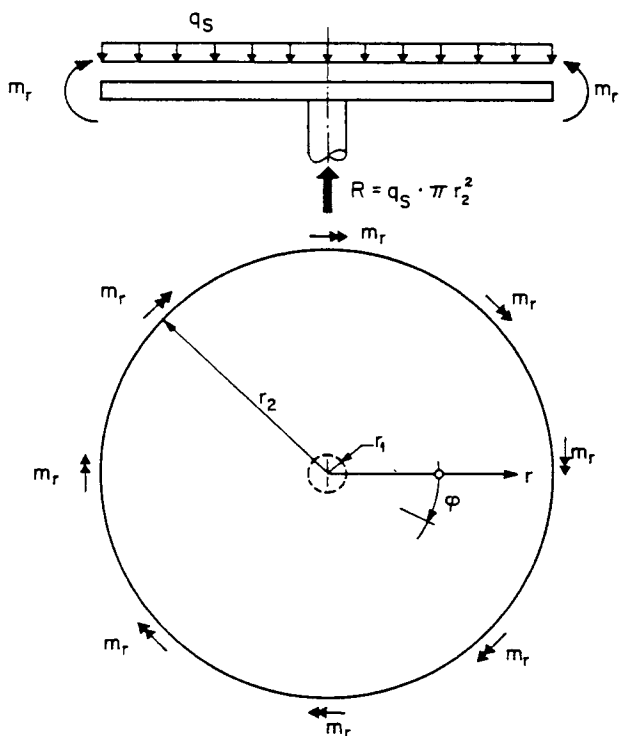


Bild 9.13

9.4.5 Beispiel 5: Gleichmässig belastete Kreisplatte mit einer Stützenlagerung in der Mitte



Gegeben:

- Geometrie:  $r_1, r_2, d, h$
- Belastung: gleichmässig verteilt
- Lagerung : Stütze mit  $r = r_1$
- Biege­widerstände:
  - . positiv  $m_R$
  - . negativ  $k \cdot m_R$

Gesucht:

Grenzwerte der Traglast

Annahme:

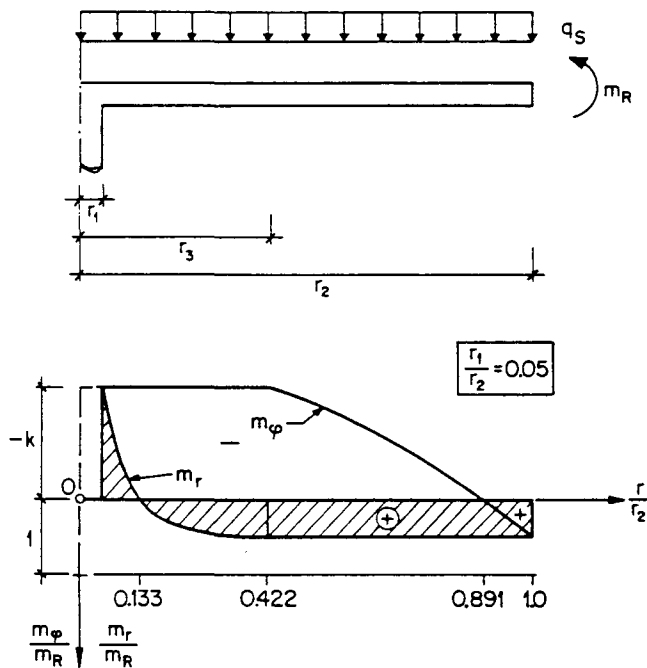
Die Duktilität der Kreisplatte ist so, dass die angenommene Umlagerung der inneren Schnittkräfte gewährleistet ist (z.B. Durchstanzbewehrung).

Bild 9.14

## A. Statische Methode

### 1. Ansätze

Die Biegemomente  $m_r$  und  $m_\varphi$  werden streckenweise als konstant angenommen (Bild 9.15).



- statische Randbedingungen:

$$r = r_1, \quad m_r = m_\varphi = -k_1 \cdot m_R$$

$$r = r_3, \quad m_r = m_R$$

$$m_\varphi = -k_1 \cdot m_R$$

$$r = r_2, \quad m_r = m_\varphi = m_R$$

Bild 9.15: Statische Lösung

### 2. Gleichgewicht

Die Gleichgewichtsbedingungen sind im Beispiel 4 angegeben:

$$\frac{\partial}{\partial r}(r \cdot v_r) + q_S \cdot r = 0 \quad (9.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r \cdot m_r) - m_\varphi - r \cdot v_r = 0 \quad (9.20)$$

Durch Integration von Gl. (9.19) ergibt sich

$$r \cdot v_r + \frac{1}{2} \cdot q_S \cdot (r^2 - r_2^2) = 0 \quad (9.27)$$

Wird Gl. (9.27) in Gl. (9.20) eingesetzt, ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial r}(r \cdot m_r) - m_\varphi + \frac{1}{2} \cdot q_S \cdot (r^2 - r_2^2) = 0 \quad (9.28)$$

Bereich  $r_1 \leq r \leq r_3$ :

Ansatz

$$m_\varphi = -k \cdot m_R \quad (9.29)$$

Gleichgewicht

Durch Einsetzen von Gl. (9.29) in Gl. (9.28) und Integrieren ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial r}(r \cdot m_r) + k \cdot m_R + \frac{1}{2} \cdot q_S \cdot (r^2 - r_2^2) = 0$$

$$r \cdot m_r + k \cdot m_R \cdot r + \frac{1}{2} \cdot q_S \cdot \left( \frac{r^3}{3} - r_2^2 \cdot r \right) + C = 0$$

C wird aus der statischen Randbedingung für  $m_r$  in  $r_3$  ermittelt.

$$r_3 \cdot m_R + k \cdot m_R \cdot r_3 + \frac{1}{2} \cdot q_S \cdot \left( \frac{r_3^3}{3} - r_2^2 \cdot r_3 \right) + C = 0$$

Aus Gl. (9.28) folgt für  $r = r_3$ :

$$m_R + k \cdot m_R = -\frac{1}{2} \cdot q_S \cdot (r_3^2 - r_2^2)$$

$$\text{und } C = \frac{1}{2} \cdot q_S \cdot \frac{2}{3} \cdot r_3^3$$

$$m_r = -k \cdot m_R + \frac{1}{2} \cdot q_S \cdot \left( r_2^2 - \frac{r^2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{r_3^3}{r} \right) \quad (9.30)$$

Der Radius  $r_3$  wird aus der statischen Randbedingung in  $r = r_1$  bestimmt:

$$m_r(r_1) = -k \cdot m_R$$

$$r_2^2 - \frac{r_1^2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{r_3^3}{r_1} = 0$$

$$\left( \frac{r_3}{r_2} \right)^3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{r_1}{r_2} - \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^3$$

$$\frac{r_3}{r_2} = \left( \frac{3}{2} \cdot \frac{r_1}{r_2} - \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^3 \right)^{1/3} \approx \left( \frac{3}{2} \cdot \frac{r_1}{r_2} \right)^{1/3} \quad (9.31)$$

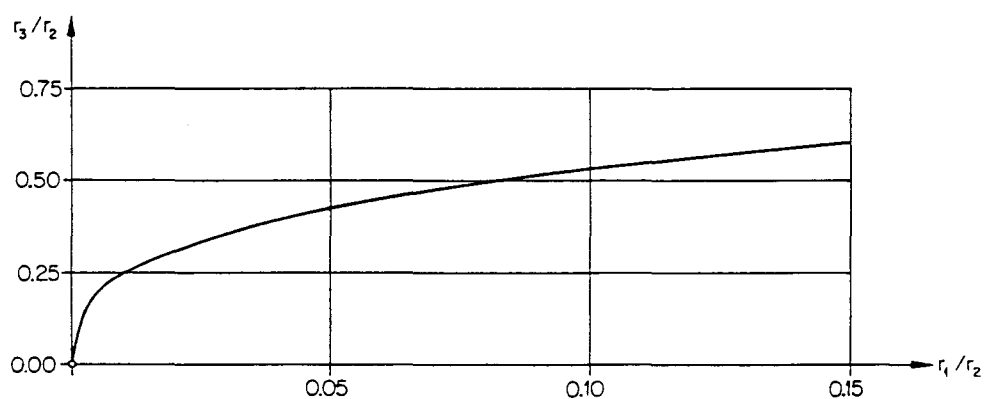


Bild 9.16: Kritischer radialer Abstand  $r_3$ ; graphische Darstellung der Gl. (9.31)

Bereich  $r_3 \leq r \leq r_2$ :

Ansatz

$$m_r = m_R \quad (9.32)$$

Gleichgewicht

Wird Gl. (9.32) in Gl. (9.28) eingesetzt, ergibt sich durch Integrieren

$$m_\varphi = m_R + \frac{1}{2} \cdot q_S \cdot (r^2 - r_2^2) \quad (9.33)$$

Die Grenzlast  $q_S$  wird aus der statischen Randbedingung für  $m_\varphi$  in  $r = r_3$  ermittelt.

$$m_\varphi(r_3) = -k \cdot m_R = m_R + \frac{1}{2} \cdot q_S \cdot (r_3^2 - r_2^2) \quad (9.34)$$

$$q_S = 2 \cdot \frac{m_R}{r_2^2} \cdot (1 + k) \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^2}$$

### 3. Momenten-Nullstellen

Wird Gl. (9.34) in Gl. (9.30) und Gl. (9.33) eingesetzt, können die Momenten-Nullstellen der radialen und tangentialen Momente berechnet werden:

- radiale Momente  $m_r$ :

$$\left(\frac{r}{r_2}\right)^3 - 3 \cdot \left\{1 - \frac{k}{1+k} \cdot \left[1 - \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^2\right] \cdot \frac{r}{r_2} + 2 \cdot \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^3\right\} = 0 \quad (9.35)$$

- tangentiale Momente  $m_\varphi$ :

$$\left(\frac{r}{r_2}\right)^2 + \frac{1}{1+k} \cdot \left[1 - \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^2\right] - 1 = 0 \quad (9.36)$$

## B. Kinematische Methode

### 1. Mechanismus

Als Mechanismus wird angenommen, dass sich der kreisringförmige Plattenanteil als starrer Teil mit konstanter Geschwindigkeit 1 bewegt (Bild 9.17).

Rotation:

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{r_3 - r_1}$$

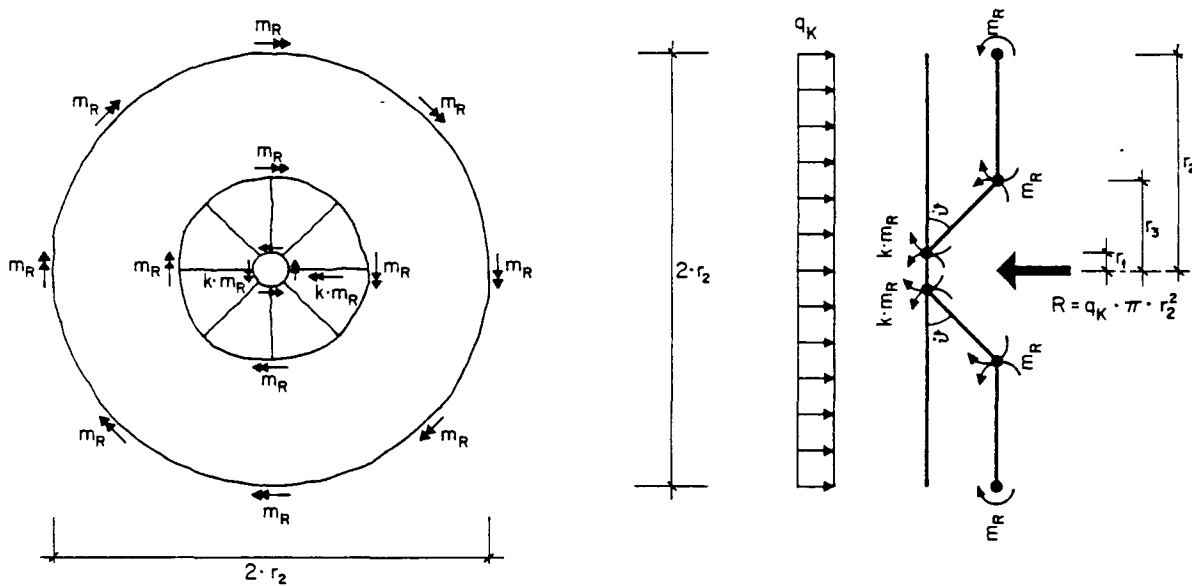


Bild 9.17: Achsialsymmetrischer Mechanismus

### 2. Leistungen

- Leistung der äusseren Kräfte, (Gl. 9.3):

$$L_a = q_K \cdot \pi \cdot r_2^2 \cdot 1 - q_K \cdot \pi \cdot \frac{1}{3} \cdot (r_3^2 + r_3 \cdot r_1 + r_1^2)$$

$$L_a = q_K \cdot \pi \cdot \left( r_2^2 - \frac{r_3^2}{3} - \frac{r_3 \cdot r_1}{3} - \frac{r_1^2}{3} \right)$$

- Leistung der inneren Kräfte, (Gl. 9.4):

$$-L_i = 2 \cdot \pi \cdot m_R \cdot \frac{r_3}{r_3 - r_1} + 2 \cdot \pi \cdot k \cdot m_R \cdot \frac{r_3 - r_1}{r_3 - r_1} + 2 \cdot \pi \cdot k \cdot m_R \cdot \frac{r_1}{r_3 - r_1}$$

$$-L_i = 2 \cdot \pi \cdot m_R \cdot \frac{r_3}{r_3 - r_1} \cdot (1 + k)$$

- Gleichsetzen der Leistungen:

$$q_K = 2 \cdot m_R \cdot (1 + k) \cdot \frac{3 \cdot r_3}{3 \cdot r_2^2 \cdot r_3 - r_3^3 - 3 \cdot r_1 \cdot r_2^2 + r_1^3}$$

3. Minimum

Der Radius  $r_3$  wird aus der Minimalbedingung für die Traglast ermittelt.

$$\frac{\partial q_K}{\partial r_3} = 2 \cdot m_R \cdot (1 + k) \cdot \frac{\partial}{\partial r_3} \left\{ \frac{f_1(r_3)}{f_2(r_3)} \right\}$$

Aus dieser Bedingung ergibt sich die gleiche kubische Gleichung wie bei der statischen Lösung.

$$r_3^3 - \frac{3}{2} \cdot r_1 \cdot r_2^2 + \frac{r_1^3}{2} = 0$$

$$\frac{r_3}{r_2} = \left( \frac{3}{2} \cdot \frac{r_1}{r_2} - \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^3 \right)^{1/3} \approx \left( \frac{3}{2} \cdot \frac{r_1}{r_2} \right)^{1/3} \quad (9.31)$$


---

4. Oberer Grenzwert der Traglast

Aus der Minimalbedingung  $f'_1 \cdot f_2 - f_1 \cdot f'_2 = 0$  wird wie bei den anderen Beispielen die folgende Beziehung abgeleitet:

$$\frac{f'_1}{f'_2} = \frac{f_1}{f_2}$$

$$q_K = 2 \cdot m_R \cdot (1 + k) \cdot \frac{f_1}{f_2} = 2 \cdot m_R \cdot (1 + k) \cdot \frac{f'_1}{f'_2}$$

$$q_K = 2 \cdot \frac{m_R}{r_2^2} \cdot (1 + k) \cdot \frac{1}{1 - \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^2} \quad (9.37)$$


---

Durch Vergleich der Gleichungen (9.34) und (9.37) ergibt sich, dass

$$q_S = q_K = q_R$$

ist. Dies stellt die vollständige Lösung im Sinn der Plastizitätstheorie dar.

### 9.4.6 Beispiel 6 Gleichmässig belastetes quadratisches Feld einer Flachdecke

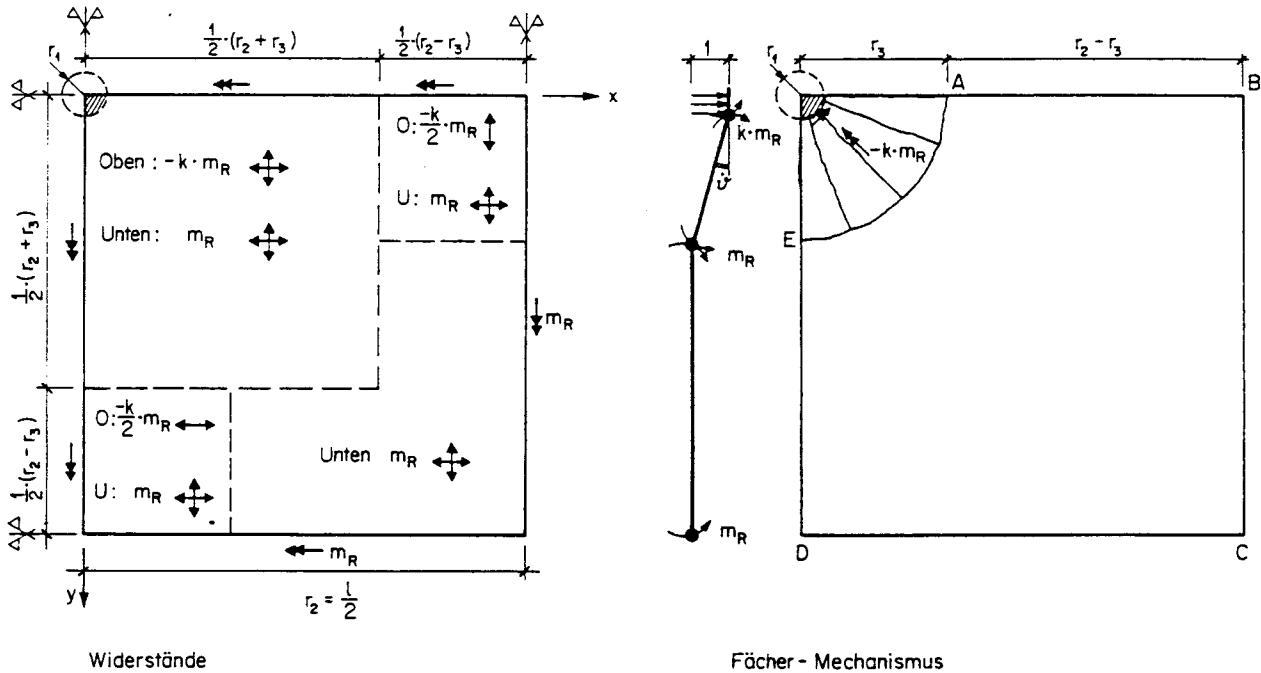


Bild 9.18

Gegeben:

- Geometrie:  $l = 2 \cdot r_2$ ,  $d$ ,  $h$ ,  $r_1$
- Belastung: gleichmässig verteilt
- Lagerung: Stütze mit  $r = r_1$
- Biege widerstände:
  - . positiv  $m_R$
  - . negativ  $k \cdot m_R$  bzw.  $\frac{1}{2} \cdot k \cdot m_R$

Gesucht:

Obere Grenzwerte der Traglast

Annahme:

Die Duktilität der Flachdecke ist derart, dass die angenommene Umlagerung der inneren Schnittkräfte gewährleistet ist.

Kinematische MethodeLösung I: Fächermechanismus1. Mechanismus

Als Mechanismus wird angenommen, dass sich der Plattenanteil A B C D E als starrer Teil mit konstanter Geschwindigkeit 1 bewegt (Bild 9.18).

$$\text{Rotation } \dot{\varphi} = \frac{1}{r_3 - r_1}$$



## 2. Leistungen

- Leistung der äusseren Kräfte, Gl. (9.3):

$$L_a = q_K \cdot 4 \cdot r_2^2 - q_K \cdot \pi \cdot \frac{1}{3} \cdot (r_3^2 + r_3 \cdot r_1 + r_1^2)$$

$$L_a = q_K \cdot (4 \cdot r_2^2 - \frac{\pi}{3} \cdot (r_3^2 + r_3 \cdot r_1 + r_1^2))$$

- Leistung der inneren Kräfte, Gl. (9.4):

$$-L_i = 2 \cdot \pi \cdot m_R \cdot \frac{r_3}{r_3 - r_1} + 2 \cdot \pi \cdot k \cdot m_R \cdot \frac{r_3 - r_1}{r_3 - r_1} + 2 \cdot \pi \cdot k \cdot m_R \cdot \frac{r_1}{r_3 - r_1}$$

$$-L_i = 2 \cdot \pi \cdot m_R \cdot \frac{r_3}{r_3 - r_1} \cdot (1 + k)$$

- Gleichsetzen der Leistungen:

$$q_K = 2 \cdot \pi \cdot m_R \cdot (1+k) \cdot \frac{3 \cdot r_3}{12 \cdot r_2^2 \cdot r_3 - 12 \cdot r_1 \cdot r_2^2 - \pi \cdot r_3^2 + \pi \cdot r_1^3} \quad ($$

## 3. Minimum

Der Radius  $r_3$  wird aus der Minimalbedingung für die Grenzlast  $q_K$  ermittelt.

$$\frac{\partial q_K}{\partial r_3} = 2 \cdot \pi \cdot m_R \cdot (1+k) \cdot \frac{\partial}{\partial r_3} \left\{ \frac{f_1(r_3)}{f_2(r_3)} \right\}$$

Aus dieser Bedingung ergibt sich die folgende kubische Gleichung

$$\left(\frac{r_3}{r_2}\right)^3 - \frac{6}{\pi} \cdot \frac{r_1}{r_2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 = 0$$

$$\frac{r_3}{r_2} = \left( \frac{6}{\pi} \cdot \frac{r_1}{r_2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 \right)^{1/3} \approx \left( \frac{6}{\pi} \cdot \frac{r_1}{r_2} \right)^{1/3} \quad (9.38)$$

## 4. Oberer Grenzwert der Traglast

Analog zu den vorangehenden Beispielen ergibt sich

$$q_K = 2 \cdot \pi \cdot m_R \cdot (1+k) \cdot \frac{f_1'}{f_2'}$$

$$q_K = \frac{2 \cdot m_R}{r_2^2} \cdot (1+k) \cdot \frac{\pi}{4 - \pi \cdot \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^2}$$

$$q_K \approx \frac{2 \cdot m_R}{r_2^2} \cdot (1+k) \cdot \frac{1}{1.273 - \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^2} \quad (9.39)$$

## Lösung II: Linienmechanismus

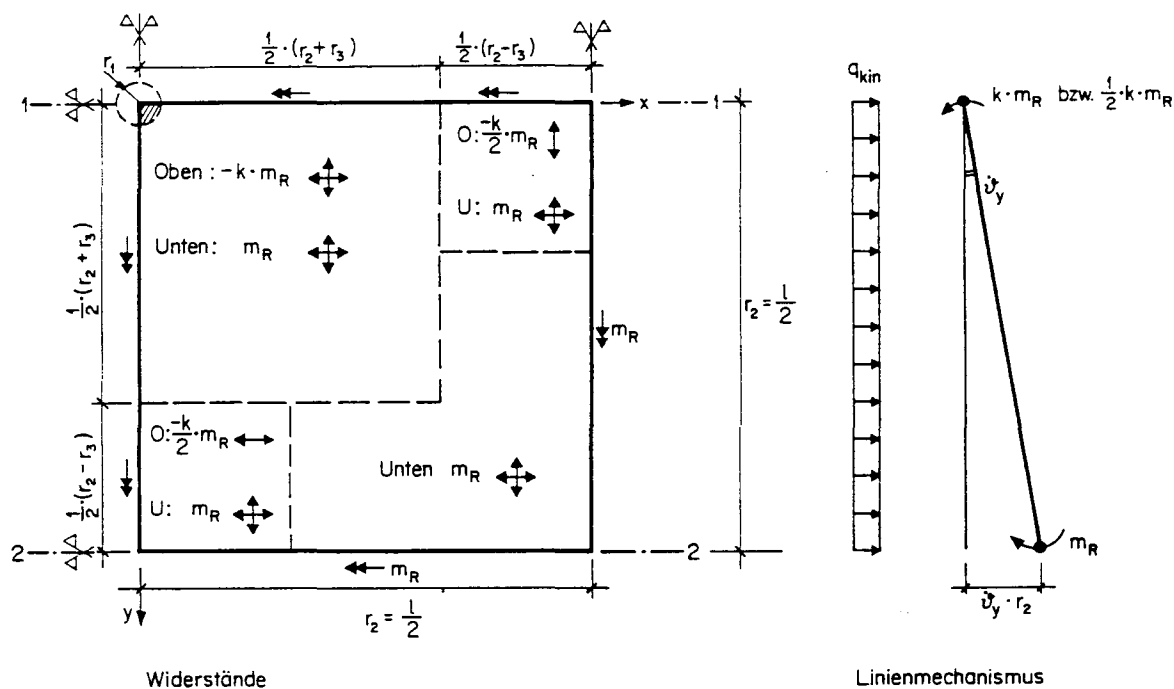


Bild 9.19: Linienmechanismus

### 1. Mechanismus

Als Mechanismus wird ein Linienmechanismus angenommen. Die negativen Fließgelenklinien liegen längs der Säulenachsen, während die positiven Fließgelenklinien in der Feldmitte verlaufen (Bild 9.19).

