

Zur plastischen Berechnung von Stahlbeton

Peter Marti

Oktober 1980
Bericht Nr. 104

Zur plastischen Berechnung von Stahlbeton

von

Dr. sc. techn. Peter Marti

Institut für Baustatik und Konstruktion
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich

Zürich
Oktober 1980

V O R W O R T

Seit zwanzig Jahren sind wir am Institut für Baustatik und Konstruktion bestrebt, Berechnung und Bemessung von Stahlbeton- und Spannbeton-Tragwerken auf eine einheitliche theoretische Grundlage abzustützen. Unsere experimentellen und auch theoretischen Forschungsarbeiten haben gezeigt, dass die Plastizitätstheorie für die Berechnung des Grenzzustandes der statischen Tragfähigkeit bei sorgfältiger Anwendung sehr brauchbare Resultate liefert.

Im vorliegenden als Promotionsarbeit verfassten Bericht hat Herr Marti eine Synthese sowohl aus unseren eigenen als auch anderen einschlägigen Untersuchungen gezogen. Zuerst präsentiert er die Grundlagen der Plastizitätstheorie im allgemeinen und die speziellen Fliessbedingungen und Fliessgesetze für den Stahlbeton. Dann zeigt er die konsequente, einheitliche Anwendung auf die verschiedenen Tragelemente wie Balken, Scheiben und Platten unter einfachen und kombinierten Beanspruchungsfällen.

Mit dieser Arbeit hoffen wir, eine solide Grundlage zur Ausarbeitung von einheitlichen aus der Plastizitätstheorie begründeten Bemessungsverfahren geschaffen zu haben.

Zürich, Oktober 1980

Prof. Dr. Bruno Thürlimann

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
I. EINLEITUNG	1
1. Zur Bemessung von Tragwerken	1
2. Uebersicht	4
II. THEORETISCHE GRUNDLAGEN	6
3. Allgemeines	6
3.1 Plastische Verformung	6
3.2 Theorie des plastischen Potentials	8
3.3 Spezielle Fliessbedingungen	14
4. Elastisch-plastisches und starr-plastisches Verhalten	30
4.1 Elastisch-plastische Systeme	30
4.2 Starr-plastische Systeme	37
4.3 Verallgemeinerte Grössen	39
5. Traglastverfahren	46
5.1 Definitionen	46
5.2 Grenzwertsätze	47
5.3 Statische und kinematische Methode	49
5.4 Unstetige Felder	52
5.5 Material mit nicht zugeordnetem Fliessgesetz	61
III. ANWENDUNGEN AUF STAHLBETON	64
6. Annahmen	64
6.1 Uebersicht	64
6.2 Beton	65
6.3 Bewehrung und Verbund	73
7. Ebene und achsialsymmetrische Probleme	76
7.1 Fliessbedingung im ebenen Spannungszustand	76
7.2 Ebener Spannungszustand und ebener Fliesszustand	83
7.3 Achsialsymmetrischer Fliesszustand	93
8. Scheiben und aus Scheiben zusammengesetzte Bauteile	96
8.1 Zur Entwicklung von Fachwerkmodellen	96
8.2 Träger und Scheiben mit Rechteckquerschnitt	100
8.3 Aus Scheiben zusammengesetzte Bauteile	123
8.4 Fugen	127
9. Platten	132
9.1 Fliessbedingungen für Plattenelemente	132
9.2 Drillung in Platten und Torsion von Trägern	147
9.3 Plattenränder und Plattenecken	154
9.4 Durchstanzen	162
IV. ZUSAMMENFASSUNG	167
SUMMARY	169
RESUME	170
LITERATURVERZEICHNIS	172

I. E I N L E I T U N G

Nur eine genaue Kenntnis der Baustoffe und ihres Zusammenwirkens in den einzelnen Baugliedern bis zum Bruch befähigt den Eisenbetoningenieur, die gebräuchlichen Rechnungsarten dem Einzelfall richtig anzupassen, und auf eigene Verantwortung schwierige Eisenbetonbauten zu entwerfen und auszuführen, welche in allen Teilen die erforderliche Sicherheit bieten, ohne unwirtschaftlich zu sein.

EMIL MOERSCH (1920)

1. ZUR BEMESSUNG VON TRAGWERKEN

Die Gesamtheit der Bauteile, welche die Kraftübertragung in Bauwerken gewährleisten, die Tragwerke, müssen bei angemessenem Aufwand an Mitteln ausreichend tragfähig ausgebildet werden, damit in keinem Fall durch ein Versagen Schäden an Personen oder Übermässige Schäden an Sachen entstehen und genügend steif und dauerhaft, damit die vorgesehene Nutzung des Bauwerks nicht durch Übergrosse Verformungen, Schwingungen oder örtliche Schäden beeinträchtigt wird.

Durch geeignete Massnahmen beim Entwurf, bei der Projektierung und bei der Erstellung von Tragwerken versucht der Ingenieur sicherzustellen, dass diese Ziele erreicht werden. Stets geht es darum, im Rahmen der Zielsetzung unter Berücksichtigung aller bedeutsamen Bedingungen verschiedene Lösungsmöglichkeiten zu erkennen, sie zu beurteilen und darauf aufbauend die die Tragwerke bestimmenden Grössen festzulegen. Der verantwortliche Ingenieur versucht ferner vorausschauend bei der Realisierung mögliche Abweichungen vom Plan zu erkennen, bereitet entsprechende Kontrollen und gegebenenfalls notwendige Korrekturmassnahmen vor und sorgt für deren Durchsetzung.

Mit zunehmender Konkretisierung vom ersten Entwurf bis zum endgültigen Projekt nimmt die Freiheit bei dem immer sich wiederholenden Ablauf des Vorbereitens und Fällens von Entscheidungen ständig ab. Vor allem in den frühen Phasen der Projektierung geht es darum zu gewährleisten, dass zumindest die unabdingbaren Forderungen erfüllt werden können, die an Tragwerke gestellt werden, nämlich diejenigen nach der Sicherheit gegen Versagen. Zu diesem Zweck braucht der Ingenieur geeignete Methoden.

Zuerst muss sich der Ingenieur also um die Sicherstellung der Tragfähigkeit bemühen. Er fällt die für die Bemessung der Tragwerke notwendigen Entscheide aufgrund einer Gegenüberstellung von Modellen für Einwirkungen einerseits und solchen für Widerstände andererseits. Bei der Wahl dieser Modelle richtet er sich nach deren Zweck und nach dem im Rahmen der Gesamtaufgabe erforderlichen Mass an Uebereinstimmung mit der Wirklichkeit. Eine umfassende Voraussage des Verhaltens unter allen nur denkbaren Einwirkungen über die gesamte Lebensdauer des Tragwerks ist unmöglich und kann nicht Ziel der Arbeit des Ingenieurs sein.

Die Ingenieur ist bestrebt, durch geschickte Abgrenzung und Idealisierung der Tragwerke zu Tragsystemen seine Problemstellung in möglichst einfache, aber aussagekräftige Aufgaben der Baustatik überzuführen. Damit verknüpft er Einwirkungs- und Widerstandsmodelle. Er interpretiert die Lösungen dieser Aufgaben, indem er sie mit seiner Erfahrung und mit seinem Wissen über das in Fällen ähnlicher Ausführung und in Versuchen beobachtete Trag- und Bruchverhalten in Zusammenhang bringt. Aufgrund dieser Ueberlegungen modifiziert er gegebenenfalls seine ersten Annahmen und wiederholt das Vorgehen.

Die Aufgabenstellung im Rahmen der Baustatik besteht im allgemeinen darin, den Spannungs- und Verformungszustand im Tragsystem zu bestimmen. Im Blick auf die praktische Anwendung interessiert sich der Ingenieur für die hauptsächlichen Aspekte davon. Ihm genügen meistens Antworten auf Teilfragen. Für die numerische Lösung im Einzelfall verwendet er seinen Bedürfnissen angepasste Verfahren.

Die Lösung basiert auf drei Gruppen von Beziehungen. Die erste Gruppe betrifft nur statische Grössen und umfasst die Gleichgewichtsbedingungen und die statischen Randbedingungen. Die zweite Gruppe betrifft rein kinematische Grössen. Sie umfasst die kinematischen Beziehungen und Randbedingungen. Die Verbindung zwischen statischen und kinematischen Grössen wird durch die dritte Gruppe von Beziehungen hergestellt, die Stoffgleichungen.

Nur die statischen oder die kinematischen Grössen betreffenden Beziehungen sind allgemein gültig. Unterschiedliche Annahmen über das Materialverhalten führen dagegen zu verschiedenen Stoffgleichungen. Hauptsächlich dadurch unterscheiden sich verschiedene Theorien. Weitere Unterschiede ergeben sich aus der Art und dem Umfang der bei der Idealisierung des Tragwerks zusätzlich eingeführten oder allenfalls gelösten bestehenden Bindungen und aus der Art der Behandlung von sekundären Effekten, ihrer Berücksichtigung oder Vernachlässigung.

Für die Bemessung von Tragwerken stützen sich die Ingenieure bis heute vorwiegend auf die Theorie elastischer Körper. Meistens wird mit der Annahme von Isotropie und linearer Elastizität das denkbar einfachste elastische Verhalten vorausgesetzt. Bisher weit weniger verbreitet ist die Anwendung der Plastizitätstheorie. Immerhin werden in zunehmendem Mass elastisch-plastische und starr-plastische Modelle verwendet. Für spezielle Probleme schliesslich, bei denen die Zeitabhängigkeit des Materialverhaltens von Bedeutung ist, werden viskoelastische und viskoplastische Modelle benutzt.

Angesichts der raschen Entwicklung elektronischer Rechenmaschinen und der damit verbundenen, enorm gesteigerten Anwendungsmöglichkeiten erscheint es wahrscheinlich, dass in naher Zukunft vermehrt nichtlinear elastische und elastisch-plastische Modelle verwendet werden. Damit wird gegenüber linear elastischen Modellen eine realistischere Beurteilung des Tragverhaltens ermöglicht, und es dürften sich in manchen Fällen ins Gewicht fallende Einsparungen erzielen lassen. Trotz der leichteren Verfügbarkeit dieser Hilfsmittel bleibt zu bedenken, dass sie nur für einen - bisher sehr zeitraubenden - Teil der Arbeit des Ingenieurs wertvolle Dienste leisten. Sinnvolle Einsatzmöglichkeiten ergeben sich vor allem in den mittleren Phasen der Projektierung, als ergänzende Kontrollen und als Grundlage für die definitive Fixierung der im Entwurf und in den frühen Phasen der Projektierung bereits innerhalb bestimmter Schranken festgelegten Bemessungsgrössen. Für die anfänglichen, hinsichtlich der Sicherstellung der Tragfähigkeit äusserst wichtigen Entscheide stützt sich der Ingenieur zweckmässigerweise vorwiegend auf einfache Abschätzungen, indem er versucht, sein Problem im Sinne einer Eingabelung von mehreren Seiten unter der Annahme unterschiedlicher Voraussetzungen in den Griff zu bekommen. Dafür und für eine vernünftige Interpretation der Ergebnisse umfangreicher Berechnungen kann eine vermehrte Orientierung an der Plastizitätstheorie äusserst nützlich sein.

Die Plastizitätstheorie befasst sich mit dem Phänomen des Fließens, einer charakteristischen Eigenschaft vieler Materialien. Auf der Grundlage von wenigen, einheitlichen Prinzipien gestattet sie die Berechnung von Traglasten von Systemen und damit die Beurteilung des Widerstandes von Tragwerken, bzw. der Gefahr ihres Versagens. Einfache und leistungsfähige Verfahren stehen zur Verfügung, welche dem Denken und den Bedürfnissen des durch theoretisches Wissen und praktische Erfahrung gleichermassen geschulten Ingenieurs nahe liegen. Der wesentliche Unterschied gegenüber Berechnungen an elastischen Systemen liegt in der Erkenntnis, dass bei Einbezug des Fließens für eine bestimmte Belastungsintensität ausser dem einzigen, elastisch verträglichen Spannungszustand weitere

Spannungszustände möglich sind, die sich durch Ueberlagerung von Eigenspannungszuständen aus der elastischen Lösung ergeben.

Für Probleme des Erdbaus, etwa Fragen nach der Standsicherheit von Stützmauern und Böschungen oder solche nach der Tragfähigkeit von Fundamenten, wurden seit zweihundert Jahren von Bauingenieuren Methoden entwickelt und verwendet, deren vollständige theoretische Begründung erst mit der Formulierung der Grenzwertsätze der Plastizitätstheorie vor rund dreissig Jahren ermöglicht wurde. Eine ähnliche Entwicklung ist im Stahlbetonbau festzustellen. Seit rund achtzig Jahren wird der Widerstand von schub- und torsionsbeanspruchten Trägern mit Hilfe von Fachwerkmodellen untersucht. Etwas jünger ist die Fliessgelenklinientheorie, die zur Beurteilung der Tragfähigkeit von Platten angewendet wird. In jüngster Zeit wurden die ursprünglichen Fachwerkmodellvorstellungen unter Zugrundelegung der Plastizitätstheorie weiterentwickelt und verallgemeinert. Ebenso wurde die Fliessgelenklinientheorie theoretisch untermauert, ergänzt und systematisch zu einer Plastizitätstheorie der Stahlbetonplatten erweitert. Trotz diesen Entwicklungen wird der Bemessung im Stahlbetonbau erst vereinzelt ein einheitliches, auf der Plastizitätstheorie basierendes Vorgehen zugrunde gelegt. Selten geht die Anwendung der Plastizitätstheorie über den heute üblichen Tragfähigkeitsnachweis für Stabtragwerke hinaus, bei dem die meist mit einer elastischen Berechnung ermittelten Beanspruchungen den Bruchwiderständen gegenübergestellt werden, die sich aus Betrachtungen am Stabquerschnitt ergeben.

Mit einer meist verhältnismässig fein verteilten Bewehrung des Betons mit Stahlstäben, welche mit diesem in Verbund stehen, wird im Stahlbetonbau ein günstiges Zusammenwirken zweier Materialien angestrebt, die sich einzeln recht unterschiedlich verhalten. Aufgrund der einfachen Feststellung, dass Beton schon unter geringen Zugbeanspruchungen reisst, wird seit den ersten Anwendungen versucht, durch eine geschickte Bemessung die Ausbildung von Tragsystemen zu ermöglichen, in denen der Beton im wesentlichen nur Druck- und die Bewehrung vorwiegend Zugkräfte zu übertragen hat. Die Erfahrung zeigt, dass vor dem Bruch eine derartige Kräfteumlagerung tatsächlich eintritt, sofern gewisse Regeln beachtet werden, die hauptsächlich die Verteilung und die Verankerung der Bewehrung betreffen. Diese Feststellung trifft vor allem auf verhältnismässig schwach bewehrte, d.h. duktile Bauteile zu. Ihr Bruchwiderstand wird weitgehend durch das Fliessen der Bewehrung bestimmt. Bisher blieb die Anwendung der Plastizitätstheorie vorwiegend auf solche Fälle beschränkt. Gegen eine umfassendere Anwendung werden hauptsächlich Einwände hinsichtlich des Verhaltens des Betons vorgebracht. Ausser dem Hinweis auf seine beschränkte Verformungsfähigkeit und auf die zum Beispiel im einachsigen Druckversuch mit zunehmendem Stauchen zu beobachtende Entfestigung wird namentlich die Frage gestellt, ob der im Rahmen der Plastizitätstheorie mit dem Fliessgesetz ausgedrückte Zusammenhang zwischen statischen und kinematischen Grössen das tatsächliche Verhalten angemessen beschreibe. Selbstverständlich sind solche Einwände im Hinblick auf die praktische Anwendung nicht leichtfertig aus dem Weg zu räumen. Nur aufgrund einer sorgfältigen Interpretation von Versuchsergebnissen kann über ihre Berechtigung entschieden werden. Glücklicherweise zeigt es sich aber immer deutlicher, dass die einfachen Methoden der Plastizitätstheorie unter Beachtung gewisser Vorsichtsmassnahmen von Ingenieuren mit Erfolg zur Lösung einer sehr viel grösseren Klasse von Problemen herangezogen werden können, als bisher in der Regel angenommen wurde. Die gegenwärtige Entwicklung im Stahlbetonbau hat zusätzlich eine befruchtende Wirkung für die Bemessung von Tragwerken aus Stahl oder Holz, wie auch für die Behandlung verwandter Probleme des Erd-, Fels- und Mauerwerkbaus.

2. UEBERSICHT

Nach einer knappen Darstellung der theoretischen Grundlagen in Teil II wird in Teil III die Theorie starr-plastischer Körper auf Bauteile aus Stahlbeton angewendet.

Beiläufig ergeben sich in Teil II einige Präzisierungen und Ergänzungen bekannter Ergebnisse der Plastizitätstheorie. Namentlich wird diskutiert, unter welchen Voraussetzungen sich eine beliebige Fließbedingung für isotropes Material im ebenen Fließzustand auf eine Bedingung vom Typ der Mohrschen Hüllkurve zurückführen lässt. Ferner wird eine einfache Form des Beweises dafür angegeben, dass die Theorie des plastischen Potentials auch für die Darstellung in verallgemeinerten Lasten und Verschiebungen anwendbar ist, wenn sie für alle Elemente des betrachteten Körpers als richtig vorausgesetzt wird. Schliesslich werden der Begriff der Verträglichkeit für räumlich unstetige Felder und kompressible isotrope Materialien verallgemeinert und die Beziehungen erörtert, welche zwischen dem Spannungsfeld und Unstetigkeiten des Verschiebungsfeldes und umgekehrt bestehen.

Im Unterschied zu den meisten bekannten plastizitätstheoretischen Arbeiten, die sich mit Stahlbeton befassen, geht die vorliegende Arbeit in Teil III konsequent von der Beschreibung des Verhaltens des Betons aus. Es gelingt damit, bekannte Ergebnisse in verschiedener Hinsicht zu ergänzen und zu verallgemeinern. Es zeigt sich, dass die Plastizitätstheorie nicht nur zur Berechnung der Traglast von verhältnismässig schwach bewehrten Bauteilen angewendet werden kann, die im Versuch ein sog. "unterarmiertes" Verhalten aufweisen, also ein ausgeprägtes Fließen der Bewehrung vor dem Versagen des Betons. Erfolgreiche Anwendungsmöglichkeiten ergeben sich auch für die in der Praxis oft kaum zu umgehenden "überarmierten" Fälle, bei denen der Widerstand des Betons von ausschlaggebender Bedeutung ist.

Die Frage nach einer möglichst einfachen, aber trotzdem ausreichend allgemeinen und aussagekräftigen Fließbedingung für Beton wird eingehend erörtert. Die Annahmen über das Verhalten der Bewehrung und über den Verbund zwischen Beton und Bewehrung folgen dem üblichen Vorgehen.

Probleme des ebenen Spannungszustandes sowie Probleme ebener und achsialsymmetrischer Fließzustände in Elementen aus Stahlbeton werden allgemein diskutiert. Die zur Beschreibung der Spannungs- und Verformungszustände nötigen Beziehungen werden entwickelt. Die Wirkung einer fließenden Bewehrung wird als statische Randbedingung an den Rändern der betrachteten - gegebenenfalls geeignet unterteilten - Betonkörper eingeführt. Die Wirkung einer nichtfließenden Bewehrung wird als Kraftfeld im Innern des Betons erfasst.

Die erhaltenen Beziehungen werden zunächst auf scheibenartige und aus Scheiben zusammengesetzte Bauteile angewendet. Das Schwergewicht liegt bei der Entwicklung vollständiger Lösungen und von Lösungen nach der statischen Methode. Für die praktische Bemessung von aus einzelnen Scheiben zusammengesetzten Trägern unter kombinierter Beanspruchung wird eine einfache Methode angegeben. Das Problem der Tragfähigkeit von Fugen wird diskutiert.

Dann wird der Widerstand von Plattenelementen untersucht, die durch kombiniert wirkende Biegemomente und Membrankräfte beansprucht werden. Entsprechende Fließbedingungen werden entwickelt. Aus der Untersuchung der Beanspruchung von Stahlbetonplatten durch reine Drillung ergeben sich neue Ergebnisse für Träger mit Rechteckquerschnitt unter Torsionsbeanspruchung. Ferner ermöglichen diese Ueberlegungen die Klärung einiger Aspekte der Tragwirkung bei Plattenrändern und Plattenecken. Schliesslich wird das Problem des achsialsymmetrischen Durchstanzens von Platten nach der statischen und nach der kinematischen Methode untersucht.

Als Ganzes wird mit der vorliegenden Arbeit versucht, zu einer vermehrten Verwendung der Plastizitätstheorie für die praktische Bemessung von Stahlbeton beizutragen. Zu diesem Zweck werden die theoretischen Grundlagen für die besondere Anwendung auf Stahlbeton angepasst und verhältnismässig eingehend dargestellt. Aus den darauf aufbauenden Ueberlegungen ergeben sich zum Teil neuartige Folgerungen für die konstruktive Ausbildung. Hauptsächlich wird aber eine Neubeurteilung vieler Regeln möglich, die gute Konstrukteure schon bisher beachtetten, sei es aufgrund ihrer Erfahrung oder ihrer Intuition.

Schliesslich sei noch vermerkt, dass an verschiedenen Stellen, an denen dies besonders angezeigt schien, zur Ergänzung und Abrundung geschichtliche Hinweise gegeben werden. Eine zusammenhängende Darstellung der im Rahmen der Problemstellung relevanten Entwicklungsschritte liegt indessen ausserhalb der Zielsetzung dieser Arbeit.

II. THEORETISCHE GRUNDLAGEN

... Der Ingenieur muss sich darum nach einfacheren Gleichungssystemen umsehen, welche nur diejenigen Eigenschaften darstellen, die für sein jeweiliges Problem wesentlich sind. Jedes solches Gleichungssystem definiert einen gewissen Idealstoff, und es muss der Einsicht des Ingenieurs überlassen bleiben, welchen Idealstoff er am besten der Lösung seiner Aufgabe zugrunde legt.

WILLIAM PRAGER (1955)

3. ALLGEMEINES

3.1 Plastische Verformung

In diesem Abschnitt werden übliche Modelle erörtert, die für die Beschreibung des mechanischen Verhaltens von Materialien allgemein verwendet werden. Dafür ist es zweckmässig, vom einachsigen Spannungszustand auszugehen, z.B. von der Beschreibung des in einfachen Zugversuchen an Stäben beobachteten Verhaltens. In Bild 3.1 sind typische, durch Zusammenfassung und Idealisierung solcher Beobachtungen gewonnene Spannungs-Dehnungs-Diagramme dargestellt.

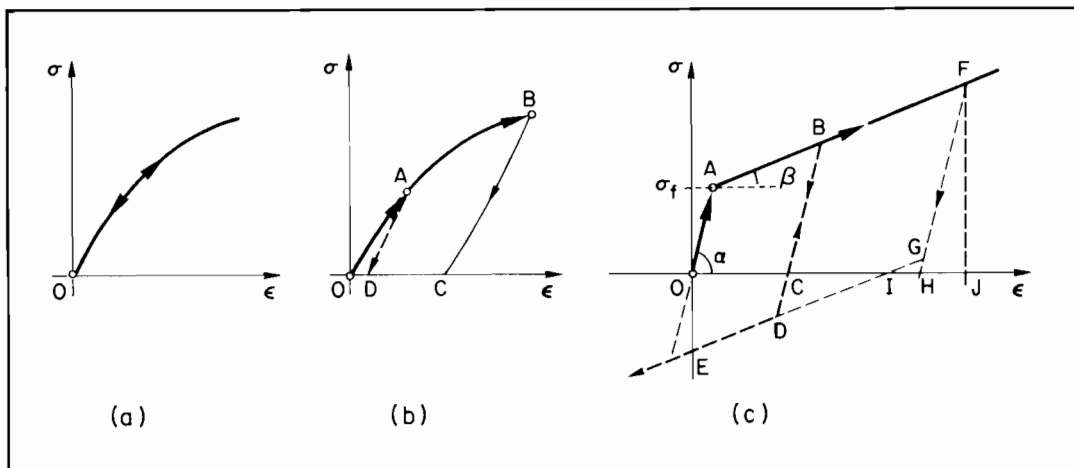


Bild 3.1 : Spannungs-Dehnungs-Diagramme

Die mit Bild 3.1 (a) charakterisierte *elastische* Verformung ist durch eine eindeutige Beziehung zwischen Spannungen und Dehnungen gekennzeichnet. Nach der Entlastung verbleiben keine Verformungen, und es treten somit keine Energieverluste auf.

Mit Bild 3.1 (b) wird die *plastische* Verformung charakterisiert. Die dargestellte Spannungs-Dehnungs-Beziehung ist nicht umkehrbar. Nach Entlastung aus B beziehungsweise A ergeben sich die durch die Abszissen der Punkte C beziehungsweise D bestimmten bleibenden Verformungen. Im Gegensatz zur elastischen Verformung wird mit der Entlastung nur ein Teil der für den Deformationsprozess eingesetzten Energie zurückgewonnen. Der Rest wird dissipiert, in Wärme übergeführt.

Bild 3.1 (c) charakterisiert ein *elastisch-plastisches* Material mit *Verfestigung*. Entlang OA ist das Verhalten linear elastisch. Es wird beschrieben durch den Elastizitätsmodul $E = \tan \alpha$. Nach Ueberschreiten der initialen Flie遟renze σ_f beginnt die mit dem Verfestigungsmodul $E_v = \tan \beta$ beschriebene, lineare Verfestigung. Nach einer rein elastischen

Entlastung BC parallel zu OA verbleibt die durch die Abszisse von Punkt C gegebene plastische Verformung. Bei Umkehr des Belastungssinnes in C beginnt in D die Verfestigung auf Druck. Dabei wird die Gerade DE als parallel zu AB angenommen. Vereinfachungen ergeben sich in zwei Fällen: Verschwindet die Verfestigung, $\beta \rightarrow 0$, so spricht man von einem *ideal plastischen* Verhalten. Lässt man andererseits den Elastizitätsmodul E unendlich gross werden, $\alpha \rightarrow \pi/2$, so vollzieht man den Uebergang zum *starr-plastischen* Verhalten.

Für ein Raumelement eines beliebigen Körpers ist der Spannungs- und Verformungszustand durch die Komponenten σ_{ij} des Spannungstensors und die Komponenten ϵ_{ij} des Verzerrungstensors gegeben. Diese Komponenten von symmetrischen Tensoren können als Komponenten von Vektoren $\underline{\sigma}$ und $\underline{\epsilon}$ in einem sechsdimensionalen euklidischen Raum aufgefasst werden. Die mit dem Verzerrungssinkrement $d\epsilon_{ij}$ verbundene, auf die Raumeinheit bezogene, elementare Deformationsarbeit ist gegeben durch das Skalarprodukt

$$d\bar{A} = \underline{\sigma} \cdot d\underline{\epsilon} = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} = \sigma_x d\epsilon_x + \dots + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \dots \quad (3.1)$$

Die anhand von Bild 3.1 (c) beschriebene Aufteilung in elastische und plastische Verformungsanteile wird mit der Beziehung

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p \quad (3.2)$$

verallgemeinert. Als elastisch bezeichnet man diejenigen Anteile ϵ_{ij}^e des Verzerrungszustandes ϵ_{ij} , welche sich bei der Entlastung zurückbilden, und als plastisch die verbleibenden Anteile ϵ_{ij}^p . Damit kann der Ausdruck (3.1) als Summe

$$d\bar{A} = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^e + \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p \quad (3.3)$$

des Zuwachses $\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^e$ der elastischen Verzerrungsenergie und der elementaren Dissipationsarbeit $\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p$ dargestellt werden.

Bei grossen Verzerrungen können sich mit der Aufteilung (3.2) gewisse Schwierigkeiten ergeben, die mit dem Auftreten des sogenannten Bauschinger-effektes zusammenhängen. So wäre z.B. für Punkt F in Bild 3.1 (c) die gedachte, rein elastische Entlastung FGH zu betrachten, nicht die wirkliche FGI. Die bei der Entlastung aus F wieder frei werdende elastische Verzerrungsenergie wird durch das Dreieck FJH dargestellt. Die Entlastung entlang GI kann als plastisches "Rückwärtsfliessen" bezeichnet werden, bei dem der dem Inhalt des Dreiecks GHI entsprechende, bei der vorhergehenden Belastung OABF dissipierte Energiebetrag in mechanische Energie zurückverwandelt wird. Die Forderung, wonach der Zuwachs $\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p$ der Dissipationsarbeit nicht negativ sein sollte, wird bei diesem Vorgang verletzt. Wird diese Forderung aufrechterhalten, wofür ZIEGLER (1970 a) thermodynamische Ueberlegungen anführte, so ist die Gültigkeit des Diagramms Bild 3.1 (c) auf den Bereich links von der Parallelen zu DA durch den Punkt I einzuschränken. Unter der im folgenden immer vorausgesetzten Annahme kleiner Deformationen entfallen solche Probleme.