Rotationen:

$$\dot{\vartheta}_y = \frac{1}{r_2}$$

### 2. Leistunten

- Leistung der äusseren Kräfte, Gl. (9.3):

$$L_a = q_K \cdot \frac{1}{2} \cdot \dot{\vartheta}_y \cdot r_2 \cdot r_2 \cdot r_2$$

$$L_a = q_K \cdot \frac{1}{2} \cdot r_2^3 \cdot \dot{\vartheta}_y$$

- Leistung der inneren Kräfte, Gl. (9.4):

$$-L_i = \dot{\vartheta}_y \cdot m_R \cdot r_2 + \dot{\vartheta}_y \cdot k \cdot m_R \cdot \frac{1}{2} \cdot (r_2 + r_3) + \dot{\vartheta}_y \cdot \frac{k}{2} \cdot m_R \cdot \frac{1}{2} \cdot (r_2 - r_3)$$

$$-L_i = \dot{\vartheta}_y \cdot m_R \cdot (r_2 + \frac{3}{4} \cdot k \cdot r_2 + \frac{1}{4} \cdot k \cdot r_3)$$

- Gleichsetzen der Leistungen:

$$q_K = \frac{2 \cdot m_R}{r_2^2} \cdot \left( 1 + \frac{3}{4} \cdot k + \frac{1}{4} \cdot k \cdot \frac{r_3}{r_2} \right) \quad (9.40)$$

### 3. Minimum

Die Lage der Rotationsachse des angenommenen Mechanismus ist durch die Symmetriebedingungen eindeutig bestimmt. Somit ist die Lösung (Gl. (9.40)) minimal.

### Vergleich der Lösungen I und II

Für den Vergleich werden folgende Parameter angenommen:

$$\frac{r_1}{r_2} = 0.05 \quad ; \quad \text{aus Gl. (9.38) folgt: } \frac{r_3}{r_2} = 0.457$$

$$k = 3$$

#### a) Fächermechanismus

$$q_K = \frac{2 \cdot m_R}{r_2^2} \cdot \frac{1 + 3}{1.273 - (0.457)^2} \quad (9.39)$$

$$q_K = \frac{2 \cdot m_R}{r_2^2} \cdot 3.756$$

#### b) Linienmechanismus

$$q_K = \frac{2 \cdot m_R}{r_2^2} \cdot \left( 1 + \frac{3}{4} \cdot 3 + \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot 0.457 \right) \quad (9.40)$$

$$q_K = \frac{2 \cdot m_R}{r_2^2} \cdot 3.593$$

### LITERATUR

- [9.1] Marti P., Thürlimann B.: "Plastizität im Stahlbeton", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, 1981.
- [9.2] Sawczuk A., Jaeger T.: "Grenztragfähigkeits-Theorie der Platten", Springer Verlag Berlin, 1963.
- [9.3] Massonnet Ch., Save M.: "Calcul plastique des constructions", Centre Belgo-Luxembourgeois d'information de l'acier, Vol.1 und 2, Bruxelles, 1967.

### 10.1 Die Anwendung der Vorspannung in Platten

Im Brückenbau wird die Vorspannung seit etwa 40 Jahren mit grossem Erfolg angewendet. Gegen Ende der fünfziger Jahre wurden in den USA die ersten vorgespannten Platten im Hochbau erstellt. In der Schweiz wird die Vorspannung in Hochbauplatten erst seit etwa 10 Jahren in grösserem Umfang eingesetzt.

Heute wird die Vorspannung mit und ohne Verbund verwendet. Bei der Vorspannung mit Verbund wird der Spannstahl nach dem Spannvorgang durch Injektion von Zementsuspension mit dem Beton in Verbund gebracht. Bei den heute verwendeten Systemen der Vorspannung ohne Verbund werden Monolitzen, bestehend aus Litze, Dauerkorrosionsschutzfett und Kunststoffrohr, fabrikmässig hergestellt und als Ganzes eingebaut. Nach dem heutigen Stand der Kenntnisse darf man sagen, dass mit Vorspannung mit und ohne Verbund qualitativ gleichwertige Konstruktionen erzielt werden können. Es ist jedoch auf eine richtige Berechnung und Bemessung, eine saubere konstruktive Durchbildung und eine sorgfältige Ausführung grossen Wert zu legen.

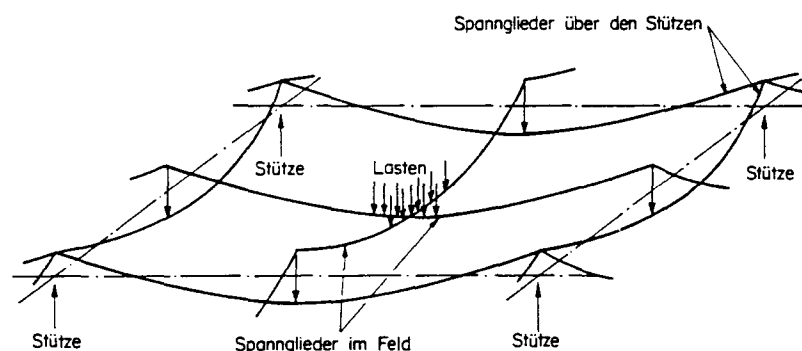


Bild 10.1: Schematische Darstellung der Lastabtragung durch Vorspannung

Im Bild 10.1 ist am Beispiel einer punktgestützten Platte dargestellt, wie man sich die Wirkungsweise der Vorspannung vorstellen kann. Die Lasten im Feldinneren werden von den Spanngliedern im Feld durch Umlenkkräfte auf die Spannglieder über den Stützen abgegeben. Diese übertragen ihrerseits die Lasten direkt auf die Stützen. Im weiteren wird bei den Anker die zur Plattenmittelebene parallele Komponente der Vorspannkraft als Scheibenkraft in den Beton eingeleitet. Die Umlenk- und die Scheibenkräfte aus Vorspannung verbessern das Tragverhalten von Platten sowohl im Gebrauchs- als auch im Bruchzustand ganz erheblich.

Die Spanngliederanordnung kann im Prinzip beliebig gewählt werden. Bei der Wahl sind jedoch statische und ausführungstechnische Aspekte zu berücksichtigen. Im allgemeinen ist es vorteilhaft, die Last auf einem möglichst kurzen Weg vom Feldinneren auf die Tragwände bzw. Stützen abzutragen. Im Bild 10.2 sind einige Beispiele der Spanngliederanordnung in umfanggelagerten und punktgestützten Platten dargestellt.

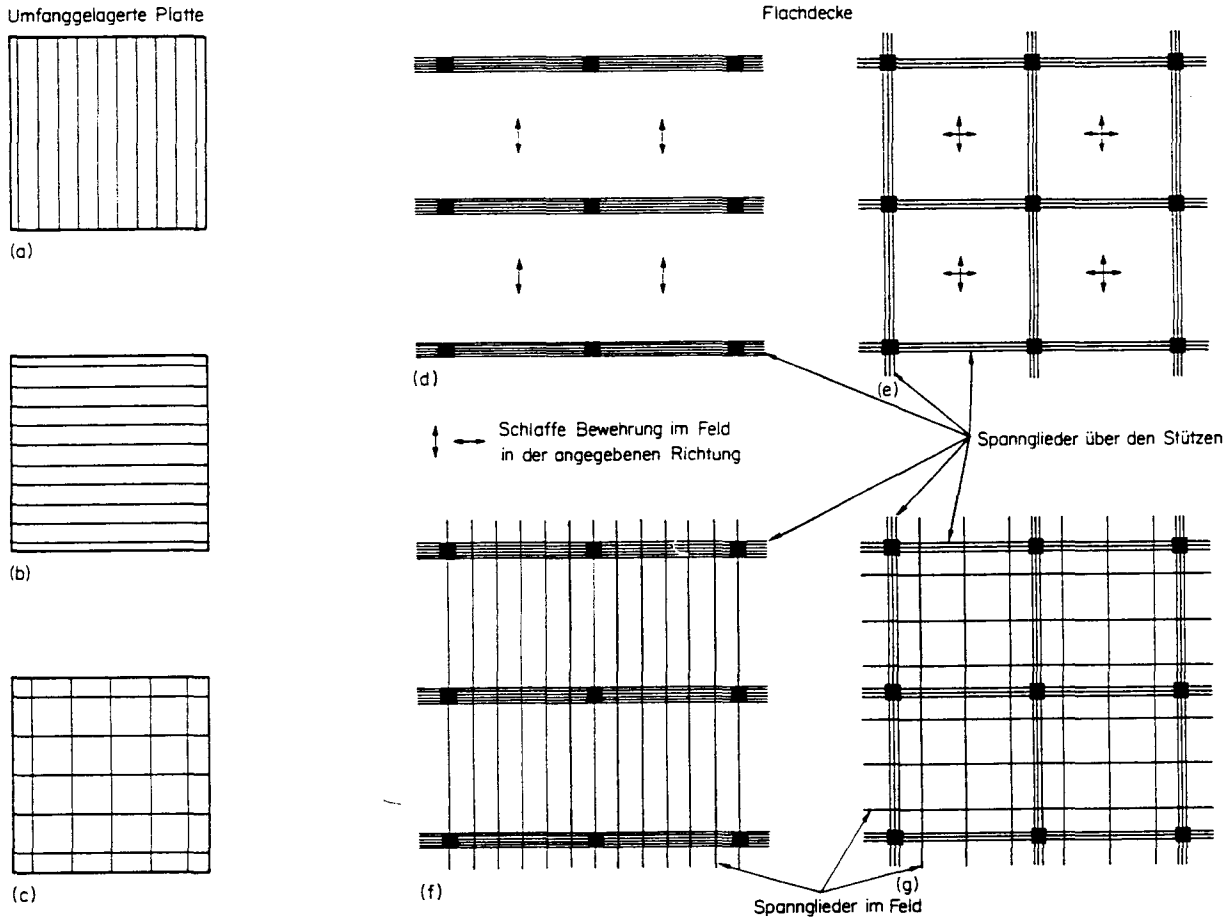


Bild 10.2: Mögliche Spanngliederanordnungen

## 10.2 Wahl der Berechnungsmethode

Schlaff bewehrte Platten und Platten mit Vorspannung mit und ohne Verbund können mit den bekannten Methoden der Elastizitäts- und Plastizitätstheorie berechnet werden. Bei der Verwendung der Vorspannung ohne Verbund sind einige zusätzliche Überlegungen anzustellen. Die heute gebräuchlichen Berechnungs- und Bemessungsmethoden können gemäss der Tabelle 10.1 unterteilt werden.

Beim Nachweis der Gebrauchsfähigkeit geht man am besten von einer Schnittkraftverteilung aus, die mit Hilfe der Theorie dünner elastischer Platten ermittelt wird (Methode I in der Tabelle 10.1). Mit diesen Schnittkräften können Durchbiegungen und Risse überprüft werden. In Anbetracht der grossen Unsicherheiten, die den Methoden zur Kontrolle von Durchbiegungen und Rissen zwangsweise anhaften müssen (Übergang vom ungerissenen zum gerissenen Beton, Mitwirkung des Betons auf Zug, E-Modul sowie Kriech- und Schwindmasse des Betons), ist es nicht sinnvoll, die Schnittkraftverteilung mit zu grosser Genauigkeit zu ermitteln. Es genügt deshalb in vielen Fällen, die Berechnung mit vernünftigen Näherungsmethoden durchzuführen.

	Berechnung der Schnittkräfte	Bemessung	
I	Elastizitätstheorie, lineares Verformungsverhalten	Querschnitte auf zulässige Spannungen, Risse, Deformationen	Gebrauchs- fähigkeit
II	Elastizitätstheorie, lineares Verformungsverhalten	Querschnitte auf Bruch Stäbe - Platten	Tragfähigkeit
III	Elastizitätstheorie mit beschränkter Umlagerung	Querschnitte auf Bruch Stäbe - Platten	
IV	Plastizitätstheorie: Statische Methode (unterer Grenzwert) Kinematische Methode (oberer Grenzwert) Vollständige Lösung		
V	Elastizitätstheorie oder Plastizitätstheorie, nichtlineares Verformungsverhalten	Querschnitte auf - zulässige Spannungen, Risse, Deformationen  - Bruch	Gebrauchs- fähigkeit Tragfähigkeit

Tabelle 10.1: Berechnungs- und Bemessungsmethoden

Die Bemessung auf Tragfähigkeit wird häufig wie folgt durchgeführt: Die mit Methoden der Elastizitätstheorie berechneten Schnittkräfte unter Gebrauchslasten (mit oder ohne Umlagerung) werden mit einem Sicherheitsfaktor vergrössert und die erforderlichen Bruchwiderstände schnitt- oder punktweise bestimmt (Methoden II und III in der Tabelle 10.1). Dazu verwendet man am einfachsten die linearisierten Fließbedingungen entsprechend den Gleichungen (8.35) und (8.36) im Kapitel 8. Wie bereits im Kapitel 2 anhand des einfachen Beispiels eines Einfeldträgers mit Kragarm gezeigt wurde, bietet dieses Vorgehen keine Gewähr, dass ein Tragwerk sicher bemessen ist. Die Tragfähigkeit wird am besten mit Hilfe der statischen und der kinematischen Methode der Plastizitätstheorie ermittelt (vgl. Kapitel 9). Dabei ist der Sicherheitsfaktor wiederum in einen Lastfaktor und einen Widerstandsfaktor aufzuteilen. Gemäss der CEB/FIP Mustervorschrift [10.1] kann man von Feld zu Feld verschiedene Lastfaktoren ansetzen, oder aber einen einheitlichen Lastfaktor über das ganze Tragwerk benützen, wobei die ständigen Lasten einmal mit einem maximalen (z.B.  $\gamma_{g,max} = 1.40$ ) und einmal mit einem minimalen (z.B.  $\gamma_{g,min} = 0.80$ ) Faktor zu multiplizieren sind. Wie man dabei im Detail vorgeht, wurde im Kapitel 2 anhand des Durchlaufträgers ausführlich gezeigt. Die statische und die kinematische Methode der Plastizitätstheorie sind wiederum der Problemstellung entsprechend für die Berechnung und die Bemessung einzusetzen.

### 10.3 Rechnerische Berücksichtigung der Vorspannung

Ueber die Art, wie die Vorspannung in die Berechnung einzuführen ist, herrscht oft Unklarheit. Es stellt sich die Frage, ob die Auswirkungen der Vorspannung als äussere Kräfte in Form von Umlenkkräften oder als Widerstände in Rechnung zu stellen sind.

Grundsätzlich ist diese Unterscheidung eine Frage der Systemabgrenzung. Ein vorgespannter Balken oder eine vorgespannte Platte kann normalerweise immer so abgegrenzt werden, dass die Spannglieder mit ihren Verankerungen zum System gehören. Die Vorspannung bewirkt dann einen Eigenspannungszustand. Bei statisch bestimmter Lagerung treten nur innere Kräfte bzw. Spannungen auf, die unter sich im Gleichgewicht sind. Bei statisch unbestimmter Lagerung werden infolge verhinderter Verformungen Auflagerkräfte und Zwängungsschnittgrössen aufgebaut. Diese Auflagerkräfte und Zwängungsschnittgrössen bilden unter sich wieder ein Gleichgewichtssystem und können somit ebenfalls als Eigenspannungszustand aufgefasst werden. Wird ein vorgespannter Bauteil so abgegrenzt, dass die Spannglieder und ihre Verankerungen nicht zum betrachteten System gehören, bewirkt die Vorspannung auf das so abgegrenzte System (nur Beton betrachten) äussere Kräfte.

Bereits im Kapitel 2 wurde gezeigt, dass unter der Voraussetzung, dass eine genügende Verformungsfähigkeit vorhanden ist, ein Eigenspannungszustand keinen Einfluss auf die Traglast hat. Somit kann ein Eigenspannungszustand bei der Ermittlung der Tragfähigkeit unberücksichtigt bleiben. Ein Eigenspannungszustand ist jedoch immer dann zu berücksichtigen, wenn die daraus resultierenden Spannungen bzw. Dehnungen von Interesse sind. Dies ist sicher dann der Fall, wenn beim Gebrauchsfähigkeitsnachweis Verformungen und Rissbreiten zu kontrollieren sind. Aufgrund dieser Ueberlegungen ist es sinnvoll, die Vorspannung wie folgt in Rechnung zu stellen:

#### Gebrauchszustand

Sowohl statisch bestimmte als auch statisch unbestimmte Einwirkungen der Vorspannung sind als äussere Kräfte einzuführen, wobei normalerweise ein Lastfaktor 1.0 anzunehmen ist (Bilder 10.3 (a-d)).

Bei der Berechnung der Durchbiegungen ist es oft vorteilhaft, die Umlenkkräfte  $u_c$  (Bild 10.3 (b)) aus Vorspannung direkt von den Eigen- und Nutzlasten abzuziehen und nur die Differenzlast in Rechnung zu stellen.

#### Bruchzustand

Im Bruchzustand soll die Vorspannung (mit und ohne Verbund) konsequent als Widerstand aufgefasst werden (Bilder 10.3 (e-h)). Die von der Vorspannung herrührenden Widerstände sind um den vorgeschriebenen Widerstandsfaktor abzumindern. Es müssen also keine Schnittkräfte aus Vorspannung und demzufolge auch keine Zwängungsmomente berechnet werden. Bei der Bestimmung des Biegebruchwiderstandes (Bild 10.3 (g)) muss für die Zugkraft aus Vorspannung

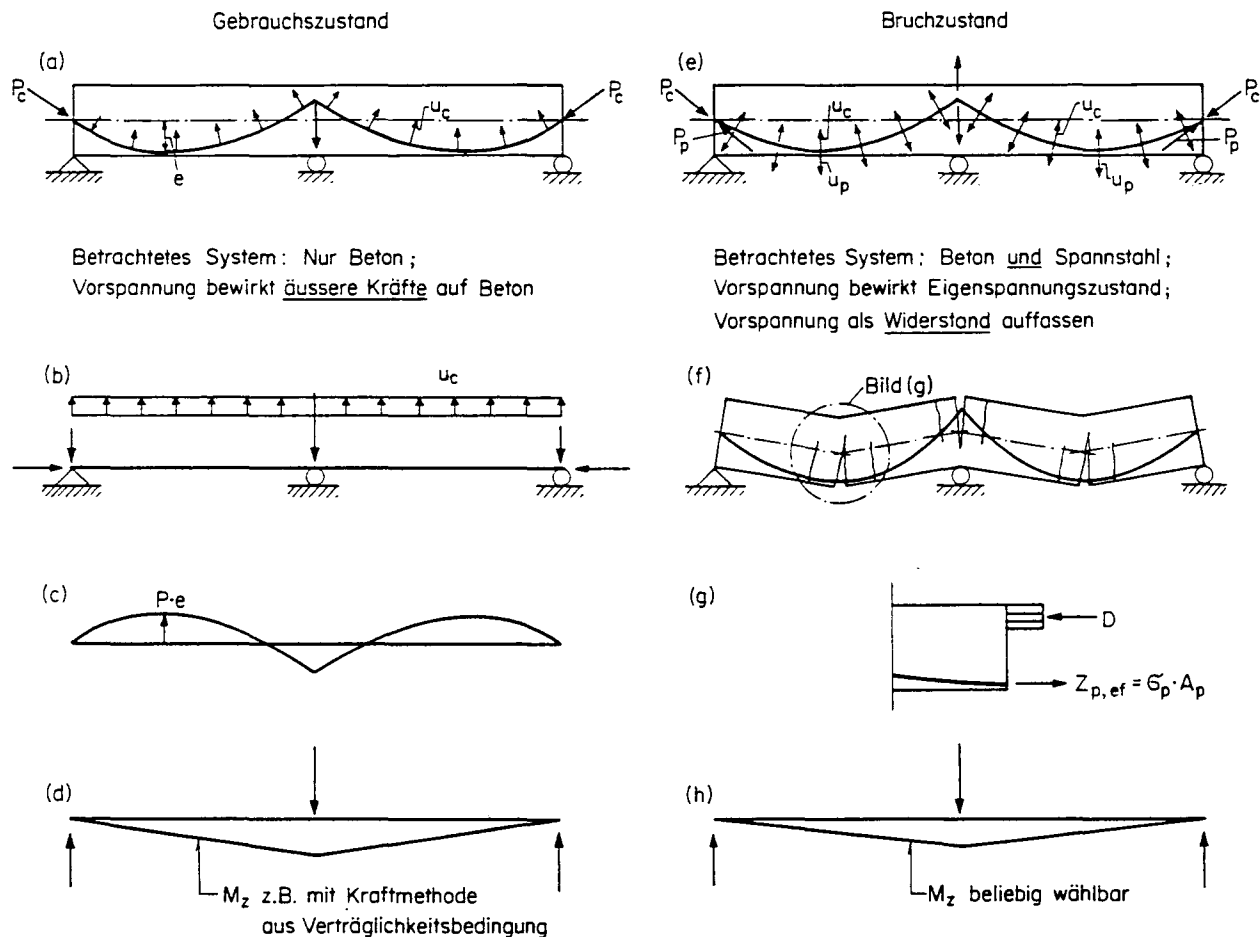


Bild 10.3: Rechnerische Berücksichtigung der Vorspannung

die effektiv beim Bruch vorhandene Spannung im Spannstahl in Rechnung gestellt werden.

Falls zur Berechnung und Bemessung die statische Methode der Plastizitätstheorie verwendet wird, kann der massgebenden Grenzwertlinie unter Eigen- und Nutzlasten ein dem Zwängungsmoment aus Vorspannung entsprechender Eigenspannungszustand gemäss Bild 10.3 (h) überlagert werden. Diese Ueberlagerung hat nur auf die Verteilung der Bruchwiderstände einen Einfluss. Die Traglast wird dadurch nicht beeinflusst (vgl. Kapitel 2, Abschnitt 2.6).

#### 10.4 Berechnung und Bemessung

Platten mit Vorspannung mit Verbund können anhand der bestehenden Vorschriften für vorgespannte Betonkonstruktionen berechnet und bemessen werden. Gemäss der heute gültigen Norm SIA 162 (1968) [10.2] und der dazu gehörenden Richtlinie 34 (1976) [10.3] sind bei einem querschnittswise Bruchnachweis Zwängungen zu berücksichtigen. Bei einer konsequenten Bemessung auf die beiden Grenzzustände Tragfähigkeit und Gebrauchsfähigkeit, wie dies im Entwurf der sich in Revision befindlichen Norm SIA 162 [10.4] vorgesehen ist, können die Einwirkungen aus Vorspannung im Sinn des Abschnittes 10.3 rechnerisch berücksichtigt werden.



Für Platten mit Vorspannung ohne Verbund existieren heute erst wenige Vorschriften und Empfehlungen, z.B. [10.5] (vgl. auch [10.6]). In verschiedenen Ländern sind entsprechende Bestimmungen in Bearbeitung, z.B. [10.7].

10.4.1 Tragfähigkeit

Bei der Anwendung der statischen und der kinematischen Methode der Plastizitätstheorie muss man die vorhandenen oder die erforderlichen Bruchwiderstände der einzelnen Querschnitte bzw. Plattenelemente kennen. Bei nur auf Biegung beanspruchten Stäben führt dies auf die Bestimmung des plastischen Momentes (Bild 10.4 (a)). Gemäss Kapitel 8 können mit der Fließgelenklinientheorie einfache Fließbedingungen abgeleitet werden, die den Widerstand in einem Plattenelement beschreiben. Im Bild 10.4 (b) sind die in der Anwendung sehr einfachen linearisierten Fließbedingungen für orthotrope Platten dargestellt (vgl. Gleichungen (8.35) und (8.36) im Kapitel 8). Bei bekannten Biegemomenten  $m_x$  und  $m_y$  sowie Drillungsmomenten  $m_{xy}$  können diese linearisierten Fließbedingungen direkt als Bemessungsgleichungen verwendet werden.

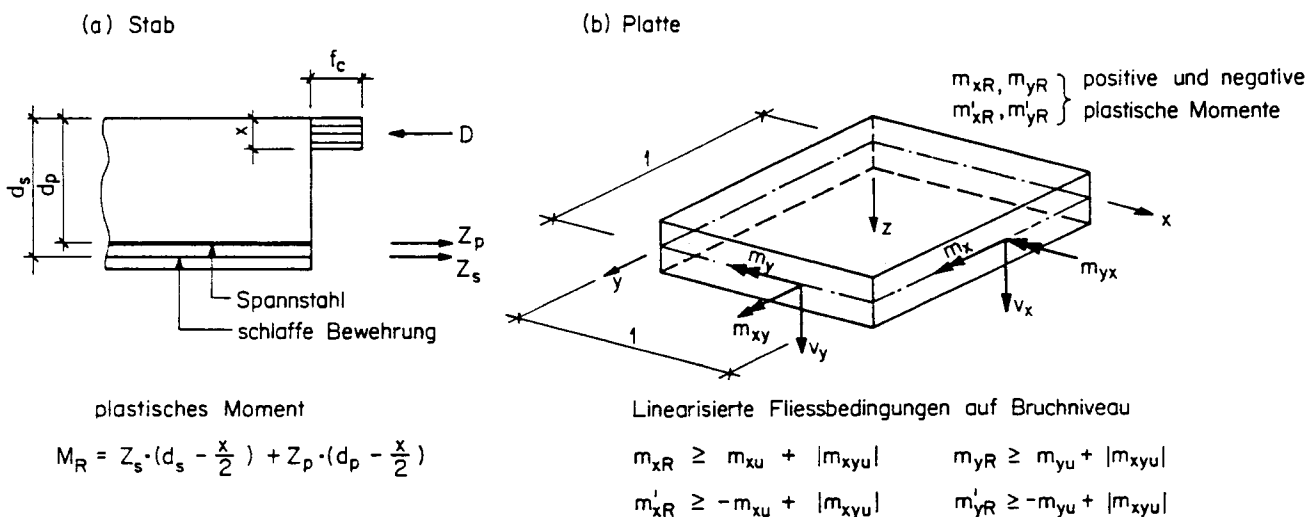


Bild 10.4: Bruchwiderstände

Schlaffe Bewehrung; Vorspannung mit Verbund

Vorwiegend auf Biegung beanspruchte Platten weisen im allgemeinen eine sehr gute Verformungsfähigkeit auf. Der Bruchwiderstand aus schlaffer Bewehrung und Vorspannung mit Verbund kann daher mit der praktisch immer zutreffenden Annahme, dass der Stahl fließt, berechnet werden. Dies gilt in der Regel auch für Querschnitte über Innenstützen von Flachdecken, wo die Spannglieder stark konzentriert sind. Um die Stützen treten vor allem radiale Risse auf, und es bildet sich eine tangential wirkende Betondruckzone aus. Dadurch wird die sog. mitwirkende Breite stark vergrössert. Bei bekannter Bewehrung können die Zugkräfte  $Z_s$  (schlaffe Bewehrung) und  $Z_p$  (Spannstahl) mit den entsprechenden Fließspannungen  $f_{sy}$  und  $f_{py}$  bestimmt werden. Die plastischen Momente können somit gemäss Bild 10.4 (a) berechnet werden. Für Platten, bei denen für den Bruch ein sprödes Schubversagen (z.B. Durchstanzen) massgebend ist, wird auf das Kapitel 11 verwiesen.

### Vorspannung ohne Verbund

Für den Spannstahl ohne Verbund muss die im Bruch wirksame Stahlspannung mit weiteren Ueberlegungen bestimmt werden. Der Spannungszuwachs ist von der Geometrie und von der Verformung des Gesamtsystems abhängig [10.8].

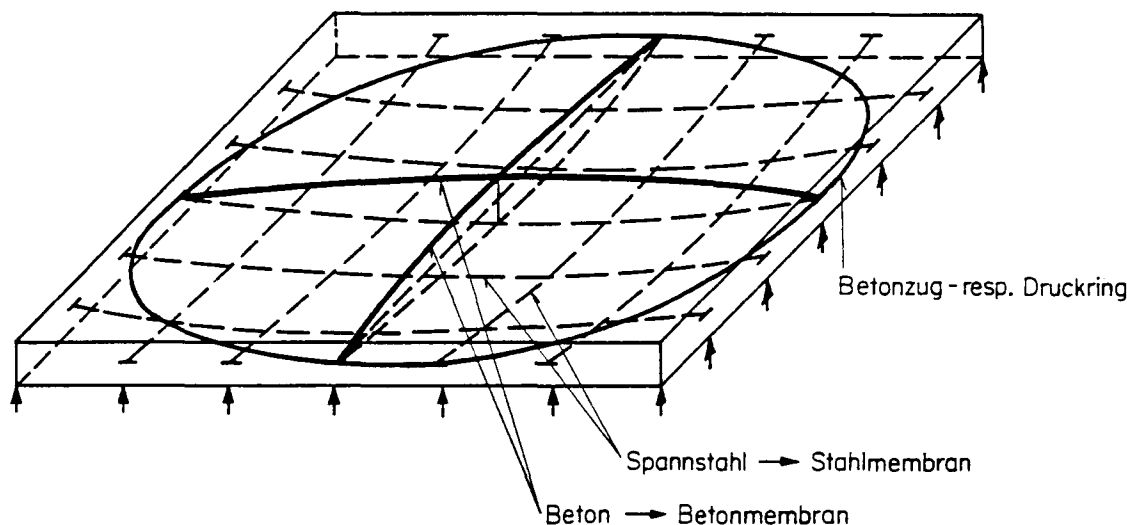


Bild 10.5: Wirkungsweise einer Einfeldplatte mit Vorspannung ohne Verbund

Die im Bild 10.5 dargestellte Einfeldplatte zeigt, wie man sich das Tragverhalten einer Platte mit Vorspannung ohne Verbund vorstellen kann. Bis zur Risslast verhält sich die Platte homogen und kann mit der elastischen Theorie dünner Platten mit kleinen Durchbiegungen behandelt werden. Sobald die Platte gerissen ist, wirken der Beton als Druckmembran und der Spannstahl als Zugmembran. Beton- und Stahlmembranen sind durch die Spannverankerungen und einen sich in der Plattenebene ausbildenden Zug- resp. Druckring miteinander verbunden.

Denkt man sich einen Streifen aus der Einfeldplatte herausgeschnitten, führt dies vereinfacht zu dem im Bild 10.6 dargestellten Plattenstreifenmodell. Der Beton wirkt zusammen mit dem Spannstahl als flacher unterspannter Stabzug. Die äussere Membranstützung wird schematisch durch eine elastische Feder dargestellt. Zusätzlich zum Spannstahl ohne Verbund ist meistens auch eine schlaife Bewehrung vorhanden, die vorwiegend Biege widerstände entwickelt. Mit dem im Bild 10.6 (b) dargestellten Fachwerkmodell werden im folgenden die Spannstahlverlängerung und der Spannungszuwachs im Spannstahl berechnet.

### Spannstahlverlängerung

Es gelten folgende Annahmen:

- Beton und Stahl wirken wie ein ideales Fachwerk.
- Die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für Beton und Stahl entsprechen gemäss Bild 10.6 (e) einem elastisch-plastischen Material.
- Die Beton- und Stahlstreben sowie die seitliche Feder haben in den Punkten A und B die gleichen horizontalen Verschiebungen.

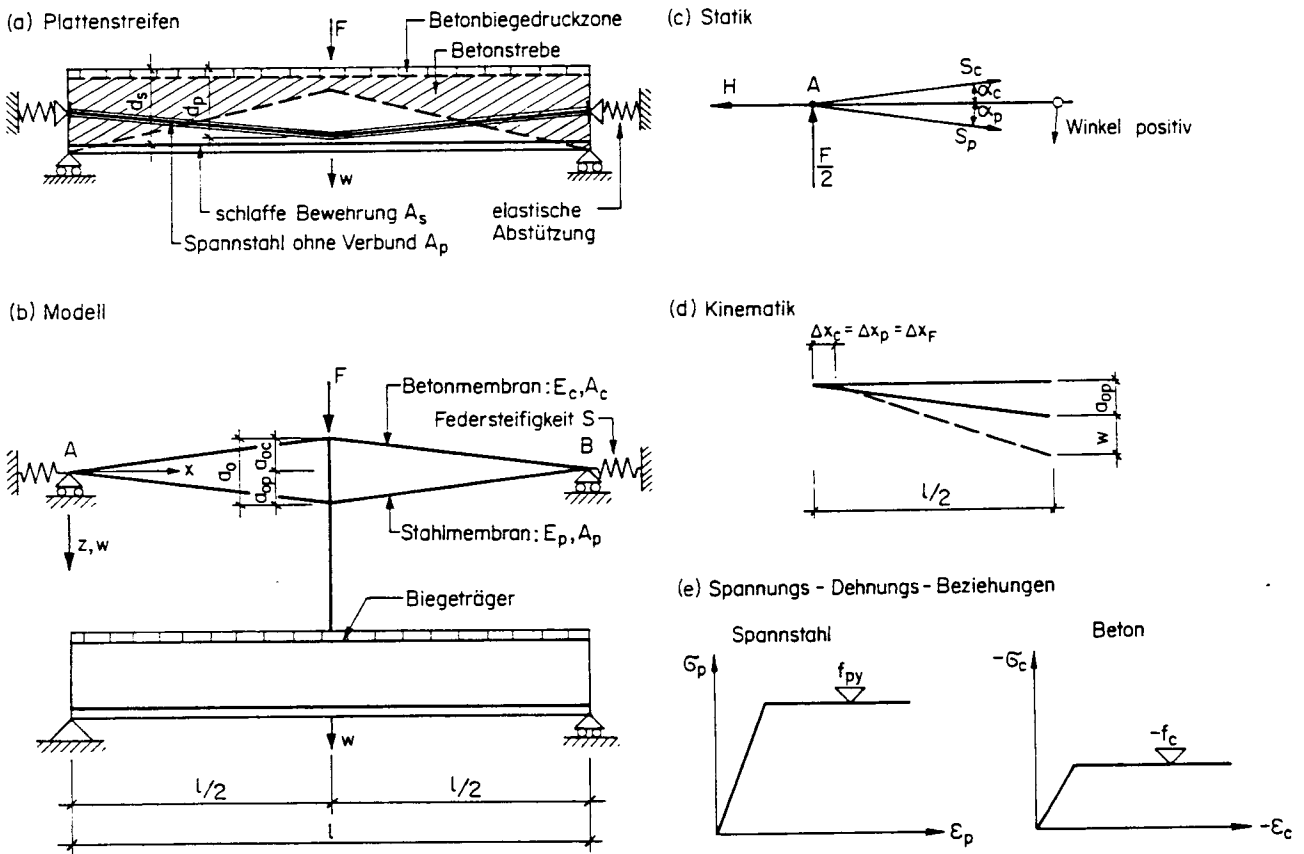


Bild 10.6: Tragmodell eines Plattenstreifens mit Vorspannung ohne Verbund

Formuliert man im Knoten A Gleichgewicht des deformierten Systems, erhält man gemäss Bild 10.6 (c) folgende Gleichungen:

$$\sum X = 0: H = S_c \cdot \cos \alpha_c + S_p \cdot \cos \alpha_p \tag{10.1}$$

$$\sum Z = 0: \frac{F}{2} = S_c \cdot \sin \alpha_c + S_p \cdot \sin \alpha_p \tag{10.2}$$

Bei einer Starrkörperverschiebung gilt für den Stahlstab (Bild 10.6 (d)) und analog für den Betonstab folgende geometrische Beziehung:

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2 + a_{op}^2 = \left(\frac{l}{2} - \Delta x_p\right)^2 + (a_{op} + w)^2 \tag{10.3}$$

Aus der verlangten Verträglichkeit zwischen Beton- und Stahlstreben sowie seitlicher Feder folgt:

$$\Delta x_c = \Delta x_p = \Delta x_F \tag{10.4}$$

Mit der Annahme elastischer Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für Beton und Stahl folgt unter Vernachlässigung kleiner Grössen:

$$\Delta x_c = \frac{z \cdot a_{oc} \cdot w}{1} + \frac{w^2}{1} - \frac{\sigma_c \cdot \frac{l}{2}}{E_c} \tag{10.5}$$

$$\Delta x_p = \frac{2 \cdot a_{op} \cdot w}{l} + \frac{w^2}{l} - \frac{\sigma_p \cdot l}{E_p} \quad (10.6)$$

$$\Delta x_F = \frac{H}{F} \quad (10.7)$$

Mit den Gleichungen (10.1) bis (10.7) können die Spannungen  $\sigma_c$  und  $\sigma_p$  bzw. die Dehnungen  $\epsilon_c$  und  $\epsilon_p$  in Funktion der Durchbiegung  $w$  berechnet werden. Eliminiert man  $\sigma_c$  und  $H$  und setzt  $\sigma_p/E_p = \epsilon_p = \Delta l/l$ , folgt:

$$\frac{\sigma_p}{E_p} \cdot \left(1 + \frac{A_c \cdot E_c}{l \cdot S} + \frac{A_p \cdot E_p}{l \cdot S}\right) = 4 \cdot \frac{a_{op} \cdot w}{l^2} + 2 \cdot \frac{w^2}{l^2} - 4 \cdot \frac{A_c \cdot E_c}{l \cdot S} \cdot \frac{w \cdot a_o}{l^2} \quad (10.8)$$

Keine äussere Membranstützung:

Wenn keine äussere Membranstützung vorhanden ist ( $S = 0$ ; einfacher Balken), erhält man die auf die Spannweite  $l$  bezogene Spannstahlverlängerung.

$$\frac{\Delta l}{l} = 4 \cdot \frac{a_o \cdot w}{l \cdot l} \cdot \frac{1}{1 + \frac{A_p \cdot E_p}{A_c \cdot E_c}} \quad (10.9)$$

Setzt man für  $a_o$  einen geschätzten inneren Hebelarm von  $0.75 \cdot d_p$  ein, findet man unter Vernachlässigung der Verkürzung des Betons ( $A_c \cdot E_c \rightarrow \infty$ ):

$$\frac{\Delta l}{l} = 3 \cdot \frac{d_p}{l} \cdot \frac{w}{l} \quad (10.10)$$

Die Spannstahlverlängerung ist also im wesentlichen vom Verhältnis statische Höhe  $d_p$ /Spannweite  $l$  und der Durchbiegung  $w$  abhängig.

Starre äussere Membranstützung:

Falls eine starre äussere Membranstützung vorhanden ist ( $S = \infty$ ) beträgt die auf die Spannweite  $l$  bezogene Spannstahlverlängerung

$$\frac{\Delta l}{l} = 4 \cdot \left( \frac{w^2}{2 \cdot l^2} + \frac{w \cdot a_{op}}{l \cdot l} \right) \quad (10.11)$$

Die Spannstahlverlängerung ist in diesem Fall vom Stich des Spannstahls  $a_{op}$ , von der Spannweite  $l$  und der zugehörigen Durchbiegung  $w$  abhängig.

In [10.8] sind verschiedene Formen der Spanngliedführung und der Biegelinie untersucht worden. Bei einer starren äusseren Membranstützung führt dies zu Ausdrücken der Form

$$\frac{\Delta l}{l} = c \cdot \left( \frac{w^2}{2 \cdot l^2} + \frac{w \cdot a_{op}}{l \cdot l} \right) \quad (10.12)$$

Wenn z.B. für die Spanngliedführung und die Biegelinie quadratische Parabeln angenommen werden, beträgt der Faktor  $c = 5.33$ . Vergleiche zwischen theoretischen und experimentell bestimmten Werten zeigen, dass die Spannstahlverlängerungen mit den Gleichungen (10.10) und (10.11), die im Bild 10.7 für einige Parameter dargestellt sind, mit genügender Genauigkeit bestimmt werden können.

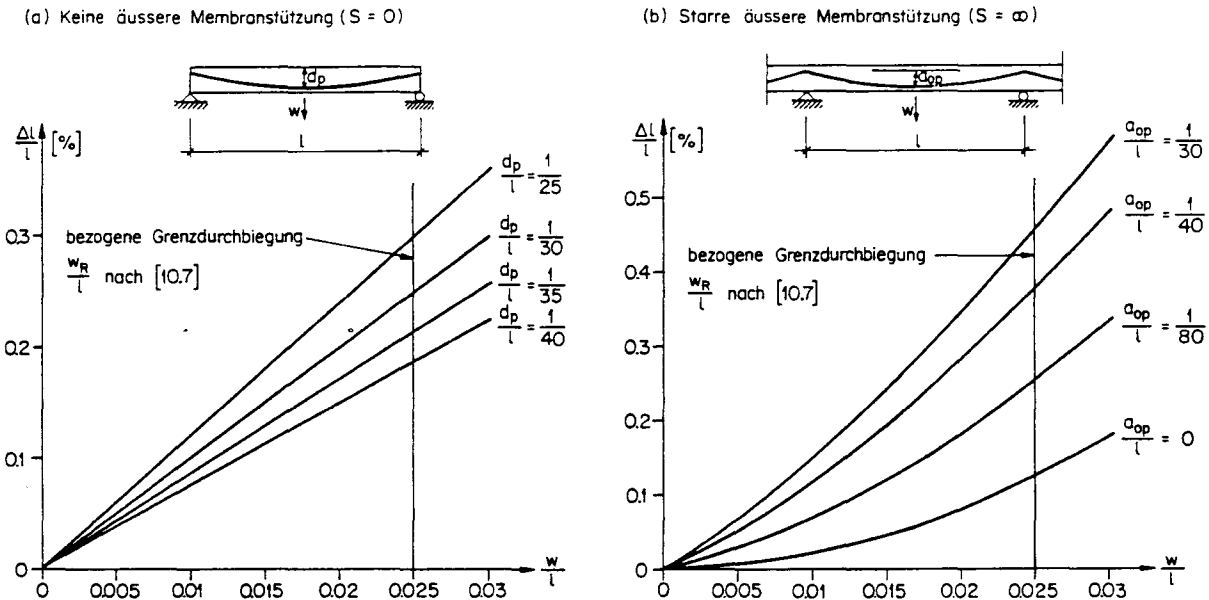


Bild 10.7: Spannstahlverlängerung in Funktion der Durchbiegung

Im Revisionsentwurf der Norm SIA 162 [10.7] wird festgelegt, dass der nominelle Bruchzustand einer Platte mit Vorspannung ohne Verbund erreicht ist, wenn beim massgebenden Mechanismus eine Grenzdurchbiegung  $w_R$  von  $1/40$  der zugehörigen Spannweite  $l$  erreicht ist. Wie Versuche zeigten [10.9], ist diese Grenzdurchbiegung für auf Biegung beanspruchte Platten ein Wert, der auf der sicheren Seite liegt. Der massgebende Mechanismus ist sinngemäss mit dem im Kapitel 2 für Balken dargestellten Vorgehen zu bestimmen. Falls bei einer Flachdecke, bei der keine Schubbewehrung eingelegt wird, Durchstanzen für den Bruch massgebend wird, ist die Grenzdurchbiegung  $w_R$  zu reduzieren oder vorsichtigerweise null zu setzen. Beim Durchstanznachweis (vgl. Kapitel 11) sind die direkt auf eine Innenstütze abgegebenen Umlenkkräfte aus Vorspannung unter Vernachlässigung eines Spannungszuwachses im Spannstahl zu bestimmen.