In der Regel wird das nichtelastische Materialverhalten nicht allein durch plastische, d.h. zeitunabhängige Effekte bestimmt. Vielfach sind viskose Effekte von Bedeutung. Das Materialverhalten wird dann im allgemeinen durch Stoffgleichungen

$$f(\sigma_{ij}, \dot{\sigma}_{ij}, \ddot{\sigma}_{ij}, \dots, \epsilon_{ij}, \dot{\epsilon}_{ij}, \ddot{\epsilon}_{ij}, \dots, T, t) = 0 \quad (3.4)$$

beschrieben, welche die Spannungen und Verzerrungen samt ihren zeitlichen Ableitungen $\dot{\sigma}_{ij}$, $\dot{\epsilon}_{ij}$ sowie die Temperatur T und die Zeit t miteinander verknüpfen. Es sei nur nebenbei erwähnt, dass die in den Tensorgleichungen (3.4) auftretenden Materialparameter selbst Tensoren bilden. Nur so können die für beliebige Koordinatentransformationen geforderten Invarianzeigenschaften der Stoffgleichungen erhalten bleiben. Für isotropes

Material mit richtungsunabhängigen Eigenschaften sind besondere Isotropiebedingungen zu erfüllen. Diese führen im allgemeinen zu wesentlichen Vereinfachungen.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird die Behandlung viskoser Effekte ausdrücklich ausgeschlossen. In der Folge ist also nur noch von elastischem und plastischem Verhalten die Rede. Abschliessend sei noch bemerkt, dass die hier dargestellte kontinuumsmechanische Betrachtungsweise eine rein phänomenologische ist. Es wird insbesondere nicht untersucht, worauf die bleibenden Verformungen zurückzuführen sind.

3.2 Theorie des plastischen Potentials

Im folgenden wird die als Theorie des plastischen Potentials bekannte Verknüpfung von Fliessbedingung und Fliessgesetz dargestellt. Diese Theorie wurde von R. v. MISES (1928) erstmals postuliert und von PRAGER (1955) verallgemeinert. Wie die ursprüngliche v. Mises'sche Fassung bleibt die folgende Darstellung zunächst auf den Spannungszustand σ_{ij} und den Verzerrungszustand ϵ_{ij} an einem Raumelement beschränkt. Die Pragersche Verallgemeinerung wird in Abschnitt 4.3 erörtert.

Gemäss Abschnitt 3.1 können beliebige Spannungszustände σ_{ij} durch Vektoren \underline{g} beziehungsweise ihre Endpunkte in einem sechsdimensionalen euklidischen Raum dargestellt werden. Von einem bestimmten betrachteten Spannungszustand ausgehend können gewisse andere ohne plastische Verformung, d.h. rein elastisch erreicht werden. Diese werden als *aplastische* Spannungszustände bezeichnet. Die Gesamtheit der *aplastischen* Spannungszustände bildet den *aplastischen Bereich*. Die Grenzfläche des *aplastischen Bereichs* ist die *Fliessfläche*. Diese ist eine fünfdimensionale Hyperfläche im Spannungsraum, von der postuliert wird, dass sie *konvex* sei. Somit liegt die Verbindungsstrecke der Bildpunkte zweier beliebiger *aplastischer* Spannungszustände im *aplastischen Bereich*. Die *Fliessfläche* sei durch die Gleichung

$$\Phi(\sigma_{ij}) = 0 \quad (3.5)$$

bestimmt, die sogenannte *Fliessbedingung*. Das Vorzeichen der als stetig differenzierbar vorausgesetzten Funktion Φ sei so festgelegt, dass im *aplastischen Bereich* negative Werte angenommen werden, wie dies in Bild 3.2 (a) angedeutet ist.

Bei einem ideal plastischen Material ist der *aplastische Bereich* vom Verformungsprozess unabhängig. Die *Fliessfläche* ist durch eine feste Funktion Φ bestimmt. Bei einem Material mit Verfestigung variieren dagegen im allgemeinen sowohl die Lage des *aplastischen Bereichs* im Spannungsraum als auch seine Form und Ausdehnung. Mindestens zu Beginn des Verformungsprozesses enthält der *aplastische Bereich* jedoch auch in diesem Fall den spannungslosen Zustand $\underline{g} = 0$, d.h. den Ursprung 0 des Koordinatensystems in Bild 3.2 (a). Die folgenden Darlegungen beschränken sich zunächst auf das ideal plastische Verhalten. Auf das Verhalten plastischer Materialien mit Verfestigung wird am Ende dieses Abschnittes hingewiesen.

Während für alle *aplastischen* Spannungszustände innerhalb der *Fliessfläche* keine plastischen Verformungen auftreten, können sich für Spannungspunkte auf der *Fliessfläche* plastische Verzerrungszinkremente $d\epsilon_{ij}^P$ ergeben. Für den Spannungspunkt P in Bild 3.2 (a) führen alle Spannungszinkremente $d\sigma_{ij}$, welche in der zur *Fliessfläche* $\Phi = 0$ tangentialen Hyperebene E liegen, nicht zu einer elastischen Entlastung. Solche sog. *neutrale* Spannungszinkremente erfüllen die Gleichung

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = \text{grad } \Phi \cdot d\underline{g} = 0 \quad . \quad (3.6)$$

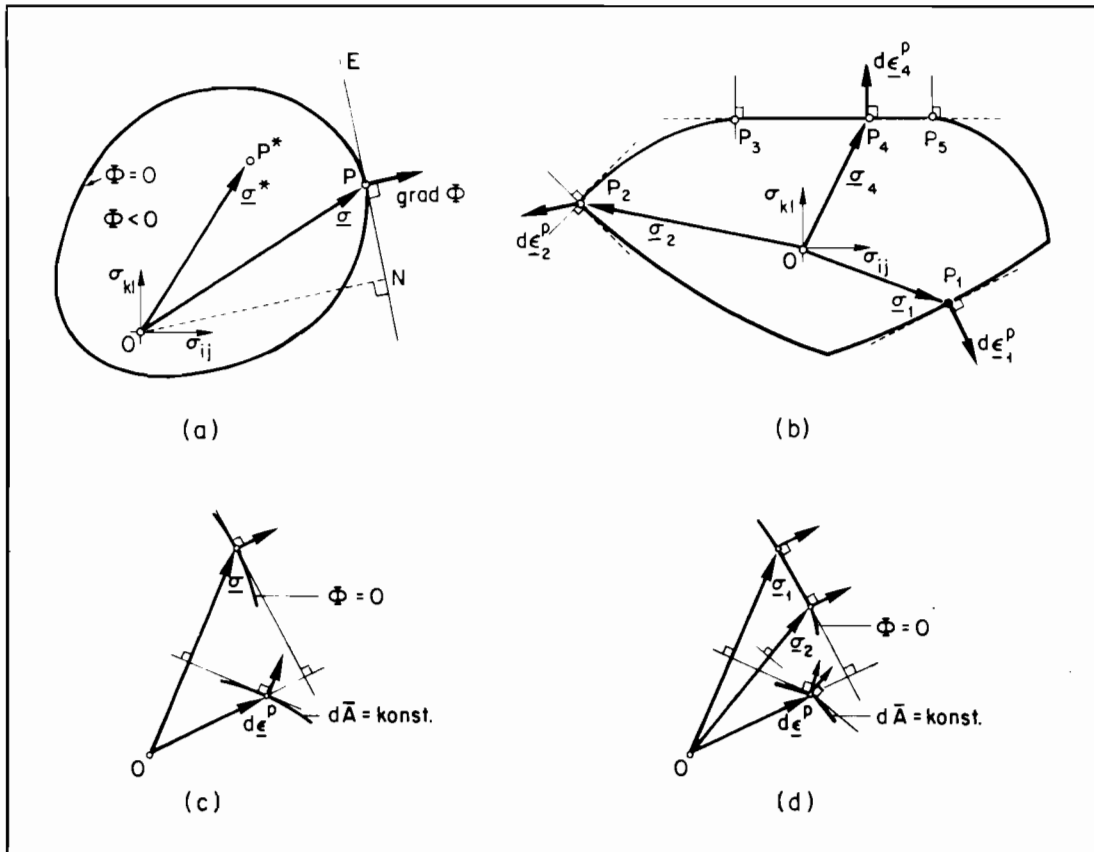


Bild 3.2 : Fließbedingung und zugeordnetes Fließgesetz

Verlangt man nun, dass neutrale Spannungszustände $d\sigma_{ij}$ an den zugehörigen plastischen Verzerrungszuständen $d\epsilon_{ij}^P$ keine Arbeit leisten, d.h., das Skalarprodukt der Vektoren $d\sigma$ und $d\epsilon^P$ verschwindet,

$$d\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^P = d\sigma \cdot d\epsilon^P = 0 \quad , \quad (3.7)$$

so folgt aus dem Vergleich mit (3.6) das *Fließgesetz*

$$d\epsilon_{ij}^P = \lambda \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \quad [f\ddot{u}r \Phi(\sigma_{ij}) = 0] \quad , \quad (3.8)$$

wobei λ einen skalaren Faktor bezeichnet. Spannungs- und Verzerrungszustände, welche das Fließgesetz (3.8) und die Bedingung

$$d\epsilon_{ij}^P = 0 \quad [f\ddot{u}r \Phi(\sigma_{ij}) < 0] \quad (3.9)$$

erfüllen, werden als *verträglich* bezeichnet.

Die Forderung (3.7) nach *Orthogonalität* der plastischen Verzerrungszustände bezüglich der Fließfläche tritt als zweites Postulat zur Forderung der Konvexität des aplastischen Bereichs hinzu. Ueber die Angemessenheit der beiden Postulate muss von Fall zu Fall aufgrund von Experimenten entschieden werden.

Mit dem Fließgesetz (3.8) lässt sich die Fließfläche $\Phi = 0$ als Potentialfläche für die plastischen Verzerrungszustände deuten. Die Bedingung (3.8) wird deshalb auch als das der Fließbedingung zugeordnete Fließgesetz bezeichnet.

Die beim plastischen Fließen dissipierte elementare Dissipationsarbeit ist nach (3.3)

und (3.8) durch

$$d\bar{A} = \lambda \cdot \sigma_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.10)$$

gegeben. Für die konvexe, den Ursprung 0 enthaltende Fliessfläche ist der Ausdruck

$$\sigma_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}$$

nicht negativ. Der skalare Faktor λ ist daher mit $d\bar{A}$ ebenfalls nicht negativ, $\lambda \geq 0$.

KOITER (1953) erweiterte die Theorie des plastischen Potentials auf den Fall, in dem die Fliessfläche durch mehrere Funktionen Φ_k beschrieben wird. Für den aplastischen Bereich nehmen alle Φ_k nicht positive Werte an. Für den Fall des Fliessens verschwindet mindestens eine Funktion $\Phi_k(\sigma_{ij})$ aber keine nimmt positive Werte an.

Mit Bild 3.2 (b) wird dieser Fall veranschaulicht. Die Grenzfläche des aplastischen Bereichs ist aus mehreren Teilstücken zusammengesetzt. Die einzelnen Teilstücke werden durch reguläre Punkte gebildet, wie z.B. P_1 . In der Umgebung von P_1 ist die Fliessfläche glatt, d.h. die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}$ sind eindeutig gegeben und verschwinden nicht alle gleichzeitig. Durch den Schnitt verschiedener Teilstücke entstehen Singularitäten wie Kanten und Ecken. In der Umgebung solcher Stellen, z.B. bei P_2 , ist die Fliessfläche nicht glatt. Um das Fliessgesetz (3.8) für solche Situationen zu verallgemeinern, verlangt man z.B. für P_2 , dass der Vektor des plastischen Verzerrungsincrementes $d\epsilon_{ij}^P$ in den Winkelraum zeigt, der durch die nach aussen gerichteten Normalen auf die in P_2 sich schneidenden Teilstücke gebildet wird. Für den allgemeinen Fall lautet die Verallgemeinerung von (3.8) entsprechend

$$d\epsilon_{ij}^P = \lambda_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial \sigma_{ij}} \quad . \quad (3.11)$$

Dabei bezeichnen die λ_k nicht negative Faktoren, und die Summation ist über diejenigen Funktionen Φ_k zu erstrecken, welche im betrachteten Spannungspunkt σ_{ij} verschwinden.

Mit der Geraden $P_3 P_5$ enthält die in Bild 3.2 (b) dargestellte Fliessfläche ausser stark konvexen Teilstücken auch ein schwach konvexes. Die Forderung nach Konvexität des aplastischen Bereichs wird in der schwachen Form interpretiert, dass die Fliessfläche keine konkaven Stellen aufweise. Ausser den durch P_1 und P_2 charakterisierten Fällen einer stark konvexen und glatten bzw. nicht glatten Grenzfläche des aplastischen Bereichs ist mit P_4 noch eine dritte Art von Punkten auf der Fliessfläche zu unterscheiden. Für alle drei Fälle überprüft man leicht, dass die elementare Dissipationsarbeit eine eindeutige Funktion des plastischen Verzerrungsincrementes ist, d.h. es gilt

$$d\bar{A} = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^P = d\bar{A}(d\epsilon_{ij}^P) \quad . \quad (3.12)$$

Ferner bewirkt eine Streckung von $d\epsilon_{ij}^P$ mit dem positiven Faktor t eine Vergrösserung von $d\bar{A}$ um denselben Faktor:

$$d\bar{A}(t \cdot d\epsilon_{ij}^P) = t \cdot \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^P = t \cdot d\bar{A}(d\epsilon_{ij}^P) \quad . \quad (3.13)$$

Mit (3.13) kann $d\bar{A}$ als homogene Funktion vom Grade eins in den plastischen Verzerrungsincrementen betrachtet werden. Bekanntlich heisst eine Funktion $f(\underline{r})$ homogen vom Grade n , wenn der Definitionsbereich von f mit jedem Vektor $\underline{r} \neq \underline{0}$ auch den Strahl $t \cdot \underline{r}$ enthält und $f(t \cdot \underline{r}) = t^n \cdot f(\underline{r})$ ist, für alle Punkte im Definitionsbereich von f und beliebige positive t . Nach dem Satz von Euler über homogene Funktionen f vom Grade n ist

$$\underline{r} \cdot \text{grad}[f(\underline{r})] = n \cdot f(\underline{r}) \quad , \quad (3.14)$$

d.h. für $d\bar{A}$, $n = 1$, $d\epsilon_{ij}^P$ und σ_{ij} gilt mit (3.12)

$$d\epsilon_{ij}^P \frac{\partial[dA(d\epsilon_{ij}^P)]}{\partial(d\epsilon_{ij}^P)} = d\bar{A}(d\epsilon_{ij}^P) = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^P \quad , \quad (3.15)$$

woraus

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial[d\bar{A}(d\epsilon_{ij}^P)]}{\partial(d\epsilon_{ij}^P)} \quad (3.16)$$

folgt. Wie sich bei den Anwendungen im dritten Teil dieser Arbeit zeigt, ist das Ergebnis (3.16) besonders nützlich im Zusammenhang mit der Verwendung von verallgemeinerten Grössen, wie sie in Abschnitt 4.3 eingeführt werden. Beachtet man, dass gemäss (3.12) die elementare Dissipationsarbeit $d\bar{A}$ durch das Skalarprodukt zweier Vektoren $\underline{\sigma}$ und $d\underline{\epsilon}^P$ gegeben ist, so ist anhand von Bild 3.2 (a) eine einfache geometrische Interpretation möglich: Alle Spannungszustände, welche den durch $d\underline{\epsilon}^P = \lambda \cdot \text{grad } \Phi$ charakterisierten Verzerungszustand hervorrufen können, sind durch Punkte auf der Hyperebene E gegeben, deren Abstand DN vom Ursprung bis auf einen unwesentlichen Faktor $d\bar{A}$ beträgt. Die Hyperebenen E werden *Stützebenen* genannt. Die Einhüllende aller Stützebenen bildet die konvexe Fliessfläche.

Schliesslich stellt man anhand von Figur 3.2 (a) noch folgenden Sachverhalt fest. Für ein vorgegebenes $d\epsilon_{ij}^P$, den damit verträglichen Spannungszustand σ_{ij} und einen beliebigen anderen, nicht verträglichen Spannungszustand σ_{ij}^* folgt wegen Konvexität der Fliessfläche die Beziehung

$$\sigma_{ij}^* d\epsilon_{ij}^P \leq \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^P \quad , \quad (3.17)$$

das *Prinzip der maximalen Dissipationsarbeit*, das auf v. MISES (1928) zurückgeht. Anstatt, wie dies hier geschehen ist, Konvexität der Fliessfläche und Orthogonalität der plastischen Verzerrungszinkremente zu ihr zu postulieren und daraus auf die Bedingung (3.17) zu schliessen, könnte man auch umgekehrt vorgehen. Setzt man das Prinzip (3.17) als richtig voraus, so sind die beiden genannten Eigenschaften nicht zusätzliche Postulate, sondern ergeben sich als Folgerungen.

Verschiedentlich wurde versucht, die Theorie des plastischen Potentials physikalisch zu begründen. Hier sei lediglich auf neuere Arbeiten von ZIEGLER (1972, 1974) zu der von ihm *Thermomechanik* genannten Verbindung von Kontinuumsmechanik und Thermodynamik hingewiesen. Er zeigte, dass eine von ihm (1970 b, 1974) begründete Orthogonalitätsbedingung im Fall des plastischen Kontinuums auf die Theorie des plastischen Potentials führt. Die Orthogonalitätsbedingung beruht auf der Forderung, dass die beiden dissipativen, d.h. einer Entropieproduktion entsprechenden Teilprozesse einer reinen Deformation bzw. eines reinen Wärmeflusses durch die Dissipationsfunktion völlig bestimmt sind. Dies bedeutet, dass gyroskopische Anteile an den dissipativen Spannungen bzw. Kräften ausgeschlossen werden.

Für den Sonderfall einer reinen plastischen Deformation führt die Zieglersche Orthogonalitätsbedingung auf die Beziehung (3.16). Die Dissipationsfunktion $d\bar{A}(d\epsilon_{ij}^P) = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^P > 0$ wächst linear in den $d\epsilon_{ij}^P$. Die Dissipationsflächen $d\bar{A} = \text{konst.}$ im Raum der plastischen Verzerrungszinkremente $d\epsilon_{ij}^P$ sind ähnlich und liegen bezüglich dem Ursprung O ähnlich. Mit (3.16) erhält man als Bild aller Dissipationsflächen eine einzige Fliessfläche im Spannungsraum mit der Gleichung (3.5). Wie ZIEGLER, NÄNNI und WEHRLI (1973) zeigten, sind die Fliessfläche und die Dissipationsflächen mindestens schwach konvex, wenn die Ziegler-

sche Orthogonalitätsbedingung gilt und die Dissipationsfunktion im ganzen Raum der plastischen Verzerrungsincremente eindeutig definiert ist. Für den Fall $d\bar{A} = \text{konst.}$, d.h. $\delta(d\bar{A}) = \sigma_{ij} \delta(d\epsilon_{ij}^P) + d\epsilon_{ij}^P \delta(\sigma_{ij}) = 0$, kann die Beziehung (3.16) durch $\sigma_{ij} \delta(d\epsilon_{ij}^P) = 0$ ausgedrückt werden. Alsdann ist $d\epsilon_{ij}^P \delta(\sigma_{ij}) = 0$, was mit (3.7) bzw. mit der Aussage des Fließgesetzes (3.8) zusammenfällt.

Die in Bild 3.2 (c) dargestellte Dissipationsfläche $d\bar{A} = \text{konst.}$ sei in der Umgebung des Endpunktes von $d\epsilon^P$ regulär. Der zugeordnete Spannungsvektor $\underline{\sigma}$ ist in diesem Punkt zur Dissipationsfläche orthogonal. Andererseits ist $d\epsilon^P$ im Endpunkt von $\underline{\sigma}$ zur Fließfläche $\Phi = 0$ orthogonal. Die Abbildung des Raumes der Verzerrungsincremente auf den Raum der Spannungen ist eindeutig. Diese Eindeutigkeit entfällt im Fall einer Singularität einer stark konvexen Dissipationsfläche, wie dies mit Bild 3.2 (d) angedeutet ist. Den Endpunkt von $d\epsilon^P$ entsprechen alle Punkte auf dem schwach konvexen Teilstück der Fließfläche zwischen den Endpunkten von $\underline{\sigma}_1$ und $\underline{\sigma}_2$. Umgekehrt ist einem schwach konvexen Teilstück der Dissipationsflächen in eindeutiger Weise ein singulärer Punkt der Fließfläche zugeordnet, und die Fließfläche ist in der Umgebung dieses Punktes stark konvex.

Im folgenden soll die in diesem Abschnitt enthaltene Darstellung der Theorie des plastischen Potentials mit einigen Hinweisen auf Möglichkeiten der mathematischen Behandlung des Verhaltens von plastischen Materialien mit Verfestigung abgeschlossen werden. Im Gegensatz zum Verhalten eines ideal plastischen Materials, dessen Fließfläche durch eine feste Funktion $\Phi(\sigma_{ij})$ gegeben ist, verändert sich die Grenzfläche des aplastischen Bereichs eines Materials mit Verfestigung mit dem Verformungsprozess. In diesem Fall ist für die Fließfläche in jedem momentanen Verformungszustand eine eigene Bedingung (3.5) anzugeben. Indem man die Abhängigkeit der Fließfunktion Φ vom Verformungsprozess durch geeignete Verfestigungsparameter ausdrückt, fasst man alle Bedingungen (3.5) zusammen. Die Verfestigungsparameter sollen die Abhängigkeit des Materialverhaltens von der sog. Belastungsgeschichte angemessen wiedergeben. Die Belastungsgeschichte kann man als den Weg auffassen, den der Bildpunkt des Verzerrungszustandes in einem geeigneten Raum beschreibt. Es ist zu beachten, dass bei dem hier vorausgesetzten Nichtvorhandensein viskoser Effekte keine Abhängigkeit von der Zeit t auftritt.

Betrachtet man beliebige Spannungsincremente $d\sigma_{ij}$ in einem Punkt σ_{ij} auf der momentanen Fließfläche mit der Gleichung $\Phi(\sigma_{ij}) = 0$, so spricht man von einer *Belastung* oder von einer *Entlastung* je nachdem, ob das mit der ersten Gleichung (3.6) bestimmte totale Differential $d\Phi$ positiv oder negativ ist. Im ersten Fall weist der Vektor $d\sigma$ in σ_{ij} vom momentanen aplastischen Bereich weg, im zweiten in diesen hinein. Dem Fall $d\Phi = 0$ entsprechen neutrale, in der Tangentialebene an die Grenzfläche des aplastischen Bereichs liegende Vektoren $d\sigma$.

Ueblicherweise nimmt man an, plastische Verformungen treten nur für den Fall einer Belastung auf, nicht aber für neutrale Spannungsänderungen oder bei einer Entlastung. Diesen Fällen sollen rein elastische Änderungen der Verzerrungen entsprechen, mithin

$$d\epsilon_{ij}^P = 0 \quad [\Phi = 0, d\Phi \leq 0] . \quad (3.18)$$

Für den Fall einer Belastung setzt man als Stoffgleichung die lineare Form

$$d\epsilon_{ij}^P = C_{ijkl} d\sigma_{kl} \quad [\Phi = 0, d\Phi > 0] \quad (3.19)$$

für die Inkremente des plastischen Verzerrungszustandes und des Spannungszustandes an. Die Koeffizienten C_{ijkl} sind vom momentanen Spannungszustand σ_{ij} und vom Verformungsprozess abhängig. Da das Verhalten beim Uebergang von einer Belastung zu einer Entlastung kontinuierlich sein soll, nämlich derart, dass mit $d\Phi$ auch $d\epsilon_{ij}^P$ gegen null strebt, verschwindet die lineare Form (3.19) zusammen mit der durch die erste Gleichung (3.6) ge-

gegebenen linearen Form

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} \quad .$$

Aus dieser Abhängigkeit folgt

$$d\epsilon_{ij}^p = \bar{C}_{ij} d\Phi = \bar{C}_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} \quad [\Phi = 0, d\Phi > 0]. \quad (3.20)$$

Wie die C_{ijkl} sind die \bar{C}_{ij} von σ_{ij} und vom Verformungsprozess abhängig, nicht aber von $d\sigma_{kl}$. Die Hauptrichtungen und die Verhältnisse der Hauptwerte von $d\epsilon_{ij}^p$ sind demgemäss von den Spannungsinkrementen $d\sigma_{kl}$ unabhängig.

Sofern man voraussetzt, in jedem Moment des Verformungsprozesses treffe das Prinzip (3.17) der maximalen Dissipationsarbeit zu, d.h. die Theorie des plastischen Potentials sei richtig, so kann das zu (3.8) analoge Fließgesetz

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \quad [d\lambda \geq 0] \quad (3.21)$$

verwendet werden. Aus dem Vergleich von (3.21) mit der ersten Gleichung (3.20) ergibt sich die Proportionalität

$$\bar{C}_{ij} \cdot H = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}$$

zwischen den Tensoren

$$\bar{C}_{ij} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}$$

und dementsprechend die Relation $d\lambda = d\Phi/H$. Der nicht negative Faktor H bezeichnet den vom Verformungsprozess abhängigen Verfestigungsmodul. Aus der zweiten Gleichung (3.20) folgt damit die Beziehung

$$d\epsilon_{ij}^p = \frac{1}{H} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} \quad [\Phi = 0, d\Phi > 0]. \quad (3.22)$$

Die hier dargestellte Theorie plastischer Materialien mit Verfestigung geht auf die Arbeit von DRUCKER (1950) zurück. Drucker postulierte, dass in jedem Moment des Verfestigungsprozesses die Spannungsinkremente $d\sigma_{ij}$ und die mit ihnen verbundenen Verzerrungsinkremente $d\epsilon_{ij}^e$ und $d\epsilon_{ij}^p$ die beiden Forderungen $d\sigma_{ij}(d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p) > 0$ und $d\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p \geq 0$ erfüllen. Die plastische Deformation eines Materials, das diesen Forderungen genügt, nennt man auch stabil, da sie nur zustande kommt, wenn Energie aufgewendet wird. Wie Drucker zeigte, führt für ein solches Material (3.20) direkt auf (3.22), da die Aussage seines zweiten Postulates $d\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p \geq 0$ mit derjenigen des Fließgesetzes (3.21) zusammenfällt.

3.3 Spezielle Flie遥bedingungen

Im folgenden werden zunächst Begriffe und Methoden eingeführt, die zur Darstellung ebener und räumlicher Spannungs- und Verzerrungszustände benutzt werden. Anschliessend werden einige wichtige Flie遥bedingungen für isotropes Material besprochen.

Der *lokale Spannungszustand* in einem Punkt P im Innern eines Körpers werde durch den kartesischen Spannungstensor σ_{ij} beschrieben. Die hier verwendete, in der Kontinuumsmechanik übliche Vorzeichenkonvention für die neun Komponenten des Spannungstensors ist aus der Darstellung des Elementarquaders in Bild 3.3 (a) ersichtlich.