Oft ist es schwierig, die horizontalen Lagerbedingungen von Platten exakt zu definieren. Vereinfachend kann angenommen werden, dass Einfeldplatten und Randfelder von Mehrfeldplatten in der zum freien Rand senkrechten Richtung sowie Eckfelder keine äussere Membranstützung aufweisen. Als Platten mit äusserer Membranstützung können Innenfelder von Mehrfeldplatten angesehen werden.

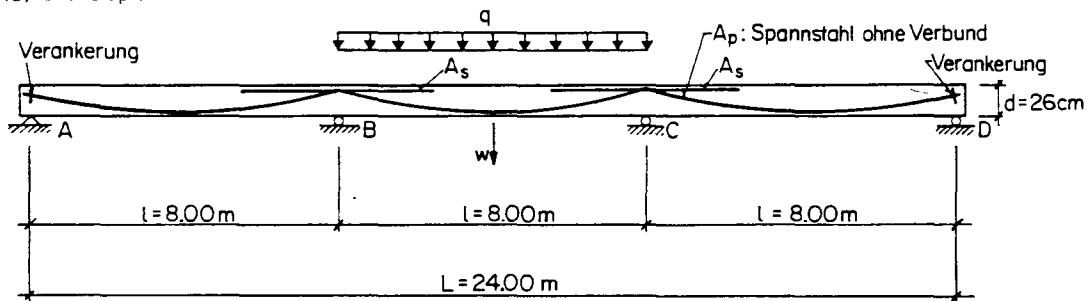
Spannungszuwachs im Spannstahl

In Mehrfeldplatten werden die Spannglieder im Normalfall über mehrere Felder geführt. Der in Rechnung zu stellende Spannungszuwachs ergibt sich aus der über die freie Länge  $L$  zwischen den Verankerungsstellen des Spanngliedes gleichmässig verteilten Spannstahlverlängerung  $\Delta l$  und dem tatsächlichen Spannungs-Dehnungs-Diagramm des Spannstahls. Die Spannstahlverlängerung  $\Delta l$  ist für den massgebenden Bruchmechanismus mit Hilfe der Gleichungen (10.10) oder (10.11) zu bestimmen. Im elastischen Bereich beträgt der Spannungszuwachs somit

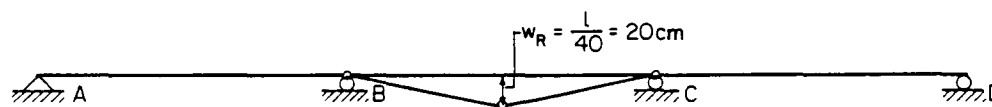
$$\Delta\sigma_p = \frac{\Delta l}{L} \cdot E_p \tag{10.13}$$

Die gesamte Spannung darf dabei selbstverständlich die Streckgrenze des Spannstahls nicht überschreiten. Im Bild 10.8 ist anhand einer Dreifeldplatte dargestellt, wie der Spannungszuwachs für den Tragfähigkeitsnachweis eines Innenfeldes bestimmt werden kann. Dabei wird angenommen, dass andere Mechanismen als der im Bild 10.8 (b) dargestellte durch Einlegen einer schlaffen Bewehrung über den Stützen ausgeschlossen werden (vgl. Kapitel 2).

(a) Dreifeldplatte

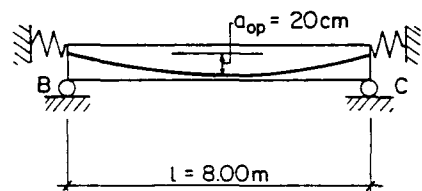


(b) Massgebender Mechanismus Innenfeld



(d) Spannungszuwachs im Spannstahl

(c) Innenfeld



$$\frac{\Delta l}{l} = 4 \cdot \frac{0.20^2}{2 \cdot 8.0^2} + \frac{0.20}{8.0} \cdot \frac{0.20}{8.0} = 3.75 \cdot 10^{-3} \tag{Gl. 10.11}$$

$$\Delta\sigma_p = 3.75 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{800}{24.00} \cdot 210 \cdot 10^3 = 262.5 \text{ N/mm}^2 \tag{Gl. 10.13}$$

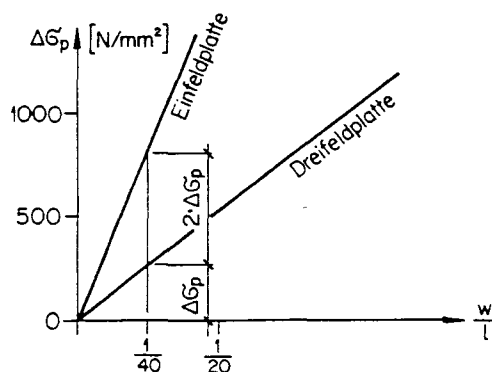


Bild 10.8: Spannungszuwachs bei Durchlaufplatten

### Plastisches Moment

Mit der nun bestimmten Spannung im Spannstahl ohne Verbund ist die Zugkraft  $Z_p$  bekannt. Damit kann der Bruchwiderstand eines Querschnittes bzw. eines Plattenelementes gemäss Bild 10.4 berechnet werden.

### 10.4.2 Gebrauchsfähigkeit

Der Nachweis der Gebrauchsfähigkeit wird hier ausserhalb des eigentlichen Kursthemas behandelt. Bei der Verwendung der Vorspannung und im speziellen der Vorspannung ohne Verbund sind aber beim Gebrauchsfähigkeitsnachweis einige spezielle Aspekte zu beachten, die am besten im Zusammenhang mit den vorher dargestellten Tragmodellen erläutert werden können.

Bei Platten des üblichen Hochbaus sind in erster Linie die Durchbiegungen zu überprüfen. In einem weiteren Schritt ist dann dafür zu sorgen, dass eine Rissverteilung gewährleistet ist. Mit einer beschränkten Durchbiegung und einer guten Rissverteilung ist auch die Rissöffnung beschränkt, was leicht mit geometrischen Ueberlegungen einzusehen ist.

### Durchbiegungen

Wie bereits im Abschnitt 10.2 dargelegt worden ist, ist bei der Berechnung der Durchbiegungen von einer annähernd elastischen Schnittkraftverteilung auszugehen. Für schlaff bewehrte Platten kann die Durchbiegung z.B. gemäss den in [10.10] angegebenen Verfahren ermittelt werden. Massgebende Parameter einer solchen Berechnung sind u.a.: Abmessungen der Platte, Gehalt an schlaffer Bewehrung, Verhältnis des Momentes unter Dauerlasten zum Rissmoment und charakteristische Werte des Betons, wie E-Modul, Schwind- und Kriechmasse. Meistens genügt es, die Durchbiegungen unter Dauerlasten an der homogenen Platte unter Berücksichtigung eines Kurzzeit-E-Moduls des Betons zu berechnen und diese um einen globalen Faktor, der Reissen, Schwinden und Kriechen des Betons berücksichtigt, zu vergrössern. Dieser Globalfaktor variiert etwa zwischen den Werten 3 und 6.

Die Vorspannung vermindert die Durchbiegungen auf zweifache Art. Einmal wird ein Teil der Last direkt über Umlenkkräfte auf die Auflager abgetragen (Bild 10.1). Im weiteren erhöht die in der Plattenebene wirkende Normalkraft aus Vorspannung das Rissmoment.

Werden Spanngliedarrangements gewählt, wie sie in den Bildern 10.2 (c), (f) und (g) dargestellt sind, verhält sich die Platte unter Dauerlasten meistens homogen. Die Durchbiegung kann dann unter den um die Umlenkkräfte aus Vorspannung (Bild 10.3 (b)) reduzierten Dauerlasten am homogenen System berechnet werden. Das Kriechen wird durch Reduktion des Kurzzeit-E-Moduls des Betons auf  $E_c/(1 + \phi)$  berücksichtigt. Die Kriechzahl  $\phi$  des Betons variiert etwa zwischen den Werten 1.5 und 3.5.

## Risse

### Schlaffe Bewehrung; Vorspannung mit Verbund

In Platten mit schlaffer Bewehrung oder mit Vorspannung mit Verbund ist die Rissentwicklung wesentlich von den Verbundeigenschaften zwischen Stahl und Beton abhängig. In einem Riss ist die Zugkraft praktisch vollständig im Stahl konzentriert. Ueber Verbundspannungen wird diese Kraft sukzessive vom Stahl auf den Beton übertragen. Sobald in einem benachbarten Schnitt der Zugwiderstand der Betonzugzone überschritten wird, bildet sich ein neuer Riss.

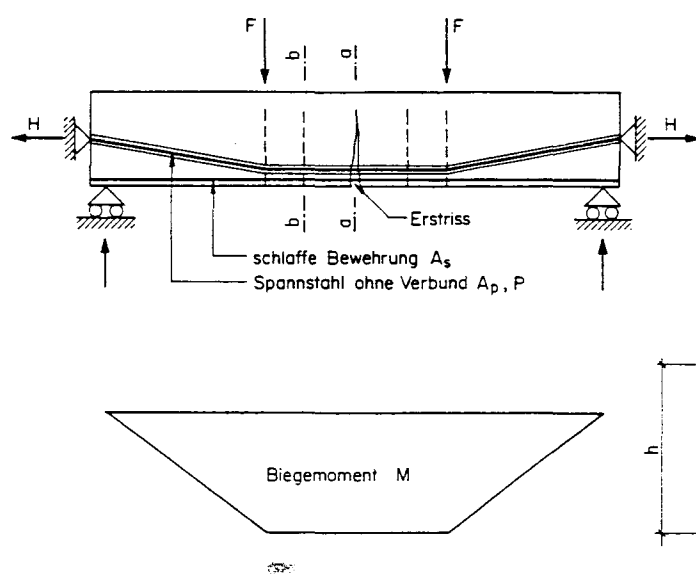
### Vorspannung ohne Verbund

Der Einfluss der Vorspannung ohne Verbund auf das Rissverhalten kann nicht über Verbundgesetze untersucht werden. Zwischen dem Spannstahl ohne Verbund und dem Beton treten nur sehr kleine Reibungskräfte auf. Somit wird die im Stahl wirksame Zugkraft fast ausschliesslich bei den Verankerungsstellen als Druckkraft auf den Beton abgegeben.

Im Bild 10.9 (a) ist ein horizontal gestützter Plattenstreifen mit Spannstahl ohne Verbund und zusätzlicher schlaffer Bewehrung dargestellt. Die Membrankraft infolge einer horizontalen Stützung an beiden Enden sei durch die horizontale Kraft  $H$  gegeben. Im folgenden wird untersucht, unter welchen Bedingungen sich nur ein Riss öffnet oder mehrere Risse gebildet werden. Dabei wird von folgenden Voraussetzungen ausgegangen:

- Die Schnittkräfte sind bekannt.
- Nach dem Auftreten des ersten Risses ist eine weitere Last- bzw. Momentensteigerung mit zunehmender Durchbiegung möglich.
- Der Spannungszuwachs im Spannstahl ohne Verbund wird im Gebrauchszustand vernachlässigt.
- Die schlaffe Bewehrung kann im Riss bis zur Fließspannung beansprucht werden.

(a) Statisches System



(b) Einwirkungen auf Beton nach erstem Riss

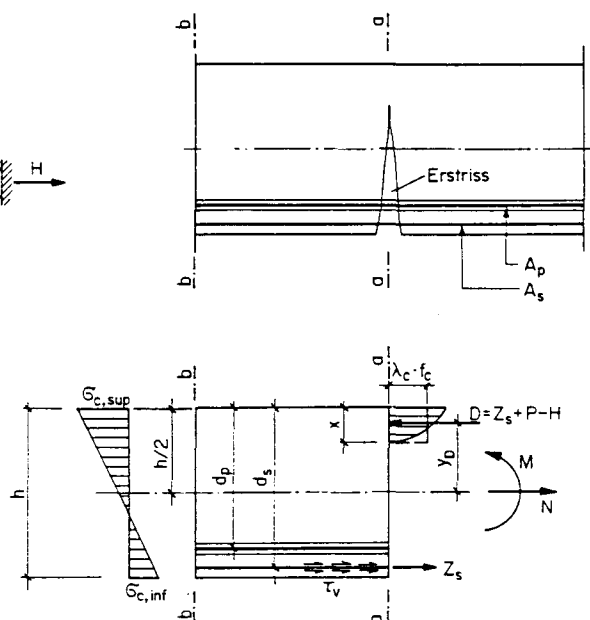


Bild 10.9: Rissverhalten eines Plattenstreifens



Die Einwirkungen auf den Beton nach Auftreten des ersten Risses sind im Bild 10.9 (b) dargestellt. Die Platte kann in diesem Bereich als Scheibe angesehen werden. Die Gleichgewichtsbedingungen im gerissenen Schnitt a-a lauten:

$$N = H - P \quad (10.14)$$

$$M = (Z_s + P - H) \cdot y_D + Z_s \cdot \left(d_s - \frac{h}{2}\right) \quad (10.15)$$

Die Form der Betondruckzone und die Lage des Angriffspunktes der Druckkraft können mit dem Faktor  $\lambda_c$  variiert werden. Die Betonspannungen am unteren Rand des benachbarten Schnittes b-b (Bild 10.9 (b)) werden unter der Annahme berechnet, dass der Beton ungerissen sei und sich elastisch verhalte. Gleichgewicht im Schnitt b-b formuliert, ergibt somit

$$\sigma_{c,inf} = \frac{M}{W} + \frac{N}{A} \quad (10.16)$$

Für das Widerstandsmoment  $W$  und die Fläche  $A$  sind die Werte des rechteckigen Betonquerschnittes der Breite  $b$  einzusetzen.

$$\sigma_{c,inf} = 6 \cdot \frac{M}{b \cdot h^2} + \frac{N}{b \cdot h} \quad (10.17)$$

Setzt man die Gleichungen (10.14) und (10.15) in die Gl. (10.17) ein und verwendet

$$P = \rho_p \cdot b \cdot d_p \cdot \sigma_{po} \quad (10.18)$$

$$Z_s = \rho_s \cdot b \cdot d_s \cdot f_{sy} \quad (10.19)$$

$$x = \frac{D}{b \cdot \lambda_c \cdot f_c} \quad (10.20)$$

so erhält man eine Beziehung zwischen der Betonspannung am unteren Rand und der vorhandenen Bewehrung.

$$\begin{aligned} \sigma_{c,inf} = 3 \cdot \frac{d_s}{h} \cdot \left( \rho_p \cdot \frac{d_p}{d_s} \cdot \sigma_{po} - \frac{H}{b \cdot d_s} + \rho_s \cdot f_{sy} \right) \cdot \left[ 1 - \frac{d_s}{\lambda_c \cdot f_c \cdot h} \cdot \left( \rho_p \cdot \frac{d_p}{d_s} \cdot \sigma_{po} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{H}{b \cdot d_s} + \rho_s \cdot f_{sy} \right) \right] + 6 \cdot \rho_s \cdot f_{sy} \cdot \frac{d_s}{h} \cdot \left( \frac{d_s}{h} - \frac{1}{2} \right) - \rho_p \cdot \frac{d_p}{h} \cdot \sigma_{po} + \frac{H}{b \cdot h} \end{aligned} \quad (10.21)$$

Die Gl. (10.21) kann zu einer quadratischen Gleichung in  $\rho_s$  umgeformt werden. Damit sich ein weiterer Riss bildet, muss  $\sigma_{c,inf} \geq f_{ct}$  werden. Die Lösung der quadratischen Gleichung nach  $\rho_s$  ergibt den für eine Rissverteilung notwendigen Bewehrungsgehalt  $\rho_s$ . Dabei ist die Betonspannung  $\sigma_{c,inf}$  durch die Zugfestigkeit  $f_{ct}$  des Betons zu ersetzen.

$$\rho_s = \frac{\lambda_c \cdot f_c}{f_{sy}} \left[ 1 - \frac{\rho_p \cdot \frac{d_p}{d_s} \cdot \sigma_{po} - \frac{H}{b \cdot d_s}}{\lambda_c \cdot f_c} - \sqrt{1 - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{h}{d_s}\right)^2 \cdot \frac{f_{ct}}{\lambda_c \cdot f_c} - 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{d_s}\right) \cdot \frac{\rho_p \cdot \frac{d_p}{d_s} \cdot \sigma_{po} - \frac{H}{b \cdot d_s}}{\lambda_c \cdot f_c}} \right] \quad (10.22)$$

Im Bild 10.10 ist der Gehalt  $\rho_s$  an schlaffer Bewehrung in Funktion des Bewehrungsgehaltes  $\rho_p$  an Spannstahl für verschiedene Betonfestigkeiten dargestellt. Es wurde dabei angenommen, dass keine äussere Membrankraft wirksam sei.

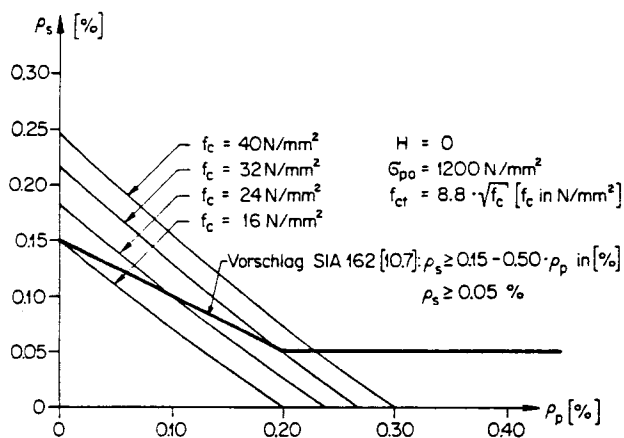


Bild 10.10: Bewehrungsgehalte, um die Rissverteilung zu gewährleisten

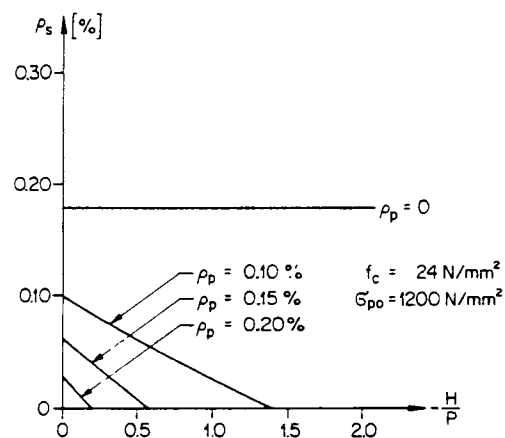


Bild 10.11: Einfluss der Normalkraft auf den zur Rissverteilung notwendigen Bewehrungsgehalt

Im Entwurf der Arbeitsgruppe 5 zur Revision der Norm SIA 162 [10.7] wird folgende minimale schlaffe Bewehrung vorgeschrieben:

$$\rho_s \geq 0.15 - 0.50 \cdot \rho_p \quad [\text{in } \%] \quad (10.23)$$

$$\text{Untere Grenze: } \rho_s = 0.05 \% \quad (10.24)$$

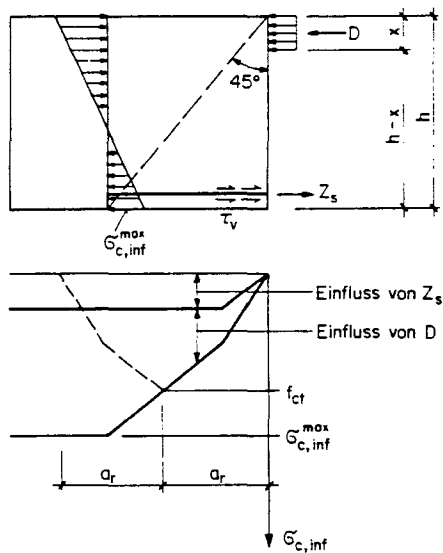
Die Gleichungen (10.23) und (10.24) sind vergleichsweise im Bild 10.10 eingetragen. Beim Nachweis der schlaffen Bewehrung, die für die Rissverteilung erforderlich ist, muss die Spanngliederanordnung (vgl. Bild 10.2) beachtet werden. Die Vorspannkraft der Spannglieder über den Stützen muss in den Randfeldern zuerst durch Scheibenwirkung auf die ganze Plattenbreite verteilt werden, bevor sie gemäss Gl. (10.23) in Rechnung gestellt werden darf.

Gl. (10.22) zeigt, dass eine äussere Membrankraft  $H$  den gleichen Einfluss auf die zur Rissverteilung erforderliche schlaffe Bewehrung  $\rho_s$  hat wie die Vorspannkraft  $P$ . Im Bild 10.11 ist der Bewehrungsgehalt  $\rho_s$  für konstante Werte  $\rho_p$  in Funktion des Verhältnisses  $H/P$  aufgetragen. Damit ist die bei Versuchen [10.9] beobachtete Tatsache bestätigt, dass das Rissverhalten durch äussere Membrankräfte und schlaffe Bewehrung ähnlich beeinflusst wird. In

Innenfeldern von Durchlaufplatten können sich infolge Membranwirkung bereits bei kleinen Durchbiegungen beachtliche äussere Membrankräfte aufbauen. Somit kann für die Rissverteilung in Innenfeldern von Platten mit Vorspannung ohne Verbund in der Regel auf eine zusätzliche schlaaffe Bewehrung verzichtet werden.

Um den Rissabstand abschätzen zu können, müssen die Verbundeigenschaften zwischen der Bewehrung in Verbund und dem Beton sowie der Verlauf der Druckkrafteinleitung bekannt sein. Mit der Annahme, die Verbundspannungen  $\tau_v$  seien konstant, und die Betonzugspannungen am unteren Rand infolge Druckkraft würden vom gerissenen Schnitt bis zum Abstand  $h$  linear aufgebaut, lässt sich der theoretische Rissabstand  $a_r$  gemäss Bild 10.12 abschätzen. Der effektive

Rissabstand kann zwischen  $a_r$  und  $2 \cdot a_r$  liegen, je nachdem, ob die Rissbildung von einem oder von mehreren Schnitten ausgeht.



Unter der Voraussetzung, dass die Verteilung der Risse gewährleistet ist, kann der Rissabstand in Platten auch durch eine einfachere Ueberlegung abgeschätzt werden. Nimmt man eine Krafteinleitung der Druckkraft  $D$  (Bild 10.12) unter  $45^\circ$  an, so kann  $a_r$  im Maximum gleich der Plattenstärke  $h$  sein. Der Rissabstand variiert also etwa zwischen der Plattenstärke  $h$  und  $2 \cdot h$ . Diese Aussage gilt nun unabhängig von den Verbundeigenschaften zwischen Stahl und Beton.

Bild 10.12: Abschätzen des Rissabstandes

Als Resultat der obigen Betrachtungen über Risse kann festgehalten werden, dass eine Rissverteilung über die Vorschrift einer Mindestbewehrung - also ohne Spannungs- bzw. Dehnungsberechnungen und ohne Verwendung von Rissformeln - gewährleistet werden kann.

#### LITERATUR

- [10.1] Euro-Internationales Beton-Komitee, Internationaler Spannbeton-Verband: "CEB/FIP Mustervorschrift für Tragwerke aus Stahlbeton und Spannbeton", 3. Ausgabe, 1978.
- [10.2] Schweizerischer Ingenieur- und Architekten-Verein (SIA): "Norm für die Berechnung, Konstruktion und Ausführung von Bauwerken aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton", Norm SIA 162, Zürich, 1968.
- [10.3] Schweizerischer Ingenieur- und Architekten-Verein (SIA): "Bruchwiderstand und Bemessung von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken", Richtlinie 34 zur Norm SIA 162, Zürich, 1976.
- [10.4] Schweizerischer Ingenieur- und Architekten-Verein (SIA): "Beton, Stahlbeton und Spannbeton", Norm SIA 162, 1. Gesamtentwurf der Revision 1982 (unveröffentlicht).
- [10.5] Fédération Internationale de la Précontrainte (FIP): "Recommendations for the design of flat slabs in post-tensioned concrete (using unbonded and bonded tendons)", Cement and Concrete Association, Wexham Springs, Slough, May 1980.

- [10.6] Ritz P., Matt P., Tellenbach Ch., Schlub P., Aeberhard H.U.: "Spannbeton im Hochbau: Vorgespannte Decken", Losinger AG, Bern, Jan. 1981.
- [10.7] Schweizer Ingenieur- und Architekten-Verein (SIA): "Bruchverhalten von Platten", Entwurf der Arbeitsgruppe 5 der Kommission für die Revision der Norm SIA 162, 1979 (unveröffentlicht).
- [10.8] Ritz P.: "Biegeverhalten von Platten mit Vorspannung ohne Verbund", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Bericht Nr. 80, Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart, Mai 1978.
- [10.9] Ritz P., Marti P., Thürlimann B.: "Versuche über das Biegeverhalten von vorgespannten Platten ohne Verbund", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Versuchsbericht Nr. 7305-1, Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart, Juni 1975.
- [10.10] Favre R., Koprna M., Jaccoud J.-P.: "Fissuration et déformations des structures en béton", Cours photocopié, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, octobre 1982.

### 11.1 Einleitung

Unerwartete, zum Teil spektakuläre Unfälle haben vor einiger Zeit wiederum gezeigt, dass noch nicht alle Probleme der Plattenbemessung gelöst sind. Genauere Untersuchungen haben ergeben, dass das Durchstanzen einer Stütze in vielen Fällen den Einsturz ausgelöst hatte. Damit wurde es notwendig, die Schubbemessung der Stahlbetonplatten theoretisch näher zu untersuchen.

Für die Schubbemessung können die Stahlbetonplatten in Funktion ihrer Lagerung - liniengelagert oder punktgestützt - oder in Funktion der Belastungsart - verteilte Belastung oder Einzellast - wie folgt unterschieden werden:

- liniengelagerte Platten mit verteilter Belastung
- Flachdecken und Platten mit grossen Einzellasten

Im ersten Teil bleiben die Schubspannungen infolge der Querkräfte im allgemeinen so klein, dass ihr Einfluss auf die Tragfähigkeit der Platte vernachlässigbar ist und somit gleich null gesetzt wird. Die Bemessung erfolgt nur für die Biegung. Zutreffende Grundlagen untermauern dieses Bemessungsverfahren.

Die Bemessung von Flachdecken oder Platten mit grossen Einzellasten erfolgt mit Hilfe von zwei verschiedenen theoretischen Modellen. Obwohl der Einfluss der Querkräfte auf die Tragfähigkeit der Platte nicht mehr vernachlässigbar ist, wird die Biegebemessung wie im ersten Fall durchgeführt. Der Durchstanznachweis wird separat gemacht und beruht auf experimentellen Untersuchungen oder Erfahrungswerten. Es ist leicht zu verstehen, dass mit diesem Verfahren das Gleichgewicht nicht nachgewiesen werden kann, und dass damit die Gefahr einer unsicheren Bemessung im Bereich grosser Biegemomente und Querkräfte vorhanden ist. Eine Lösung dieses Bemessungsproblems kann nur durch gleichzeitige Betrachtung von Biegung und Querkraft gefunden werden.

Weitere Erkenntnisse über das Tragverhalten von Stahlbetonplatten im Bereich grosser Einzellasten sind jedoch notwendig, um die Interaktion von Biegung und Querkraft theoretisch zu erfassen. Diese zusätzlichen Informationen können durch eine Analyse der experimentellen Resultate aus Durchstanzversuchen gewonnen werden.

### 11.2 Durchstanz-Phänomen

Die Resultate aus zahlreichen repräsentativen Versuchen an Innen-, Rand- und Eckstützen haben gezeigt, dass das Durchstanzen

- bei kleinen Durchbiegungen
- ohne Ankündigung, z.B. ohne eindeutiges Stauchen des Betons

- schlagartig

auftritt.

Folgende Schlussfolgerungen können aus diesen Beobachtungen direkt gezogen werden:

- Keine vollständige Umlagerung der inneren Schnittkräfte und insbesondere der Biegemomente kann erfolgen. Die Deformationen sind vorwiegend in der Durchstanzzone konzentriert. Nur die in dieser Zone konzentrierte Biegebewehrung kann voll ausgenützt werden.
- Die Erschöpfung der Betonzugfestigkeit bestimmt mit grosser Wahrscheinlichkeit den spröden Charakter des Durchstanzens.
- Ein duktiler Charakter der Durchstanzzone kann nur durch Verwendung einer angepassten Schubbewehrung erreicht werden.

Diese Feststellungen sollten nach dem heutigen Stand der Wissenschaft für Innen-, Rand- und Eckstützen gelten. Bis heute sind jedoch die Resultate der theoretischen Untersuchungen auf den achsialsymmetrischen Fall beschränkt. Intensive Forschungsarbeiten betreffend Rand- und Eckstützen, über den Einfluss von Aussparungen im Durchstanzbereich sowie betreffend Probleme der Dübelverankerungen werden am Institut für Baustatik und Konstruktion weitergeführt. Zusätzliche Resultate und damit neue Erkenntnisse auf diesem Gebiet sollten in naher Zukunft zur Verfügung stehen.

### 11.3 Theoretisches Modell für achsialsymmetrisches Durchstanz

#### 11.3.1 Statisches System

Im Fall einer Achsialsymmetrie kann der Durchstanzwiderstand mit Hilfe einer frei aufgetragten Kreisplatte mit zentrischer Belastung untersucht werden. Das statische System, die Geometrie, die Belastung und die äusseren Reaktionen sind im Bild 11.1 ersichtlich.

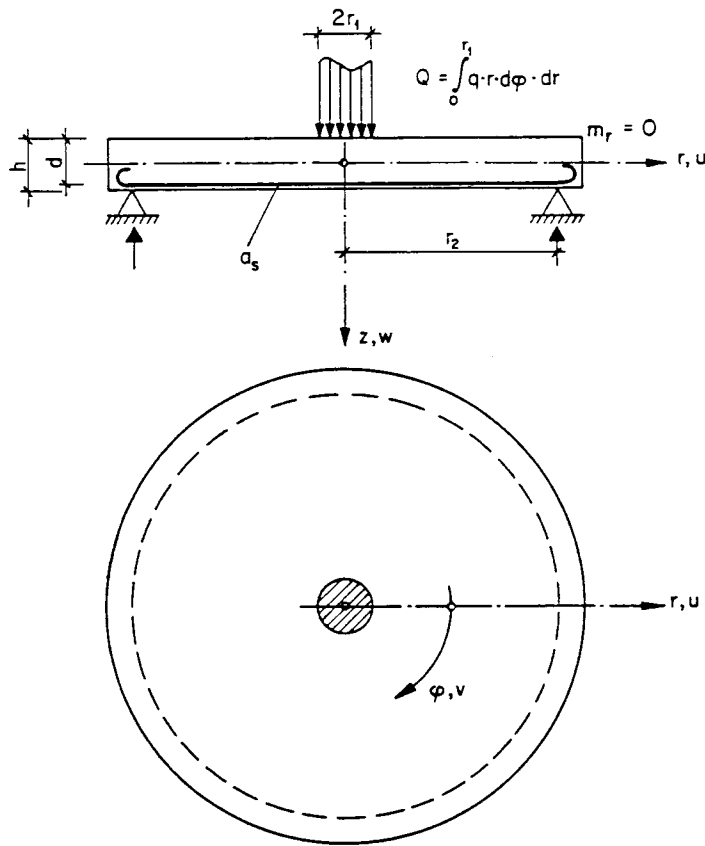
Die Gleichgewichtsbedingungen eines differentiellen Plattenelementes können aus den Gleichungen (8.8) und (8.9) von Kapitel 8 durch Nullsetzen von  $v_\varphi$  und  $m_{r\varphi}$  gewonnen werden:

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot v_r) + q \cdot r = 0 \quad (11.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot m_r) - m_\varphi - r \cdot v_r = 0$$

Als statische Randbedingung gilt:

$$m_r(r_2) = 0 \quad (11.2)$$



$Q$  = konzentrierte Belastung

$2 \cdot r_2$  = Spannweite

$2 \cdot r_1$  = Durchmesser der belasteten Zone

$h$  = Plattendicke

$d$  = statische Höhe

$a_s$  = Querschnitt der isotropen Bewehrung pro Einheitslänge

$$\omega = \frac{a_s \cdot f_{sy}}{d \cdot f_c}$$

$v_r(r)$  = Querkraft pro Laufmeter

Bild 11.1: Kreisplatte

### 11.3.2 Biege­widerstand einer Kreisplatte

Solange das Durchstanzen nicht massgebend ist, können Grenzwerte des Biege­widerstandes einer isotropen bewehrten Platte mit Hilfe der Bruchlinientheorie bestimmt werden. Kegelförmige Mechanismen mit radialen und tangentialen Gelenklinien werden für verschiedene Verteilungen der konzentrierten Belastungen angenommen. Durch Gleichsetzen der Leistungen der äusseren und inneren Kräfte kann der zugehörige Biege­widerstand berechnet werden:

$$Q_{R, \text{Biegung}} = 2 \cdot \pi \cdot m_{\phi R} \cdot \frac{1}{(1 - k_1 \cdot r_1 / r_2)} \quad (11.3)$$

Der  $k_1$ -Faktor ist von der Verteilung der Belastung abhängig. Im Bild 11.2 sind die verschiedenen Mechanismen mit den zugehörigen Faktoren dargestellt. Als Vergleichswert wird auch der Biege­widerstand einer tangential bewehrten Kreisringplatte angegeben.

Aus dem Bild 11.2 ist ersichtlich, dass sich der Biege­widerstand einer Kreisplatte von demjenigen einer Kreisringplatte nicht stark unterscheidet. Zum Beispiel für  $r_1/d = 1$  und  $r_1/r_2 = 1/8$  - diese Verhältnisse entsprechen einer Flachdecke mit einer Schlankheit von ca.  $1/36$  - beträgt der Unterschied ca. 14%. Daraus können folgende Feststellungen abgeleitet werden:

Statisches System	Kreisplatte			Kreisringplatte
Lastverteilung				
Mechanismus				
$k_i$ -Faktor $i=1,2,3,4$	1,0	2/3	0	0

Bild 11.2: Biege­widerstand

- Die Verteilung der konzentrierten Belastung hat einen relativ geringen Einfluss auf den Biege­widerstand.
- Der Vergleich des Widerstandes einer Kreisplatte mit demjenigen einer Kreisringplatte hat gezeigt, dass nur ein geringer Anteil des Biege­widerstandes aus der radialen Richtung kommt. Die Biegung bei konzentrierter Belastung wirkt hauptsächlich in der tangentialen Richtung.

Es ist jedoch zu beachten, dass die angenommenen Mechanismen relativ grosse Durchbiegungen verlangen bevor die für den gewählten statisch zulässigen Spannungszustand erforderliche Umlagerung der inneren Kräfte vollständig wird.

### 11.3.3 Modellbildung

Zur Untersuchung ihres Tragverhaltens und ihrer Tragfähigkeit wird die Kreisplatte durch eine kreisförmige, statisch äquivalente Sandwich-Struktur ersetzt. Diese besteht aus horizontalen Zug- und Druckscheiben und einer Gruppe Plattenstreifen (Bild 11.3). Die Zugscheibe wird durch die Bewehrung gebildet, währenddem die Druckscheibe aus Beton besteht. Die beiden Scheiben sollen primär die Normalspannungen aus den tangentialen Biegemomenten  $m_\varphi$  aufnehmen, während die Plattenstreifen diejenigen aus den radialen Momenten  $m_r$  und die

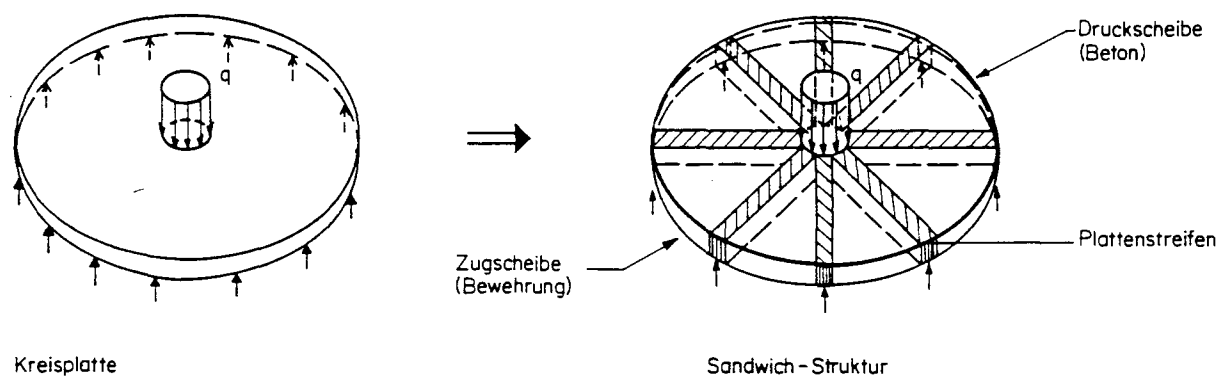


Bild 11.3: Kreisplatte: Modellbildung



Schubspannungen aus den Querkräften  $v_r$  übernehmen.

Bild 11.3 zeigt, dass die Plattenstreifen gleich gross und frei aufgelagert sind. Sie schneiden sich im Zentrum der Platte und sind aus achsialsymmetrischen Gründen gleichmässig verteilt. Ihre Höhe ist  $h$  und ihre Breite  $b_0 = 2 \cdot \pi \cdot r_1 / n$ , wobei  $n$  die Anzahl Plattenstreifen ist.

Zur Vereinfachung der Berechnung wird die konzentrierte Belastung durch eine in  $r = r_1$  wirkende Linienlast ersetzt.

In einer ersten Phase werden Grenzwerte der Tragfähigkeit (Biege- und Schubtragfähigkeit) untersucht. Im ersten Fall wird angenommen, dass nur die Plattenstreifen tragen. Im zweiten Fall wird die Tragfähigkeit einer kreisringförmigen Sandwich-Platte untersucht.

Als Materialgesetz werden die im Bild 11.4 dargestellten Fließbedingungen angenommen. Für den Beton gilt eine Fließbedingung vom Typ Coulomb, deren Gültigkeitsbereich auf der Zugseite durch die Zugfestigkeit beschränkt ist. Versuchsergebnisse haben gezeigt, dass der Winkel der inneren Reibung ca.  $37^\circ$  beträgt. Für die Bewehrung gelten die in den Kapiteln 1 und 4 gemachten Annahmen. Bild 11.4 zeigt die graphische Darstellung beider Fließbedingungen in der  $\sigma$ - $\tau$ -Ebene. Diese Art der Darstellung hat den Vorteil, dass die Plastizitätskontrolle, wie im Grundbau oder Felsbau, mit Hilfe Mohrscher Kreise erfolgen kann.

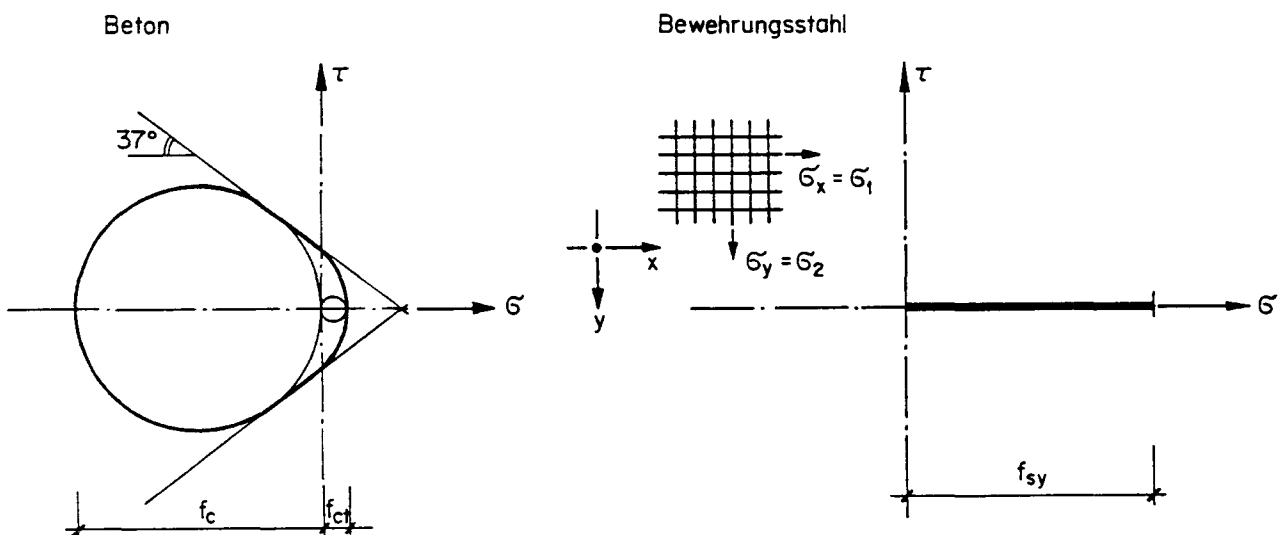
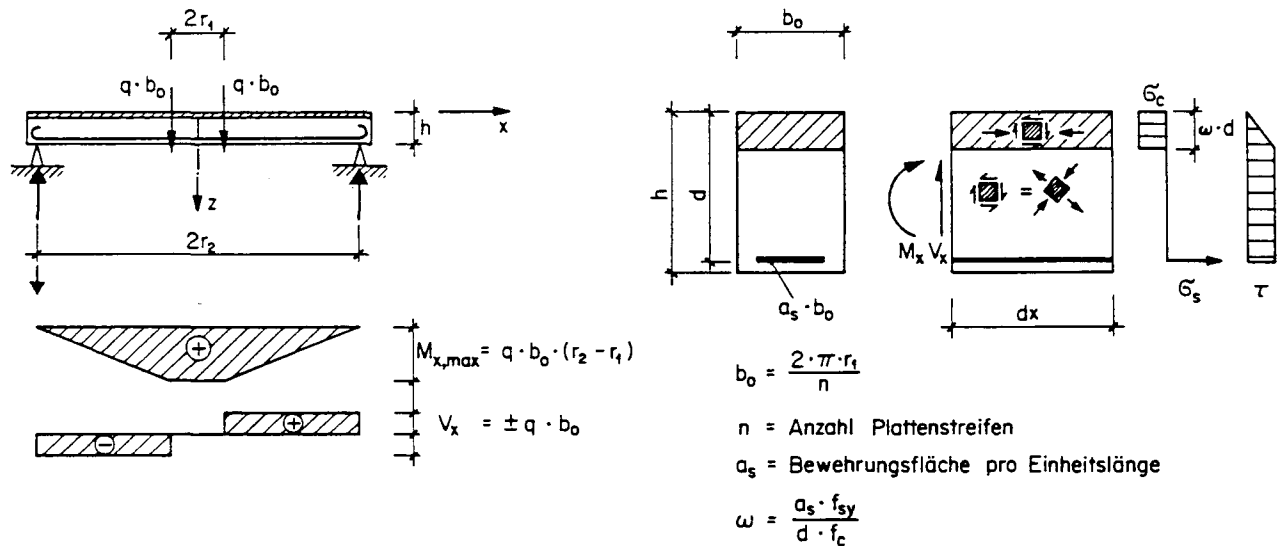


Bild 11.4: Fließbedingungen

### Plattenstreifen

Zur Abschätzung der Tragfähigkeit eines Plattenstreifens wird der im Bild 11.5 dargestellte zulässige Spannungszustand angenommen. Die Höhe der Druckzone ist konstant. Die Normalspannungen im Beton sind gleichmässig verteilt, während die Stahlspannungen einachsial sind. Die Verteilung der zugehörigen Schubspannungen wird mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen am Scheibenelement abgeleitet. Zur Vereinfachung der Berechnung wird angenommen, dass die Verteilung der Schubspannungen im gesamten Schubbereich über die Quer-

schnittshöhe konstant ist, d.h. die Belastung wird in  $r = r_1$  auf die gesamte Querschnittshöhe eingeleitet.



Statisches System

Querschnitt und Spannungsfeld

Bild 11.5: Plattenstreifen ohne Schubbewehrung

Die Grenzen der Tragfähigkeit werden entweder durch das Fließen der Biegebewehrung oder durch die Erschöpfung der Betonzugfestigkeit im Steg bestimmt.

- Biegebruch:

$$M_{x,max} = M_R$$

$$q_{R,Biegung} \cdot b_0 (r_2 - r_1) = f_c \cdot b_0 \cdot \omega \cdot d^2 \left(1 - \frac{\omega}{2}\right) \quad (11.4)$$

- Schubbruch:

$$\tau_{max} = + \sigma_1 = + f_{ct}$$

$$q_{R,Schub} \cdot b_0 = f_{ct} \cdot b_0 \cdot d \left(1 - \frac{\omega}{2}\right) \quad (11.5)$$

Mit  $V_x = q \cdot b_0$  und  $\tau = V_x / b_0 \cdot \omega \cdot d \left(1 - \frac{\omega}{2}\right)$  können folgende dimensionslose Beziehungen gewonnen werden:

- Biegebruch:

$$\frac{\tau(r_1)}{f_{ct}} = \frac{f_c}{f_{ct}} \cdot \frac{d}{(r_2 - r_1)} \cdot \omega \quad (11.6)$$

- Schubbruch:

$$\frac{\tau(r_1)}{f_{ct}} = 1 \quad (11.7)$$

Mit den Gleichungen (11.6) und (11.7) kann die Tragfähigkeit eines Plattenstreifens ohne Schubbewehrung abgeschätzt werden.