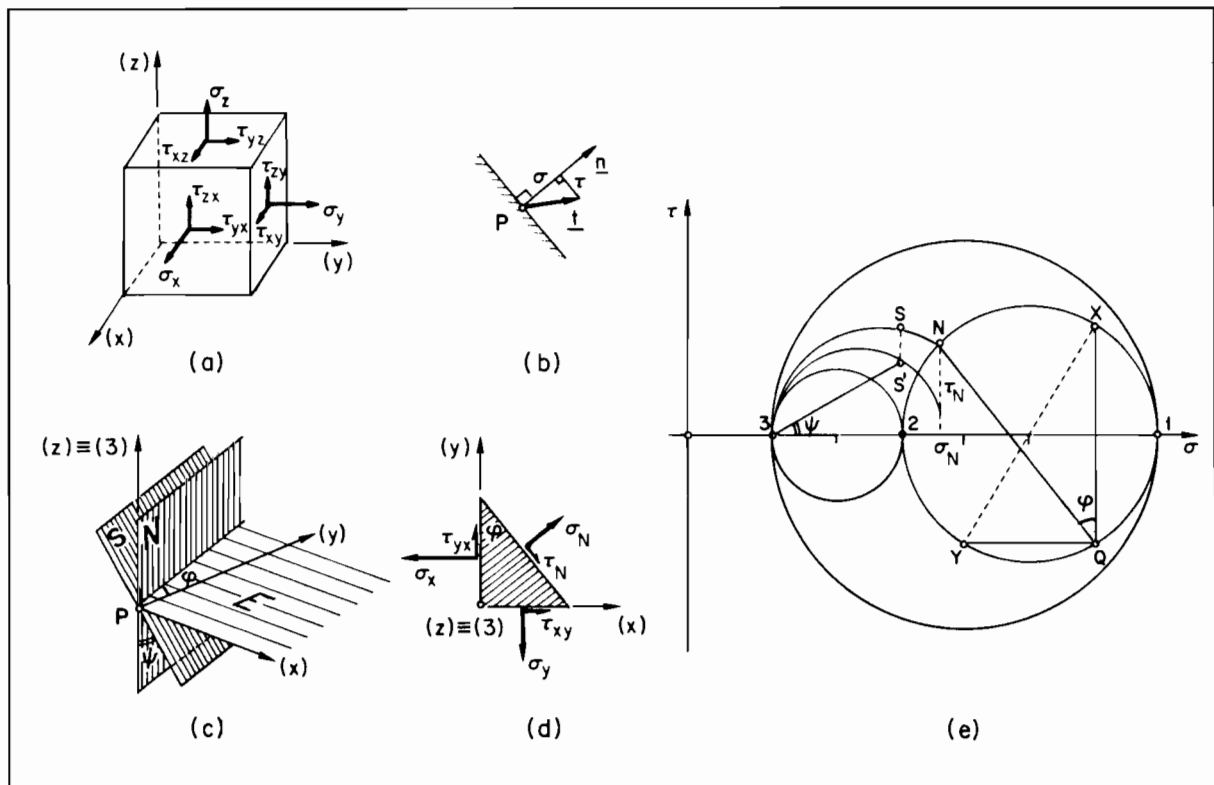


Bild 3.3: Spannungszustand

Eine SpannungsKomponente, die an einem Flächenelement wirkt, dessen äussere Normale in Richtung einer positiven Achse zeigt ist positiv, sofern sie selbst in eine positive Achsenrichtung weist. Nach dem Satz über die zugeordneten Schubspannungskomponenten ist der Spannungstensor symmetrisch,

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad , \quad (3.23)$$

d.h., er ist durch sechs unabhängige Grössen bestimmt. Diesen Satz gewinnt man in der Statik aus der Gleichgewichtsbedingung für die Momente. Der Spannungstensor ordnet jedem Flächenelement mit dem Einheitsnormalenvektor \underline{n} durch P den Spannungsvektor \underline{t} zu, dessen Komponenten durch

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (3.24)$$

gegeben sind. Gemäss Bild 3.3 (b) kann der Vektor \underline{t} in den Normalspannungsanteil σ und den Schubspannungsanteil τ aufgeteilt werden

mit

$$\sigma = t_i n_i, \quad \tau^2 = t_i t_i - \sigma^2. \quad (3.25)$$

Die Hauptachsenrichtungen \underline{n} genügen der Forderung $\underline{t} = \sigma \cdot \underline{n}$. An den zugehörigen Flächenelementen treten nur Normalspannungen auf, keine Schubspannungen. Die Hauptwerte $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ sind extremal. Nebenergebnis der Hauptachsentransformation sind die Grundinvarianten

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{(1)} &= \sigma_{ii} \\ &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ \sigma_{(2)} &= \frac{1}{2}(\sigma_{ij} \sigma_{ji} - \sigma_{ii} \sigma_{jj}) \\ &= \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2 - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x - \sigma_x \sigma_y \\ \sigma_{(3)} &= \frac{1}{2}(2 \cdot \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki} - 3 \cdot \sigma_{ij} \sigma_{ji} \sigma_{kk} + \sigma_{ii} \sigma_{jj} \sigma_{kk}) \\ &= 2 \cdot \tau_{yz} \tau_{zx} \tau_{xy} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 + \sigma_x \sigma_y \sigma_z \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

des Spannungstensors. Sie sind von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig.

Wählt man die z-Achse in Richtung der dritten Hauptspannung σ_3 , wie dies in den Bildern 3.3 (c) und (d) angedeutet ist, so lässt sich der Spannungstensor in einen ebenen und einen hydrostatischen Anteil zerlegen:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_3 & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Diese Zerlegung liegt der in Bild 3.3 (e) enthaltenen Darstellung des räumlichen Spannungszustandes in der Spannungsebene $\{\sigma, \tau\}$ zugrunde. Jedem Flächenelement durch P bzw. der zugehörigen, durch den Einheitsvektor \underline{n} gegebenen Normalenrichtung entspricht ein Bildpunkt in der Spannungsebene. Um den Weg des Bildpunktes bei einer Veränderung der Normalenrichtung \underline{n} zu untersuchen ist es zweckmässig, zunächst anzunehmen, σ_3 verschwinde, d.h. der Spannungszustand sei eben. Wie man sieht, entspricht diese Annahme einer Verschiebung der τ -Achse in Bild 3.3 (e) um σ_3 nach rechts. Dies wird bei der Rückkehr zum räumlichen Spannungszustand rückgängig gemacht.

In Bild 3.3 (d) sind die an einem keilförmigen Raumelement angreifenden Spannungen eingetragen. Die Seitenflächen des Raumelementes sind parallel zur spannungsfreien Richtung $z \equiv 3$ beziehungsweise senkrecht zur spannungsfreien Ebene E, siehe Bild 3.3 (c). Die Punkte X und Y in Bild 3.3 (e) sind die Bildpunkte der beiden zur x- und y-Achse senkrechten Flächenelemente. Sie sind durch die drei Komponenten σ_x , σ_y und τ_{xy} bestimmt. Folgende Vorzeichenkonvention wird verwendet: Normalspannungen σ werden als Zugspannungen positiv gerechnet und Schubspannungen τ dann, wenn das Innere des Raumelementes, in Richtung von τ gesehen, rechts liegt. Die Bildpunkte aller zur spannungsfreien Ebene E senkrechten Elemente liegen auf dem durch X und Y definierten MOHRSCHEM (1882) Spannungskreis, dessen Zentrum auf der σ -Achse liegt. Die Ermittlung des Bildpunktes N eines Flächenelementes, dessen Normale mit der x-Achse den Winkel φ einschliesst, ist aus der Konstruktion in Bild 3.3 (e) ersichtlich. Den Punkt Q bezeichnet man als Pol des Spannungskreises. Die Verbindungsgeraden beliebiger Bildpunkte mit Q sind parallel zu den Spuren der zugehörigen Flächenelemente in der spannungsfreien Ebene E.

In Bild 3.3 (e) ist ferner die geometrische Ermittlung der Bildpunkte von zur spannungs-freien Ebene schiefen Elementen angegeben. Die Bildpunkte S aller Elemente, die gemäss Bild 3.3 (c) durch Drehung des Elementes N um seine Spur in E entstehen, liegen auf dem durch die Punkte N und 3 bestimmten Kreisbogen, dessen Zentrum auf der σ -Achse liegt. Die Abhängigkeit vom Drehwinkel Ψ ergibt sich mit dem auf der σ -Achse zentrierten Halbkreis, der durch Punkt 3 und den Punkt mit den Koordinaten $(\sigma_N, 0)$ definiert wird. Die Gerade S'S ist zur τ -Achse parallel.

Die Ueberlagerung des anfänglich null gesetzten hydrostatischen Spannungszustandes σ_3 bewirkt eine Vergrösserung aller Normalspannungen um σ_3 . Die Schubspannungen bleiben unverändert. Die ursprünglich in den Punkt 3 verschobene τ -Achse wird also wieder um den Betrag σ_3 nach links verschoben. Die Bildpunkte $\{\sigma, \tau \geq 0\}$ sämtlicher Flächenelemente durch P liegen in dem durch die drei Halbkreise begrenzten Bereich, welche durch die drei Punkte 1, 2 und 3 mit den Abszissen σ_1 , σ_2 und σ_3 bestimmt sind. Aus Bild 3.3 (e) liest man noch die Grösse der maximalen Schubspannung ab:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \cdot |\sigma_1 - \sigma_3| \quad (\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3).$$

Allgemein, ohne Rücksicht auf die Numerierung der Hauptachsen gilt:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \cdot \text{Max}(|\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|, |\sigma_1 - \sigma_2|) . \quad (3.28)$$

Eine zweite geometrische Darstellung des räumlichen Spannungszustandes beruht auf der Zerlegung des Spannungstensors σ_{ij} in einem hydrostatischen Anteil

$$\sigma_H \cdot \delta_{ij} = \frac{1}{3} \cdot \sigma_{(1)} \cdot \delta_{ij} \quad (3.29)$$

und einen deviatorischen Anteil

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_H \cdot \delta_{ij} . \quad (3.30)$$

σ_H bezeichnet die mittlere Normalspannung und δ_{ij} den Einheitstensor. Die Grundinvarianten des Deviators (3.30) sind gegeben durch

$$\left. \begin{aligned} s_{(1)} &= 0 , \\ s_{(2)} &= \frac{1}{2} \cdot s_{ij} s_{ji} = \sigma_{(2)} + \frac{1}{3} \cdot \sigma_{(1)}^2 \\ &= \frac{1}{3} \cdot (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_y \cdot \sigma_z - \sigma_z \cdot \sigma_x - \sigma_x \cdot \sigma_y) + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2 , \\ s_{(3)} &= \frac{1}{3} \cdot s_{ij} s_{jk} s_{ki} = \sigma_{(3)} + \frac{1}{3} \cdot s_{(2)} \cdot \sigma_{(1)} - \frac{1}{27} \cdot \sigma_{(1)}^3 . \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

Im Hauptachsensystem ist der Spannungstensor durch seine drei Diagonalglieder σ_1 , σ_2 und σ_3 allein bestimmt. Die drei beim Uebergang zu Hauptachsen "verloren gegangenen" der ursprünglich sechs im Spannungstensor enthaltenen Grössen bestimmen die Stellung des Hauptachsensystems gegenüber den Ausgangskoordinaten. Der Spannungszustand kann demnach als Endpunkt P eines Vektors $\underline{\sigma}$ im Hauptspannungsraum dargestellt werden, wie dies in Bild 3.4 (a) wiedergegeben ist. Der Vektor $\underline{\sigma}$ wird nach der Beziehung

$$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \underline{\sigma} = \underline{\sigma}_H + \underline{s} = (\sigma_H, \sigma_H, \sigma_H) + (s_1, s_2, s_3) \quad (3.32)$$

als Summe eines in der *hydrostatischen Achse* liegenden Vektors $\underline{\sigma}_H$ und eines parallel zur *deviatorischen Ebene* liegenden Vektors \underline{s} aufgefasst. Die deviatorische Ebene genügt der Gleichung $\sigma_{(1)} = 0$, und die hydrostatische Achse ist zu ihr normal, d.h. $\underline{\sigma}_H \cdot \underline{s} = 0$.

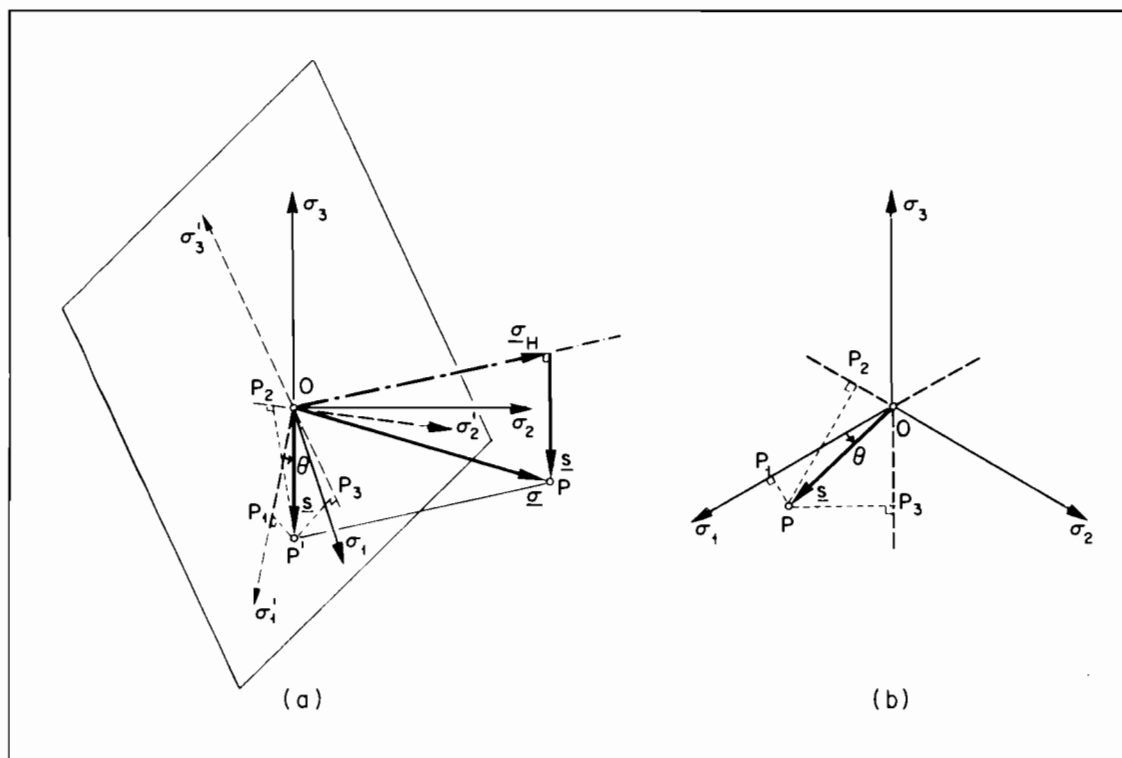


Bild 3.4: Hauptspannungsraum und deviatorische Ebene $\sigma_{(1)}=0$

Bei der Normalprojektion auf die deviatorische Ebene wird die hydrostatische Achse zum Punkt O abgebildet, und der Vektor \underline{s} bleibt erhalten. Wie man sich leicht überzeugt, entsprechen die Projektionen des Vektors \underline{s} auf die projizierten Hauptachsen σ'_1 , σ'_2 und σ'_3 bis auf den Faktor $\sqrt{\frac{3}{2}}$ den Hauptwerten des Deviators. Unter Verwendung von (3.29) und (3.30) gilt mit den Bezeichnungen in Bild 3.4 (b)

$$OP_1 = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \cdot (2, -1, -1) \cdot \sqrt{\frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot s_1, \dots \quad (3.33)$$

Der Betrag $\sqrt{s_{ij} s_{ji}} = \sqrt{2 \cdot s_{(2)}}$ des Vektors \underline{s} ist bis auf den Faktor $\frac{1}{\sqrt{3}}$ gleich der Schubspannung τ_0 , die an den Seitenflächen eines Oktaeders im Hauptachsensystem auftritt. Die *Oktaeder-Schubspannung* ist also gegeben durch

$$\tau_0 = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot s_{(2)}} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2} \quad (3.34)$$

Für die zweite Gleichung (3.34) wurde die dritte in (3.31) angegebene Form für $s_{(2)}$ benutzt. Die zu τ_0 gehörende Normalspannung σ_0 ist durch die in (3.29) auftretende Normalspannung σ_H gegeben. Diese wird deshalb auch als *Oktaeder-Normalspannung*

$$\sigma_0 = \sigma_H = \frac{1}{3} \cdot \sigma_{(1)} \quad (3.35)$$

bezeichnet. Mit den Gleichungen (3.33) und (3.34) kann schliesslich für den Winkel θ , der die Richtung des Vektors \underline{s} angibt, folgende Beziehung formuliert werden:

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{2} \cdot s_1}{2 \cdot \tau_0} = \frac{\sqrt{2} \cdot \frac{2 \cdot \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3}}{2 \cdot \tau_0} \quad (3.36)$$

Wie man sieht, ist der Spannungszustand durch Angabe der drei Grössen σ_0 , τ_0 und θ im Hauptachsensystem eindeutig bestimmt.

Der *lokale Verformungszustand* wird durch die Verschiebungen u_i des Punktes P und durch den symmetrischen Verzerrungstensor ϵ_{ij} beschrieben. Bei linearer Näherung, d.h. bei Be-

schränkung auf kleine Deformationen, sind die Verzerrungskomponenten durch die kinematischen Relationen

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.37)$$

mit den Verschiebungskomponenten verknüpft. Mit den in der Technik üblichen Bezeichnungen für Dehnungen und Schiebungen, die in dieser Arbeit verwendet werden, lauten die Relationen (3.37)

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \dots, \quad \gamma_{yz} = 2 \cdot \epsilon_{yz} = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}, \dots \quad (3.38)$$

Die Grundinvarianten des Verzerrungstensors ergeben sich ohne weiteres aus den entsprechenden Beziehungen (3.26) für den Spannungstensor. Ebenso kann die Darstellung mit Mohrschen Verzerrungskreisen in der Verzerrungsebene $\{\epsilon, \frac{\gamma}{2}\}$ sinngemäss durchgeführt werden. Endlich kann der Verzerrungstensor mit den zu (3.29) und (3.30) analogen Beziehungen

$$\epsilon_v \cdot \delta_{ij} = \frac{1}{3} \cdot \epsilon_{(1)} \cdot \delta_{ij} \quad (3.39)$$

und

$$e_{ij} = \epsilon_{ij} - \epsilon_v \cdot \delta_{ij} \quad (3.40)$$

in einen hydrostatischen und einen deviatorischen Anteil zerlegt werden. ϵ_v ist die spezifische Volumendehnung. Die Tensoren (3.39) und (3.40) beschreiben die Volumenänderung (*Dilatation*) und die Gestaltänderung (*Distorsion*). Die Grundinvarianten des Deviators e_{ij} folgen aus den entsprechenden Beziehungen (3.31) für den Spannungsdeviator.

Die bisher eingeführten Begriffe und Beziehungen werden der folgenden Diskussion einiger wichtiger Fliessbedingungen zugrunde gelegt. Die Diskussion beschränkt sich auf isotropes Material. Für eine ausführlichere Darstellung der Fliessbedingungen isotroper und anisotroper Materialien sei z.B. auf eine Arbeit von SAYIR (1970) verwiesen.

Die Fliessbedingung (3.5) eines isotropen Materials kann als symmetrische Funktion der Hauptspannungen, bzw. als Funktion

$$\Phi(\sigma_{(1)}, \sigma_{(2)}, \sigma_{(3)}) = 0 \quad (3.41)$$

der Grundinvarianten des Spannungstensors dargestellt werden. Die Gleichung (3.41) beschreibt eine konvexe Fliessfläche im Hauptspannungsraum. Durch den Schnitt dieser Fläche mit einer deviatorischen Ebene $\sigma_{(1)} = \text{konst.}$ entsteht eine geschlossene, konvexe Linie, die sogenannte *Fliessfigur*. Wegen der Symmetrie der Grundinvarianten (3.26) in den Hauptspannungen besitzt die Fliessfigur eine mindestens sechsfache Symmetrie bezüglich der gemäss Bild 3.4 (b) projizierten Achsen σ_1 , σ_2 und σ_3 . Die Betrachtung eines Sechstels der Fliessfigur, z.B. des Bogens $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} (\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3)$, ist ausreichend, und die Tangenten an die Fliessfigur in deren Schnittpunkten mit den projizierten Achsen sind zu diesen orthogonal.

Wie ZIEGLER (1960a, 1969) in zwei Arbeiten ausführte, besitzen für isotropes Material die Spannungstensoren σ_{ij} und die durch das Fliessgesetz (3.8) oder (3.11) gegebenen Tensoren $d\epsilon_{ij}^p$ der plastischen Verzerrungsinkremente in jedem Fall ein gemeinsames Hauptachsensystem. Ferner ist gemäss einer Feststellung in der oben angeführten Arbeit von Sayir die zweidimensionale Fliessfläche (3.41) im Hauptspannungsraum repräsentativ für die fünfdimensionale, durch (3.5) gegebene Fliessfläche im Spannungsraum. Die zweite kann aus der ersten unter Erhaltung der Konvexität mit der Gesamtheit aller Drehungen des Koordinatensystems gewonnen werden. Insgesamt genügt für die Diskussion der Flie-

bedingung eines isotropen Materials demnach die Betrachtung seiner Fliessfläche im Hauptspannungsraum und der zu ihr orthogonalen Vektoren $d\epsilon^P$ der plastischen Verzerrungsklemente. Diese können mit der zu (3.32) analogen Beziehung

$$d\epsilon^P = d\epsilon_V^P + d\epsilon^P \quad (3.42)$$

in einen zur hydrostatischen Achse parallelen und einen in der deviatorischen Ebene $\sigma_{(1)} = \text{konst.}$ liegenden Anteil aufgespalten werden.

Für ein *inkompressibles* Material verschwindet der Vektor $d\epsilon_V^P$, d.h. es gilt $d\epsilon^P = d\epsilon^P$. Als Fliessfläche ergibt sich ein zur hydrostatischen Achse paralleler Zylinder. Die Abhängigkeit von $\sigma_{(1)}$ in (3.41) entfällt. Man erhält in diesem Fall anstelle von (3.41) die von den Grundinvarianten des Spannungsdeviators allein abhängige Funktion

$$\Phi(s_{(2)}, s_{(3)}) = 0 \quad (3.43)$$

Die Fliessbedingungen von v. MISES (1913) und TRESCA (1868) sind vom Typ (3.43). Der v. Misessche Ansatz

$$\Phi = s_{(2)} - k^2 = 0 \quad (3.44)$$

kann für den Fall von Isotropie und linearer Elastizität als Hypothese von der Konstanz der Gestaltänderungsenergie $\bar{U}_g = s_{(2)}/(2 \cdot G) = s_{(2)} \cdot (1+\nu)/E$ gedeutet werden. G bezeichnet den Schubmodul, E den Elastizitätsmodul und ν die Querdehnungszahl. Die Fliessgrenzen unter einachsiger Beanspruchung sind gegeben durch

$$\sigma_{fz} = \sqrt{3} \cdot k \quad , \quad \sigma_{fd} = -\sqrt{3} \cdot k \quad (3.45)$$

Tresca postulierte, dass das Fliesen in einem Punkt P im Innern des Materials einsetzt, wenn die grösste an irgend einem Flächenelement durch P auftretende Schubspannung einen für das Material charakteristischen, kritischen Wert erreicht. Unter Verwendung von (3.28) und (3.30) kann diese Bedingung durch

$$\text{Max}(|s_2 - s_3|, |s_3 - s_1|, |s_1 - s_2|) - 2 \cdot k = 0 \quad (3.46)$$

ausgedrückt werden. Die Fliessgrenzen unter einachsiger Beanspruchung sind

$$\sigma_{fz} = 2 \cdot k \quad , \quad \sigma_{fd} = -2 \cdot k \quad (3.47)$$

Die den Bedingungen (3.44) und (3.46) entsprechenden Fliessfiguren in der deviatorischen Ebene sind in Bild 3.5 (a) dargestellt. Der Bedingung von v. Mises entspricht der Kreis mit Radius $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sigma_f = \sqrt{2} \cdot k$ und der Bedingung von Tresca bei gleichem σ_f das einbeschriebene regelmässige Sechseck ABCDEF.

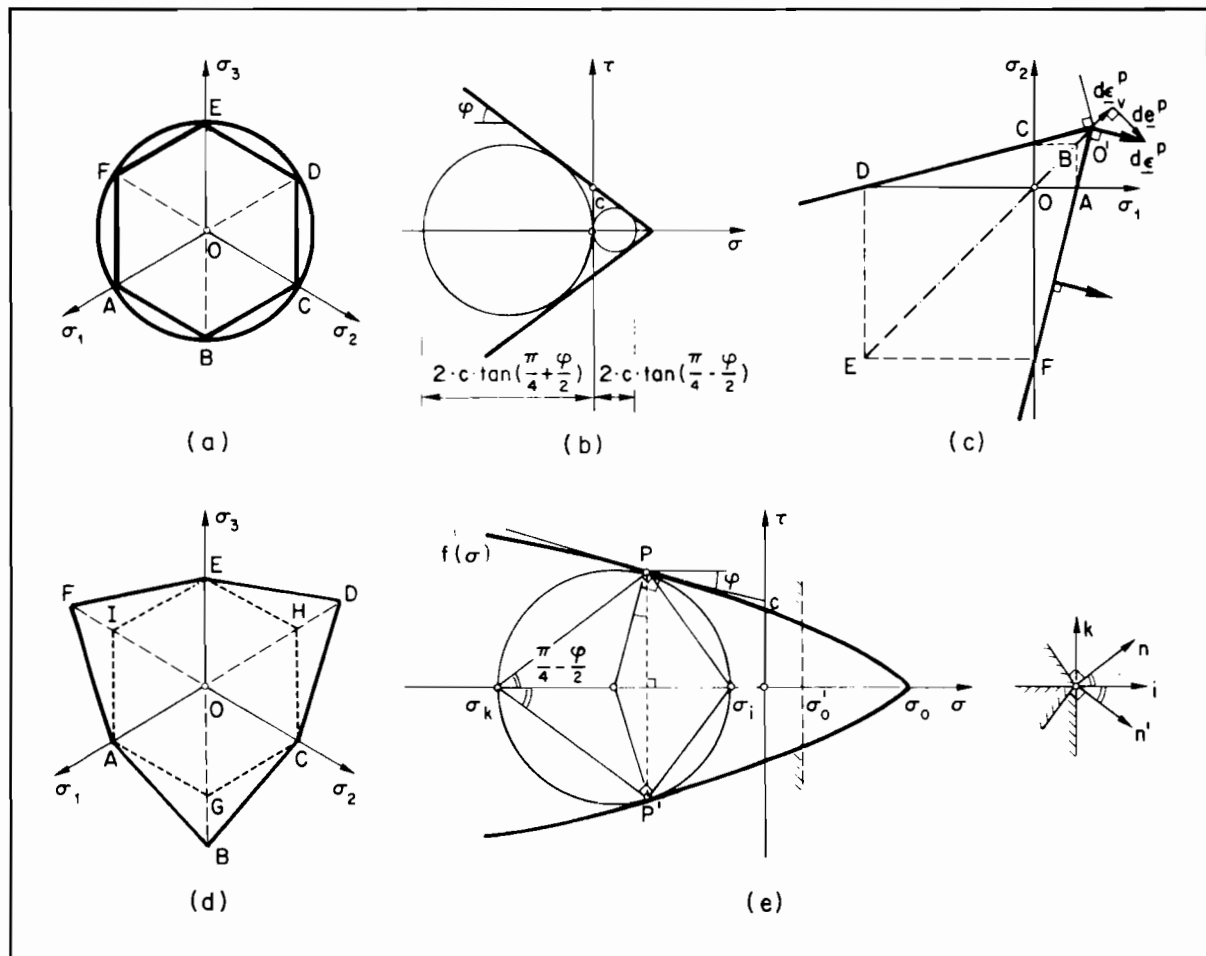


Bild 3.5 : Fließbedingungen von v. Mises, Tresca, Coulomb und Mohr

Für *kompressibles*, von $\sigma_{(1)}$ abhängiges Verhalten ergibt sich als einfachste Erweiterung der Fließbedingung von v. Mises die Gleichung

$$\Phi = s_{(2)} - k^2 \cdot \left(1 - \frac{\sigma_{(1)}}{m}\right)^2 = 0, \quad |m| > \sqrt{3} \cdot k \quad (3.48)$$

des DRUCKER-PRAGERSchen (1952) Fließkegels. Die Fließgrenzen unter einachsigen Zug oder Druck sind in diesem Fall gegeben durch

$$\sigma_{fz} = \frac{\sqrt{3} \cdot k}{1 + \sqrt{3} \cdot \frac{k}{m}}, \quad \sigma_{fd} = \frac{-\sqrt{3} \cdot k}{1 - \sqrt{3} \cdot \frac{k}{m}} \quad (3.49)$$

Eine analoge Erweiterung der Fließbedingung von Tresca führt zu der von DRUCKER (1952) vorgeschlagenen Fließpyramide

$$\max(|s_2 - s_3|, |s_3 - s_1|, |s_1 - s_2|) - 2 \cdot k \cdot \left(1 - \frac{\sigma_{(1)}}{m}\right) = 0, \quad |m| > 2 \cdot k \quad (3.50)$$

mit den Fließgrenzen

$$\sigma_{fz} = \frac{2 \cdot k}{1 + 2 \cdot \frac{k}{m}}, \quad \sigma_{fd} = \frac{-2 \cdot k}{1 - 2 \cdot \frac{k}{m}} \quad (3.51)$$

für den einachsigen Spannungszustand.

Nach dem Gesetz von COULOMB (1773) ist die maximale, an einem Flächenelement aufnehmbare Schubspannung τ eine lineare Funktion der zugehörigen Normalspannung σ :

$$|\tau| + \sigma \cdot \tan \varphi - c \leq 0 \quad . \quad (3.52)$$

Mit $c \geq 0$ wird die Kohäsion bezeichnet und mit $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ der Winkel der inneren Reibung. In der Spannungsebene Bild 3.5 (b) bedeutet die Bedingung (3.52), dass kein Spannungskreis Punkte ausserhalb des spitzwinkligen, in Richtung negativer σ sich öffnenden Bereichs besitzt, welcher durch die beiden zur σ -Achse symmetrischen, mit den Achsenabschnitten $c \cdot \cot \varphi$ und $\pm c$ bestimmten Geraden begrenzt wird. Die entsprechende Formulierung in den Hauptwerten geht auf v. KÁRMÁN (1911) zurück. Es gilt

$$[c \cdot \cot \varphi - \frac{1}{2} \cdot (\sigma_i + \sigma_k)] \cdot \sin \varphi = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_i - \sigma_k) \quad [\sigma_i \geq \sigma_j \geq \sigma_k] \quad ,$$

beziehungsweise

$$\sigma_i \cdot (1 + \sin \varphi) - \sigma_k \cdot (1 - \sin \varphi) - 2 \cdot c \cdot \cos \varphi = 0 \quad [\sigma_i \geq \sigma_j \geq \sigma_k] \quad . \quad (3.53)$$

Die Fließgrenzen unter einachsiger Beanspruchung sind

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{fz} &= \frac{2 \cdot c \cdot \cos \varphi}{1 + \sin \varphi} = 2 \cdot c \cdot \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \\ \sigma_{fd} &= \frac{-2 \cdot c \cdot \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} = -2 \cdot c \cdot \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad , \quad (3.54)$$

und ihr Verhältnis beträgt

$$\zeta = \frac{\sigma_{fz}}{-\sigma_{fd}} = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \quad . \quad (3.55)$$

Wie SHIELD (1955) zeigte, ergibt sich als Fließfläche im Hauptspannungsraum eine unregelmäßig hexagonale Pyramide, deren Seitenebenen durch die sechs Gleichungen (3.53) gegeben sind. In Bild 3.5 (c) ist ihr Schnitt mit der Ebene $\sigma_3 = 0$ dargestellt und in Bild 3.5 (b) der Schnitt mit der deviatorischen Ebene $\sigma_{(1)} = 0$. Die Längen der Vektoren \underline{OA} ($\sigma_1 = -2 \cdot \sigma_2 = -2 \cdot \sigma_3$) und \underline{OB} ($2 \cdot \sigma_1 = 2 \cdot \sigma_2 = -\sigma_3$) in Bild 3.5 (d) folgen aus (3.53) und (3.33):

$$|\underline{OA}| = \frac{2 \cdot c \cdot \cos \varphi \cdot \sqrt{6}}{3 + \sin \varphi} \quad , \quad |\underline{OB}| = \frac{2 \cdot c \cdot \cos \varphi \cdot \sqrt{6}}{3 - \sin \varphi} \quad . \quad (3.56)$$

Für den Grenzfall $\varphi = 0$ geht die Fließbedingung von Coulomb in diejenige von Tresca über. Dies ist in Bild 3.5 (d) mit dem regelmässigen Tresca-Sechseck AGCHEI angedeutet. Für den Grenzfall $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ergibt sich aus dem unregelmässigen Sechseck ABCDEF als extremale Fließfigur ein gleichseitiges Dreieck mit $2 \cdot |\underline{OA}| = |\underline{OB}|$. Für die den Gleichungen (3.53) genügenden Spannungspunkte auf den Seitenebenen der Fließfläche herrscht nach dem Fließgesetz (3.8) ein ebener Fließzustand, der unter Verwendung von (3.55) durch

$$d\epsilon_j^p = 0, \quad \frac{d\epsilon_i^p}{(-d\epsilon_k^p)} = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} = \frac{1}{\zeta} \quad [\sigma_i \geq \sigma_j \geq \sigma_k] \quad (3.57)$$

charakterisiert wird. Für Spannungspunkte auf den Kanten der Fließfläche folgt mit (3.11) entsprechend

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon_i^p &= (\lambda + \mu) \cdot (1 + \sin \varphi) \\ d\epsilon_j^p &= -\lambda \cdot (1 - \sin \varphi) \\ d\epsilon_k^p &= -\mu \cdot (1 - \sin \varphi) \end{aligned} \right\} \quad [\sigma_i \geq \sigma_j = \sigma_k] \quad [\lambda \geq 0, \mu \geq 0] \quad (3.58)$$

und

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_i^P &= -(\lambda + \mu) \cdot (1 - \sin\varphi) \\ d\varepsilon_j^P &= \lambda \cdot (1 + \sin\varphi) \\ d\varepsilon_k^P &= \mu \cdot (1 + \sin\varphi) \end{aligned} \right\} [\sigma_j = \sigma_k \geq \sigma_i] \quad [\lambda \geq 0, \mu \geq 0]. \quad (3.59)$$

Um die elementare Dissipationsarbeit (3.10) zu bestimmen denkt man sich die Vektoren \underline{g} und $d\varepsilon^P$ zweckmässigerweise nach den Beziehungen (3.32) und (3.42) in hydrostatische und deviatorische Anteile aufgeteilt. Wegen der Linearität der Fliessbedingungen (3.53) und der Orthogonalität der $d\varepsilon^P$ zur Fliessfläche kann für die Berechnung des Skalarproduktes $d\bar{A} = \underline{g} \cdot d\varepsilon^P = \underline{s} \cdot d\varepsilon^P + \sigma_H \cdot d\varepsilon_V^P$ der Vektor $d\varepsilon^P$ in die Spitze O' der Fliessfläche mit den Koordinaten $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = c \cdot \cot\varphi$ verschoben werden, Bild 3.5 (c). Alsdann geben nur die hydrostatischen Anteile einen Beitrag und es folgt

$$d\bar{A} = c \cdot \cot\varphi \cdot d\varepsilon_{(1)}^P. \quad (3.60)$$

Dieser Ausdruck ist für alle Punkte auf der Fliessfläche gültig und insbesondere auch für sämtliche mit dem Spannungszustand an der Spitze O' verträglichen Verzerrungssinkremente $d\varepsilon^P$. Für den ebenen Fliesszustand folgt aus (3.57) und (3.60) die Beziehung

$$d\bar{A} = c \cdot \cos\varphi \cdot d\gamma_{\max}^P. \quad (3.61)$$

Darin bezeichnet $d\gamma_{\max}^P = d\varepsilon_i^P - d\varepsilon_k^P$ das maximale Schiebungsinkrement $[\sigma_i \geq \sigma_j \geq \sigma_k]$.

Verallgemeinert man das Coulombsche Gesetz, indem man für die maximale, an einem Flächenelement aufnehmbare Schubspannung τ eine allgemeine Funktion f der zugehörigen Normalspannung σ ansetzt,

$$|\tau| - f(\sigma) \leq 0, \quad (3.62)$$

so erhält man als Begrenzung des aplastischen Bereichs in der Spannungsebene zwei zur σ -Achse symmetrische Hüllkurven für die Mohrschen Spannungskreise, wie dies in Bild 3.5 (e) angedeutet ist. Derartige Fliessbedingungen werden nach D. MOHR (1882, 1900) benannt. Üblicherweise nimmt man an, dass unter reinem hydrostatischem Druck kein Fliessen auftritt und verlangt, dass die Funktion f folgende Eigenschaften aufweist:

1. Der Definitionsbereich von f umfasst Werte $\sigma \leq \sigma_0$.
2. Die nicht negative Grösse σ_0 bezeichnet die Fliessgrenze unter hydrostatischer Zugbeanspruchung, $f(\sigma_0) = 0$.
3. f ist eine monoton fallende Funktion, und die Hüllkurve $f(\sigma)$ ist nach oben konvex, d.h. die Ableitungen $\frac{df}{d\sigma}$ und $\frac{d^2f}{d\sigma^2}$ sind nicht positiv.
4. Für grosse Druckspannungen σ strebt f gegen einen Grenzwert, d.h. das Verhalten nähert sich demjenigen eines Tresca-Materials.

Der für das Fliessen massgebende, durch die extremen Hauptwerte σ_i und σ_k ($\sigma_i \geq \sigma_j \geq \sigma_k$) definierte Spannungskreis in Bild 3.5 (e) ist in den Punkten P und P' zur Mohrschen Hüllkurve tangential. An den beiden Flächenelementen, die diesen Spannungsbildpunkten entsprechen, ist die Fliessbedingung $|\tau| = f(\sigma)$ gerade erfüllt. Die Normalen n und n' auf diese Flächenelemente liegen in der durch die Hauptachsen i und k aufgespannten Ebene, und die Winkel zwischen n und n' werden durch die Achsen i und k halbiert.

Wie in Bild 3.5 (e) angedeutet, ist jedem Punkt $P(\sigma, \tau)$ mit der Tangente an die Mohrsche Hüllkurve ein Wertepaar (c, φ) zugeordnet. Die Tangenten können als Coulombsche Geraden

aufgefasst werden, und die Mohrsche Hüllkurve ist die Einhüllende aller dieser Geraden. Diese Ueberlegungen lassen sich leicht auf die Darstellung im Hauptspannungsraum übertragen. Die der Hüllkurve entsprechende Fliessfläche im Hauptspannungsraum ist die Envelope der Gesamtheit der durch die Wertepaare (c, φ) bestimmten Fliessflächen von Coulomb. In jeder deviatorischen Ebene $\sigma_{(1)} = \text{konst.}$ ergibt sich demgemäss als Fliessfigur eine solche von Coulomb, d.h. ein unregelmässiges Sechseck, wie in Bild 3.5 (d) dargestellt. Die Gestalt der Fliessfigur ist durch das Verhältnis der Strecken $|\underline{DA}|$ und $|\underline{OB}|$ bestimmt. Wie man aus den Gleichungen (3.56) ersieht, verändert sie sich kontinuierlich nach Massgabe der Variation von φ .

Bis auf den nicht ausgeschlossenen Fall einer zur τ -Achse parallelen Tangente an die Mohrsche Hüllkurve im Punkt mit den Koordinaten $(\sigma_0, 0)$ entspricht nach den oben für die Funktion f getroffenen Annahmen jedem Punkt P auf der Hüllkurve genau ein Wertepaar (σ_i, σ_k) . In jedem Fall kann die Gleichung $|\tau| = f(\sigma)$ der Mohrschen Hüllkurve durch eine in σ_i und σ_k symmetrische Bedingung

$$g_1(\sigma_i, \sigma_k) = 0 \quad , \quad (3.63)$$

beziehungsweise mit

$$p = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_i + \sigma_k), \quad q = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_i - \sigma_k) \quad (3.64)$$

durch die Beziehung

$$g_2(p, q) = 0 \quad (3.65)$$

oder durch die Gleichung

$$q = g(p) \quad (3.66)$$

ersetzt werden. Bis auf den angeführten Fall einer zur τ -Achse parallelen Tangente an die Hüllkurve in $(\sigma_0, 0)$, in dem der Hauptwert σ_j nicht der mittlere zu sein braucht, ($i \neq j \neq k$), bezeichnen σ_i und σ_k die extremen Hauptspannungen. In (3.65) und (3.66) sind die Abszissen p der Mittelpunkte der für das Fliessen massgebenden Spannungskreise mit deren Radien q verknüpft. Bis auf die Vorzeichenkonvention für die Spannungen ist diese Darstellung in der Bodenmechanik gebräuchlich.

Wichtig ist die Feststellung, dass der Uebergang von der oben näher festgelegten Funktion $f(\sigma)$ zur entsprechenden Funktion $g(p)$ eindeutig ist. Weist umgekehrt eine allgemeine Funktion $g(p)$ die oben für die Funktionen $f(\sigma)$ geforderten Eigenschaften auf und ist für alle $p \leq \sigma_0$ die Beziehung $\frac{dg}{dp} \geq -1$ erfüllt, so ist ihr in der Spannungsebene eine Mohrsche Hüllkurve zugeordnet. Mit diesen Bemerkungen wird ein von SALENÇON (1974) diskutiertes Ergebnis präzisiert, wonach sich für den ebenen Fliesszustand jede Fliessbedingung für isotropes Material auf eine Bedingung vom Typ der Mohrschen Hüllkurve reduziert.

In der Tat reduziert sich für den ebenen Fliesszustand jede Fliessbedingung für isotropes Material auf eine Bedingung (3.63), bzw. auf (3.65) oder (3.66). Um dies zu zeigen, geht man zweckmässig von den im Anschluss an (3.41) gemachten Bemerkungen aus und betrachtet eine beliebige Fliessfläche im Hauptspannungsraum $\{\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k\}$. Für den vorausgesetzten ebenen Fliesszustand verschwindet ein Hauptwert des Tensors der plastischen Verzerrungsincremente, z.B. sei $dc_j^p = 0$ ($i \neq j \neq k$). Die Stützebenen aller Spannungspunkte auf der Fliessfläche, die mit der Bindung $dc_j^p = 0$ verträglich sind, sind nach dem zugeordneten Fliessgesetz (3.8) parallel zu σ_j oder senkrecht zur Ebene $\{\sigma_i, \sigma_k\}$. Die Spuren aller dieser Stützebenen in der $\{\sigma_i, \sigma_k\}$ -Ebene besitzen eine Envelope. Diese Envelope kann man als die bei der Normalprojektion der Fliessfläche auf die Ebene $\{\sigma_i, \sigma_k\}$ ent-

stehende Konturlinie des aplastischen Bereichs ansehen. Die Konvexität der Fliessfläche und ihre Symmetrie bezüglich der Hauptwerte σ_1 und σ_k bleiben bei der Projektion erhalten. Die Grenze des aplastischen Bereichs in der $\{\sigma_1, \sigma_k\}$ -Ebene wird also durch eine Bedingung vom Typ (3.63) beziehungsweise (3.65) oder (3.66) beschrieben. Sofern die Funktion $g(p)$ die oben präzisierten zusätzlichen Eigenschaften aufweist, ist die Rückführung auf eine Bedingung vom Typ der Mohrschen Hüllkurve möglich. Analytisch entsprechen diesem hier geometrisch interpretierten Sachverhalt die folgenden Ueberlegungen: Nach dem Fliessgesetz (3.8) führt die Bindung $de_j^p = 0$ zu der Gleichung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_j} = 0,$$

mit deren Hilfe die für das Fliessen nicht massgebende Hauptspannung σ_j aus der Fliessbedingung $\Phi(\sigma_1, \sigma_j, \sigma_k) = 0$ eliminiert wird. Nach der Elimination von σ_j verbleibt eine in σ_1 und σ_k symmetrische Bedingung von der Form (3.63).

Sonderfälle dieses hier allgemein erörterten Ergebnisses sind seit einiger Zeit bekannt. SAYIR und ZIEGLER (1969) zeigten, dass im ebenen Fliesszustand alle Fliessbedingungen der Form (3.43) für inkompressible, isotrope Materialien auf die Fliessbedingung von Tresca führen. ZIEGLER (1969) befasste sich mit kegelförmigen Fliessflächen im Hauptspannungsraum, welche der Bedingung

$$\Phi(s_{(2)}, s_{(3)}, k - \frac{k}{m} \cdot \sigma_{(1)}) = 0 \quad \left[k - \frac{k}{m} \cdot \sigma_{(1)} \geq 0 \right] \quad (3.67)$$

genügen. Er zeigte, dass im ebenen Fliesszustand alle genügend schlanken konvexen Fliesskegel der Form (3.67) auf die Fliessbedingung von Coulomb führen und verallgemeinerte damit das vorher erwähnte, für inkompressible Materialien, d.h. für den Grenzfall $m \rightarrow \infty$ erhaltene Ergebnis. Wie Ziegler hervorhob, gelten diese Ergebnisse nur für den ebenen Fliesszustand. Bedingungen der Form (3.43) drücken nicht allgemein die Idee von Tresca aus, wonach das Fliessen einsetzt, wenn die grösste Schubspannung einen bestimmten, kritischen Wert erreicht. Ebenso wenig drücken Fliesskegel der Form (3.67) allgemein die Coulombsche Idee aus, wonach die kritische Schubspannung eine lineare Funktion der zugehörigen Normalspannung ist.

Beispiele für Fliessflächen der Form (3.67) sind der Drucker-Pragersche Fliesskegel (3.48), die Druckersche Fliesspyramide (3.50) und die der Fliessbedingung (3.53) von Coulomb entsprechende irregulär hexagonale Pyramide. Anhand von Bild 3.6 wird in der Folge für diese drei Fliessflächen die massgebende Grenze der Schlankheit diskutiert, damit im ebenen Fliesszustand eine Rückführung auf die Fliessbedingung von Coulomb möglich ist.

Der in Bild 3.6 (a) eingetragene Mohrsche Spannungskreis entspricht einem Zustand reinen ebenen Schubes, welcher gerade die Fliessbedingung von Coulomb erfüllt. Die Hauptwerte des Spannungstensors und des Spannungsdeviators sind

$$\sigma_1 = s_1 = -\sigma_2 = -s_2 = k, \quad \sigma_3 = s_3 = 0. \quad (3.68)$$

Für den Radius k des Spannungskreises liest man aus dem Bild ab:

$$k = c \cdot \cos \varphi. \quad (3.69)$$

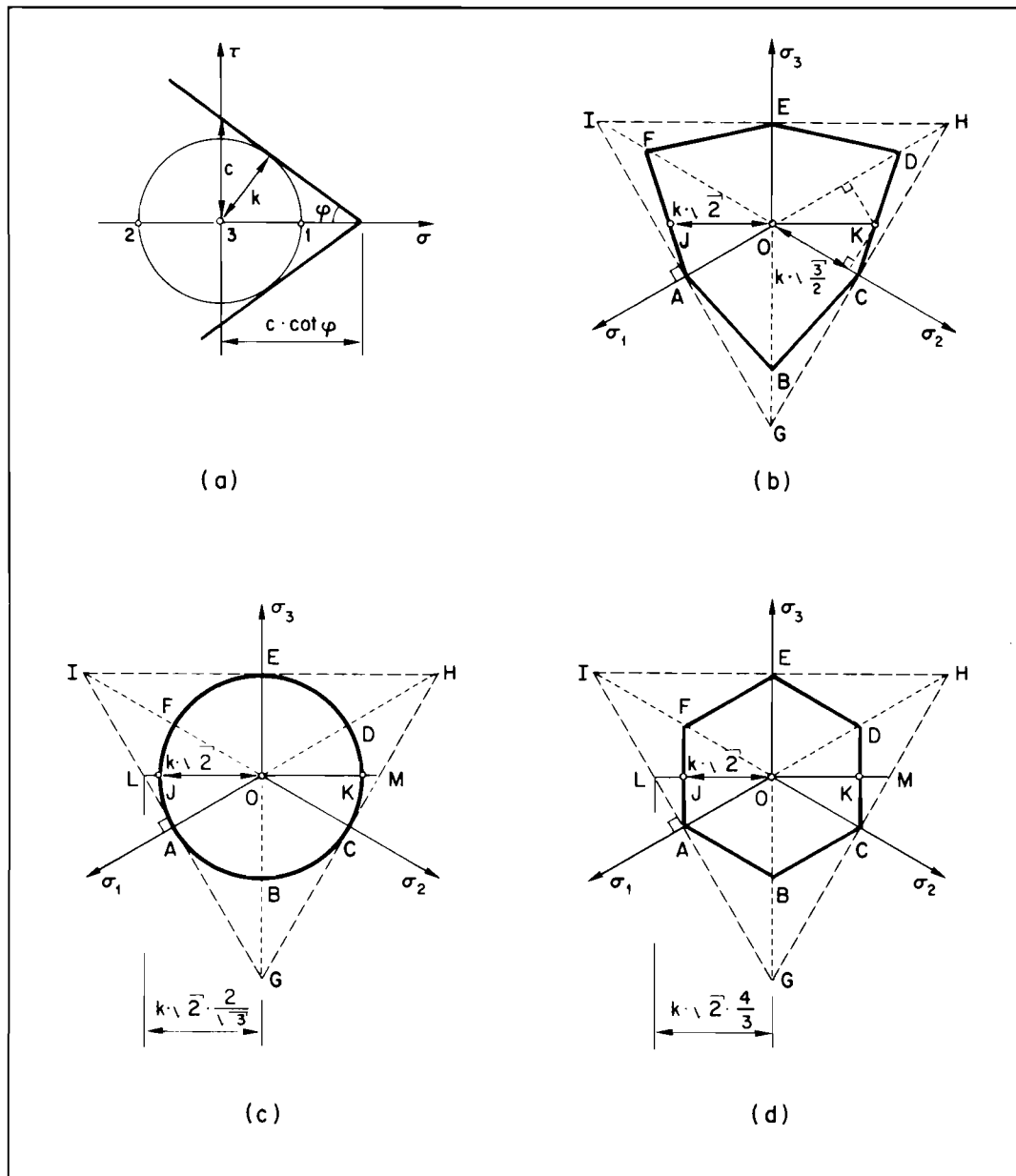


Bild 3.6 : Drucker-Pragerscher Fließkegel und Druckersche Fließpyramide—Reduktion im ebenen Fließzustand auf Fließbedingung von Coulomb

Da die mittlere Normalspannung verschwindet, liegt der dem Spannungszustand entsprechende Bildpunkt J gemäß Bild 3.6 (b) in der deviatorischen Ebene $\sigma_{(1)} = 0$. Mit (3.33) und (3.68) bestimmt man die Lage des Punktes J sowie seines Spiegelbildes K bezüglich der σ_3 -Achse und findet für die Abstände von O: $|OJ| = |OK| = k \cdot \sqrt{2}$. Für den Spannungszustand an der Spitze der pyramidenförmigen Fließfläche nimmt die erste Grundvariante des Spannungstensors den Wert

$$\sigma_{(1)} = 3 \cdot c \cdot \cot \varphi \quad (3.70)$$

an. Mit (3.67) ergibt sich damit aus (3.69) und (3.70) die Beziehung

$$\frac{k}{m} = \frac{\sin \varphi}{3} \quad (3.71)$$

Wie im Anschluss an (3.56) bereits erwähnt wurde, ergibt sich für den Grenzfall $\varphi = \frac{\pi}{2}$ als extremale Fließfigur ein gleichseitiges Dreieck. Dies ist in Bild 3.6 (b) mit dem

der Fliessfigur ABCDEF umschriebenen Dreieck GHI angedeutet. Aus der Beschränkung $\varphi \leq \frac{\pi}{2}$ folgt mit (3.71) die gesuchte Bedingung

$$m \geq 3 \cdot k \quad (3.72)$$

für die Schlankheit der Fliessfläche. Diese Bedingung kann geometrisch als Aussage darüber aufgefasst werden, wie weit die Spitze der Fliessfläche mindestens vom Ursprung O entfernt sein muss.

Um die massgebenden Grenzen der Schlankheit der Fliessflächen von Drucker-Prager und von Drucker zu bestimmen, geht man zweckmässig von den Eigenschaften der Fliessfläche von Coulomb aus. Gemäss (3.57) herrscht für die Seitenebenen der Fliessfläche von Coulomb stets ein ebener Fliesszustand. Umschreibt man dem Fliesskegel von Drucker-Prager eine Fliessfläche von Coulomb, so entspricht jedem Spannungsbildpunkt auf den Kegelmantellinien, entlang denen sich die beiden Flächen berühren, ein ebener Fliesszustand. Vergrössert man den Öffnungswinkel des Drucker-Pragerschen Fliesskegels, so erreicht man im Grenzfall für die umschriebene Fliessfläche von Coulomb die Bedingung $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Dieser Situation entsprechen die in Bild 3.6 (c) dargestellten Fliessfiguren. Der Radius der kreisförmigen Fliessfigur ABCDEF von Drucker-Prager misst $k \cdot \sqrt{2}$. Den Spannungsbildpunkten, die auf den durch die Punkte A, C und E führenden Mantellinien liegen, entsprechen ebene Fliesszustände. Aus dem Abstand $k \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$ des Punktes L auf dem umschriebenen Coulombschen Dreieck GHI vom Ursprung O findet man mit (3.72) die Bedingung

$$m \geq 2 \cdot \sqrt{3} \cdot k \quad (3.73)$$

Dabei wurde beachtet, dass der Punkt L dem Punkt J mit $|OJ| = k \cdot \sqrt{2}$ in Bild 3.6 (b) entspricht. Analoge Überlegungen für die Fliessbedingung von Drucker, deren Fliessfigur in Bild 3.6 (d) dargestellt ist, führen zur Grenze

$$m \geq 4 \cdot k \quad (3.74)$$

Bemerkenswert ist, dass die Grenzen (3.73) und (3.74) für m gerade doppelt so gross sind wie die in (3.48) und (3.50) angegebenen Schranken, mit denen sichergestellt wird, dass Fliessen sowohl auf Zug als auch auf Druck eintreten kann. ZIEGLER (1969) fragte auch nach der Bedingung dafür, dass aus dem Verschwinden einer Hauptdehnungsgeschwindigkeit folgt, dass die zugehörige Hauptspannung die mittlere ist. Er zeigte, dass die entsprechenden Grenzen für die Fliessbedingungen von Coulomb und von Drucker-Prager mit (3.72) und (3.73) zusammenfallen. Für die Druckersche Fliesspyramide dagegen fällt diese Grenze mit der in (3.50) angegebenen zusammen, d.h. $m \geq 2 \cdot k$. Für den Fall $2 \cdot k \leq m \leq 4 \cdot k$ ist hier also für den ebenen Fliesszustand die Rückführung auf die Fliessbedingung von Coulomb nicht möglich, obwohl die zur Fliesssebene normale Hauptspannung noch als mittlere gelten kann.

Zum Abschluss des vorliegenden Abschnittes über Fliessbedingungen scheint es angezeigt, einige Hinweise auf die Arbeiten von COULOMB (1773) und MOHR (1882, 1900) anzufügen.

Coulomb verstand unter Kohäsion nach heutigem Sprachgebrauch den Widerstand gegenüber einem reinen Trennbruch: "La cohésion se mesure par la résistance que les corps solides opposent à la désunion directe de leurs parties" (S. 348). Um die Kohäsion zu bestimmen, führte er einfache Zugversuche an Natursteinen durch. An Proben desselben Materials unternahm er ferner einfache Abscherversuche um zu sehen "... si en rompant un solide de pierre, par une force dirigée suivant le plan de rupture, il falloit employer le même poids que pour le rompre, comme dans l'expérience précédente (im Zugversuch, Anm. des Verf.), par un effort perpendiculaire à ce plan" (S. 348). Er fand, dass die Abscherfestigkeit fast immer etwas grösser war als die Zugfestigkeit. Da der Unterschied aber sehr klein war, vernachlässigte er ihn ausdrücklich (S. 349) und setzte für die Unter-

suchung der Druckfestigkeit von Mauerwerk voraus " ... que l'adhérence oppose une égale résistance, soit que la force soit dirigée parallèlement ou perpendiculairement au plan de rupture, ..." (S. 352). Durch Betrachtung der entlang möglichen Bruchebenen CM in Bild 3.7 (a) wirkenden Kräfte ermittelte er obere Grenzwerte für die Druckkraft P und schloss aus der Minimumsbedingung für P auf den Neigungswinkel α , wobei er ausser der Kohäsion einen zum Normaldruck in der Bruchebene proportional angesetzten (S. 347) Reibungswiderstand in Rechnung stellte (S. 354), wie dies mit der Beziehung (3.52) zum Ausdruck kommt. Für ein rein kohäsives Material ($\varphi = 0$) fand er $\alpha = 45^\circ$ und ein Verhältnis von Druckfestigkeit zu Kohäsion bzw. Zugfestigkeit von zwei. Für den von ihm (S. 347) für Mauerziegel ("briques") angegebenen Reibungswinkel $\varphi = \arctan(3/4)$ bestimmte er $\tan \alpha = 2$ und ein Verhältnis von Druckfestigkeit zu Kohäsion von vier.