### Kreisringplatte

Zur Abschätzung der Tragfähigkeit einer Kreisringplatte wird wie beim Plattenstreifen vorgegangen.

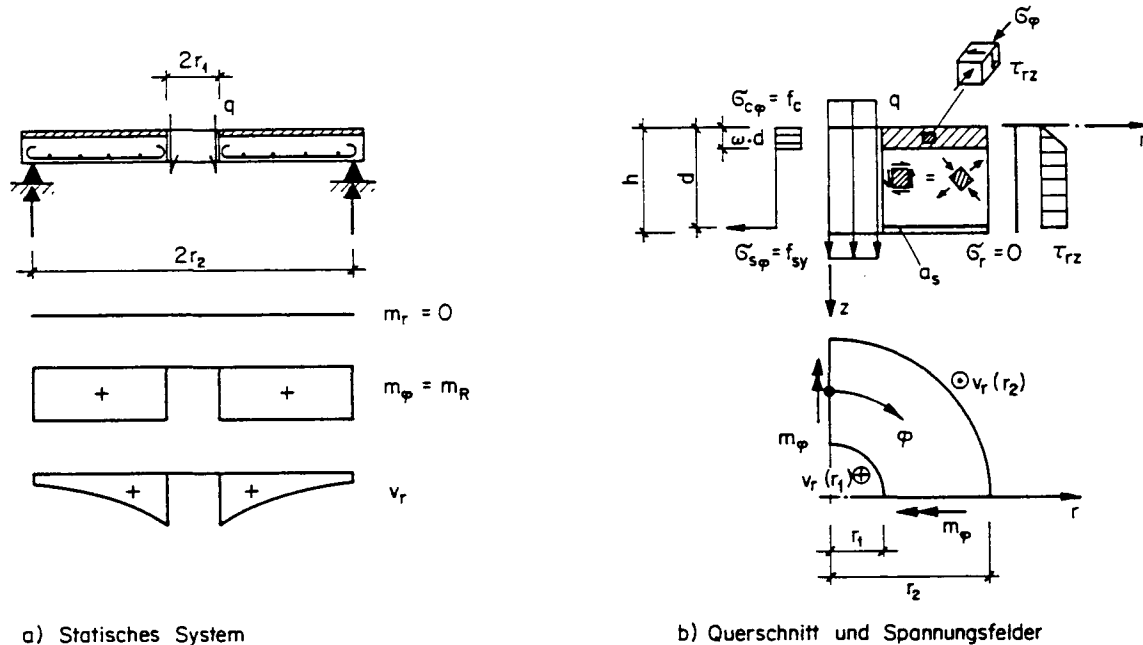


Bild 11.6: Kreisringplatte ohne Bügelbewehrung

Im Bild 11.6 ist das statische System mit dem für den Bruchzustand angenommenen statisch zulässigen Spannungsfeld ersichtlich. In der tangentialen Richtung wirken nur Normalspannungen  $\sigma_\phi$  aus den Momenten  $m_\phi$ , während in der radialen Richtung nur Schubspannungen  $\tau_{rz}$  aus den Querkraften  $v_r$  vorhanden sind. Analog zum Plattenstreifen wird der Tragwiderstand entweder durch das Fließen der Biegebewehrung oder durch die Erschöpfung der Betonzugfestigkeit des unter reinem Schub beanspruchten Steges erreicht. Der auf Schub am stärksten beanspruchte Querschnitt liegt bei  $r = r_1$ .

- Biegebruch:

$$m_\phi = m_{\phi R}$$

$$q_{R, \text{Biegung}} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_1 = 2 \cdot \pi \cdot m_{\phi R} = 2 \cdot \pi \cdot f_c \cdot \omega \cdot d^2 \left(1 - \frac{\omega}{2}\right) \quad (11.8)$$

- Schubbruch:

$$\tau_{\max} = + \sigma_1 = + f_{ct}$$

$$q_{R, \text{Schub}} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_1 = 2 \cdot \pi \cdot r_1 \cdot f_{ct} \cdot d \left(1 - \frac{\omega}{2}\right) \quad (11.9)$$

Mit  $v_r(r_1) = q$  und  $\tau(r_1) = v_r(r_1)/1 \cdot d(1-\omega/2)$  können, wie beim Plattenstreifen, folgende dimensionslose Beziehungen abgeleitet werden:

- Biegebruch:

$$\frac{\tau(r_1)}{f_{ct}} = \frac{f_c}{f_{ct}} \cdot \frac{d}{r_1} \cdot \omega \quad (11.10)$$

- Schubbruch:

$$\frac{\tau(r_1)}{f_{ct}} = 1 \quad (11.11)$$

Im Bild 11.7 sind die Gleichungen (11.6) und (11.7) für die Plattenstreifen sowie die Gleichungen (11.10) und (11.11) für die Kreisringplatte graphisch dargestellt.

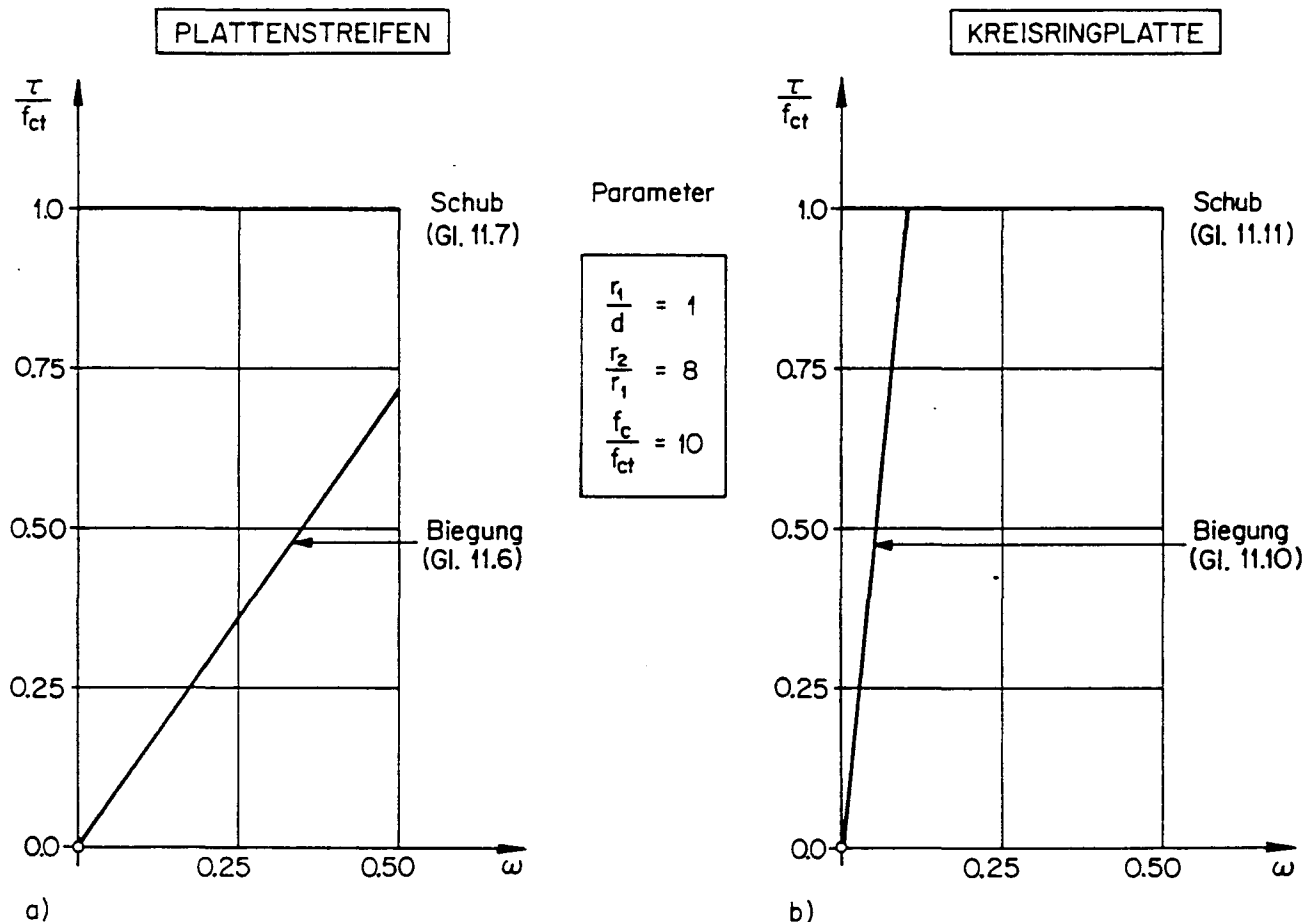


Bild 11.7: Bruchwiderstände

Aus Bild 11.7 ist ersichtlich, dass für einen gegebenen mechanischen Bewehrungsgehalt  $\omega < 0.5$  die Tragfähigkeit der Plattenstreifen von der Biegung und diejenige der Kreisplatte vom Schub abhängig ist. Daraus lässt sich schliessen, dass die beiden Systeme komplementäre Tragreserven besitzen. Das Verbinden der beiden Tragsysteme ermöglicht eine volle Aus-

nützung der Schubtragfähigkeit der Plattenstreifen. Dies entspricht aber genau dem Fall einer Kreisplatte, bei der das Durchstanzen massgebend wird.

#### 11.3.4 Tragwiderstand einer Kreisplatte

Der Tragwiderstand einer Kreisplatte aus Stahlbeton kann wie folgt bestimmt werden:

1. Für den im Abschnitt 11.3.3 gewählten statisch zulässigen Spannungszustand wird die maximale Schubtragfähigkeit der Plattenstreifen berechnet. Dadurch ist die "Durchstanzlast" bestimmt.
2. Für die berechnete Durchstanzlast wird dann mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen das zugehörige Momentenfeld abgeleitet.
3. Schliesslich wird nachgewiesen, dass die Fließbedingungen nirgends verletzt sind.

#### Schubtragfähigkeit der Plattenstreifen

Die Berechnung der maximalen Schubtragfähigkeit der Plattenstreifen kann mit Hilfe folgender Annahme auf diejenige eines Schubwandelementes (Kapitel 4) zurückgeführt werden. Es wird angenommen, dass die Bügelbewehrung des Schubwandelementes durch eine in Funktion der Betonfestigkeit ausgedrückte nominelle Schubbewehrung ersetzt wird. Der mechanische Bewehrungsgehalt dieser nominellen Schubbewehrung beträgt

$$\omega_c = \frac{f_{ct} \cdot A_c}{f_c \cdot A_c} = \frac{f_{ct}}{f_c} \quad (11.12)$$

Der mechanische Bewehrungsgehalt eines Querschnittes  $\omega$  entspricht dem Verhältnis maximale Zugkraft/maximale Druckkraft, welche durch diesen Querschnitt aufgenommen werden können.

Wird angenommen, dass im Bruchzustand die Spannungen der Längsbewehrung die Fließgrenze und diejenigen der Schubbewehrung die Betonzugfestigkeit erreichen, dann kann die maximale Schubspannung mit Hilfe der Gleichungen (4.13) und (4.14) berechnet werden.

$$\tau_{cR} = f_c \cdot \sqrt{\omega \cdot \omega_c} \quad (11.13)$$

mit  $\cot \alpha = \sqrt{\omega / \omega_c} \quad (11.14)$

$$\omega + \omega_c \leq 1 \quad (11.15)$$

Bild 11.8 zeigt die maximale Schubspannung in Funktion der Längsbewehrung und verschiedene Werte der Betonzugfestigkeit. Im Fall einer Kreisplatte entspricht die Längsbewehrung der radialen Biegebewehrung.

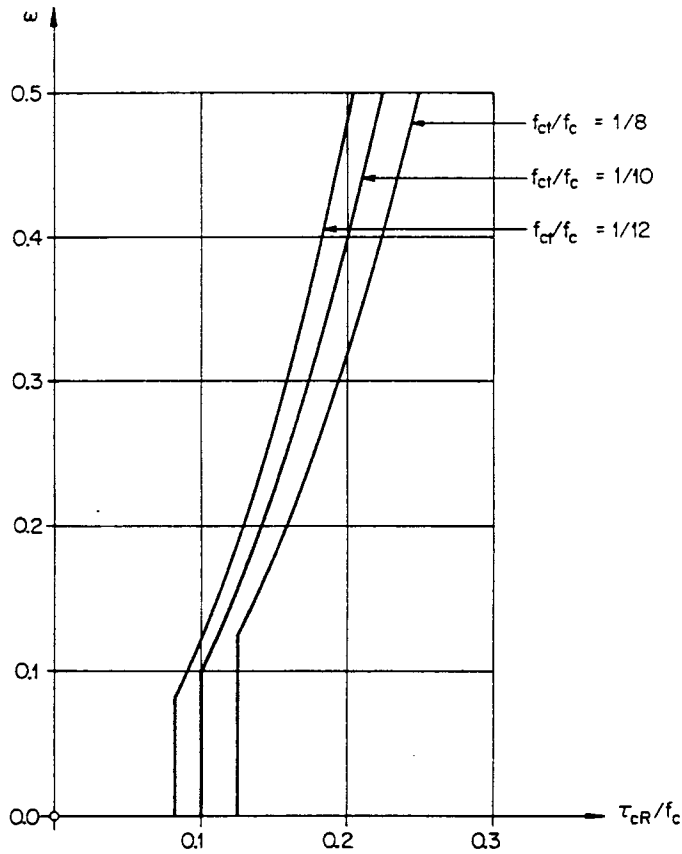
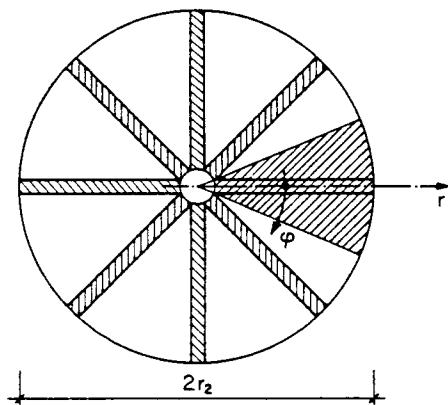
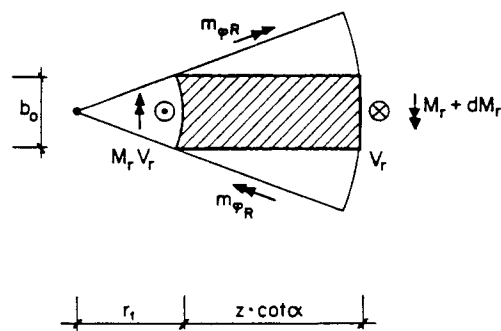


Bild 11.8: Durchstanzen: Maximale Schubspannung in Funktion der Biegebewehrung

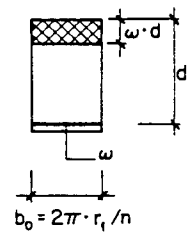
Statisches Modell



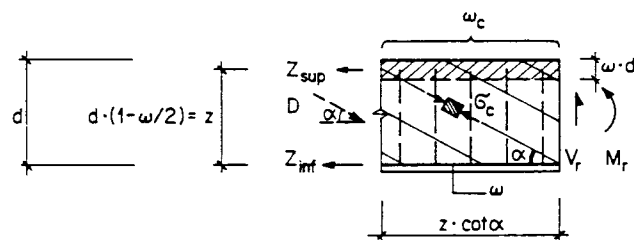
Sektorelement



Querschnitt



innere Kräfte



Schnittkräfte

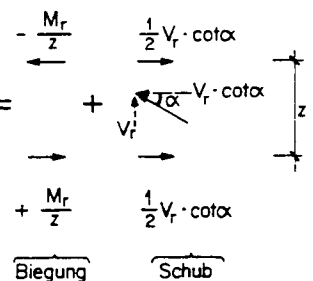


Bild 11.9: Differentielles Element eines Plattenstreifens

Mit den Gleichungen (11.13), (11.14) und (11.15) ist somit die Berechnung der Tragfähigkeit eines Plattenstreifens auf diejenige eines Balkens zurückgeführt. Bild 11.9 zeigt ein differentielles Element eines Plattenstreifens mit den Resultierenden der äusseren und inneren Schnittkräfte. Die äusseren Schnittkräfte der radialen Richtung betragen

$$M_r = m_r(r_1) \cdot b_0 \quad (11.16)$$

$$V_r = v_r(r_1) \cdot b_0$$

Aus den Gleichgewichtsbedingungen können die Stringer- und die Biegelkraft gewonnen werden:

$$Z_{\text{sup}} = -\frac{M_r}{z} + \frac{1}{2} \cdot V_r \cdot \cot \alpha \quad (11.17)$$

$$Z_{\text{inf}} = \frac{M_r}{z} + \frac{1}{2} \cdot V_r \cdot \cot \alpha \quad (11.18)$$

$$Z_w = D \cdot \sin \alpha = V_r = \tau_{rz} \cdot b_0 \cdot z \quad (11.19)$$

Die Plastizitätsbedingung verlangt:

$$-Z_{\text{sup,R}} \leq Z_{\text{sup}} \leq 0$$

$$0 \leq Z_{\text{inf}} \leq Z_{\text{inf,R}} \quad (11.20)$$

$$0 \leq Z_w \leq Z_{wR}$$

Die maximale Schubtragfähigkeit ist erreicht für

$$Z_{\text{sup,R}} = 0$$

$$Z_{\text{inf,R}} = Z_{\text{sy}} = a_s \cdot b_0 \cdot f_{\text{sy}} \quad (11.21)$$

$$Z_w = Z_{wR} = \tau_{\text{cR}} \cdot b_0 \cdot z$$

Durch Einsetzen der Gl. (11.21) in die Gleichungen (11.17), (11.18) und (11.19) und Lösen des Gleichungssystems werden die Schubtragfähigkeit und die Biegetragfähigkeit des Elementes bestimmt.

$$V_{rR} = \tau \cdot b_0 \cdot z = f_c \cdot \sqrt{\omega \cdot \omega_c} \cdot b_0 \cdot z \quad (11.22)$$

$$M_{rR} = \frac{1}{2} \cdot Z_{\text{sy}} \cdot z \quad (11.23)$$

$$V_{rR} = Z_{wR} \quad (11.24)$$

Aus den Gleichungen (11.23) und (11.24) ist ersichtlich, dass die Hälfte der radialen Biegebewehrung zur Aufnahme der radialen Zugkräfte infolge der Querkraft gebraucht wird. Des-

wegen kann das radiale Biegemoment in  $r = r_1$  nur den halben Wert des gesamten plastischen Momentes  $m_R$  aufweisen.

Die Durchstanzlast ist somit gleich der Summe der Schubtragfähigkeiten der einzelnen Plattenstreifen und beträgt

$$Q_{CR} = n \cdot f_c \cdot \sqrt{\omega \cdot \omega_c} \cdot b_0 \cdot z$$

$$Q_{CR} = 2 \cdot \pi \cdot r_1 \cdot d \left(1 - \frac{\omega}{2}\right) \cdot f_c \cdot \sqrt{\omega \cdot \omega_c} = 2 \cdot \pi \cdot r_1 \cdot z \cdot \sqrt{\rho \cdot f_{sy} \cdot f_{ct}} \quad (11.25)$$

Die Durchstanzlast kann also in qualitativer Form wie folgt angeschrieben werden:

$Q_{CR}$ Durchstanzlast	=	$u(r_1) \cdot z$ Fläche eines kritischen Querschnittes	x	$\tau_{CR}(\omega, f_{ct})$ kritische Schubspannung
----------------------------	---	--	---	--

wobei  $\omega$  den mechanischen Bewehrungsgehalt der isotropen Biegebewehrung und  $f_{ct}$  die direkte Zugfestigkeit des Betons darstellen.

Zugehörige Momentenfelder können durch Integrieren der differentiellen Gleichgewichtsgleichungen (11.1) unter Berücksichtigung der Kompatibilitätsbedingungen bestimmt werden. Die folgende Lösung erfüllt die Bedingungen des unteren Grenzwertsatzes:

Bereich  $0 \leq r \leq r_1$

- Randbedingungen:

$$q = 0$$

$$v_r = 0$$

$$m_r(r_1) = \frac{1}{2} \cdot m_R$$

$m_r = \frac{1}{2} \cdot m_R$
$m_\varphi = \frac{1}{2} \cdot m_R$

Bereich  $r_1 \leq r \leq r_3$

- Ansätze:

$$r_3 = r_1 + z \cdot \cot \alpha$$

$$m_\varphi = m_R$$

- Randbedingungen:

$$m_r^1(r_1) = m_r^r(r_1) = \frac{1}{2} \cdot m_R$$

$m_r = m_R \cdot \left(1 - \frac{r_1}{2 \cdot r}\right) - \frac{Q_{CR}}{2 \cdot \pi} \cdot \left(1 - \frac{r_1}{r}\right)$
$m_\varphi = m_R$



Bereich  $r_3 \leq r \leq r_2$

- Ansatz:

$$m_r = C_1 \cdot \ln \frac{r}{r_2}$$

- Randbedingungen:

$$m_r^l(r_3) = m_r^r(r_3)$$

$$m_r(r_2) = 0$$

$$m_r = C_1 \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$m_\varphi = C_1 \cdot \left( \ln \frac{r}{r_2} + 1 \right) + \frac{Q_{cR}}{2 \cdot \pi}$$

$$C_1 = \frac{1}{\ln \frac{r_3}{r_2}} \cdot \left[ m_R \cdot \left( \frac{1-r_1}{2 \cdot r_3} \right) - \frac{Q_{cR}}{2 \cdot \pi} \cdot \left( 1 - \frac{r_1}{r_3} \right) \right]$$

Bild 11.10 zeigt die graphische Darstellung dieser theoretischen Lösung. Im gleichen Bild ist der mutmassliche Momentenverlauf, der aus den Versuchsergebnissen gewonnen wurde, ersichtlich.

Es ist festzustellen, dass auch bei der präsentierten theoretischen Lösung (Bild 11.9) die Konzentration der Biegebeanspruchungen innerhalb der Durchstanzzone deutlich erkennbar ist. Dies stimmt mit den Versuchsergebnissen gut überein [11.1], [11.2], [11.3].