Mit Bild 3.7 (b) werden die angeführten Ueberlegungen von Coulomb in der Spannungsebene interpretiert. Bemerkenswert ist, dass er ausser der ihm üblicherweise einzig zugeschriebenen Bedingung (3.52) die weitere Bedingung $\sigma \leq c$ verwendete und damit zwischen Gleitbrüchen und Trennbrüchen unterschied. Rein hydrostatische Zugspannungszustände $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = c \cdot \cot \varphi$, die nach (3.52) allein auftreten könnten, zog er nicht in Betracht. Aus dieser Sicht ist die heute übliche Bezeichnung "modifizierte Fließbedingung von Coulomb" für eine um die Forderung

$$\sigma \leq \sigma'_0 \quad [\sigma'_0 \geq 0] \quad (3.75)$$

ergänzte Bedingung (3.52) als unglücklich zu bezeichnen. Man darf wohl annehmen, dass Coulomb aufgrund einer breiter abgestützten experimentellen Erfahrung auf seine vereinfachende Gleichsetzung Kohäsion (= Zugfestigkeit!) = Abscherfestigkeit verzichtet hätte. Alsdann wäre im Sinne von Coulomb die Grösse σ'_0 als Kohäsion zu bezeichnen. Die aufgrund der eben erwähnten Gleichsetzung heute als Kohäsion bezeichnete Grösse c der maximalen, an einem Flächenelement mit verschwindender Normalspannung möglichen Schubspannung könnte etwas unpräzise einfach als Scherfestigkeit bezeichnet werden. In diesem Zusammenhang ist allerdings noch zu beachten, dass von Abscherversuchen, wie sie Coulomb durchführte, nicht unmittelbar auf die Grösse von c geschlossen werden kann, da in der Scherfläche

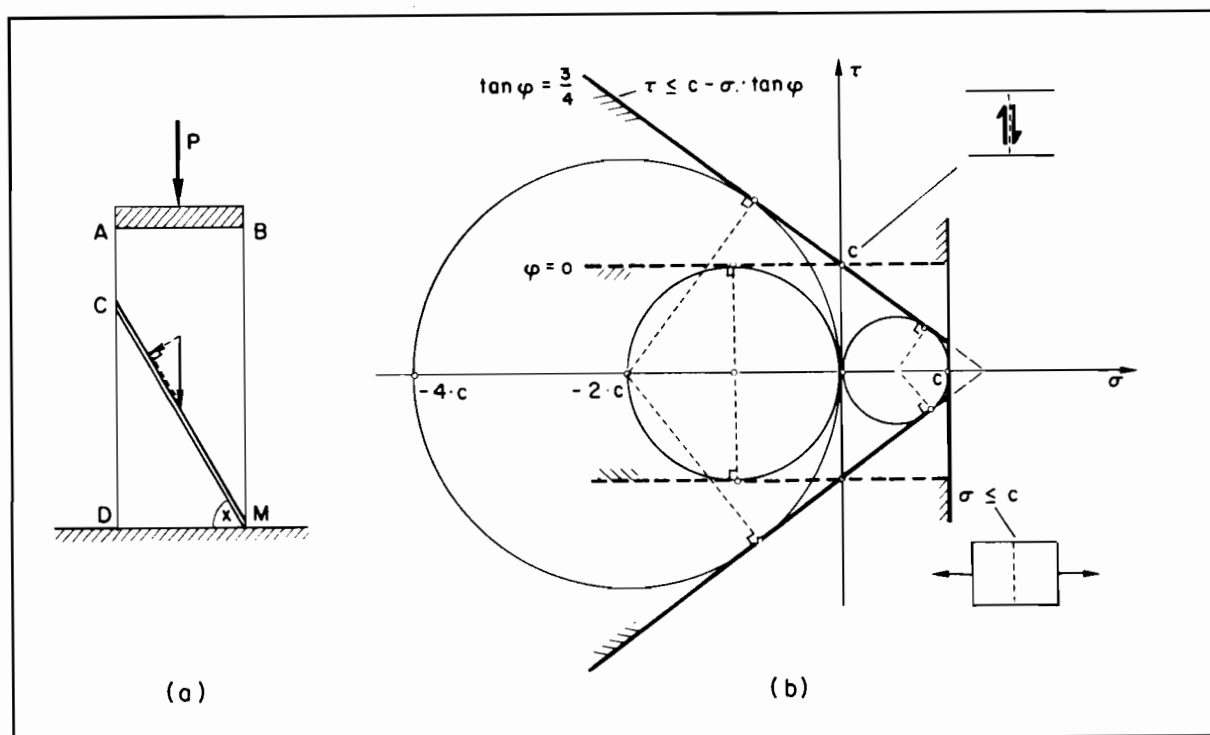


Bild 3.7: Bruchbedingungen nach Coulomb

ausser Schubspannungen immer Normalspannungen vorhanden sind, deren Grösse und Verteilung nur schlecht bekannt sind. Bemerkenswert ist ausserdem, dass der von Coulomb für "briques" angenommene Reibungsbeiwert $3/4$ gemäss Bild 3.7 (b) gerade dem Grenzfall entspricht, in dem sich die von ihm formulierten Bruchbedingungen noch als Mohrsche Hüllkurve deuten lassen. Für $\tan\varphi > 3/4$ würde die Gerade $\tau = c - \sigma \cdot \tan\varphi$ den einer einachsigen Zugbeanspruchung entsprechenden Mohrschen Spannungskreis mit dem Durchmesser c schneiden.

In seiner 1882 publizierte Arbeit entwickelte Mohr die nach ihm benannte anschauliche Darstellung des Spannungs- und Verzerrungszustandes in einem Körperpunkt und wandte diese Darstellung auf die Frage nach der Elastizitäts- und Bruchgrenze von Materialien an. Das von ihm beschriebene Darstellungsverfahren setzte ihn in Stand "... die gewonnenen Erfahrungen auf übersichtliche Weise in Vergleich zu stellen und daraus einfache Beziehungen zwischen den gleichwerthigen Zuständen abzuleiten" (S. 134), und er folgerte "Es steht keine bekannte Thatsache der Annahme entgegen, dass die Ueberschreitung der Elastizitätsgrenze neben der Materialbeschaffenheit ausschliesslich von denjenigen Umständen abhängig sei, welche durch den Hauptkreis der Darstellung des betreffenden Deformationszustandes zur Anschauung gebracht werden, ..." (S. 134). Durch Zusammenstellen der Hauptkreise "einer Reihe von Deformationszuständen, welche der Erfahrung zufolge die Elastizitätsgrenze berühren", in einer Figur gelangte er zur "Hüllcurve ... dieser Kreise als die Darstellung der Elastizitätsgrenze selbst Die Berührungspunkte ... zwischen Hüllcurve und Kreis entsprechen denjenigen Flächenelementen, in welchen durch Verbindung von Dehnung und Schiebung die Elastizitätsgrenze überschritten wird" (S. 135). Wegen der Schwierigkeit der Beobachtung dieser Deformationen musste er sich in der Folge freilich auf eine entsprechende Formulierung in Spannungen beschränken: "Es ist möglich und sogar wahrscheinlich, dass auch für den Bruch nicht die Spannungen, sondern die Dehnungen und Schiebungen massgebend sind. Man wird jedoch einstweilen sich damit begnügen müssen, die Darstellung der Bruch- und Fliessgrenze aus den betreffenden Spannungszuständen abzuleiten, weil die Deformationen an jener Grenze der Beobachtung sich entziehen, während die Spannungszustände wenigstens annähernd sich feststellen lassen" (S. 136).

In seiner 1900 publizierte Arbeit kam Mohr auf diese Ueberlegungen zurück, diskutierte vier zu seiner Zeit bekannte Hypothesen über die Elastizitäts- und Bruchgrenzen und begründete mit der Feststellung "... das Gleiten und Brechen wird doch wohl zunächst abhängig sein von den Spannungen derjenigen Flächen, in welchen diese Bewegungen wirklich stattfinden" (S. 1528) eine neue Theorie. Gegenüber der Hypothese der maximalen Schubspannung gab er seiner Annahme "die allgemeinere und vorsichtiger Fassung ...: Die Elastizitätsgrenze und die Bruchgrenze eines Materials werden bestimmt durch die Spannungen der Gleit- und Bruchflächen", und mit der Ueberlegung, dass bei unveränderter Normalspannung an einem Flächenelement "... eine Verschiebung nicht wohl durch eine Verminderung der Schubspannung hervorgerufen werden kann", gelangte er zu der mit (3.62) ausgedrückten Formulierung: "Die Schubspannung der Gleitfläche erreicht an der Grenze einen von der Normalspannung und von der Materialbeschaffenheit abhängigen grössten Wert" (S. 1528). Für die Bruchgrenzkurve beschrieb er die vier im Anschluss an (3.62) verlangten Eigenschaften, wobei er allerdings die Möglichkeit eines Versagens unter reinem hydrostatischem Druck nicht absolut ausschloss (S. 1529). Für Zustände, deren Hauptspannungen die Werte der einachsigen Zug- und Druckfestigkeit nicht erheblich überschreiten, nahm er schliesslich an, dass man "ohne grossen Fehler die gemeinschaftlichen Tangenten ... der beiden (diesen Festigkeiten entsprechenden, Anm. des Verf.) Kreise als Teile der Bruchgrenzkurve ansehen..." dürfe (S. 1529).

Aufgrund der letzten Bemerkung ist es korrekt, die Deutung der linearen Beziehung (3.52) in der Spannungsebene als Bedingung von Coulomb-Mohr zu bezeichnen. In dieser Arbeit soll diese Bezeichnung aber für den allgemeineren Fall einer durch die (Coulombsche!) Trennbruchbedingung (3.75) ergänzte Gleitbruchbedingung (3.62) von Mohr reserviert werden, wie dies mit Bild 3.5 (e) veranschaulicht ist.

Schliesslich sei noch einmal darauf verwiesen, dass die Verbindung der erörterten Bruchbedingungen mit der Theorie des plastischen Potentials neueren Datums ist. Für den Fall des Coulombschen Gesetzes (3.52) wurde sie wie erwähnt von SHIELD (1955) vollzogen.

4. ELASTISCH-PLASTISCHES UND STARR-PLASTISCHES VERHALTEN

4.1 Elastisch-plastische Systeme

Im folgenden werden charakteristische Eigenschaften elastisch-plastischer Systeme erörtert. Damit wird der im Abschnitt 4.2 beschriebene Uebergang zu starr-plastischen Systemen vorbereitet. Die Darstellung entspricht einer früheren Arbeit des Verfassers (1978a) und folgt im wesentlichen den von PRAGER (1955) vorgezeichneten Linien.

Betrachtet wird das in Bild 4.1 (a) dargestellte, einfach statisch unbestimmte Fachwerk. Das in den Knotenpunkten A und C gelagerte System ist aus fünf prismatischen Stäben zusammengesetzt.

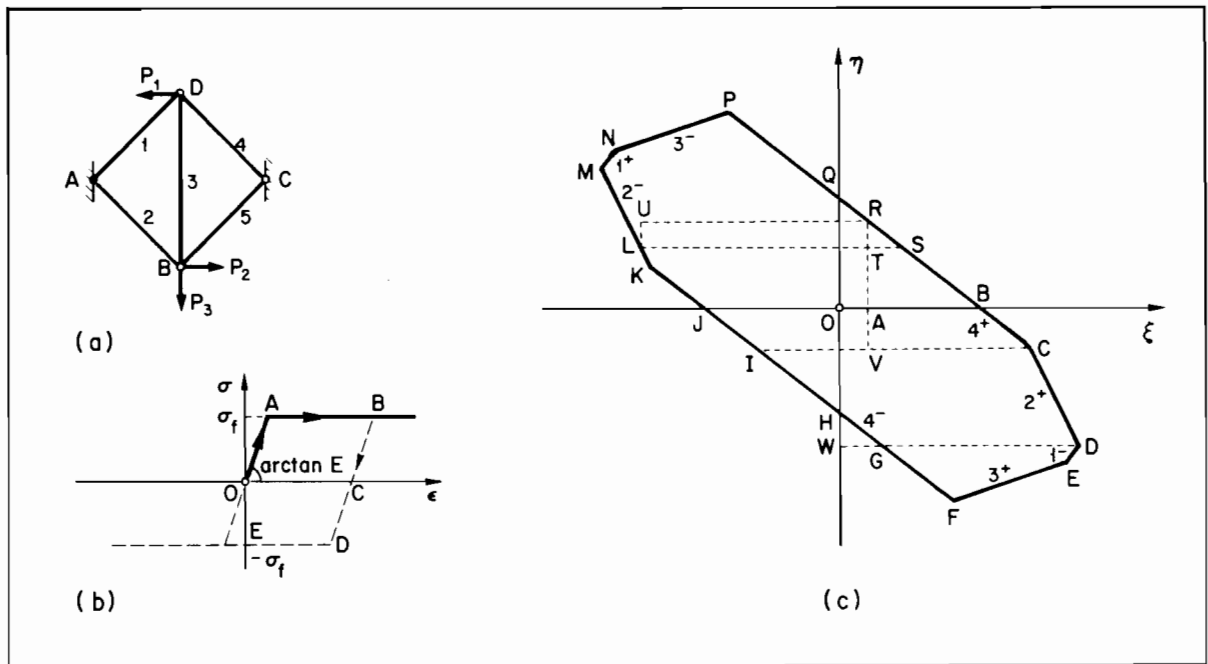


Bild 4.1: Einfach statisch unbestimmtes Fachwerk

Die Stablängen sind gegeben durch

$$l_1 = l_2 = \frac{l_3}{\sqrt{2}} = l_4 = l_5 = 1 \quad ,$$

und die Querschnittsfläche aller Stäbe ist F . Das Material der Stäbe ist linear elastisch-ideal plastisch, vgl. Bild 4.1 (b). Der Elastizitätsmodul E aller Stäbe ist identisch, aber die auf Zug und Druck jeweils gleich grossen Fließgrenzen der einzelnen Stäbe sind unterschiedlich:

$$\frac{2}{3} \cdot \sigma_{f1} = \sigma_{f2} = \sigma_{f3} = 3 \cdot \sigma_{f4} = \sigma_{f5} \quad .$$

In den Knotenpunkten B und D wird das Fachwerk durch die entgegengesetzt gerichteten, senkrecht zur Achse von Stab 3 wirkenden Kräfte P_1 und P_2 belastet. Die Wirkungslinie der im Knotenpunkt B angreifenden Kraft P_3 fällt mit der Achse von Stab 3 zusammen. Es wird angenommen, dass die Kräfte P_1 , P_2 und P_3 gemäss

$$P_1 = P_2 = P_3 = \lambda \cdot 1$$

proportional verändert werden. Der *Lastparameter* λ gibt die *Belastungsintensität* an. Mit der Angabe seiner Grösse ist die Belastung des Systems festgelegt.

Steigert man die Belastungsintensität allmählich, so verhält sich das am Anfang als spannungsfrei vorausgesetzte System zunächst rein elastisch. Zur Bestimmung der fünf unbekannten Stabkräfte und der vier Komponenten der Auflagerreaktionen bei A und C stehen acht Gleichgewichtsbedingungen und eine elastische Verträglichkeitsbedingung zur Verfügung. Für die der Belastungsintensität $\lambda = 1$ entsprechenden Stabkräfte $\underline{S}^e = (S_1^e, S_2^e, S_3^e, S_4^e, S_5^e)$ findet man

$$\underline{S}^e = \frac{1}{2 \cdot (1 + \sqrt{2})} \cdot (-3 - \sqrt{2}, 3 + 2 \cdot \sqrt{2}, \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, -1) \quad . \quad (4.1)$$

Unter der Belastungsintensität $\lambda = 0$ ist im allgemeinen ein *Eigenspannungszustand* vorhanden. Die zugehörigen Stabkräfte $\underline{S}^E = (S_1^E, S_2^E, S_3^E, S_4^E, S_5^E)$ sind bis auf einen skalaren Faktor ρ gegeben durch

$$\underline{S}^E = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (1, 1, -\sqrt{2}, 1, 1) \quad . \quad (4.2)$$

Diese Kräfte resultieren, wenn man z.B. durch Lösen der Bindungen von Stab 3 bei den Knotenpunkten B und D zu einem statisch bestimmten Grundsystem übergeht und die Stabkraft $S_3^E = -1$ als überzählige Grösse einführt. Dem Eigenspannungszustand \underline{S}^E entsprechen einander entgegengesetzt gleiche Auflagerkräfte vom Betrag eins in den Knotenpunkten A und C.

Die einer Belastungsintensität λ entsprechenden Stabkräfte $\underline{S} = (S_1, S_2, S_3, S_4, S_5)$ setzen sich im allgemeinen aus einem elastisch verträglichen Anteil $\lambda \cdot \underline{S}^e$ und aus einem Eigenspannungsanteil $\rho \cdot \underline{S}^E$ zusammen, d.h.

$$\underline{S} = \lambda \cdot \underline{S}^e + \rho \cdot \underline{S}^E \quad . \quad (4.3)$$

Dies folgt, wenn man λ ausgehend von einem initialen Eigenspannungszustand mit den Stabkräften $\rho \cdot \underline{S}^E$ steigert. Die Untersuchung des elastisch-plastischen Systems beinhaltet die Frage nach der Abhängigkeit des Faktors ρ von dem mit der Veränderung der Belastungsintensität λ verbundenen Verformungsprozess. Zu diesem Zweck benützt man mit Vorteil eine durch RZHANITZIN (1949) eingeführte geometrische Darstellung des Spannungszustandes im betrachteten Fachwerk.

Die den mit (4.3) zusammengefassten Stabkräften $S_i = \lambda \cdot S_i^e + \rho \cdot S_i^E$ entsprechende elastische Formänderungsenergie ist gegeben durch

$$U = \sum_{i=1}^5 \frac{S_i^2 \cdot l_i}{2 \cdot E_i \cdot F_i} = \lambda^2 \cdot \sum_{i=1}^5 \frac{l_i}{2 \cdot E_i \cdot F_i} \cdot (S_i^e)^2 + \rho^2 \cdot \sum_{i=1}^5 \frac{l_i}{2 \cdot E_i \cdot F_i} \cdot (S_i^E)^2 + \lambda \cdot \rho \cdot \sum_{i=1}^5 \frac{l_i}{E_i \cdot F_i} \cdot S_i^e \cdot S_i^E \quad . \quad (4.4)$$

Da der durch (4.2) charakterisierte Eigenspannungszustand nach dem Prinzip der virtuellen Arbeiten an den dem elastisch verträglichen Spannungszustand (4.1) entsprechenden Verformungen keine Arbeit leistet, verschwindet der letzte Summand in Gleichung (4.4). Mit den Abkürzungen

$$\xi^2 = \lambda^2 \cdot \sum_{i=1}^5 \frac{l_i}{2 \cdot E_i \cdot F_i} \cdot (S_i^e)^2 \quad , \quad \eta^2 = \rho^2 \cdot \sum_{i=1}^5 \frac{l_i}{2 \cdot E_i \cdot F_i} \cdot (S_i^E)^2 \quad (4.5)$$

für die beiden positiv definiten ersten Summanden in (4.4) erhält man die Beziehung

$$U = \xi^2 + \eta^2 \quad . \quad (4.6)$$

Für das betrachtete Fachwerk lauten die Ausdrücke (4.5) für ξ^2 und η^2

$$\xi^2 = \lambda^2 \cdot \frac{16 + 11 \cdot \sqrt{2}}{12 + 8 \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{1}{E \cdot F} \quad , \quad \eta^2 = \rho^2 \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{1}{E \cdot F} \quad . \quad (4.7)$$

Die Grössen ξ und η entsprechen bis auf einen unwesentlichen Faktor den in (4.3) auftretenden Werten λ und ρ . Demgegenüber kann der Spannungszustand im Fachwerk durch Punkte in einer $\{\xi, \eta\}$ -Ebene dargestellt werden, wie dies Bild 4.1 (c) zeigt. Das Quadrat des Abstandes eines Bildpunktes in der $\{\xi, \eta\}$ -Ebene vom Ursprung D ist nach (4.6) gleich der elastischen Formänderungsenergie, die dem betrachteten Spannungszustand entspricht.

Die den Fließsgrenzen σ_{fi} der einzelnen Stäbe entsprechenden Fließbedingungen

$$|S_i| - F \cdot \sigma_{fi} \leq 0 \quad (4.8)$$

lauten mit (4.3) und (4.5)

$$\left| \xi \cdot \frac{S_i^E}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 \frac{1_i}{2 \cdot E_i \cdot F_i} \cdot (S_i^E)^2}} + \eta \cdot \frac{S_i^E}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 \frac{1_i}{2 \cdot E_i \cdot F_i} \cdot (S_i^E)^2}} \right| - F \cdot \sigma_{fi} \leq 0 \quad . \quad (4.9)$$

Den Bedingungen (4.9) entsprechen in der $\{\xi, \eta\}$ -Ebene streifenförmige Bereiche, welche den Ursprung D enthalten. Das allen diesen Streifen gemeinsame Gebiet stellt ein konvexes *Fließspolygon* dar. Da im betrachteten Fall die Beträge der Fließsgrenzen auf Zug und Druck aller Stäbe jeweils zusammenfallen, ist der Ursprung D Symmetriezentrum des Fließspolygons. In Bild 4.1 (c) ist für alle Seiten des dargestellten Fließspolygons angegeben, welche Fließsgrenzen massgebend sind. Für Spannungszustände, die Bildpunkten auf den Geraden DE und MN entsprechen, fließt Stab 1 auf Druck bzw. auf Zug. Für Spannungsbildpunkte entlang CD und KLM wird Stab 2 auf Zug bzw. auf Druck massgebend und für solche entlang EF und NP Stab 3. Stab 4 fließt auf Zug unter Spannungszuständen, die Punkten auf der Geraden PQRSBC entsprechen und auf Druck für solche, die zu Punkten auf der Geraden FGHIJK abgebildet werden. Stab 5 wird nie massgebend. Der für Bild 4.1 (c) verwendete Massstab ergibt sich aus den Koordinaten

$$\xi_B = 2 \cdot F \cdot \sigma_{f4} \cdot \sqrt{\frac{16 + 11 \cdot \sqrt{2}}{12 + 8 \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{1}{E \cdot F}} \quad , \quad \eta_Q = \sqrt{2} \cdot F \cdot \sigma_{f4} \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{1}{E \cdot F}}$$

der Punkte B und Q, die aus (4.7) und (4.9) folgen. Um zu zeigen, dass ein beliebiger Bildpunkt in der $\{\xi, \eta\}$ -Ebene von Bild 4.1 (c) für den ganzen Spannungszustand repräsentativ ist, legt man durch den Punkt (ξ, η) Parallelen zu den durch die Gleichungen (4.9) bestimmten Begrenzungsgeraden der verschiedenen Fließstreifen. Die Spannungen σ_i in den einzelnen Stäben sind proportional zu den Abständen der zugehörigen Parallelen vom Ursprung D. Den Bildpunkten auf den Begrenzungsgeraden der verschiedenen Fließstreifen entsprechen Spannungen, die mit den Fließsgrenzen zusammenfallen, $\sigma_i = \sigma_{fi}$.

Wird das am Anfang als spannungsfrei vorausgesetzte System durch kontinuierliches Steigern von λ belastet, so beschreibt der Bildpunkt in Bild 4.1 (c) zunächst die einem rein elastischen Verhalten entsprechende Strecke OAB. Bei weiterer Steigerung von λ beginnt bei B der Stab 4 auf Zug zu fließen, und der Bildpunkt setzt seinen Weg entlang der Begrenzung BC des Fließspolygons fort. Da die Stabkraft $S_4 = F \cdot \sigma_{f4}$ in dieser ersten elastisch-plastischen Phase bekannt ist, reichen die acht Gleichgewichtsbedingungen zur Bestimmung der vier weiteren Stabkräfte und der vier Komponenten der Auflagerreaktionen aus. Von dem

durch Punkt C charakterisierten Spannungszustand ausgehend kann die Belastung in einer zweiten elastisch-plastischen Phase noch weiter gesteigert werden, bis der dem Punkt D entsprechende Spannungszustand erreicht ist. Während dem Uebergang von C zu D fliesst Stab 2 auf Zug und Stab 4 wird entlastet. Wiederum sind die Stabkräfte mit den Gleichgewichtsbedingungen allein bestimmt, und die Verformungen des Systems folgen daraus wie für ein statisch bestimmtes elastisches Fachwerk. Die beiden elastisch-plastischen Phasen sind charakterisiert durch das *beschränkte Fließen* je eines Fachwerkstabes unter zunehmender Belastungsintensität. Unter der dem Punkt D entsprechenden Belastungsintensität λ_D ist die Tragfähigkeit des Systems erschöpft, oder, wie man sagt, die *Traglast* des Systems ist erreicht. Der *Kollapszustand* ist charakterisiert durch das *unbeschränkte Fließen* der Stäbe 1 und 2 auf Druck bzw. Zug unter der konstanten Traglast. Das aus den nichtfliessenden Stäben 3, 4 und 5 zusammengesetzte Fachwerkdreieck BCD in Bild 4.1 (a) rotiert im Gegenuhrzeigersinn um den Auflagerpunkt C.

Wird die Belastungsintensität λ von dem mit Punkt D in Bild 4.1 (c) repräsentierten Kollapszustand ausgehend vermindert, so werden zunächst alle Stäbe rein elastisch entlastet. Der Spannungsbildpunkt beschreibt den zur ξ -Achse parallelen Weg DG. Bei weiterer Verminderung von λ fliesst Stab 4 auf Druck und der Bildpunkt folgt dem Weg GH. Der für $\lambda = 0$ verbleibende Eigenspannungszustand oder *Restspannungszustand* ist durch die Ordinate von Punkt H bestimmt. Wäre eine rein elastische Entlastung aus D möglich, würde man zum Punkt W auf der η -Achse gelangen. Dieser Punkt bezeichnet demgemäss einen fiktiven Restspannungszustand, welcher Spannungszuständen entspricht, die zu Punkten auf der Geraden DG abgebildet werden.

Wie man feststellt, tritt, solange keine Verminderung der Belastungsintensität stattgefunden hat, unter allen möglichen Gleichgewichtszuständen derjenige ein, welcher die elastische Formänderungsenergie U minimiert, ohne dass die Fließgrenze irgendwo überschritten wird, d.h. der Spannungsbildpunkt liegt so nahe wie möglich beim Ursprung. Dieses Prinzip wird nach HAAR und v. KÁRMÁN (1909) benannt. Wie PRAGER und SYMONDS (1950) bemerkten, ist eine alternative Formulierung als Minimalprinzip für die den fiktiven Restspannungen entsprechende Formänderungsenergie möglich. Werden Verminderungen der Belastungsintensität zugelassen, so ist das Prinzip von Haar und v. Kármán durch dasjenige von GREENBERG (1949) zu ersetzen, wonach für eine gegebene infinitesimale Aenderung des Belastungszustandes unter allen statisch möglichen Aenderungen des Spannungszustandes diejenige eintritt, welche die den Spannungsänderungen entsprechende elastische Formänderungsenergie minimiert, ohne dass die Fließgrenze irgendwo überschritten wird. Mit anderen Worten, der Spannungsbildpunkt beschreibt den kürzesten Weg, der unter den Bedingungen möglich ist, dass seine Abszisse ξ stets der momentanen Belastungsintensität λ entsprechen muss, und dass er nicht ausserhalb des Fließpolygons liegen kann.

Unter einer bestimmten Belastungsintensität λ können sich im allgemeinen unendlich viele Spannungszustände einstellen. Ihre Bildpunkte in Bild 4.1 (c) liegen auf der dem Wert λ entsprechenden Geraden $\xi = \text{konst.}$ Diese wird als *Gleichgewichtsgerade* bezeichnet, weil alle ihre Punkte möglichen Gleichgewichtszuständen unter Lasten der betrachteten Intensität λ entsprechen. Mit den Prinzipien von Haar und v. Kármán und von Greenberg kann beurteilt werden, welcher unter allen diesen möglichen Gleichgewichtszuständen sich unter einer bestimmten Belastungsintensität einstellt und welche Veränderung er bei einer Belastungsänderung erfährt. Man bemerkt insbesondere, dass ausser für die Punkte D und M, in denen die Traglast des Systems erreicht wird, der momentane Spannungszustand nicht nur vom momentanen Wert der Belastungsintensität abhängt, sondern von der ganzen Belastungsgeschichte.

Zwischen den extremen Lagen D und M enthält jede Gleichgewichtsgerade in Bild 4.1 (c) innere Punkte des Fließpolygons. Diese Feststellung entspricht dem von FEINBERG (1948) als Prinzip der Grenzspannung ausgedrückten Sachverhalt, wonach die Tragfähigkeit nicht

erschöpft sein kann unter Belastungsintensitäten, für die sich ein Gleichgewichtszustand angeben lässt, der nirgends die Fließgrenze erreicht.

Mit dem Begriff der Gleichgewichtsgeraden kann der im Kapitel 1 erwähnte Unterschied zwischen Berechnungen aufgrund der Plastizitätstheorie und solchen an elastischen Systemen näher betrachtet werden. Üblicherweise wird bei Berechnungen an elastischen Systemen meist stillschweigend vorausgesetzt, dass für $\lambda = 0$ sämtliche initialen Spannungen verschwinden. Alsdann entspricht der einzigen elastisch verträglichen Lösung für eine bestimmte Intensität λ der auf das betrachtete Fachwerk aufgebrachten Belastung ein Punkt auf der ξ -Achse in Bild 4.1 (c). Eine wesentlich realistischere Betrachtungsweise ergibt sich beim Einbezug des Fließens. In diesem Fall werden alle Spannungszustände, die durch Punkte auf der der Belastungsintensität λ entsprechenden Gleichgewichtsgeraden charakterisiert sind und sich nur durch Eigenspannungsanteile unterscheiden, grundsätzlich als gleichwertig aufgefasst. Tatsächlich herrschen in wirklichen Konstruktionen aus vielfältigen Gründen zum Teil bedeutende Eigenspannungszustände. Allerdings sind sie in den meisten praktischen Fällen nur zum Teil oder überhaupt nicht bekannt. Eine adäquate Erfassung der im Tragwerk auftretenden Eigenspannungszustände wird für den Ingenieur in den meisten Fällen eine praktisch unlösbare und damit unnütze Aufgabe darstellen. Dieses Sachverhalte sollte man sich bewusst sein, wenn man zum Zweck der Bemessung von Tragwerken elastisch-plastische Berechnungen durchführt. Eine sparsamere Verwendung der Bezeichnung "wirklichkeitsnah" für solche Berechnungen wäre eine wünschbare Folge. MELAN (1938 b, S. 73) bemerkte in diesem Zusammenhang, "... dass die Aufgabe, die Spannungen in einem elastisch-plastischen Körper zu bestimmen, die Kenntnis der in dem betreffenden Augenblick bereits vorhandenen bleibenden Dehnungen voraussetzt. Nachdem diese aber von den vorangegangenen Belastungszuständen abhängen, ist es notwendig, die Vorgeschichte der Belastung zu kennen. In der Praxis liegen nun in den weitaus meisten Fällen die Verhältnisse so, dass verschiedene Belastungszustände möglich sind, die in beliebiger Reihenfolge und beliebig oftmalig einander folgen können. Es wird also der von einer bestimmten Belastung hervorgerufene Spannungszustand im allgemeinen nicht der gleiche sein, wenn diese Belastung nach einer Reihe von Belastungswechseln wieder auftritt. Da, wie schon erwähnt, die Reihenfolge der Belastungen willkürlich zu sein pflegt, hat die Frage nach einem Spannungszustand bei einer bestimmten Belastung keinen Sinn".

Aufgrund dieser Überlegungen ersieht man andererseits die praktische Bedeutung von Traglastberechnungen. Einzig der unter der Traglast sich einstellende Gleichgewichtszustand ist von der Belastungsgeschichte und damit von schlecht erfassbaren initialen Spannungs- und Verformungszuständen unabhängig. Im Normalfall entspricht dieser Unabhängigkeit eine gute Übereinstimmung von rechnerischen Traglasten mit tatsächlichen Bruchlasten von Bauteilen und Tragwerken. Die hinsichtlich der Sicherstellung der Tragfähigkeit wichtigen Bemessungsentscheide werden deshalb mit Vorteil auf der Grundlage einer vernünftigen Beurteilung von Traglastberechnungen gefällt. Betrachtungen an elastischen Systemen behalten ihren Wert als Grundlage für die Beurteilung des Verhaltens von Tragwerken infolge der vorgesehenen Nutzung. Wie sich in Kapitel 5 zeigen wird, können die an elastischen Systemen ermittelten Spannungszustände ferner als mögliche Gleichgewichtszustände für Berechnungen nach der statischen Methode der Plastizitätstheorie herangezogen werden oder, indem Eigenspannungszustände überlagert werden, für die Bestimmung beliebiger weiterer möglicher Gleichgewichtszustände.

Verändert man die Belastung zyklisch zwischen den beiden den Abszissen der Punkte C und L in Bild 4.1 (c) entsprechenden Grenzen der Belastungsintensität, so beschreibt der Spannungsbildpunkt für jeden Belastungszyklus den Weg BCVIJKLTSB. Unter den den Wegstücken IJK und SBC des Spannungsbildpunktes entsprechenden Zuständen wird der Stab 4 jeweils im entgegengesetzten Sinn auf Druck bzw. Zug plastifiziert, und während dem Übergang KL fließt der Stab 2 jeweils auf Druck. Nach einer Anzahl Belastungszyklen wird ein Bruch von Stab 4 durch alternierendes Fließen eintreten oder allenfalls ein

Versagen von Stab 2 infolge progressiver plastischer Verformung. Dagegen liegt z.B. eine wiederholte Belastung zwischen den den Abszissen der Punkte A und L entsprechenden Grenzen der Belastungsintensität innerhalb des Anpassungsvermögens des betrachteten Fachwerks. Im ersten Belastungszyklus fließt Stab 4 auf Druck während sich der Spannungsbildpunkt entlang JK bewegt. Bei der Fortsetzung des Weges des Spannungsbildpunktes von K bis L fließt Stab 2 auf Druck. Anschliessend bewegt sich der Spannungsbildpunkt stets von L nach T und zurück. Das Verhalten ist rein elastisch. Man sagt, das Tragwerk habe sich eingespielt. Mit diesen Feststellungen ist der sogenannte *Einspielsatz* (engl.: *Shake-Down Theorem*) begründet, wonach gegebene Grenzwerte der Belastungsintensität innerhalb des Anpassungsvermögens eines Tragwerks liegen, wenn ein Eigenspannungszustand angegeben werden kann derart, dass die Spannungen, welche durch Ueberlagerung der den Grenzbelastungen entsprechenden elastischen Spannungen mit diesen Eigenspannungen entstehen, nirgends die Fließgrenze überschreiten. Es sei noch bemerkt, dass nach dem Einspielsatz im vorherigen Beispiel anstatt dem Eigenspannungszustand, der Bildpunkten auf der Geraden LT entspricht, genauso gut z.B. derjenige hätte verwendet werden können, der Punkten auf der Geraden UR entspricht. Wesentlich ist nicht, dass der wirkliche, sondern vielmehr, dass überhaupt ein Eigenspannungszustand mit den verlangten Eigenschaften angegeben werden kann, unter Umständen sogar ein fiktiver Restspannungszustand.

Der Einspielsatz geht auf Arbeiten von BLEICH (1932) und MELAN (1936, 1938 a, 1938 b) zurück. Eine allgemeine Formulierung stammt von SYMONDS (1951). Eine interessante Anwendung des Einspielsatzes ergibt sich im Zusammenhang mit dem Problem der optimalen Bemessung von Tragwerken, welche verschiedenen Belastungsfällen ausgesetzt sind. Durch Ueberlagerung geeigneter Eigenspannungszustände zu den am diskretisierten elastischen System aus den verschiedenen Belastungsfällen resultierenden Beanspruchungen und Kontrolle der (linearisierten) Fließbedingungen kann mit Hilfe der linearen Programmierung eine bestimmte Zielfunktion optimiert werden. Während erwartet werden darf, dass die resultierende elastisch-plastische optimale Bemessung in der Regel nur wenig unwirtschaftlicher sein wird als die normale optimale Bemessung auf Bruch, dürften sich unter Umständen bedeutende Einsparungen an wesentlichen Rechenoperationen ergeben, da nur die Grenzwerte der elastischen Beanspruchungen in Betracht fallen. Für die Bemessung von Stabtragwerken wurde dieses Vorgehen von ANDERHEGGEN (1966) vorgeschlagen. ANDERHEGGEN und THEILER (1979) dehnten die Anwendung des Verfahrens auf das praktisch bedeutende Problem der optimalen Bemessung von Platten aus Stahlbeton aus.

Die in Bild 4.1 (c) gegebene geometrische Darstellung des Spannungszustandes beruht auf der mit dem Verschwinden des letzten Summanden in (4.4) ausgedrückten Orthogonalität der Spannungszustände \underline{S}^e und \underline{S}^E . Wie PRAGER (1955) bemerkte, lässt sich die Darstellung für den Fall einer mehrparametrischen Belastung und für mehrfach statisch unbestimmte Systeme sowie Balkensysteme verallgemeinern. Für eine mehrparametrische Belastung ist eine entsprechende Zahl zueinander orthogonaler elastischer Spannungszustände \underline{S}^e nötig, und für ein n-fach statisch unbestimmtes System benötigt man n untereinander und zu den elastischen Spannungszuständen orthogonale Eigenspannungszustände \underline{S}^E . Alsdann können in Verallgemeinerung von Bild 4.1 (c) beliebige Spannungszustände durch Bildpunkte in einem $(m+n)$ -dimensionalen euklidischen Raum dargestellt werden, wenn m die Anzahl der Lastparameter bezeichnet. Die Fließbedingungen beschränken die Lage der Spannungsbildpunkte auf Raumgebiete, welche durch parallele Hyperebenen begrenzt werden. Der allen diesen Gebieten gemeinsame Bereich ist ein konvexes, den Ursprung enthaltendes *Fließhypereder*. Die in Bild 4.1 (c) durch die Punkte B und J repräsentierte initiale Elastizitätsgrenze des Systems wird zur Begrenzung des *initialen Elastizitätsbereichs* im m-dimensionalen Unterraum R_m , welcher den Lastparametern entspricht. Beim Uebergang zu elastisch-plastischen Verformungen verlässt der Spannungsbildpunkt den initialen Elastizitätsbereich. In der Folge kann jedem Moment des Belastungsprozesses ein aplastischer Bereich zugeordnet werden, indem alle Spannungszustände betrachtet werden, die sich, vom momentanen Spannungszustand ausgehend, ohne plastisches Fließen erreichen lassen. Projiziert man

sukzessive die Grenzen dieser applastischen Bereiche in den Unterraum R_m , so erhält man die in Abhängigkeit des Belastungsprozesses sich verändernden Fließsgrenzen des elastisch-plastischen Systems. Entspricht z.B. dem momentanen Spannungszustand des betrachteten Fachwerksystems der Punkt C in Bild 4.1 (c), so wird der zugehörige applastische Bereich IVC parallel zur η -Achse auf die ξ -Achse projiziert, usw. Die mit dem Belastungsprozess verbundene Deformation des applastischen Bereichs kann in Anlehnung an das bei plastischen Materialien mit Verfestigung beobachtete Verhalten als Systemverfestigung bezeichnet werden. Es ist bemerkenswert, dass sich eine solche unabhängig davon einstellt, ob das elastisch-plastische System selbst aus plastischem Material mit Verfestigung oder aber wie beim betrachteten Fachwerk aus ideal plastischem Material besteht.

Bei der Beschränkung auf Systeme aus ideal plastischem Material bilden alle Punkte in R_m , welche Kombinationen der Lastparameter entsprechen, die zum Kollaps des Systems führen, eine feste Grenze. Diese kann als die Fließsgrenze des starr-ideal plastischen Systems aufgefasst werden, zu welchem man, vom elastisch-ideal plastischen System ausgehend, durch unbeschränktes Vergrössern der Elastizitätsmoduli ($E \rightarrow \infty$) gelangt. Da man die betrachtete Fließsgrenze als aus der Projektion des festen Fließshypereders in den Unterraum R_m entstanden denken kann, ist gezeigt, dass die Konvexität erhalten bleibt. Gleichzeitig folgt, dass der applastische Bereich des starr-ideal plastischen Systems in R_m alle applastischen Bereiche des elastisch-ideal plastischen Systems enthält. Im Beispiel Bild 4.1 (c) entspricht die Fließsgrenze des starr-ideal plastischen Systems den Abszissen der Punkte D und M.

Für Systeme aus plastischem Material mit Verfestigung verändert sich das konvexe Fließshypereder mit dem Fortschreiten des Belastungsprozesses. Betrachtet man wiederum Projektionen in den Unterraum R_m , so erkennt man, dass sich nicht nur der applastische Bereich des elastisch-plastischen Systems mit Verfestigung verändert, sondern auch derjenige des starr-plastischen Systems mit Verfestigung. Dies ist im Gegensatz zu dem für Systeme aus starr-ideal plastischem Material erhaltenen Ergebnis. Ferner bemerkt man, dass im allgemeinen die Verhältnisse beim Einsetzen des unbeschränkten Fließens eines elastisch-plastischen Systems mit Verfestigung nicht mit denjenigen übereinstimmen, die sich unter im Übrigen gleichen Bedingungen beim Beginn des unbeschränkten Fließens des entsprechenden Systems aus starr-plastischem Material mit Verfestigung einstellen. In der Tat lässt sich der für den Beginn des unbeschränkten Fließens des starr-plastischen Systems mit Verfestigung erforderliche Spannungszustand ohne Verformung realisieren. Die massgebende Fließsgrenze ergibt sich aus der Projektion des initialen Fließshypereders in R_m . Im Unterschied dazu folgt die massgebende Fließsgrenze für das elastisch-plastische System mit Verfestigung aus der Projektion eines im allgemeinen deformierten Fließshypereders. Schliesslich stellt man noch fest, dass die initiale Fließsgrenze eines starr-plastischen Systems mit Verfestigung mit der festen Fließsgrenze des entsprechenden starr-ideal plastischen Systems zusammenfällt.

Die Ermittlung des Spannungs- und Verformungszustandes eines beliebig belasteten, elastisch-plastischen Systems verlangt im allgemeinen ein schrittweises Lösungsvorgehen, bei dem der Belastungsprozess mit inkrementellen Änderungen der aufgebrachten Belastung verfolgt wird. Für jeden Moment ist der aktuelle applastische Bereich neu zu bestimmen, indem untersucht wird, welche Systemteile neu zu fließen beginnen und welche elastisch entlastet werden. Analytische Lösungen sind nur für sehr einfache Probleme möglich. Mit numerischen Verfahren können etwas kompliziertere Probleme behandelt werden. Wegen dem grossen Aufwand sind allerdings auch hier praktisch recht enge Grenzen gesetzt.

Bei den bisherigen Überlegungen wurde stillschweigend angenommen, dass die Gleichgewichtsbedingungen nach der sogenannten Theorie 1. Ordnung für das unverformte System aufgestellt werden dürfen. In der Tat ist die Berechtigung diese Annahme von Fall zu Fall zu prüfen. Häufig wird sich herausstellen, dass der Einfluss der verformungsbedingten

Geometrieänderungen eines Systems für die Beurteilung seines Tragverhaltens nicht vernachlässigt werden darf. Beispielsweise kann ein Stabilitätsversagen eintreten unter einer Belastung, die unter der nach Theorie 1. Ordnung berechneten Traglast liegt. Andererseits kann sich unter grossen Verformungen eine günstige Auswirkung der Geometrieänderungen ergeben, die man als geometrisch bedingte Verfestigung bezeichnen kann.

Fragt man angesichts der möglichen Beeinflussung durch Geometrieänderungen nach der praktischen Aussagekraft von Traglastberechnungen aufgrund der Theorie 1. Ordnung, so ist festzuhalten, dass im Rahmen einer ausschliesslich theoretischen Behandlung im allgemeinen nur eine elastisch-plastische Analyse, welche nach der Theorie 2. Ordnung die auftretenden Geometrieänderungen berücksichtigt, eine ausreichende Beurteilung erlaubt. Vielfach werden solche Vergleiche zeigen, dass die rechnerische Traglast für das tatsächliche Tragverhalten nur wenig signifikant ist. Eine ähnliche Situation ergibt sich für den Fall eines plastischen Materials mit beträchtlicher Verfestigung. Hier besitzen Traglastberechnungen ebenfalls bei weitem nicht die Bedeutung, welche ihnen für den Fall von zumindest annähernd ideal plastischen Materialien zukommt.

Trotz diesen Einschränkungen ist die Bedeutung von Traglastberechnungen nicht zu unterschätzen. Vielfach ist die Tragfähigkeit von Systemen oder der Widerstand einzelner Teile unter Verformungen erschöpft, die nur wenig grösser sind als jene beim Erreichen der initialen Elastizitätsgrenze. In solchen Fällen kann mit der Anwendung von starr-plastischen Modellen die Tragfähigkeit recht zutreffend erfasst werden. Den im Kapitel 5 dargestellten speziellen Methoden zur Traglastberechnung, den sog. Traglastverfahren, wird angesichts ihrer Leistungsfähigkeit im Vergleich zu elastisch-plastischen Analysen für die praktische Anwendung stets eine Sonderstellung zukommen. Freilich dürfte in Zukunft die Bedeutung von elastisch-plastischen beziehungsweise nichtlinear elastischen Modellen dank der raschen Entwicklung elektronischer Rechenmaschinen zunehmen.

4.2 Starr-plastische Systeme

Werden bei einem elastisch-plastischen System bei sonst gleichen Bedingungen alle Elastizitätsmoduli proportional um denselben Faktor vergrössert, so ergibt sich als einzige Veränderung des Tragverhaltens eine zu diesem Faktor umgekehrt proportionale Verminderung aller Verformungsgrössen. Lässt man im Grenzfall den Wert der Elastizitätsmoduli über alle Grenzen steigen, so vollzieht man den Uebergang zum starr-plastischen System. Als dann verschwinden alle elastischen Verformungsanteile, und es verbleiben nach der Beziehung (3.2) nur rein plastische Verzerrungsinkremente, d.h.

$$dc_{ij} = dc_{ij}^p. \quad (4.10)$$

Unter Lastintensitäten, die zwischen den durch die Abszissen der Punkte D und M in Bild 4.1 (c) repräsentierten Traglasten liegen, erfährt das starr-plastische System, welches dem im letzten Abschnitt untersuchten elastisch-plastischen Fachwerk entspricht, keine Verformungen. Beim Erreichen der Traglast beginnt das unbeschränkte Fliessen der Stäbe 1 und 2, und das System wird zu einem Mechanismus. Die Traglast wird deshalb auch als Fliessgrenze des starr-plastischen Systems bezeichnet. Wie im Abschnitt 4.1 erläutert wurde, bleiben die elastischen Eigenschaften und Eigenspannungszustände ohne Einfluss auf die Traglast, sofern die Gleichgewichtsbedingungen nach der Theorie 1. Ordnung am unverformten System aufgestellt werden dürfen. In diesem Fall ist die einfachere Untersuchung des starr-plastischen Systems für die Berechnung der Traglast gleichwertig mit der schwierigeren Analyse des elastisch-plastischen Systems.

Allgemein setzt das unbeschränkte Fliessen eines Systems erst ein, wenn die Ausdehnung seiner fliessenden Bereiche ausreichend gross ist. Anschliessend verändert sich die Aus-

dehnung der fliessenden Bereiche im allgemeinen mit der zunehmenden Verformung und Verfestigung. In denjenigen Bereichen, die in einem bestimmten Moment nach dem Einsetzen des unbeschränkten Fliessens plastisch nicht verformt werden, kann lokal der Spannungszustand entweder wie in den fliessenden Bereichen die Fließgrenze des Materials gerade erreichen, oder aber innerhalb des aplastischen Bereichs des Materials liegen.

Die Bestimmung des Spannungs- und Verformungszustandes eines starr-plastischen Systems verlangt die Ermittlung des Spannungszustandes sowie der Inkremente der Verschiebungen und Verzerrungen. Für die Lösung sind im allgemeinen die Einflüsse der Verfestigung sowie diejenigen der Geometrieänderungen, welche sich mit zunehmender Verformung einstellen, schrittweise in Rechnung zu stellen. Wesentliche Vereinfachungen ergeben sich, wenn man nur nach der Grösse der für das Einsetzen der plastischen Verformung erforderlichen Belastung, der Traglast fragt und nicht nach dem ganzen Tragverhalten nachher. Eine ähnliche Problemstellung ergibt sich bei Metallumformungsprozessen, bei denen man nach den Bedingungen fragt, die zur Aufrechterhaltung eines stationären Fließzustandes notwendig sind.

Zur Bestimmung des Spannungs- und Verformungszustandes stehen für jeden Punkt im Innern eines starr-plastischen Systems oder Körpers die Gleichgewichtsbedingungen

$$\sigma_{ij,j} + k_i = 0 \quad (4.11)$$

und die kinematischen Relationen

$$d\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot (du_{i,j} + du_{j,i}) \quad (4.12)$$

zur Verfügung. Mit k_i sind in (4.11) die Komponenten der Volumenkraft bezeichnet, und (4.12) ist die inkrementelle Form der Beziehung (3.37) zwischen den Verschiebungskomponenten u_i und den Verzerrungskomponenten ϵ_{ij} .

In denjenigen Bereichen, in deren Punkten die Fließbedingung

$$\Phi(\sigma_{ij}) = 0 \quad (3.5)$$

erfüllt ist, können plastische Verformungen auftreten. Der Zusammenhang zwischen Spannungs- und Verformungsgrössen wird durch das Fließgesetz

$$d\epsilon_{ij} = \lambda \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \quad [\lambda \geq 0] \quad (3.8)$$

oder ein Verfestigungsgesetz, wie z.B. (3.22) ausgedrückt. Die Gleichung (3.5), die je sechs Gleichungen (3.8) und (4.12) sowie die drei Gleichungen (4.11) erlauben die Bestimmung der Unbekannten σ_{ij} , du_i , $d\epsilon_{ij}$ und λ . Für Bereiche, die plastisch nicht verformt werden und reine Starrkörperbewegungen erfahren, gilt

$$d\epsilon_{ij} = 0 \quad (4.13)$$

und die Bedingung (3.5) wird durch die Relation

$$\Phi(\sigma_{ij}) \leq 0 \quad (4.14)$$

ersetzt. Wie man sieht, fehlen hier drei Gleichungen zur Bestimmung des Spannungszustandes.

Ausser der Kenntnis der Komponenten k_i der Volumenkraft in jedem Punkt im Innern des Systems erfordert die allgemeine Aufgabenstellung die Angabe der Randbedingungen in sämtlichen Punkten auf der Oberfläche des Systems. Wie in der Kontinuumsmechanik üblich, unter-

scheidet man zwischen statischen und kinematischen Randbedingungen. Man verlangt, dass in jedem Punkt drei der insgesamt sechs Komponenten t_i und u_i des Oberflächenspannungsvektors \underline{t} und des Verschiebungsvektors \underline{u} bekannt sind. Dabei können entweder alle Komponenten eines der beiden Vektoren gegeben sein oder aber es soll, wenn eine Komponente des einen Vektors nicht gegeben ist, die entsprechende Komponente des anderen Vektors gegeben sein.

Wie SALENÇON (1974) bemerkte, ist die übliche Aufteilung in statische und kinematische Randbedingungen bei der Analyse starr-plastischer Systeme nicht in jedem Fall möglich. Da stets die Grösse der Belastungen abgeklärt werden soll, welche zum unbeschränkten Fliessen führen können, ergibt sich in der Regel eine zweckmässigere Formulierung, wenn sogenannte verallgemeinerte Lasten eingeführt und damit eine endliche Anzahl Lastparameter verwendet werden, wie dies im Abschnitt 4.3 beschrieben wird. Konsequenzen des Verzichtes auf die übliche Aufteilung in statische und kinematische Randbedingungen werden im Abschnitt 5.3 erörtert. Hier sei nur erwähnt, dass die übliche Art der Aufspaltung der Randbedingungen für den Beweis der bekannten Extremalprinzipien von HILL (1948) und MARKOV (1947) für die beim Eintreten des plastischen Fliessens sich einstellenden Felder der Spannungen und der Verzerrungsinkremente grundlegend ist. Da sich jedoch diese Prinzipien trotz ihrer scheinbaren Allgemeinheit praktisch nur für den Fall einer endlichen Anzahl Lastparameter anwenden lassen und ihre Aussage dafür und insbesondere für den Fall einer proportionalen Belastung, wie bereits HILL (1951) bemerkte, auf diejenige der im Abschnitt 5.2 dargestellten Grenzwertsätze führt, entstehen durch den Uebergang zu verallgemeinerten Lasten keine Nachteile.

Die grösste Schwierigkeit bei der Analyse starr-plastischer Systeme besteht darin, dass die Ausdehnung der Bereiche, in denen sich Verformungen ergeben und jener, die starr bleiben, nicht von vorneherein bekannt ist. Eine erste Lösung sucht man im wesentlichen durch Probieren, nachdem man sich einen Ueberblick über die Problemstellung verschafft hat. Anschliessend ist eine sukzessive Verbesserung und Ergänzung der ursprünglichen Lösung möglich. Für starr-ideal plastische Systeme stützt man sich zu diesem Zweck auf die im Kapitel 5 dargestellten Grenzwertsätze. Ziel der Bemühungen wird bei den meisten praktischen Problemen eher eine gute Näherungslösung sein als die vollständige Lösung.

4.3 Verallgemeinerte Grössen

Für die Behandlung vieler Probleme ergeben sich entscheidende Vereinfachungen, wenn verallgemeinerte Grössen für Belastungen einerseits und für Verformungen und Spannungen andererseits verwendet werden, wie sie von PRAGER (1955) eingeführt wurden. Dies trifft insbesondere für Körper oder Systeme aus starr-ideal plastischem Material zu.

Beim Uebergang zu verallgemeinerten Verformungen geht man davon aus, dass die Untersuchung der Deformation eines Systems mit ausreichender Näherung auf die Betrachtung spezieller Verformungszustände beschränkt werden kann, welche durch eine endliche Zahl n von Parametern q_k beschrieben werden. Mit der Einführung der als *verallgemeinerte Verformungen* bezeichneten Parameter q_k wird demnach der Freiheitsgrad des Systems auf n reduziert, und die q_k können als Lagekoordinaten des Systems aufgefasst werden. Die Reduktion des Freiheitsgrades erfolgt stets indem man geeignete Bindungen einführt oder allenfalls auch indem man bestehende Bindungen löst. Beispiele dazu sind im Abschnitt 9.1 enthalten.

Bezeichnet in Analogie zu (3.1) der Ausdruck

$$dA = Q_k dq_k = \underline{Q} \cdot d\underline{q} \quad (4.15)$$

die elementare Deformationsarbeit, so stellen die n Grössen Q_k im Sinne der analytischen Mechanik verallgemeinerte Kräfte oder nach Prager *verallgemeinerte Spannungen* dar. Für die zweite Gleichung (4.15) wurden die verallgemeinerten Spannungen Q_k und die verallgemeinerten Verformungen q_k als Komponenten von Vektoren \underline{Q} und \underline{q} in einem n -dimensionalen euklidischen Raum R_n aufgefasst.

Nach Prager kann die im Abschnitt 3.2 für das Raumelement dargestellte Theorie des plastischen Potentials sinngemäss für die Behandlung eines ganzen Körpers oder eines Systems in verallgemeinerten Spannungen und Verformungen erweitert werden. Alle Spannungszustände \underline{Q}^* , die, von einem bestimmten betrachteten Spannungszustand \underline{Q} ausgehend, ohne plastische Verformung erreicht werden können, werden als *aplastisch* bezeichnet. Die Gesamtheit der \underline{Q}^* bildet den *aplastischen Bereich*. Die Grenzfläche des *aplastischen Bereichs*, die *Fliessfläche*, ist eine $(n-1)$ -dimensionale Hyperfläche in R_n . Nur für Spannungszustände \underline{Q} , die Punkten auf der *Fliessfläche* entsprechen, können plastische Verformungen $d\underline{q}^P$ auftreten. Es wird angenommen, dass für beliebige *aplastische* Spannungsinkremente $(\underline{Q}^* - \underline{Q})$ die Beziehung

$$(\underline{Q}^* - \underline{Q}) \cdot d\underline{q}^P \leq 0 \quad (4.16)$$

richtig ist, und dass für das wirkliche Spannungsinkrement $d\underline{Q}$ die Ungleichung

$$d\underline{Q} \cdot d\underline{q}^P \geq 0 \quad (4.17)$$

gilt. (4.16) ist die verallgemeinerte Form des Prinzips (3.17) der maximalen Dissipationsleistung. Aus diesem Prinzip folgen die Konvexität der *Fliessfläche* und die Orthogonalität der plastischen Verformungsincremente zur *Fliessfläche*. Mit der Forderung (4.17) wird ausgedrückt, dass für den Fall eines plastischen Materials mit Verfestigung das mit dem plastischen Verformungsincrement $d\underline{q}^P$ verbundene Spannungsincrement $d\underline{Q}$ einer Belastung im Sinne von Abschnitt 3.2 entspricht.

Wie ZIEGLER (1960b, 1961a) in zwei Arbeiten nachwies, folgt die Richtigkeit der Beziehungen (4.16) und (4.17) aus der Voraussetzung, dass die Theorie des plastischen Potentials in der v. Misesschen Fassung zutrifft, d.h. für jedes Raumelement gültig ist. In der ersten Arbeit (1960b) wurde der Nachweis für starr-plastische Körper erbracht, welche durch die zu (4.10) analoge Bedingung $\underline{q} = \underline{q}^P$, beziehungsweise $\underline{q}^E = \underline{Q}$ definiert werden. In der zweiten Arbeit (1961a) wurde der Beweis auf elastisch-plastische Körper übertragen. Mit einer dritten Arbeit lieferte ZIEGLER (1961b) eine Vereinfachung der Beweise und gab eine zusammenfassende Darstellung seiner beiden ersten Arbeiten.

Verwendet man die im Abschnitt 3.1 eingeführte Vektordarstellung des lokalen Spannungs- und Verzerrungszustandes, so lautet das mit (3.17) ausgedrückte Prinzip der maximalen Dissipationsarbeit für ein Raumelement

$$(\underline{\sigma}^* - \underline{\sigma}) \cdot d\underline{\epsilon}^P \leq 0 \quad , \quad (4.18)$$

und der Forderung (4.17) entspricht die Beziehung

$$d\underline{\sigma} \cdot d\underline{\epsilon}^P \geq 0 \quad . \quad (4.19)$$

$(\underline{\sigma}^* - \underline{\sigma})$ bezeichnet ein beliebiges *aplastisches* Spannungsincrement, und $d\underline{\sigma}$ und $d\underline{\epsilon}^P$ entsprechen den wirklichen Inkrementen des Spannungszustandes und der plastischen Anteile des Verzerrungszustandes. Die auf die Raumeinheit bezogene, elementare Deformationsarbeit kann nach (3.3) als Summe

$$d\bar{A} = \underline{\sigma} \cdot d\underline{\epsilon}^E + \underline{\sigma} \cdot d\underline{\epsilon}^P \quad (4.20)$$

des Zuwachses $\underline{\sigma} \cdot d\underline{\epsilon}^e$ der elastischen Verzerrungsenergie und der elementaren Dissipationsarbeit $\underline{\sigma} \cdot d\underline{\epsilon}^p$ dargestellt werden.

Die Beschreibung des Spannungs- und Verzerrungszustandes eines ganzen Körpers erfordert die Angabe der von der Lage im Körper abhängigen Funktionen σ_{ij} und ϵ_{ij} . Fasst man diese Funktionen als Vektoren \underline{S} beziehungsweise \underline{E} im Funktionenraum auf, deren Skalarprodukt durch das über den ganzen Körper erstreckte Volumenintegral

$$\underline{S} \cdot \underline{E} = \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV \quad (4.21)$$

gegeben ist, so folgt mit (3.1) für die elementare Deformationsarbeit

$$dA = \int_V \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} dV = \underline{S} \cdot d\underline{E} \quad (4.22)$$

Werden alle lokalen, im Sinne von (3.2) in elastische und plastische Anteile aufgespaltenen Verzerrungskomponenten zu Vektoren \underline{E}^e und \underline{E}^p zusammengefasst, so ist

$$dA = \underline{S} \cdot d\underline{E}^e + \underline{S} \cdot d\underline{E}^p, \quad (4.23)$$

wobei nach (4.20) der erste Summand die Zunahme der elastischen Formänderungsenergie bezeichnet und der zweite die elementare Dissipationsarbeit. Da bei der Entlastung eines vorgängig plastisch verformten elastisch-plastischen Körpers im allgemeinen ein Spannungszustand verbleibt, können \underline{E}^e und \underline{E}^p nicht als diejenigen Verformungsanteile interpretiert werden, welche sich bei der Entlastung zurückbilden bzw. verbleiben.