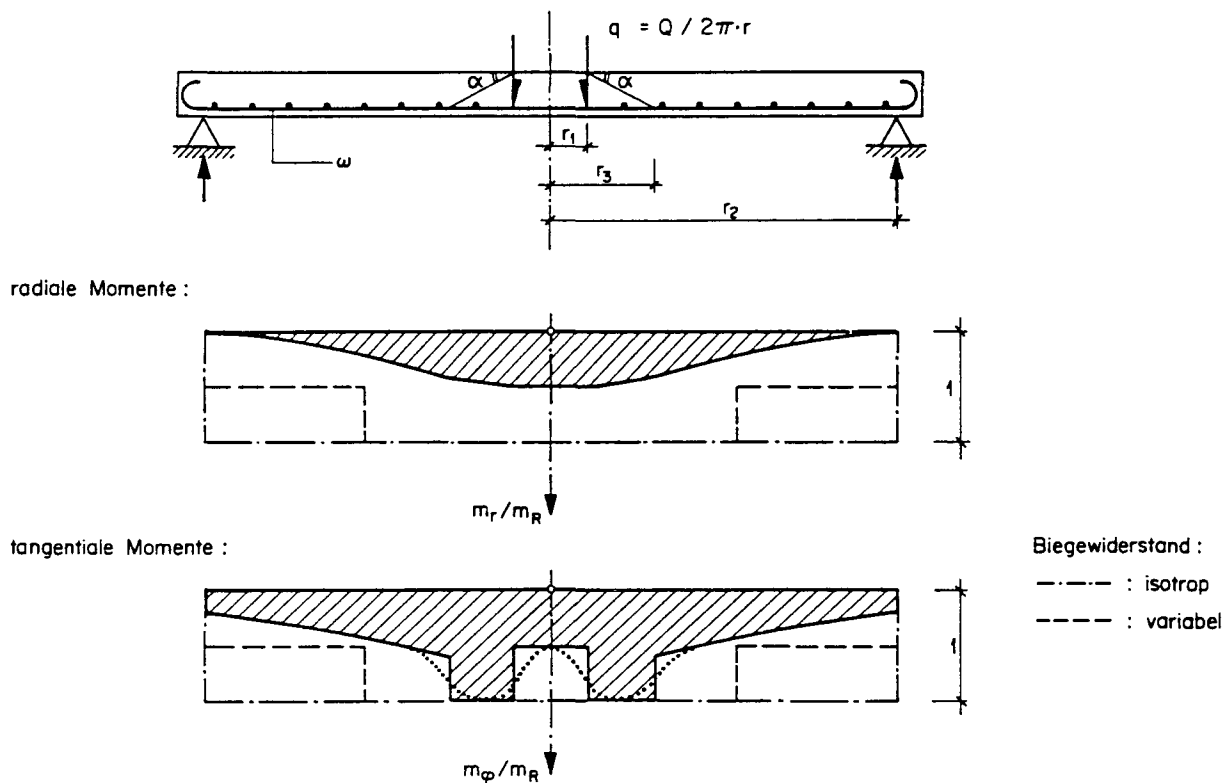


Bild 11.10: Kreisplatte mit konzentrierter Belastung; statisch zulässiges Momentenfeld

### 11.3.5 Bügelbewehrung

Mit einem ähnlichen Vorgehen wie im Abschnitt 11.3.4 wird die Wirkung einer Schubbewehrung bestimmt. Im Fall einer Schubbewehrung wird der mechanische Bewehrungsgehalt wie folgt definiert:

$$\omega_w = \frac{a_{sw} \cdot f_{sy}}{b_o \cdot f_c} \quad (11.26)$$

wobei  $a_{sw}$  die Buegelflaeche pro Einheitslaenge der Plattenstreifen und  $b_o$  die Breite der einzelnen Plattenstreifen bezeichnen.

In der Gleichung (11.25) wird  $\omega_c$  durch  $\omega_w$  ersetzt, und somit wird die Durchstanzlast einer Kreisplatte mit Buegelbewehrung bestimmt:

$$Q_{WR} = 2 \cdot \pi \cdot r_1 \cdot d \cdot \left(1 - \frac{\omega}{2}\right) \cdot f_c \cdot \sqrt{\omega \cdot \omega_w} \quad (11.27)$$

Solange  $\omega + \omega_w \leq 1$  ist, werden die Betonspannungen in den Stegen der Plattenstreifen nicht massgebend.

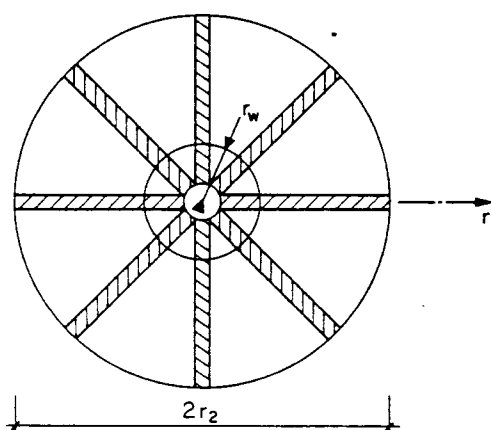
Analog zum Abschnitt 11.3.6 kann ein zu  $Q_{WR}$  zugehoeriges Momentenfeld abgeleitet werden.

Bild 11.11 zeigt eine Kreisplatte mit einer Schubbewehrung. Der Radius  $r_w$  entspricht der radialen Entfernung, bis zu der die Buegelbewehrung zu versetzen ist. Diese wird aufgrund der Bedingung berechnet, dass ab  $r_w$  der Beton allein die gesamte Belastung aufnehmen muss.

$$r_w = \sqrt{\frac{\omega_w}{\omega_c}} \cdot r_1 \quad (11.28)$$

Aus der Gleichung (11.17) ist ersichtlich, dass die Zugkraft  $\frac{1}{2} \cdot V_r \cdot \cot \alpha$  groesser als die Druckkraft  $M_r / z$  wird. Dies bedeutet, dass die Zugkraftresultierende dieser beiden Kraefte durch eine entsprechende Bewehrung aufgenommen werden muss.

Statisches Modell:



Plattenstreifen:

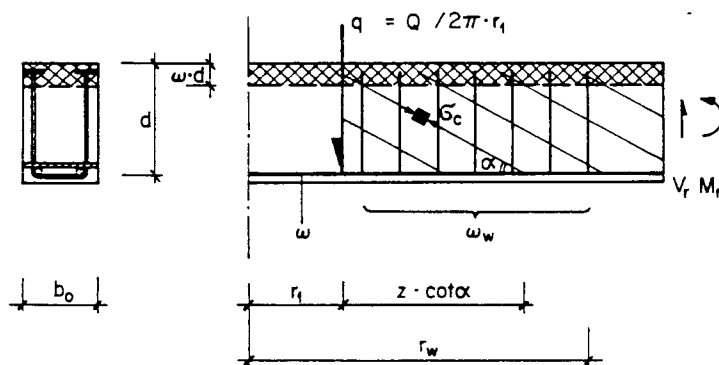


Bild 11.11: Kreisplatte mit Schubbewehrung

### 11.3.6 Rechteckige Stütze

Die in den vorangehenden Abschnitten abgeleiteten Formeln wurden für kreisförmige Stützen hergeleitet. Für flächengleiche quadratische Stützen können die gleichen Formeln verwendet werden.

Bei rechteckigen Stützen mit Abmessungen  $a \cdot b$  (Bild 11.12) gelten die Annahmen des achsial-symmetrischen Durchstanzens für die beiden Stützenenden (Zone 1). Die Schubtragfähigkeit dieser beiden Teile kann mit der Gleichung (11.25) berechnet werden.

Im zentralen Stützenbereich trägt die Platte wie ein Plattenstreifen (Zone 2). Im Abschnitt 11.3.3 wurde gezeigt, dass die Tragfähigkeit solcher Plattenelemente vorwiegend von der Biegebeanspruchung abhängig ist. Die zugehörige Querkraft kann mit Hilfe der Gleichung (11.6) berechnet werden.

Die Durchstanzlast rechteckiger Stützen kann somit wie folgt berechnet werden:

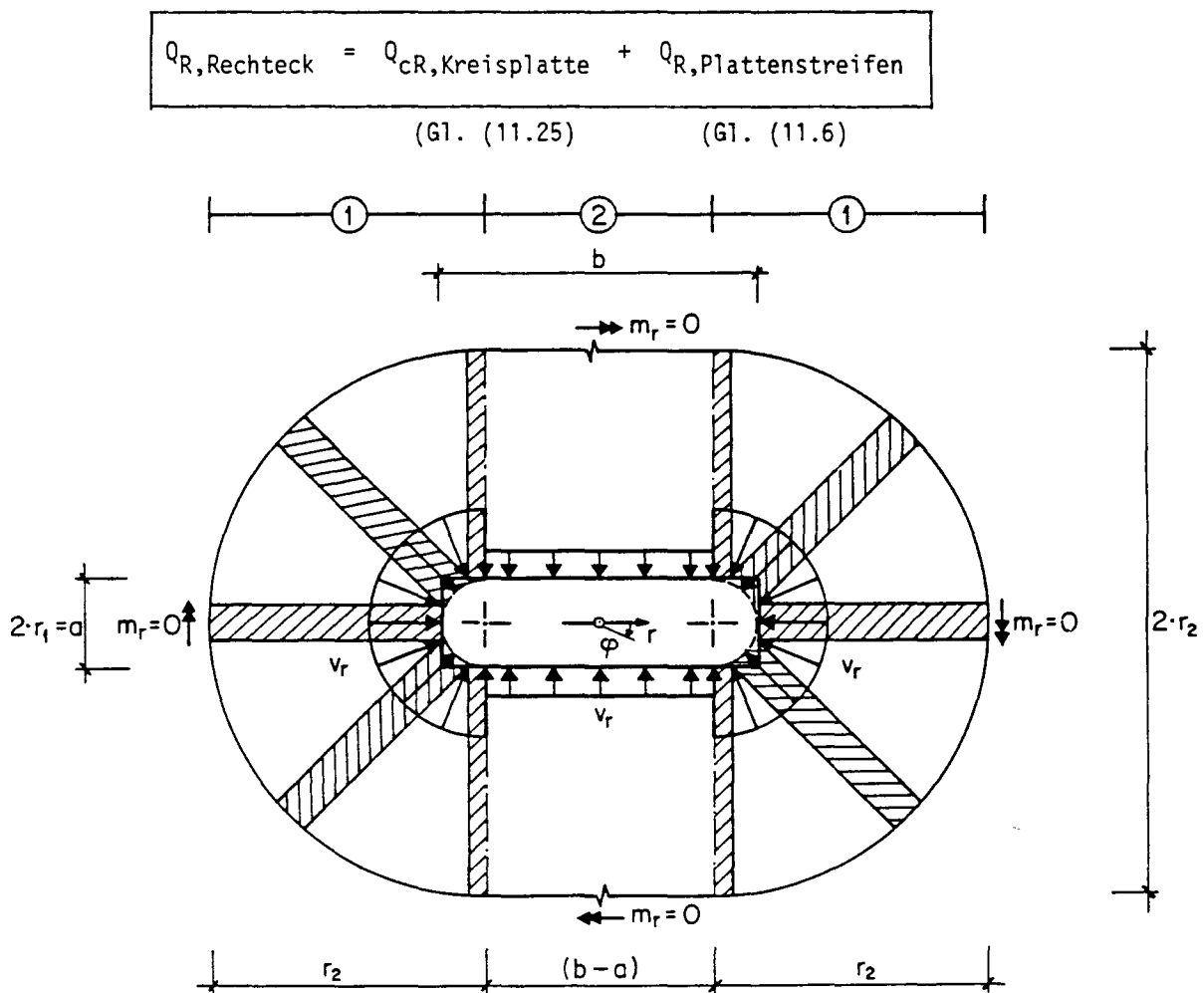


Bild 11.12: Rechteckige Stütze

Das Bild 11.12 zeigt die Verteilung der Reaktionskraft entlang dem Stützenumfang.

#### 11.4 Einfluss der Vorspannung

Neuere Versuche haben gezeigt, dass die Vorspannung bei richtiger Spanngliederanordnung das Durchstanzproblem wesentlich entschärfen kann. Durch ihre Anwendung können folgende günstige Wirkungen für den Durchstanzwiderstand erreicht werden:

- Durch die Umlenkkräfte aus der Vorspannung wird ein Teil der Lasten direkt in die Stützen eingeleitet. Diese Lastübertragung erfolgt im Gegensatz zu einer schlaffen Bewehrung, ohne konzentrierte Deformationen im Stützenbereich zu verursachen.
- Bei Rand- und Eckstützen erzeugen die Druckspannungen aus den Vorspannkraften einen sehr günstigen Spannungszustand im Beton und somit eine Erhöhung des Durchstanzwiderstandes.
- Die innerhalb des Durchstanzkegels angeordneten Spannglieder können nach dem Durchstanzen ein sauberes Hängewerk ausbilden und somit einen plötzlichen Einsturz der Decke verhindern. Bei zunehmenden Durchbiegungen kann das Hängewerk eine ähnliche bzw. grössere Last als die Durchstanzlast aufnehmen und somit viel Energie absorbieren. Diese Eigenschaft des Hängewerks könnte bei speziellen Bauten, wie z.B. Zivilschutzbauten, sehr wertvoll sein.

#### 11.5 Durchstanzbemessung

Bei der Durchstanzbemessung muss folgende Ungleichung erfüllt sein:

$$\frac{V_R}{1.3} = V_{Rd} \geq V_d = 1.4 \cdot V \quad (11.30)$$

$V_R$  ist der Durchstanzwiderstand der Stahlbetonplatte und  $V$  ist die maximale Reaktionskraft oder konzentrierte Last im Gebrauchszustand.

Aus praktischen Gründen wird die Berechnung des Widerstandes gegen zentrisches Durchstanzen mit Hilfe des folgenden vereinfachten Verfahrens durchgeführt:

$$\boxed{\text{Durchstanzwiderstand}} = \boxed{\text{normierte Querschnittsfläche}} \times \boxed{\text{normierte Schubspannung}}$$

Dieses Verfahren wurde zur Revision der Norm SIA 162 vorgeschlagen und wie folgt formuliert:

$$\underline{V_R} = u \cdot z \cdot \tau'_R \quad (11.31)$$

Es bedeuten:

- $u$  = normierter Umfang (Bild 11.13)
- $z$  = Hebelarm der inneren Kräfte aus der Biegung
- $\tau'_R$  = normierte Schubspannung für das Durchstanzen

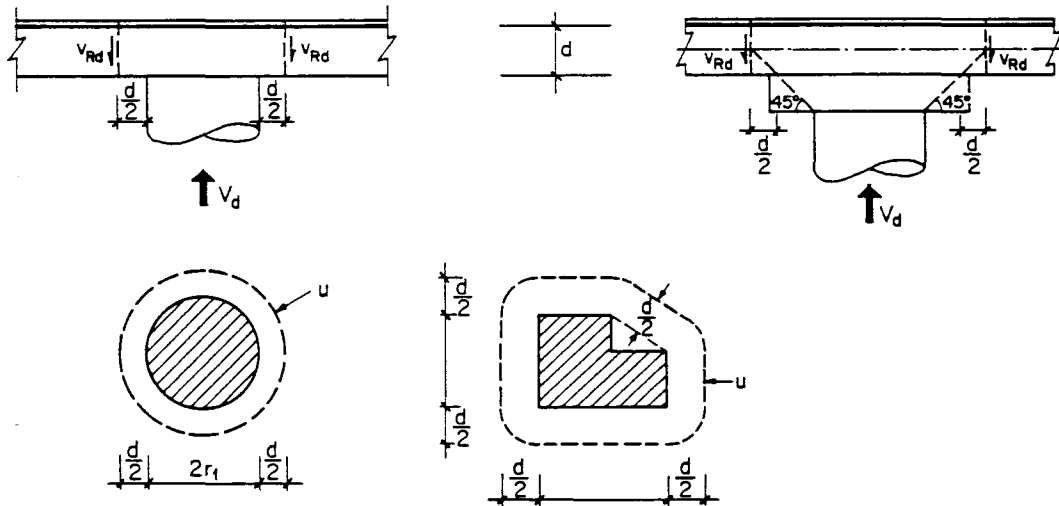


Bild 11.13: Durchstanzen

Die Bemessungsformel (11.31) gilt, sofern der Umfang  $u \leq 16 \cdot d$  ist, kein der Stütze umschriebenes Rechteck ein Seitenverhältnis von mehr als 2.1 aufweist, und wenn die Stütze sich weder in der Nähe grösserer konzentrierter Kräfte noch in der Nähe von Plattenrändern oder Aussparungen befindet.

Der minimale Biegebewehrungsgehalt im Stützenbereich wird in der Norm festgelegt.

Wird eine Durchstanzbewehrung notwendig, so ist diese mit Hilfe eines räumlichen Fachwerkmodells mit unter  $45^\circ$  zur Plattenebene geneigtem Betondruckfeld zu bemessen. Der maximal in Rechnung zu stellende Widerstand darf jedoch den Wert

$$V_{R,\max} = u \cdot z \cdot 3 \cdot \tau_R = 2 \cdot V_R \quad (11.32)$$

nicht überschreiten.

Im Anhang wird ein räumliches Fachwerkmodell für eine Innenstütze dargestellt.

### Wirkung der Vorspannung

Die im Bereich des Durchstanzkegels direkt abgetragenen Umlenkräfte aus der Vorspannung können berücksichtigt werden. Die Umlenkräfte sind als zusätzliche Widerstände einzuführen. Dabei ist mit der Vorspannkraft nach Abzug aller Verluste und ohne Spannungszuwachs zu berechnen.

Bild 11.14 zeigt einen typischen Querschnitt einer vorgespannten Flachdecke im Bereich einer Stütze.

Die Resultierende der Umlenkräfte  $V_p$  wird wie folgt berechnet (Bild 11.14 (a)):

$$V_p = \sum P_\infty \cdot \alpha_j \quad (11.33)$$

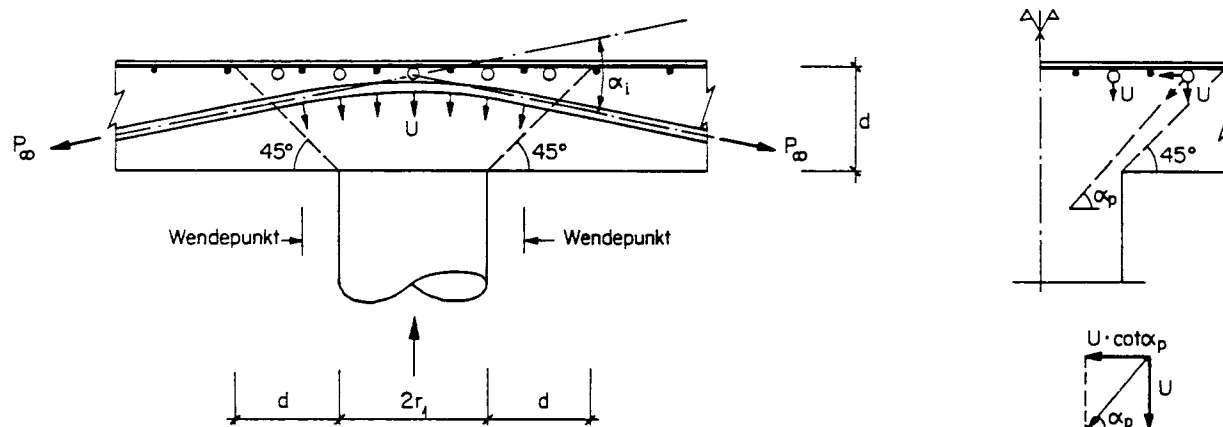


Bild 11.14: Umlenkkräfte aus der Vorspannung

Werden die Umlenkkräfte der Spannglieder, die innerhalb eines Abstandes  $d$  des Stützenrandes liegen, mitberechnet, dann muss ihre Einleitung in die Stütze durch zugehörige Verankerungskräfte  $u \cdot \cot \alpha_p$  gewährleistet sein (Bild 11.14 (b)).

#### LITERATUR

- [11.1] Marti P., Pralong J., Thürlimann B.: "Schubversuche an Stahlbetonplatten", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Versuchsbericht Nr. 7305-2, Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart, Sept. 1977.
- [11.2] Pralong J., Brändli W., Thürlimann B.: "Durchstanzversuche an Stahlbeton- und Spannbetonplatten", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Versuchsbericht Nr. 7305-3, Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart, Dezember 1979.
- [11.3] Brändli W., Müller F.X., Thürlimann B.: "Bruchversuch an Stahlbeton- und Spannbetonplatten bei Rand- und Eckstützen", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Versuchsbericht Nr. 7305-4, Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart, Mai 1982.
- [11.4] Pralong J.: "Poinçonnement symétrique des planchers-dalles", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Bericht Nr. 131 (Dissertation), Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart, Juni 1982.

Das Bild 11.15 zeigt ein aus einem räumlichen Fachwerk ausgeschnittenes Sektorelement mit einem Öffnungswinkel  $d\varphi$  sowie die auf dieses Element wirkenden äusseren Kräfte. Die Resultierenden der inneren Kräfte in den verschiedenen Fachwerkelementen sind qualitativ angegeben.