Betrachtet man ein beliebiges aplastisches Spannungsinkrement ($\underline{S}^* - \underline{S}$) des Körpers, so ist

$$(\underline{S}^* - \underline{S}) \cdot d\underline{E}^p = \int_V (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) d\epsilon_{ij}^p dV \leq 0, \quad (4.24)$$

wenn (4.18) für alle Elemente des Körpers vorausgesetzt wird. Ebenso folgt unter der Voraussetzung von (4.19) die Beziehung

$$d\underline{S} \cdot d\underline{E}^p = \int_V d\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p \geq 0 \quad (4.25)$$

für das wirkliche Spannungsinkrement $d\underline{S}$. Die Theorie des plastischen Potentials ist demnach auf den ganzen Körper anwendbar, wenn sie für alle seine Elemente als richtig vorausgesetzt wird. Es sei noch bemerkt, dass die Relationen (4.24) und (4.25) ebenso wie (4.18) und (4.19) auch für solche Spannungszustände \underline{S} beziehungsweise $\underline{\sigma}$ gelten, die Punkten innerhalb der aplastischen Bereiche entsprechen, da in diesen Fällen die Inkremente $d\underline{E}^p$ beziehungsweise $d\underline{\epsilon}^p$ verschwinden.

Mit der Einführung verallgemeinerter Verformungen beschränkt man die Vektoren \underline{E} auf solche, die in einem linearen Unterraum des Funktionenraumes liegen. Entspricht der Einheitsverformung

$$q_k = 1, \quad q_i = 0 \quad [i \neq k] \quad (4.26)$$

der Vektor $\underline{E}^{(k)}$, so ist dem Vektor \underline{q} mit den n Komponenten q_k der Vektor

$$\underline{E} = q_k \underline{E}^{(k)} \quad (4.27)$$

zugeordnet und umgekehrt. Für die elementare Deformationsarbeit dA folgt mit (4.22) und (4.27)

$$dA = \underline{S} \cdot d\underline{E} = \underline{S} \cdot \underline{E}^{(k)} dq_k, \quad (4.28)$$

und der Vergleich mit (4.15) führt zu

$$\underline{Q}_k = \underline{S} \cdot \underline{E}^{(k)} \quad , \quad (4.29)$$

d.h., jedem Vektor \underline{S} entspricht genau ein Vektor \underline{Q} . Umgekehrt entsprechen einem Vektor \underline{Q} im allgemeinen unendlich viele Vektoren \underline{S} . Demgemäss entspricht jedem beliebigen verallgemeinerten aplastischen Spannungsinkrement $(\underline{Q}^* - \underline{Q})$ mindestens ein aplastisches Spannungsinkrement $(\underline{S}^* - \underline{S})$. Ebenso ist dem wirklichen Inkrement $d\underline{Q}$ mindestens ein Vektor $d\underline{S}$ zugeordnet. Verlangt man, dass die Zerlegung der verallgemeinerten Verformungen \underline{q} in elastische Anteile \underline{q}^e und plastische \underline{q}^p derart vorgenommen wird, dass die beiden Summanden im Ausdruck

$$dA = \underline{Q} \cdot d\underline{q}^e + \underline{Q} \cdot d\underline{q}^p \quad (4.30)$$

mit jenen in (4.23) zusammenfallen, so ist

$$(\underline{Q}^* - \underline{Q}) \cdot d\underline{q}^p = (\underline{S}^* - \underline{S}) \cdot d\underline{E}^p \quad (4.31)$$

und

$$d\underline{Q} \cdot d\underline{q}^p = d\underline{S} \cdot d\underline{E}^p \quad . \quad (4.32)$$

Mit (4.24) und (4.25) folgen damit die Beziehungen (4.16) und (4.17). Demnach ist die Theorie des plastischen Potentials auch für die Behandlung des ganzen Körpers in verallgemeinerten Spannungen und Verformungen anwendbar, wenn sie für alle seine Elemente als richtig vorausgesetzt wird.

Wie ZIEGLER (1961 a,b) bemerkte, ergeben sich aus der Verwendung verallgemeinerter Spannungen und Verformungen für die Behandlung elastisch-plastischer Körper keine wesentlichen Vorteile, da sich der aplastische Bereich mit dem Verformungsprozess ständig verändert. Der aplastische Bereich muss schrittweise aufgrund der Diskussion des Spannungszustandes \underline{S} neu ermittelt werden. Die Betrachtung verallgemeinerter Spannungen \underline{Q} allein reicht nicht aus. Demgegenüber ist der aplastische Bereich eines Körpers aus starr-ideal plastischem Material nur einmal zu bestimmen. In diesem Fall können sich mit der Pragerschen Verallgemeinerung entscheidende Vereinfachungen ergeben. Ueber deren Angemessenheit muss im Sinne von Kapitel 1 je nach dem im Rahmen der Gesamtaufgabe erforderlichen Mass an Uebereinstimmung mit der Wirklichkeit von Fall zu Fall entschieden werden.

Nach der im Abschnitt 4.2 beschriebenen kontinuumsmechanischen Betrachtungsweise kann man mit der Angabe der Volumenkräfte in jedem Punkt im Innern eines Körpers sowie der Randbedingungen entlang seiner Oberfläche beliebige Probleme formulieren. Für die Behandlung praktischer Probleme muss man sich jedoch stets auf die Betrachtung spezieller Zustände beschränken, die sich mit einer endlichen Anzahl m von Parametern P_k und dp_k darstellen lassen. Die Parameter P_k bezeichnet man nach PRAGER (1955) als *verallgemeinerte Lasten*, und die dp_k sind die zu ihnen gehörigen Inkremente der *verallgemeinerten Verschiebungen*.

Um diese Grössen allgemein zu definieren wird vom *Prinzip der virtuellen Arbeiten* ausgegangen. Bezeichnet wie im Abschnitt 4.2 k_i die spezifische Volumenkraft im Innern eines Körpers, t_i die spezifische Kraft auf seiner Oberfläche F und σ_{ij} den mit diesen Kräften im Gleichgewicht stehenden Spannungszustand, so gilt nach dem Prinzip der virtuellen Arbeiten für jeden beliebigen zulässigen, d.h. mit den Bindungen verträglichen Verschiebungszustand du_i und die mit ihm verknüpften Verzerrungsinkremente $d\epsilon_{ij}$

$$\int_V k_i du_i dV + \int_F t_i du_i dF - \int_V \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} dV = 0 \quad . \quad (4.33)$$

Der Satz der Grössen k_i , t_i und σ_{ij} bildet einen Gleichgewichtszustand, der überall im Körper die Gleichgewichtsbedingungen

$$\sigma_{ij,j} + k_i = 0 \quad (4.11)$$

und entlang der Oberfläche die Bedingungen

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (3.24)$$

erfüllen muss. Die Grössen du_i und $d\epsilon_{ij}$ sind miteinander über die kinematischen Relationen

$$d\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (du_{i,j} + du_{j,i}) \quad (4.12)$$

verknüpft. Weder die statischen Grössen k_i , t_i , σ_{ij} noch die kinematischen Grössen du_i , $d\epsilon_{ij}$ brauchen mit den wirklichen Grössen zusammenzufallen. Auch braucht zwischen statischen und kinematischen Grössen nicht irgendwelche Beziehung zu bestehen.

Die Summe

$$dA_a = \int_V k_i du_i dV + \int_F t_i du_i dF \quad (4.34)$$

der beiden ersten Integrale in (4.33) bezeichnet die virtuelle Arbeit der äusseren Kräfte an den Verschiebungssinkrementen du_i . Der dritte Summand in (4.33) entspricht der virtuellen Arbeit

$$dA_i = - \int_V \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} dV \quad (4.35)$$

der inneren Kräfte bzw. der Spannungen σ_{ij} . Mit (4.34) und (4.35) lautet (4.33)

$$dA_a + dA_i = 0 \quad (4.36)$$

Bezeichnen du_i und $d\epsilon_{ij}$ den wirklichen Verformungszustand, so fallen $-dA_i$ und nach (4.36) auch dA_a mit dem Ausdruck (4.22) für die elementare Deformationsarbeit dA zusammen.

Die im Abschnitt 4.2 beschriebene, in der Kontinuumsmechanik übliche Unterscheidung der Randbedingungen auf F in statische und kinematische beinhaltet die Aufspaltung des zweiten Integrals in (4.33) oder (4.34) gemäss

$$\int_F t_i du_i dF = \int_{F_s} t_i du_i dF + \int_{F_u} t_i du_i dF \quad (4.37)$$

Mit F_s und F_u wird angedeutet, dass das erste Integral rechterhand nur über diejenigen Komponenten zu erstrecken ist, welche in den statischen Randbedingungen auftreten und das zweite über die komplementären, in den kinematischen Randbedingungen auftretenden Komponenten.

Grundsätzlich können nach der kontinuumsmechanischen Betrachtungsweise beliebige mögliche Belastungsprozesse durch Angabe der mit der Belastung sich ändernden Funktionen k_i sowie der in den statischen und kinematischen Randbedingungen auftretenden Funktionen t_i und du_i beschrieben werden. Praktisch beschränkt man sich durch Einführen von Bindungen stets auf die Betrachtung bestimmter tatsächlich möglicher Belastungsprozesse. Fasst man die für beliebige Belastungsprozesse möglichen statischen Angaben k_i , t_i und die kinematischen Angaben du_i zu Vektoren im Funktionenraum zusammen, so entspricht der Beschränkung auf tatsächlich mögliche Belastungsprozesse jeweils ein Uebergang zu entsprechenden Unterräumen im Funktionenraum. Die zu einem tatsächlich möglichen Belastungsprozess ge-

hören, die statischen Angaben zusammenfassenden Vektoren sollen mit \underline{G}_s bezeichnet werden und die die kinematischen Angaben zusammenfassenden Vektoren mit \underline{G}_u .

Zur Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeiten betrachtet man Spannungszustände \underline{S} , welche zusammen mit \underline{G}_s einen Gleichgewichtszustand bilden und mit \underline{G}_u verträgliche Verschiebungszustände mit zugehörigen Verzerrungszinkrementen $d\underline{E}$. Können eine lineare Abbildung $\underline{P}(\underline{S})$ des Spannungszustandes \underline{S} des Körpers auf R_m und eine lineare Abbildung $d\underline{p}(d\underline{E})$ des Verzerrungszustandes $d\underline{E}$ auf R_m definiert werden derart, dass $\underline{P} \cdot d\underline{p} = dA_a$ ist, d.h. mit (4.35) und (4.36) so, dass das Skalarprodukt der Vektoren \underline{P} und $d\underline{p}$ in R_m mit jenem der Vektoren \underline{S} und $d\underline{E}$ im Funktionenraum zusammenfällt,

$$\underline{P} \cdot d\underline{p} = \underline{S} \cdot d\underline{E} \quad , \quad (4.38)$$

so spricht man von einer m-parametrischen Belastung des Körpers. Die verallgemeinerten Lasten P_k und die Inkremente dp_k der verallgemeinerten Verschiebungen werden damit explizit als Funktionen der lokalen Grössen definiert.

Von einem bestimmten betrachteten Belastungszustand \underline{P} ausgehend können gewisse andere Belastungszustände \underline{P}^* ohne plastische Verformung realisiert werden. Die Gesamtheit solcher sog. applastischer Belastungszustände \underline{P}^* bildet den applastischen Bereich in R_m . Nach der Definition der verallgemeinerten Lasten entspricht jedem applastischen Belastungszinkrement $(\underline{P}^* - \underline{P})$ mindestens ein applastisches Spannungszinkrement $(\underline{S}^* - \underline{S})$. Ebenso ist dem wirklichen Inkrement $d\underline{P}$ mindestens ein Inkrement $d\underline{S}$ zugeordnet. Nimmt man wie in (4.30) die Aufteilung der dem wirklichen Verformungszustand entsprechenden verallgemeinerten Verschiebungen in elastische Anteile \underline{p}^e und plastische Anteile \underline{p}^p derart vor, dass im Ausdruck

$$dA = \underline{P} \cdot d\underline{p}^e + \underline{P} \cdot d\underline{p}^p \quad (4.39)$$

die beiden Summanden mit jenen in (4.23) übereinstimmen, so gilt

$$(\underline{P}^* - \underline{P}) \cdot d\underline{p}^p = (\underline{S}^* - \underline{S}) \cdot d\underline{E}^p \quad (4.40)$$

und

$$d\underline{P} \cdot d\underline{p}^p = d\underline{S} \cdot d\underline{E}^p \quad . \quad (4.41)$$

Damit und mit den Beziehungen (4.24) und (4.25) folgt

$$(\underline{P}^* - \underline{P}) \cdot d\underline{p}^p \leq 0 \quad (4.42)$$

und

$$d\underline{P} \cdot d\underline{p}^p \geq 0 \quad . \quad (4.43)$$

Somit ist die Theorie des plastischen Potentials auch für die Darstellung in verallgemeinerten Lasten und Verschiebungen anwendbar, wenn sie für alle Elemente des betrachteten Körpers als richtig vorausgesetzt wird.

Dieses nach den Betrachtungen im Abschnitt 4.1 naheliegende Ergebnis bildet die Basis für die Darstellung der Grenzwertsätze und der auf ihnen aufbauenden Methoden in den Abschnitten 5.2 und 5.3. In der vorliegenden Form, die an die Arbeiten von Ziegler anschliesst, dürfte es hier erstmals dargestellt sein. Andere Darstellungen stammen von MAIER und DRUCKER (1973) und von SALENÇON (1974).

Es sei noch bemerkt, dass für die Aufteilung der verallgemeinerten Verschiebungen \underline{p} in elastische und plastische Anteile gemäss (4.39), (4.23), (4.20), (3.3) und Bild 3.1 (c) lineare Elastizität vorausgesetzt wurde. Ferner sei daran erinnert, dass die Deformationen als klein vorausgesetzt wurden. Wie Maier und Drucker in ihrer oben angeführten Arbeit bemerkten, bleibt die Konvexität des aplastischen Bereichs in R_m im allgemeinen nicht erhalten, wenn eine oder beide dieser Voraussetzungen nicht zutreffen.

Setzt man die Belastung eines elastisch-plastischen Körpers über seinen initialen Elastizitätsbereich in R_m , d.h. über seinen ursprünglichen aplastischen Bereich hinaus fort, so muss der sich mit dem Belastungsprozess verändernde aplastische Bereich schrittweise aufgrund der Diskussion des Spannungszustandes \underline{S} neu ermittelt werden. Bei einer bestimmten Belastung \underline{P} setzt das unbeschränkte Fließen des Körpers ein. Wesentlich ist nun die Feststellung, dass diese Belastung \underline{P} auch zum unbeschränkten Fließen des Körpers führen würde, wenn \underline{P} über einen anderen Belastungsprozess erreicht worden wäre, der nicht seinerseits vor dem Erreichen von \underline{P} ein unbeschränktes Fließen des Körpers unter einer anderen Belastung verursacht. In der Tat ist der Endpunkt des Vektors \underline{P} in R_m ein Punkt der Grenzfläche des aplastischen Bereichs des zum betrachteten elastisch-plastischen Körper gehörigen starr-ideal plastischen Körpers. Wäre dies nicht der Fall, d.h. könnte der Endpunkt von \underline{P} innerhalb der Grenzfläche des aplastischen Bereichs des starr-plastischen Körpers liegen, so könnte, wenn $d\underline{p}^P$ das zu \underline{P} gehörige Verschiebungsinkrement bezeichnet, ein aplastischer Belastungszustand \underline{P}^* derart angegeben werden, dass $(\underline{P}^* - \underline{P}) \cdot d\underline{p}^P > 0$ resultierte, was gegen (4.42) verstösst. Deshalb entsprechen allen Belastungen, die unbeschränktes Fließen des elastisch-plastischen Körpers verursachen, d.h. allen Traglasten, Punkte der Grenzfläche des aplastischen Bereichs des zugehörigen starr-ideal plastischen Körpers. Umgekehrt entsprechen allen Punkten dieser Grenzfläche Belastungen, die zum unbeschränkten Fließen des Körpers führen, also Traglasten. Um dies einzusehen betrachtet man eine proportionale Laststeigerung, d.h. man schreitet in R_m vom Ursprung aus in einer festen Richtung fort. Setzt man voraus, dass für diesen Belastungsprozess eine endliche Grenzbelastung oder Traglast existiert, die unbeschränktes Fließen des Körpers nach sich zieht, so muss diese Belastung nach den vorhergehenden Überlegungen einem Punkt auf der Grenzfläche des aplastischen Bereichs des starr-ideal plastischen Körpers entsprechen. Kann allenfalls bei einem solchen Belastungsprozess die Belastung unendlich gesteigert werden, so besitzt der aplastische Bereich in R_m in der betrachteten Richtung einen Punkt im Unendlichen.

5. TRAGLASTVERFAHREN

5.1 Definitionen

Die in den folgenden Abschnitten enthaltenen Ausführungen betreffen Verfahren, die zur Ermittlung der Traglast starr-ideal plastischer Körper verwendet werden.

Der Spannungs- und Verzerrungszustand im Körper wird durch die im Abschnitt 4.3 eingeführten Vektoren \underline{S} und $d\underline{E} = d\underline{E}^P$ im Funktionenraum beschrieben. Der Verschiebungszustand wird entsprechend mit einem Vektor $d\underline{U}$ im Funktionenraum charakterisiert, der durch Zusammenfassen der von der Lage im Körper abhängigen Funktionen du_i entsteht. Die Belastung und die Lagerungsbedingungen des Körpers werden durch Angabe der Volumenkräfte sowie der statischen und kinematischen Randbedingungen festgelegt, d.h. für einen tatsächlich möglichen Belastungsprozess durch die im Abschnitt 4.3 eingeführten Vektoren \underline{G}_S und \underline{G}_U .

Ein Spannungszustand \underline{S} wird als *statisch zulässig* bezeichnet, wenn er mit \underline{G}_S einen Gleichgewichtszustand bildet, d.h. wenn überall im Körper die Gleichgewichtsbedingungen

$$\sigma_{ij,j} + k_i = 0 \quad (4.11)$$

und entlang der Oberfläche die statischen Randbedingungen

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (3.24)$$

erfüllt sind. Er heisst *stabil*, wenn im ganzen Körper

$$\Phi(\sigma_{ij}) \leq 0 \quad (4.14)$$

gilt.

Ein *kinematisch zulässiger* Verschiebungszustand $d\underline{U}$ ist mit \underline{G}_U verträglich, d.h. er erfüllt die kinematischen Randbedingungen, und der zugehörige Verzerrungszustand $d\underline{E}$ ist mit ihm über die kinematischen Relationen

$$d\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot (du_{i,j} + du_{j,i}) \quad (4.12)$$

verknüpft. Gegebenenfalls müssen weitere kinematische Bindungen beachtet werden, z.B. die Inkompressibilitätsbedingung $d\epsilon_{(1)} = 0$ für inkompressibles Material. $d\underline{U}$ nennt man nichttrivial, falls $d\underline{E} \neq \underline{0}$ ist. Nach (3.12), (4.22) und (4.23) ist die elementare Dissipationsarbeit $dA = \underline{S} \cdot d\underline{E} \geq 0$ durch $d\underline{E}$ allein bestimmt. Die einem nichttrivialen kinematisch zulässigen Verschiebungszustand $d\underline{U}$ entsprechende Dissipationsarbeit $dA \geq 0$ ist deshalb eindeutig gegeben. Bezeichnet

$$dA_a = \int_V k_i du_i dV + \int_F t_i du_i dF \quad (4.34)$$

die zu $d\underline{U}$ gehörige Arbeit der äusseren Kräfte und ist

$$dA_a \geq dA, \quad (5.1)$$

so nennt man $d\underline{U}$ *instabil*.

Ein Spannungszustand \underline{S} und ein Verschiebungszustand $d\underline{U}$ heissen *verträglich*, wenn \underline{S} und der mit (4.12) zu $d\underline{U}$ gehörige Verzerrungszustand $d\underline{E}$ der Theorie des plastischen Potentials genügen, d.h. wenn mit $\lambda \geq 0$

$$d\varepsilon_{ij} = \lambda \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \quad [\Phi(\sigma_{ij}) = 0] \quad , \quad (3.8)$$

beziehungsweise

$$d\varepsilon_{ij} = 0 \quad [\Phi(\sigma_{ij}) < 0] \quad (3.9)$$

erfüllt ist. Häufig bezieht man den Begriff der Verträglichkeit nicht auf $d\underline{U}$, sondern auf den mit ihm verbundenen Zustand $d\underline{E}$, vgl. Abschnitt 3.2. Dasselbe gilt für die Begriffe der kinematischen Zulässigkeit und der Instabilität.

Bei Verwendung verallgemeinerter Grössen \underline{Q} und $d\underline{q} = d\underline{q}^P$ anstelle der Vektoren \underline{S} und $d\underline{E}$ ist zu beachten, dass sämtliche statischen und kinematischen Bedingungen entsprechend zu formulieren sind. Man nennt einen Spannungszustand \underline{Q} statisch zulässig, wenn er mit den verallgemeinerten Lasten \underline{P} im Gleichgewicht ist und stabil, wenn die Fließgrenze nirgends überschritten ist. Analog wird ein den kinematischen Bindungen des Körpers genügender Verformungszustand $d\underline{q}$ als kinematisch zulässig bezeichnet und als instabil, sofern (5.1) mit $dA_a = \underline{P} \cdot d\underline{p}$ und $dA = \underline{Q} \cdot d\underline{q} = dA(d\underline{q})$ erfüllt ist. Der Vektor $d\underline{p}$ entspricht den zum betrachteten Verformungszustand $d\underline{q}$ und zu den verallgemeinerten Lasten \underline{P} gehörigen verallgemeinerten Verschiebungen. Endlich nennt man einen Spannungszustand \underline{Q} und einen Verformungszustand $d\underline{q}$ verträglich, wenn sie der Theorie des plastischen Potentials genügen.

5.2 Grenzwertsätze

Die auf eine Arbeit von HILL (1951) und auf zwei Arbeiten von DRUCKER, GREENBERG und PRAGER (1951, 1952) zurückgehenden Grenzwertsätze können wie folgt formuliert werden:

Statischer Grenzwertsatz: Jede Belastung, zu der sich ein stabiler statisch zulässiger Spannungszustand angeben lässt, liegt nicht höher als die Traglast.

Kinematischer Grenzwertsatz: Jede Belastung, zu der sich ein instabiler nichttrivialer kinematisch zulässiger Verschiebungszustand angeben lässt, liegt nicht tiefer als die Traglast.

Da die beiden Sätze für den Fall einer einparametrischen Belastung die Einschränkung der Traglast von unten und von oben gestatten, werden sie auch als Satz von der unteren Schranke (engl.: lower-bound theorem) und als Satz von der oberen Schranke (engl.: upper-bound theorem) bezeichnet oder etwas salopp einfach als unterer und oberer Grenzwertsatz.

Nach den im Abschnitt 4.3 angestellten Überlegungen folgen die Grenzwertsätze aus dem Prinzip der virtuellen Arbeiten und aus dem Prinzip der maximalen Dissipationsarbeit. Die mit $d\underline{p} = d\underline{p}^P$ aus (4.42) folgende Beziehung

$$(\underline{P}^* - \underline{P}) \cdot d\underline{p} \leq 0 \quad (5.2)$$

lässt sich gemäss Bild 5.1 veranschaulichen. (5.2) beinhaltet die Konvexität des aplastischen Bereichs in R_m sowie die Orthogonalität der verallgemeinerten Verschiebungsincremente $d\underline{p}$ bezüglich der den aplastischen Bereich umschliessenden, $(m-1)$ -dimensionalen Fließfläche. Die Gleichung der Fließfläche sei

$$\Phi(P_k) = 0 \quad , \quad (5.3)$$

und im Innern des aplastischen Bereichs nehme die Funktion Φ negative Werte an.

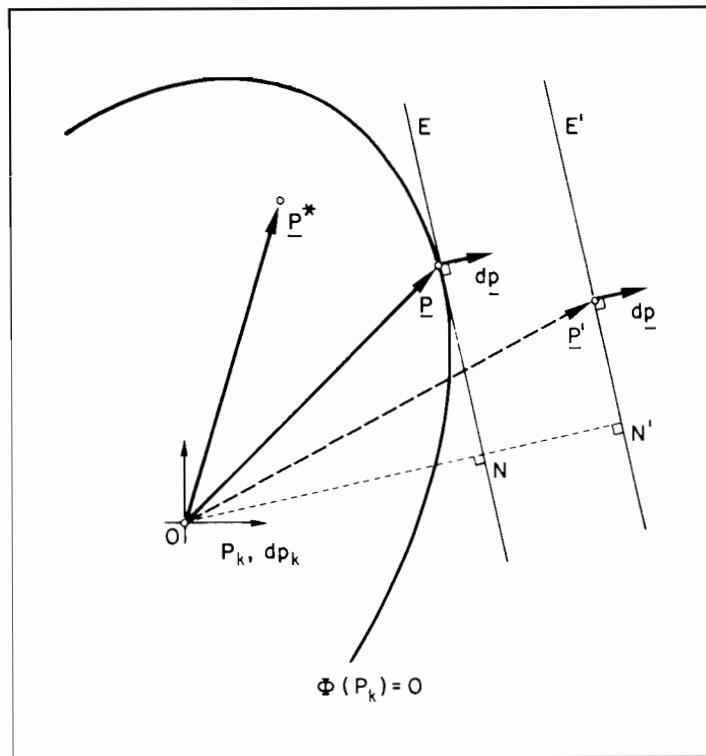


Bild 5.1: Verallgemeinerte Lasten und Verschiebungen —
Theorie des plastischen Potentials

Gemäss Abschnitt 4.3 ist jedem Spannungszustand \underline{S} im Körper unter gegebenen Belastungs- und Lagerungsbedingungen genau ein Bildpunkt in R_m zugeordnet, den man als Endpunkt des zu \underline{S} gehörigen Vektors \underline{P} betrachten kann. Insbesondere werden alle Spannungszustände, die einem möglichen Kollapszustand entsprechen, zu Punkten auf der Grenzfläche (5.3) abgebildet, und jedem Belastungszustand \underline{P}^* im aplastischen Bereich oder an dessen Grenze entspricht mindestens ein aplastischer, d.h. stabiler Spannungszustand \underline{S}^* . Damit ist der statische Grenzwertsatz begründet.

Zur Begründung des kinematischen Grenzwertsatzes werden nichttriviale kinematisch zulässige Verschiebungszustände $d\underline{U}$ betrachtet. Die ihnen entsprechende Dissipationsarbeit dA ist durch den zu $d\underline{U}$ gehörigen Verzerrungszustand $d\underline{E}$ allein bestimmt, d.h. $dA = dA(d\underline{E})$. Bezeichnet der Vektor $d\underline{p}$ die dem Verschiebungszustand $d\underline{U}$ zugeordneten verallgemeinerten Verschiebungssinkremente, so ist

$$\underline{P}' \cdot d\underline{p} = dA \quad (5.4)$$

die Gleichung einer Hyperebene in R_m , welche ausserhalb des aplastischen Bereichs liegt oder tangential zur Fliessfläche (5.3) ist, wie dies mit E' und E in Bild 5.1 angedeutet ist. Um dies zu beweisen, betrachtet man einen aplastischen Spannungszustand \underline{S}^* und den gemäss (4.38) zugehörigen Belastungszustand $\underline{P}(\underline{S}^*) = \underline{P}^*$ mit $\underline{P}^* \cdot d\underline{p} = \underline{S}^* \cdot d\underline{E}$. Da nach dem Prinzip der maximalen Dissipationsarbeit (4.24) $\underline{S}^* \cdot d\underline{E} \leq dA$ ist, folgt mit (5.4) $\underline{P}^* \cdot d\underline{p} \leq \underline{P}' \cdot d\underline{p}$. Da diese Beziehung für alle aplastischen Belastungszustände \underline{P}^* gilt, kann keine Hyperebene (5.4) die Fliessfläche (5.3) schneiden.

Die Abstände $|ON'|$ und $|ON|$ der Hyperebenen E' und E vom Ursprung sind bis auf einen skalaren Faktor gleich der zugehörigen Dissipationsarbeit dA . Da das Skalarprodukt linkerhand in (5.4) gemäss (4.38) als Arbeit $dA_{\text{äu}}$ der äusseren Kräfte am betrachteten Verschiebungszustand $d\underline{U}$ aufzufassen ist, definiert die Forderung (5.1) einen Halbraum, welcher den Ursprung O zusammen mit dem aplastischen Bereich nicht enthält.