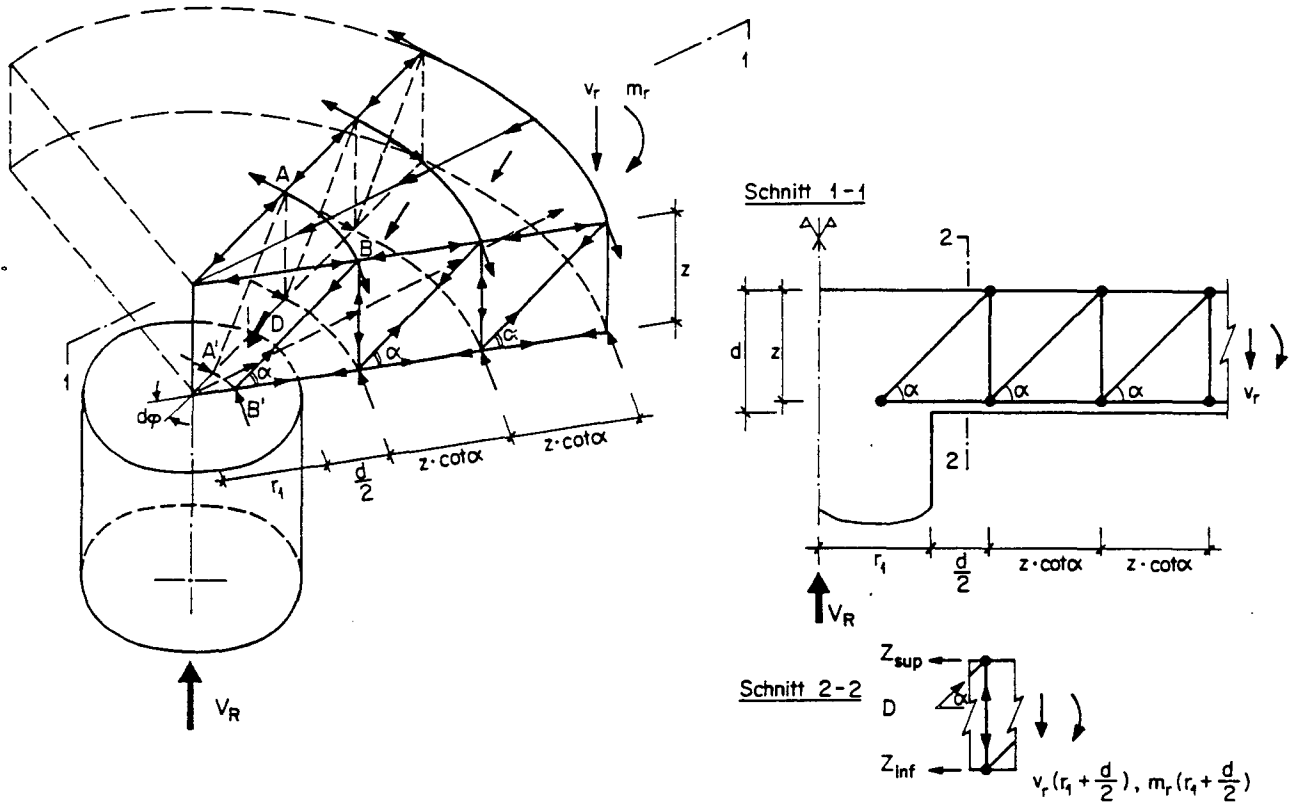


Bild 11.15: Räumliches Fachwerk

Wird im Schnitt 2-2 (Bild 11.15) das Gleichgewicht in der radialen Richtung nachgewiesen, ergibt sich

$$\Sigma \uparrow = 0 \quad D \cdot \sin \alpha - V_r \left( r_1 + \frac{d}{2} \right) = 0 \tag{11.34}$$

$$\Sigma \rightarrow = 0 \quad Z_{\text{sup}} - D \cdot \cos \alpha + Z_{\text{inf}} = 0 \tag{11.35}$$

$$\Sigma M = 0 \quad Z_{\text{inf}} \cdot z + M_r \left( r_1 + \frac{d}{2} \right) = 0 \tag{11.36}$$

Es bedeuten mit  $r = r_1 + \frac{d}{2}$  :

$$V_r(r) = v_r(r) \cdot \bar{r} \cdot d\varphi = \frac{V}{2 \cdot \pi} \cdot d\varphi \tag{11.37}$$

$$M_r(r) = m_r(r) \cdot r \cdot d\varphi \tag{11.38}$$

$D$  = Druckresultierende in der kegelstumpfförmigen Schale  $A B A' B'$

Wird angenommen, dass im Schnitt 2-2 die isotrope Biegebewehrung fließt, d.h.

$m_{R\varphi} = m_{rR} = m_R$ , dann ergeben sich folgende radiale Widerstände:

$$Z_{\text{sup},R} = \frac{m_R}{z} \cdot r \cdot d\varphi + m_R \cdot \cot\alpha \cdot d\varphi \quad (11.39)$$

$$Z_{\text{inf},R} = \frac{m_R}{z} \cdot r \cdot d\varphi - m_R \cdot \cot\alpha \cdot d\varphi \quad (11.40)$$

$$\frac{V_{wR}}{2 \cdot \pi} \cdot d\varphi = a_{sw} \cdot f_{sy} \cdot r \cdot d\varphi \quad (11.41)$$

Durch Lösen des Gleichungssystems (11.34), (11.35) und (11.36) sowie Einsetzen ergibt sich

$$D = V_r(r) \cdot \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{V}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{\sin\alpha} \cdot d\varphi \quad (11.42)$$

$$Z_{\text{inf}} = - M_r(r) \cdot \frac{1}{z} = - m_r(r) \cdot \frac{r}{z} \cdot d\varphi \quad (11.43)$$

$$Z_{\text{sup}} = + M_r(r) \cdot \frac{1}{z} + V_r(r) \cdot \cot\alpha = m_r(r) \cdot \frac{r}{z} \cdot d\varphi + \frac{V}{2 \cdot \pi} \cdot \cot\alpha \cdot d\varphi \quad (11.44)$$

Im Bruchzustand verlangt die Fließbedingung, dass

$$Z_{\text{sup}} \leq Z_{\text{sup},R} \quad (11.45)$$

$$Z_{\text{inf}} \geq Z_{\text{inf},R} \quad (11.46)$$

$$D \geq D_R \quad (11.47)$$

$$V \leq V_{wR} \quad (11.48)$$



## Bezeichnungen

---

Grundlage der Bezeichnungen sind die ISO-Vorschriften (Internationale Normen-Organisation). Angelehnt an die CEB-Vorschriften (Euro-Internationales Beton-Komitee) wurden die Bezeichnungen in die neue, zur Zeit in Revision befindliche Norm SIA 162 übernommen. Die vorliegende Vorlesung stützt sich im wesentlichen auf die Bezeichnungen der neuen Norm SIA 162 ab.

Die in der Vorlesung hauptsächlich verwendeten Bezeichnungen werden im folgenden zusammengestellt.

### 1. Lateinische Grossbuchstaben

---

A	Fläche
	$A_C$ Betonfläche
	$A_p$ Querschnittsfläche Spannstahl
	$A_s$ Querschnittsfläche Bewehrungsstahl
D	Plattensteifigkeit, Druckkraft
E	Elastizitätsmodul
	$E_C$ Elastizitätsmodul Beton
	$E_p$ Elastizitätsmodul Spannstahl
	$E_s$ Elastizitätsmodul Bewehrungsstahl
F	Last allgemein, lokale Last, Kraft
G	ständige Last, Schubmodul
I	Trägheitsmoment
L	Leistung
M	Biegemoment
	$M_r$ Rissmoment
	$M_R$ Bruchmoment
	$M_y$ Fliessmoment
N	Normalkraft
	$N_r$ Rissnormalkraft
	$N_R$ Bruchnormalkraft
	$N_y$ Fliessnormalkraft
P	Vorspannkraft
Q	Variable Last
R	Auflagerreaktion, Widerstand
S	Beanspruchung, Schnittkraft, statisches Moment

T	Torsionsmoment
	$T_r$ Risstorsionsmoment
	$T_R$ Bruchtorsionsmoment
	$T_y$ Fliesstorsionsmoment
U	Umlenkkraft
V	Querkraft
	$V_r$ Rissquerkraft
	$V_R$ Bruchquerkraft
	$V_y$ Fliessquerkraft
W	Widerstandsmoment (elastisch)
X, Y, Z	Kraft in x-, y-, z-Richtung
Z	Zugkraft, Widerstandsmoment (plastisch)

## 2. Lateinische Kleinbuchstaben

a	Distanz, Strecke Bewehrungsquerschnitt pro Einheitslänge
b	Breite
d	statische Höhe
e	Exzentrizität
f	Materialfestigkeit
	$f_{ck}$ Rechenwert der Betondruckfestigkeit
	$f_c$ effektive Betondruckfestigkeit
	$f_{ct}$ Betonzugfestigkeit
	$f_{sy}$ Rechenwert der Streckgrenze des Bewehrungsstahls
	$f_{st}$ Rechenwert der Zugfestigkeit des Bewehrungsstahls
	$f_{py}$ Rechenwert der Streckgrenze des Spannstahls
	$f_{pt}$ Rechenwert der Zugfestigkeit des Spannstahls
g	verteilte ständige Last
h	totale Querschnittshöhe, Dicke, Plattendicke
l	Spannweite, Länge
m	Biegemoment pro Einheitslänge
n	Normalkraft pro Einheitslänge
p	Vorspannkraft pro Einheitslänge
q	verteilte Nutzlast

r	Radius, Zylinderkoordinate
s	Abstand, Bügelabstand
t	Zug, Torsionsmoment pro Einheitslänge, Wandstärke, Plattendicke bei Plattenbalken
u, v, w	Verschiebungen in x-, y-, z-Richtung
u	Umfang, Umlenkkraft pro Einheitslänge
v	Querkraft pro Einheitslänge
w	Rissbreite
x, y, z	Koordinaten
x	Neutralachsenabstand
z	innerer Hebelarm

### 3. Griechische Klein- und Grossbuchstaben

$\alpha$	Winkel, Neigung des Betondruckfeldes
$\beta$	Winkel, Neigung der Bügelbewehrung und Spannglieder
$\gamma$	Sicherheitsfaktor, Schiebung, Dichte
$\delta$	Winkel, Neigung der Vouten
$\epsilon$	Dehnung
$\xi, \eta, \zeta$	Normierte Koordinaten
$\rho$	geometrischer Bewehrungsgehalt
$\sigma$	Normalspannung
$\tau$	Schubspannung
$\varphi$	Winkel, Kriechzahl, Zylinderkoordinate
$\omega$	mechanischer Bewehrungsgehalt
$\vartheta$	Rotation
$\phi$	Stabdurchmesser
$\chi$	Krümmung
$\Sigma$	Summe

### 4. Allgemeine Fusszeiger

c	Beton, Druck
d	Bemessung
e	elastisch
g	ständige Last

l	längs
m	Biegung
n	Normalkraft
o	null (z.B. auf Grundsystem bezogen)
p	Vorspannung
q	Nutzlast
r	Riss
s	Bewehrungsstahl
t	Zug, Torsion
v	Schub, vertikal
w	Steg, Wand, Bügel
x, y, z	Koordinaten
y	Fliesen
R	Bruch
inf	unten
sup	oben

Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich:  
Zusammenstellung der Publikationen über Plastizität im Stahlbetonbau

---

Die Berichte können beim Birkhäuser Verlag, Postfach 34, CH-4010 Basel, bestellt werden. Die mit einem Stern (\*) bezeichneten Publikationen sind vergriffen, können aber in Bibliotheken ausgeliehen werden.

### 1. Allgemeine Grundlagen

Thürlimann B.:

"Grundsätzliches zu den plastischen Berechnungsverfahren", Bericht Nr. 1, 1961.

Anderheggen E., Thürlimann B.:

"Optimum Design using Linear Programming", Bericht Nr. 6, 1966.

Thürlimann B.:

"Optimum Design of Structures", Bericht Nr. 7, 1966.

Anderheggen E.:

"Optimale Bemessung von Stabtragwerken", Bericht Nr. 11, 1966.\*

Bachmann H.:

"Zur plastizitätstheoretischen Berechnung statisch unbestimmter Stahlbetonbalken", Bericht Nr. 13, 1967.

Anderheggen E.:

"Starrplastische Traglastberechnungen mittels der Methode der finiten Elemente", Bericht Nr. 32, 1971.

E. Anderheggen, H. Knöpfel:

"Finite Element Limit Analysis Using Linear Programming", Bericht Nr. 44, 1972.

Marti P., Thürlimann B.:

"Fließbedingung für Stahlbeton mit Berücksichtigung der Betonzugfestigkeit", Bericht Nr. 67, 1977.

Anderheggen E.:

"Finite Element Analysis Assuming Rigid-Plastic Material Behaviour", Bericht Nr. 70, 1977.

Marti P.:

"Zur plastischen Berechnung von Stahlbeton", Bericht Nr. 104, 1980.

### 2. Biegung

Bachmann H., Thürlimann B.:

"Versuche über das plastische Verhalten von zweifeldrigen Stahlbetonbalken", Versuchsbericht Nr. 6203-1, 1965.

Bachmann H.:

"Plastisches Verhalten von statisch unbestimmten Stahlbetonbalken", Bericht Nr. 9, 1966.\*

Eloseily H.:

"Ultimate Strength of Rectangular Reinforced Concrete Sections and Biaxially Eccentric Loads", Bericht Nr. 15, 1967.

Bachmann H., Thürlimann B.:

"Versuche über das plastische Verhalten von zweifeldrigen Stahlbetonbalken", Bericht Nr. 22, 1969.

Crainic L.:

"Eine Methode für die plastische Bemessung von statisch unbestimmten Stahlbetonbalken", Bericht Nr. 29, 1969.

Caflisch R., Thürlimann B.:

"Biegeversuche an teilweise vorgespannten Betonbalken", Versuchsbericht Nr. 6504-1, 1970.

Krauss R., Bachmann H.:

"Biege- und Schubversuche an teilweise vorgespannten Leichtbetonbalken", Versuchsbericht Nr. 6504-4, 1971.

### 3. Schub

Warner R.F., Thürlimann B.:

"Design of Stirrup-Reinforcement in Concrete Beams", Bericht Nr. 4, 1963.\*

Bachmann H., Thürlimann B.:

"Versuche über das plastische Verhalten von zweifeldrigen Stahlbetonbalken", Versuchsbericht Nr. 6203-2, 1965.

Bachmann H., Thürlimann B.:

"Schubbemessung von Balken und Platten aus Stahlbeton, Stahlbeton mit Spannzulagen und Spannbeton", Bericht Nr. 8, 1966.\*

Caflisch R., Thürlimann B.:

"Schubversuche an teilweise vorgespannten Betonbalken", Versuchsbericht Nr. 6504-2, 1970.

Bachmann H.:

"Influence of Shear and Bond on Rotational Capacity of Reinforced Concrete Beams", Bericht Nr. 36, 1970.

Caflisch R., Krauss R., Thürlimann B.:

"Biege- und Schubversuche an teilweise vorgespannten Betonbalken, Serie C", Versuchsbericht Nr. 6504-3, 1971.

Caflisch R.:

"Teilweise vorgespannter Beton: Versuche, Auswertungen und Schlussfolgerungen", Bericht Nr. 34, 1971.

Kaufmann J., Menn C.:

"Versuche über Schub bei Querbiegung", Versuchsbericht Nr. 7201-1, 1976.

Thürlimann B.:

"Schubbemessung bei Querbiegung", Bericht Nr. 72, 1977.

Badawy M., Bachmann H.:

"Versuche über Längsschub und Querbiegung in Druckplatten von Betonträgern", Versuchsbericht Nr. 6504-8, 1977.

Bacchetta A., Bachmann H.:

"Versuche zur teilweisen Vorspannung für Längsschub und Querbiegung in Druckplatten von Betonträgern", Versuchsbericht Nr. 6504-9, 1977.

Bachmann H.:

"Längsschub und Querbiegung in Druckplatten von Betonträgern", Bericht Nr. 79, 1978.

Bachmann H., Bacchetta A.:

"Teilweise Vorspannung für Längsschub und Querbiegung in Druckplatten von Betonträgern", Bericht Nr. 82, 1978.

Thürlimann B.:

"Shear Strength of Reinforced and Prestressed Concrete Beams - CEB Approach", Bericht Nr. 93, 1979.

Bacchetta A., Bachmann H.:

"Versuche über Längsschub, Querbiegung und Quervorspannung in Zugplatten von Betonträgern", Versuchsbericht Nr. 6504-10, 1979.

4. Torsion

Lampert P., Thürlimann B.:

"Torsionsversuche an Stahlbetonbalken", Versuchsbericht Nr. 6506-2, 1968.

Lampert P., Thürlimann B.:

"Torsions-Biege-Versuche an Stahlbetonbalken", Versuchsbericht Nr. 6506-3, 1969.

Lampert P.:

"Bruchwiderstand von Stahlbetonbalken unter Torsion und Biegung", Bericht Nr. 26, 1970.

Lampert P.:

"Torsion und Biegung von Stahlbetonbalken", Bericht Nr. 27, 1970.

Lampert P., Lüchinger P., Thürlimann B.:

"Torsionsversuche an Stahl- und Spannbetonbalken", Versuchsbericht Nr. 6506-4, 1971.

Lampert P., Thürlimann B.:

"Ultimate Strength and Design of Reinforced Concrete Beams in Torsion and Bending", Bericht Nr. 42, 1972.

Thürlimann B., Lüchinger P.:

"Steifigkeit von gerissenen Stahlbetonbalken unter Torsion und Biegung", Bericht Nr. 46, 1973.

Lüchinger P., Thürlimann B.:

"Versuche an Stahlbetonbalken unter Torsion, Biegung und Querkraft", Versuchsbericht Nr. 6506-5, 1973.

Grob J., Thürlimann B.:

"Wölb-torsionsversuche an Stahlbetonbalken mit offenem Querschnitt", Versuchsbericht Nr. 6506-6, 1974.

Grob J.:

"Traglast von Stäben mit dünnwandigen offenen Querschnitten", Bericht Nr. 56, 1975.

Müller P.:

"Failure Mechanisms for Reinforced Concrete Beams in Torsion and Bending", Bericht Nr. 65, 1976.

Lüchinger P.:

"Bruchwiderstand von Kastenträgern aus Stahlbeton unter Torsion, Biegung und Querkraft", Bericht Nr. 69, 1977.

Grob J., Thürlimann B.:

"Direkte Bestimmung der Traglast von Stahlträgern mit dünnwandigen offenen Querschnitten nach der Plastizitätstheorie 1. Ordnung mit Hilfe linearer Programmierung", Bericht Nr. 78, 1978.

Thürlimann B.:

"Torsional Strength of Reinforced and Prestressed Concrete Beams - CEB Approach", Bericht Nr. 91, 1979.

5. Kombinierte Beanspruchung

Grob J., Thürlimann B.:

"Ultimate Strength and Design of Reinforced Concrete Beams under Bending and Shear", Bericht Nr. 63, 1976.

Grob J., Thürlimann B.:

"Bruchwiderstand und Bemessung von Stahlbetontragwerken (Erläuterungen zu Richtlinie 34 der Norm SIA 162)", Bericht Nr. 66, 1976.

Thürlimann B.:

"Plastic Analysis of Reinforced Concrete Beams", Bericht Nr. 86, 1978.

Marti P.:  
 "Strength and Deformations of Reinforced Concrete Members under Torsion and Combined Actions",  
 Bericht Nr. 129, 1982.

## 6. Platten

Wolfensberger R.:  
 "Traglast und optimale Bemessung von Platten", Bericht Nr. 2, 1964.\*

Knöpfel H.:  
 "Berechnung starr-plastischer Platten mittels finiter Elemente", Bericht Nr. 47, 1973.

Ritz P., Marti P., Thürlimann B.:  
 "Versuche über das Biegeverhalten von vorgespannten Platten ohne Verbund", Versuchsbericht  
 Nr. 7305-1, 1975.

Anderheggen E., Knöpfel H.:  
 "Berechnung der Traglast von Stahlbetonplatten mittels finiter Elemente", Bericht Nr. 55,  
 1975.

Marti P., Ritz P., Thürlimann B.:  
 "Prestressed Concrete Flat Slabs", Bericht Nr. 68, 1977.

Marti P., Pralong J., Thürlimann B.:  
 "Schubversuche an Stahlbeton-Platten", Versuchsbericht Nr. 7305-2, 1977.

Ritz P.:  
 "Biegeverhalten von Platten mit Vorspannung ohne Verbund", Bericht Nr. 80, 1978.

Pralong J., Brändli W., Thürlimann B.:  
 "Durchstanzversuche an Stahlbeton- und Spannbetonplatten", Versuchsbericht Nr. 7305-3, 1979.

Marti P.:  
 "Gleichgewichtslösungen für Flachdecken", Bericht Nr. 117, 1981.

Brändli W., Müller F.-X., Thürlimann B.:  
 "Bruchversuch an Stahlbeton- und Spannbetonplatten bei Rand- und Eckstützen", Versuchs-  
 bericht Nr. 7305-4, 1982.

Pralong J.:  
 "Poinçonnement symétrique des planchers-dalles", Bericht Nr. 131, 1982.

## 7. Scheiben

Müller P.:  
 "Plastische Berechnung von Stahlbetonscheiben und -balken", Bericht Nr. 83, 1978.

Marti P.:  
 "Plastic Analysis of Reinforced Concrete Shear Walls", Bericht Nr. 87, 1979.

## 8. Stützen

Ramu P.:  
 "Langzeitversuche an Stahlbetonstützen", Bericht Nr. 19, 1968.

Ramu P., Grenacher M., Baumann M., Thürlimann B.:  
 "Versuche an gelenkig gelagerten Stahlbetonstützen unter Dauerlast", Versuchsbericht  
 Nr. 6418-1, 1969.

Oelhafen U.H.:  
 "Formänderungen von Stahlbetonstützen unter exzentrischer Druckkraft", Bericht Nr. 31, 1970.



Menn C.:

"Bruchsicherheitsnachweis für Druckglieder", Bericht Nr. 57, 1975.

Grenacher M.:

"Einfluss von Verschiebungen und verschiedenen Lagerungen auf das Tragverhalten von Stahlbetonstützen", Bericht Nr. 61, 1976.

Menn C.:

"Berechnung vorgespannter Stützen nach RL 35, Norm SIA 162", Bericht Nr. 71, 1977.

Gruber L., Menn C.:

"Berechnung und Bemessung schlanker Stahlbetonstützen", Bericht Nr. 84, 1978.

## 9. Verschiedenes

Vollenweider U.:

"Beitrag zur Behandlung bodenmechanischer Grenzwertprobleme nach der Plastizitätstheorie", Bericht Nr. 21, 1969.

Furler R., Thürlimann B.:

"Strength of Brick Walls under Enforced End Rotations", Bericht Nr. 89, 1979.

Zimmerli B., Thürlimann B.:

"Strength Interaction Surfaces for Tall Buildings", Bericht Nr. 92, 1979.

Zimmerli B.:

"Tragwiderstand von Hochhäusern", Bericht Nr. 100, 1980.

Furler R.:

"Tragverhalten von Mauerwerkswänden unter Druck und Biegung", Bericht Nr. 109, 1981.

Rossi M., Thürlimann B.:

"Versuche über das Verhalten von Stahlbetonbalken bei wiederholter Belastung", Versuchsbericht Nr. 7503-1, 1981.

Rossi M., Bazzi G.:

"Two Simple Reinforced Concrete Beam Elements for Static and Dynamic Analysis", Bericht Nr. 118, 1981.

Rossi M.:

"Unelastisches Verhalten zyklisch verformter Stahlbetonbalken", Bericht Nr. 125, 1982.

Ganz H.R., Thürlimann B.:

"Versuche über die Festigkeit von zweiachsig beanspruchtem Mauerwerk", Versuchsbericht Nr. 7502-3, 1982.

Ganz H.R., Thürlimann B.:

"Versuche an Mauerwerksscheiben unter Normalkraft, Querkraft und Biegemoment", Versuchsbericht Nr. 7502-4, in Vorbereitung.

Frey R., Thürlimann B.:

"Ermüdungsversuche an Stahlbetonbalken", Versuchsbericht Nr. 7801-1, in Vorbereitung.