Für den in Bild 5.1 durch die Gerade E repräsentierten Grenzfall einer zur Fliessfläche (5.3) tangentialen Hyperebene (5.4) gilt der *Verträglichkeitssatz*: Jeder nichttriviale kinematisch zulässige Verschiebungszustand, welcher mit einem stabilen statisch zulässigen Spannungszustand verträglich ist, ist instabil, und die zugehörige Belastung ist eine Kollapsbelastung.

\underline{S} bezeichne einen stabilen statisch zulässigen Spannungszustand, welcher in Bild 5.1 zum Vektor \underline{P} abgebildet wird und $d\underline{U}$ einen mit \underline{S} verträglichen, nichttrivialen kinematisch zulässigen Verschiebungszustand, dem der Vektor $d\underline{p}$ der verallgemeinerten Verschiebungen entspricht. Nach (4.38) ist $dA_a = \underline{P} \cdot d\underline{p}$, und der Ausdruck (4.35) für die Arbeit der inneren Kräfte stellt die zu $d\underline{U}$ gehörige Dissipationsarbeit $dA > 0$ dar. Nach dem Prinzip der virtuellen Arbeiten (4.33) beziehungsweise (4.36) ist also $dA_a = dA$ und $d\underline{U}$ ist gemäss (5.1) instabil. Da sich der Endpunkt des Vektors \underline{P} auf der Fliessfläche (5.3) befindet, liegt eine Kollapsbelastung vor.

Bei der Anwendung des Verträglichkeitssatzes ist zu beachten, dass die betrachteten Zustände \underline{S} und $d\underline{U}$ nicht mit denjenigen übereinstimmen müssen, die sich beim Kollaps wirklich einstellen. Notwendig ist lediglich ihre Verträglichkeit im oben besprochenen Sinn. Für die *vollständige Lösung* eines Problems genügt die Angabe eines stabilen statisch zulässigen Spannungszustandes und eines verträglichen, nichttrivialen kinematisch zulässigen Verschiebungszustandes. Die Instabilität von $d\underline{U}$ muss nicht gesondert nachgewiesen werden. Auf diesen Sachverhalt haben SAYIR und ZIEGLER (1969) hingewiesen.

5.3 Statische und kinematische Methode

Für die praktische Traglastermittlung verwendet man spezielle Methoden, die sich auf die beiden Grenzwertsätze stützen.

Nach der *statischen Methode* untersucht man den aplastischen Bereich $\Phi(P_k) \leq 0$ von innen her. Von einer gegebenen Belastung beziehungsweise der zugehörigen festen Richtung in R_m ausgehend versucht man durch Betrachtung stabiler statisch zulässiger Spannungszustände eine möglichst grosse Belastung, d.h. einen möglichst langen Vektor \underline{P} in der vorgegebenen Richtung in R_m zu ermitteln. Beispielsweise bezeichnen in Bild 5.2 (a) die Vektoren \underline{P}_1 , \underline{P}_2 und \underline{P}_3 vorgegebene Belastungen. \underline{P}_1^s , \underline{P}_2^s und \underline{P}_3^s seien entsprechende, nach der statischen Methode erhaltene Belastungsvektoren. Zufolge der Konvexität des aplastischen Bereichs $\Phi(P_k) \leq 0$ bilden die Verbindungsgeraden der Endpunkte von \underline{P}_1^s , \underline{P}_2^s und \underline{P}_3^s eine einbeschriebene Näherung für die Fliessfläche $\Phi(P_k) = 0$.

Für die praktische Anwendung der statischen Methode ist es oft zweckmässig, von dem speziellen statisch zulässigen Spannungszustand auszugehen, der sich unter der Annahme eines elastischen Verhaltens des betrachteten Systems einstellt. Weitere statisch zulässige Spannungszustände können durch Ueberlagerung von Eigenspannungszuständen gewonnen werden. Da in vielen Fällen als Grundlage für die Beurteilung des Verhaltens von Tragwerken infolge der vorgesehenen Nutzung ohnehin Berechnungen an elastischen Systemen durchgeführt werden, ist ein solches Vorgehen besonders naheliegend. Der Ingenieur wird sich dabei auch bewusst, wo und in welchem Mass er mit Umlagerungen der inneren Kräfte in seinem Tragwerk rechnet.

Nach der *kinematischen Methode* untersucht man $\Phi(P_k) \leq 0$ von aussen her, indem man gemäss Bild 5.2 (a) von einem festen $d\underline{p}$ ausgeht. Durch Betrachtung nichttrivialer kinematisch zulässiger Verschiebungszustände, welchen das vorgegebene verallgemeinerte Verschiebungsincrement $d\underline{p}$ entspricht, versucht man eine Hyperebene (5.4) zu bestimmen, die einen möglichst geringen Abstand vom Ursprung aufweist, d.h. man sucht dA in (5.4) minimal zu machen. Da alle auf diese Weise bestimmten Halbräume $\underline{P}' \cdot d\underline{p} \geq dA$ den aplastischen Bereich

Wird nur das Spannungsfeld σ_{ij}^* , nicht aber das Verschiebungsfeld du_i^* verändert, so bleiben die drei ersten Summanden in (5.6) konstant. Mithin soll der Ausdruck

$$\int_{F_U} t_i^* du_i dF \quad (5.7a)$$

möglichst gross werden. Für das Spannungsfeld der vollständigen Lösung erhält man das Maximum

$$\int_{F_U} t_i du_i dF .$$

Wird andererseits nur das Verschiebungsfeld du_i^* verändert, so bleibt der vierte Summand in (5.6) konstant. Mithin ist der Ausdruck

$$dA(d\epsilon_{ij}^*) - \int_V k_i du_i^* dV - \int_{F_S} t_i du_i^* dF \quad (5.7b)$$

zu minimalisieren. Für das Verschiebungsfeld der vollständigen Lösung erhält man das Minimum $\int_{F_U} t_i du_i dF$.

Mit diesen Ueberlegungen sind zwei komplementäre Extremalprinzipien für die beim Kollaps sich einstellenden Felder σ_{ij} und du_i begründet. Die beiden Prinzipien werden nach HILL (1948) und MARKOV (1947) benannt. HILL (1951) fasste in einer späteren Arbeit die beiden Prinzipien zusammen und bemerkte, dass ihre Aussage für den Fall einer proportionalen Laststeigerung, d.h. für eine einparametrische Belastung, mit derjenigen der Grenzwertsätze zusammenfällt. Darauf wurde bereits am Ende von Abschnitt 4.2 hingewiesen.

Zum Schluss dieses Abschnittes sei noch darauf hingewiesen, dass sich für eine bestimmte Problemstellung im allgemeinen verschiedene vollständige Lösungen ergeben können, die Spannungsfelder dieser Lösungen sich jedoch unter gewissen Voraussetzungen in der Vereinigung derjenigen Bereiche der verschiedenen Lösungen, in denen plastische Verformungen auftreten, nicht unterscheiden. Diese Erkenntnis verdankt man ebenfalls HILL (1951). Hill beschränkte sich in seiner Arbeit allerdings auf isotrope, inkompressible Materialien, die eine stark konvexe Fliessfigur in der deviatorischen Ebene besitzen. Es ist nicht schwierig, seine Ueberlegungen auf Fälle mit weiter gefassten Voraussetzungen zu übertragen. Zu diesem Zweck betrachtet man zwei vollständige Lösungen mit den Spannungsfeldern σ_{ij}^1 und σ_{ij}^2 , den Feldern du_i^1 und du_i^2 der Verschiebungsincremente und den zugehörigen Feldern der Verzerrungsincremente $d\epsilon_{ij}^1$ und $d\epsilon_{ij}^2$. Wendet man das Prinzip der virtuellen Arbeiten (4.33) auf das Spannungsfeld $(\sigma_{ij}^1 - \sigma_{ij}^2)$ und das Feld $(du_i^1 - du_i^2)$ mit dem zugehörigen Feld $(d\epsilon_{ij}^1 - d\epsilon_{ij}^2)$ an, so erhält man mit (4.37)

$$\begin{aligned} \int_V (k_i - k_i)(du_i^1 - du_i^2) dV + \int_{F_S} (t_i - t_i)(du_i^1 - du_i^2) dF + \int_{F_U} (t_i^1 - t_i^2)(du_i - du_i) dF - \\ - \int_V (\sigma_{ij}^1 - \sigma_{ij}^2)(d\epsilon_{ij}^1 - d\epsilon_{ij}^2) dV = 0 . \end{aligned}$$

Da die ersten drei Integrale verschwinden und nach dem Prinzip (3.17) der maximalen Dissipationsarbeit keiner der Summanden $(\sigma_{ij}^1 - \sigma_{ij}^2)d\epsilon_{ij}^1$ und $(\sigma_{ij}^2 - \sigma_{ij}^1)d\epsilon_{ij}^2$ im vierten Integral negativ sein kann, gilt für alle Punkte von V

$$(\sigma_{ij}^1 - \sigma_{ij}^2)(d\epsilon_{ij}^1 - d\epsilon_{ij}^2) = 0 . \quad (5.8)$$

Zu diesem Ergebnis gelangt man auch, wenn man die virtuelle Arbeit der äusseren Kräfte nicht gemäss (4.34) und (4.37) mit den obenstehenden ersten drei Integralen ausdrückt, sondern mit verallgemeinerten Lasten und Verschiebungen, d.h. gemäss (4.38) durch $(P_k^1 - P_k^2)(dp_k^1 - dp_k^2)$. In dieser Summe von Produkten verschwindet voraussetzungsgemäss immer

einer der Faktoren. Dies führt wieder zu (5.8).

In Bereichen, die bei beiden Lösungen starr bleiben, d.h., wo $de_{ij}^1 = de_{ij}^2 = 0$ ist, ist (5.8) erfüllt. In solchen Bereichen sind unterschiedliche, statisch zulässige und stabile Spannungsfelder möglich.

In Bereichen, in denen mindestens bei einer Lösung plastische Deformationen auftreten, d.h., wo z.B. $de_{ij}^1 \neq 0$ ist, müssen gemäss (5.8) und (3.17) die Punkte σ_{ij}^1 und σ_{ij}^2 im Spannungsraum samt ihrer ganzen Verbindungsgeraden zur Grenzfläche des aplastischen Bereichs gehören. Für stark konvexe Fließflächen ist demnach der Spannungszustand in solchen Bereichen eindeutig bestimmt. Für inkompressible Materialien, die eine stark konvexe Fließfigur in der deviatorischen Ebene besitzen, gilt dieselbe Bemerkung für den deviatorischen Anteil des Spannungszustandes in jedem Punkt, d.h. der Spannungszustand ist bis auf einen hydrostatischen Anteil eindeutig. Für den Fall von Fließflächen, die ebene Stücke und Kanten aufweisen, wie z.B. die Fließfläche von Coulomb, folgt aus (5.8), dass die Spannungszustände der verschiedenen Lösungen demselben Fließregime (gleiche Ebene oder Kante) angehören, wenn mindestens bei einer Lösung plastische Deformationen auftreten.

5.4 Unstetige Felder

Bei vielen Problemen treten Unstetigkeiten der Spannungsfelder σ_{ij} und der Verschiebungsfelder du_i auf. Bisher wurden derartige Unstetigkeiten stillschweigend ausgeschlossen. Mit gewissen Ergänzungen lassen sich aber die im Abschnitt 5.2 dargestellten Sätze auch auf solche Fälle anwenden.

Unter Beschränkung auf inkompressible isotrope Materialien wurden räumlich unstetige Felder von SAYIR und ZIEGLER (1969) behandelt. Gestützt auf diese Überlegungen wird mit der folgenden Darstellung der Begriff der Verträglichkeit für räumlich unstetige Felder und kompressibles isotropes Material verallgemeinert. Zudem ergeben sich für derartige Materialien einige allgemeine Folgerungen über die Beziehungen, die zwischen dem Spannungsfeld und den Unstetigkeiten des Verschiebungsfeldes und umgekehrt bestehen.

An einer Unstetigkeitsfläche S darf der Spannungsvektor \underline{t} keinen Sprung aufweisen, d.h. für ein Element dS von S mit dem Einheitsnormalenvektor \underline{n} gilt nach (3.24)

$$[\sigma_{ij}] n_j = 0 \quad . \quad (5.9)$$

Die eckige Klammer bezeichnet den Sprung beim Durchgang durch dS in Richtung \underline{n} . Ein statisch zulässiger Spannungszustand $\underline{\sigma}$ genügt überall im Körper ausser allfällig vorhandener Unstetigkeitsflächen den Gleichgewichtsbedingungen (4.11), an Unstetigkeitsflächen der Forderung (5.9) und an der Oberfläche den statischen Randbedingungen (3.24). $\underline{\sigma}$ heisst stabil, wenn im ganzen Körper mit Ausnahme von Unstetigkeitsflächen die Bedingung (4.14) nicht verletzt ist.

Bei inkompressiblen Materialien können die durch eine Unstetigkeitsfläche getrennten Teilkörper sich weder voneinander lösen noch ineinander eindringen, d.h. die Normalkomponente des Verschiebungsinkrementes du muss stetig sein,

$$[du_i] n_i = 0 \quad . \quad (5.10)$$

Mit anderen Worten: für inkompressible Materialien weist die Relativverschiebung $[du]$ an einem Element dS einer Unstetigkeitsfläche nur eine zu dS tangential Komponente auf. Für kompressible Materialien weist die Relativverschiebung $[du]$ an einem Element dS einer

Unstetigkeitsfläche im allgemeinen eine Komponente in der Normalenrichtung \underline{n} auf und eine, die in dS liegt. Die Bedingung (5.10) für einen kinematisch zulässigen Verschiebungszustand $d\underline{u}$ entfällt. Je nach der verwendeten speziellen Fließbedingung kann indessen für verträgliche \underline{s} und $d\underline{u}$ eine (5.10) ähnliche Bedingung formuliert werden.

In einem Punkt P einer *Unstetigkeitsfläche des Verschiebungsfeldes* kann gemäss Bild 5.3 (a) das Koordinatensystem so orientiert werden, dass die Achse y die Richtung der Normalen \underline{n} auf dS hat und die unter dem Winkel α gegen dS geneigte Relativverschiebung $[d\underline{u}]$ der beiden Teilkörper in der $\{x,y\}$ -Ebene liegt. Mit Bild 5.3 (b) kann man die Unstetigkeitsfläche als Grenzfall einer dünnen Schicht der Dicke $d \rightarrow 0$ auffassen, in welcher

$$d\epsilon_y = \frac{|[d\underline{u}]|}{d} \cdot \sin \alpha \quad (5.11)$$

und

$$d\gamma_{xy} = \frac{|[d\underline{u}]|}{d} \cdot \cos \alpha \quad (5.12)$$

Über alle Grenzen wachsen, während alle übrigen Verzerrungskomponenten endlich bleiben. Da $d\epsilon_z$ endlich bleibt, während $d\epsilon_y$ und $d\gamma_{xy}$ über alle Grenzen wachsen, ist die z -Achse eine Hauptachse. Gemäss Bild 5.3 (a) wird die z -Richtung als dritte Haupttrichtung bezeichnet. Aus der Konstruktion des Verzerrungskreises Bild 5.3 (c) entnimmt man, dass das Hauptachsensystem $\{1,2,3\}$ durch Drehung des Systems $\{x,y,z\}$ um $(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2})$ um die Achse

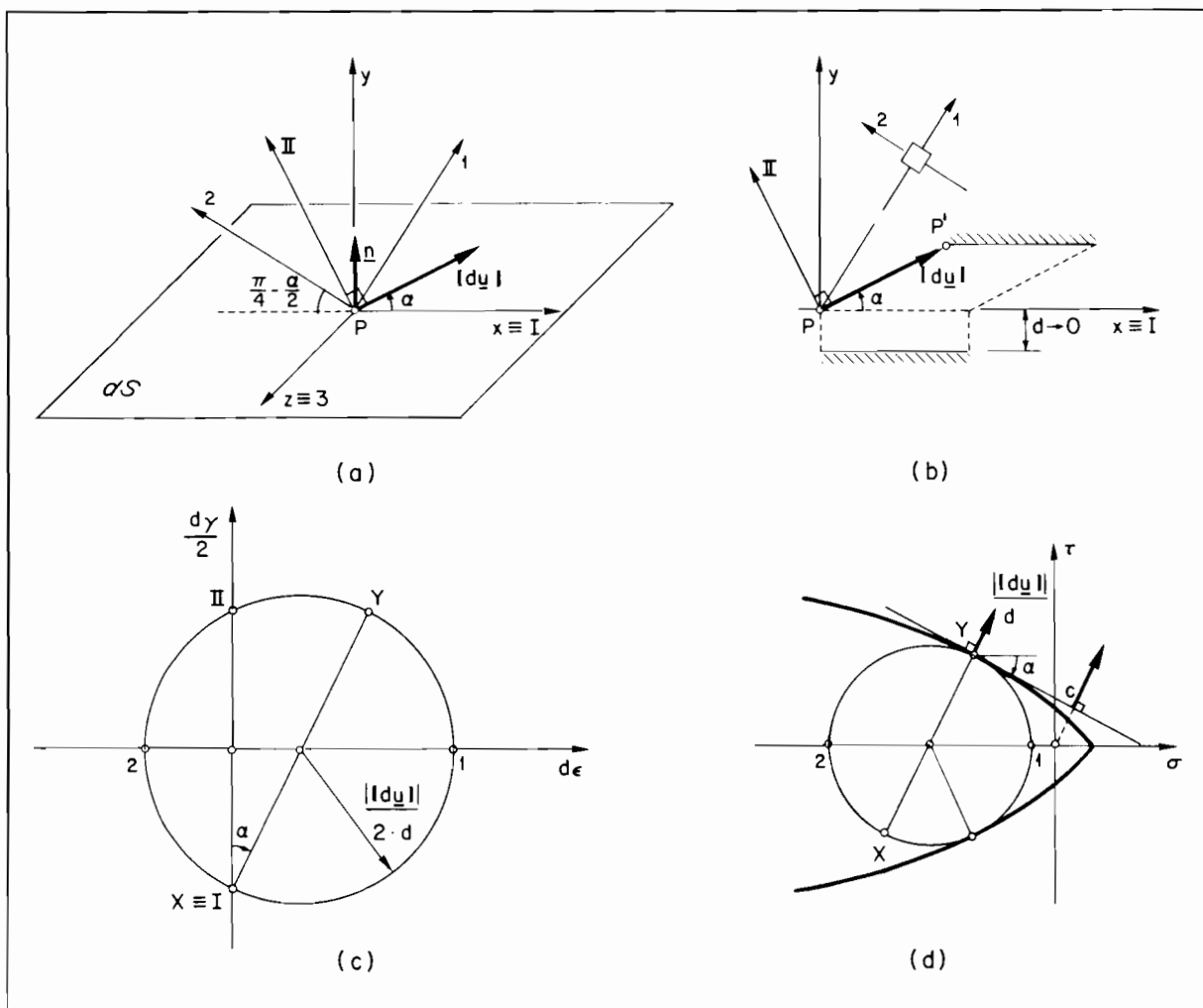


Bild 5.3: Verhältnisse an einer Unstetigkeitsfläche des Verschiebungsfeldes

$z \equiv 3$ entsteht. Mit $d \rightarrow 0$ gehen die Hauptwerte $d\epsilon_1$ und $d\epsilon_2$ gegen $+\infty$ beziehungsweise $-\infty$. Ihr Verhältnis beträgt

$$\frac{d\epsilon_1}{d\epsilon_2} = - \frac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha} \quad (5.13)$$

Da der dritte Hauptwert $d\epsilon_3$ endlich bleibt, d.h. mit $d \rightarrow 0$ gegenüber $d\epsilon_1$ und $d\epsilon_2$ verschwindet, entsprechen die Verhältnisse in der Unstetigkeitsfläche denjenigen eines ebenen Fliezzustandes. Aufgrund dieser Feststellung werden die im Abschnitt 3.3 diskutierten Ergebnisse herangezogen, um die Begriffe der Verträglichkeit und der Instabilität auf unstetige Felder zu übertragen.

Im Abschnitt 3.3 wurde gezeigt, dass sich für den ebenen Fliezzustand jede Fliessbedingung für isotropes Material auf eine Bedingung (3.63) reduziert, bzw. auf (3.65) oder (3.66). Unter einer bestimmten Einschränkung für die Form der betrachteten Fliessflächen ist eine weitere Rückführung auf eine Bedingung vom Typ der Mohrschen Hüllkurve (3.62) möglich. Wie sich weiter unten bei der Diskussion von Bild 5.4 (a) zeigen wird, darf im Zusammenhang mit der Behandlung der Verhältnisse am Uebergang zu einer Unstetigkeitsfläche des Verschiebungsfeldes ohne Verlust an Allgemeinheit angenommen werden, diese Rückführung sei möglich. Dies beruht auf der Tatsache, dass die in (5.13) auftretenden Hauptwerte $d\epsilon_1$ und $d\epsilon_2$ unterschiedliche Vorzeichen haben. Der Spannungstensor und der Verzerrungstensor besitzen ein gemeinsames Hauptachsensystem, und die zur Relativverschiebung $[d\mathbf{u}]$ normale Hauptspannung σ_3 ist bis auf den Fall einer zur τ -Achse parallelen Tangente an die Mohrsche Hüllkurve im Punkt $(\sigma_0, 0)$ von Bild 3.5 (e) die mittlere Hauptspannung.

Der im Abschnitt 5.1 definierte Begriff der Verträglichkeit eines Spannungszustandes \underline{S} mit einem kinematisch zulässigen Verschiebungszustand $d\mathbf{u}$ wird nun derart modifiziert, dass die Bedingungen (3.8) und (3.9) überall im Körper mit Ausnahme von Unstetigkeitsflächen erfüllt sein sollen. An jedem Element dS einer Unstetigkeitsfläche sollen der Spannungsvektor \underline{t} mit der Relativverschiebung $[d\mathbf{u}]$ in einer Normalebene auf dS liegen, und die Komponenten σ und τ von \underline{t} sollen sich in Abhängigkeit von der Richtung α von $[d\mathbf{u}]$ gemäss Bild 5.3 (d) aus der der verwendeten Fliessbedingung entsprechenden Mohrschen Hüllkurve ergeben.

Um auch den Begriff der Instabilität für einen unstetigen zulässigen Verschiebungszustand zu erweitern, ist die Kenntnis der an einer Unstetigkeitsfläche dissipierten Arbeit notwendig. Mit den in den Bildern 5.3 (b), (c) und (d) verwendeten Bezeichnungen folgt aus (4.22), (5.11) und (5.12)

$$\begin{aligned} dA &= \lim_{d \rightarrow 0} \int_V \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} dV = \int_S (\sigma_y \cdot \sin\alpha + \tau_{xy} \cdot \cos\alpha) \cdot |[d\mathbf{u}]| \cdot dS = \\ &= \int_S c \cdot \cos\alpha \cdot |[d\mathbf{u}]| \cdot dS \end{aligned} \quad (5.14)$$

Mit $\varphi = \alpha$ entspricht die dritte Gleichung (5.14) der Beziehung (3.61). Es ist zu beachten, dass nur die Existenz eines mit dem zulässigen Verschiebungszustand $d\mathbf{u}$ verträglichen Spannungszustandes \underline{S} vorausgesetzt worden ist, nicht aber dessen Zulässigkeit. Insbesondere braucht \underline{S} die Bedingung (5.9) an S nicht zu erfüllen.

Wie oben erwähnt, lassen sich für spezielle Fliessbedingungen und verträgliche \underline{S} und $d\mathbf{u}$ zur Gleichung (5.10) ähnliche Bedingungen gewinnen. Als Beispiel werden kegelförmige Fliessflächen der Form (3.67) betrachtet. Ihre Schlankheit sei derart, dass eine Fliessfläche von Coulomb mit $\varphi \leq \frac{\pi}{2}$ umschrieben werden kann, d.h. so, dass überhaupt ein ebener Fliezzustand mit unterschiedlichen Vorzeichen der Hauptwerte des Verzerrungstensors möglich ist. Alsdann können für Spannungszustände, deren Bildpunkt nicht mit der Kegelspitze

$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = m/3$ zusammenfällt, nur Sprünge $[d\mathbf{u}]$ auftreten, die unter $\alpha = \varphi$ gegen das Element dS geneigt sind. Für den Grenzfall $m \rightarrow \infty$ beziehungsweise $\varphi \rightarrow 0$ eines allgemein inkompressiblen isotropen Materials ergibt sich (5.10).

Da der in Abschnitt 5.2 formulierte Verträglichkeitssatz auf der Zulässigkeit sowohl des Verschiebungszustandes $d\mathbf{u}$ als auch auf derjenigen des Spannungszustandes \underline{S} beruht, müssen für vollständige Lösungen einige weitere Bedingungen erfüllt sein.

Bei der Annäherung an eine Unstetigkeitsfläche S eines kinematisch zulässigen Verschiebungszustandes $d\mathbf{u}$ geht das Hauptachsensystem des Verzerrungstensors $d\epsilon_{ij}$ gegen das System $\{1,2,3\}$ in Bild 5.3 (a), unabhängig davon, von welcher Seite her die Annäherung erfolgt. Da die Achse $z \equiv 3$ eine Hauptachse ist, verschwinden die Schiebungsinkremente dy_{xz} und dy_{yz} . Ferner ist mit der Verschiebungskomponente du_z auch $d\epsilon_z = du_{z,z}$ stetig, d.h. es ist $[d\epsilon_z] = 0$. Die Dehnungsinkremente $d\epsilon_x$ und $d\epsilon_y$ und das Schiebungsinkrement dy_{xy} können im allgemeinen unstetig sein. Mit Rücksicht auf die Orientierung des Hauptachsensystems muss jedoch auf beiden Seiten von S die Beziehung

$$d\epsilon_x = d\epsilon_y - dy_{xy} \cdot \tan \alpha \quad (5.15)$$

erfüllt sein. Für inkompressible Materialien folgt mit $\alpha = 0$ aus (5.15) $d\epsilon_x = d\epsilon_y$, und mit $[d\epsilon_z] = 0$ und der Inkompressibilitätsbedingung $d\epsilon_{(1)} = 0$ erhält man $[d\epsilon_x] = [d\epsilon_y] = 0$, womit sich die Möglichkeit eines Sprunges auf die Schiebung dy_{xy} allein beschränkt.

Bei der Suche nach einem statisch zulässigen Spannungszustand \underline{S} ist zu beachten, dass nur die Komponenten σ_x , σ_z und τ_{xz} von σ_{ij} unstetig sein können. Sind \underline{S} und $d\mathbf{u}$ verträglich, so ist das System $\{1,2,3\}$ in Bild 5.3 (a) auf beiden Seiten von dS auch Hauptachsensystem von σ_{ij} . Deshalb ist $\tau_{xz} = 0$, d.h. $[\tau_{xz}] = 0$, und es gilt

$$\sigma_x = \sigma_y - 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \tan \alpha \quad (5.16)$$

Da σ_y und τ_{xy} nicht springen, folgt $[\sigma_x] = 0$ und damit $[\sigma_1] = [\sigma_2] = 0$, d.h. die Möglichkeit eines Sprunges beschränkt sich auf $\sigma_z = \sigma_3$.

Ein Sprung in σ_3 bei festen Hauptwerten σ_1 und σ_2 ist nur möglich, wenn die Fliessfläche $\Phi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$ im Hauptspannungsraum zur Achse σ_3 parallele gradlinige Stücke enthält. Da die Vektoren der Verzerrungsinkremente zur Fliessfläche orthogonal sind, kann $d\epsilon_3$ auf der einen Seite von dS nicht positiv und auf der anderen nicht negativ sein. Da aber $[d\epsilon_3] = 0$ ist, muss für $[\sigma_3] \neq 0$ der Hauptwert $d\epsilon_3$ beiderseits dS verschwinden, mithin der Fliesszustand eben sein. In diesem Fall reduziert sich die Aufgabe auf die Betrachtung der aus der Normalprojektion der Fliessfläche $\Phi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$ auf die Ebene $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ entstehenden, in σ_1 und σ_2 symmetrischen Bedingung

$$g_1(\sigma_1, \sigma_2) = 0 \quad (3.63)$$

wie dies in Bild 5.4 dargestellt ist. Dabei ist von einem bestimmten angenommenen Neigungswinkel α des Relativverschiebungsvektors $[d\mathbf{u}]$ gegenüber dS in Bild 5.3 (a) auszugehen.

Der Punkt P in Bild 5.4 (a) bezeichne die Projektion aller Bildpunkte von Spannungszuständen, die mit dem durch das Verhältnis (5.13) bestimmten ebenen Fliesszustand verträglich sind. Die Projektion $g_1(\sigma_1, \sigma_2) = 0$ ist in der Umgebung von P stark konvex und regulär. Die Tangente BP an $g_1(\sigma_1, \sigma_2) = 0$ in P entspricht der Spur einer Seitenebene einer Coulombschen Fliesspyramide, welche der Fliessfläche $\Phi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$ umschrieben ist. Mit $\varphi = \alpha = \text{konst.}$ beschränken sich die Möglichkeiten für Sprünge der Verzerrungsinkremente auf die mit Bild 5.4 (d) angedeuteten Verhältnisse. Die Verzerrungskreise 1 2 und $\bar{1} \bar{2}$ beschreiben den Verzerrungszustand beim Uebergang zu dS für negative bzw. positive y .

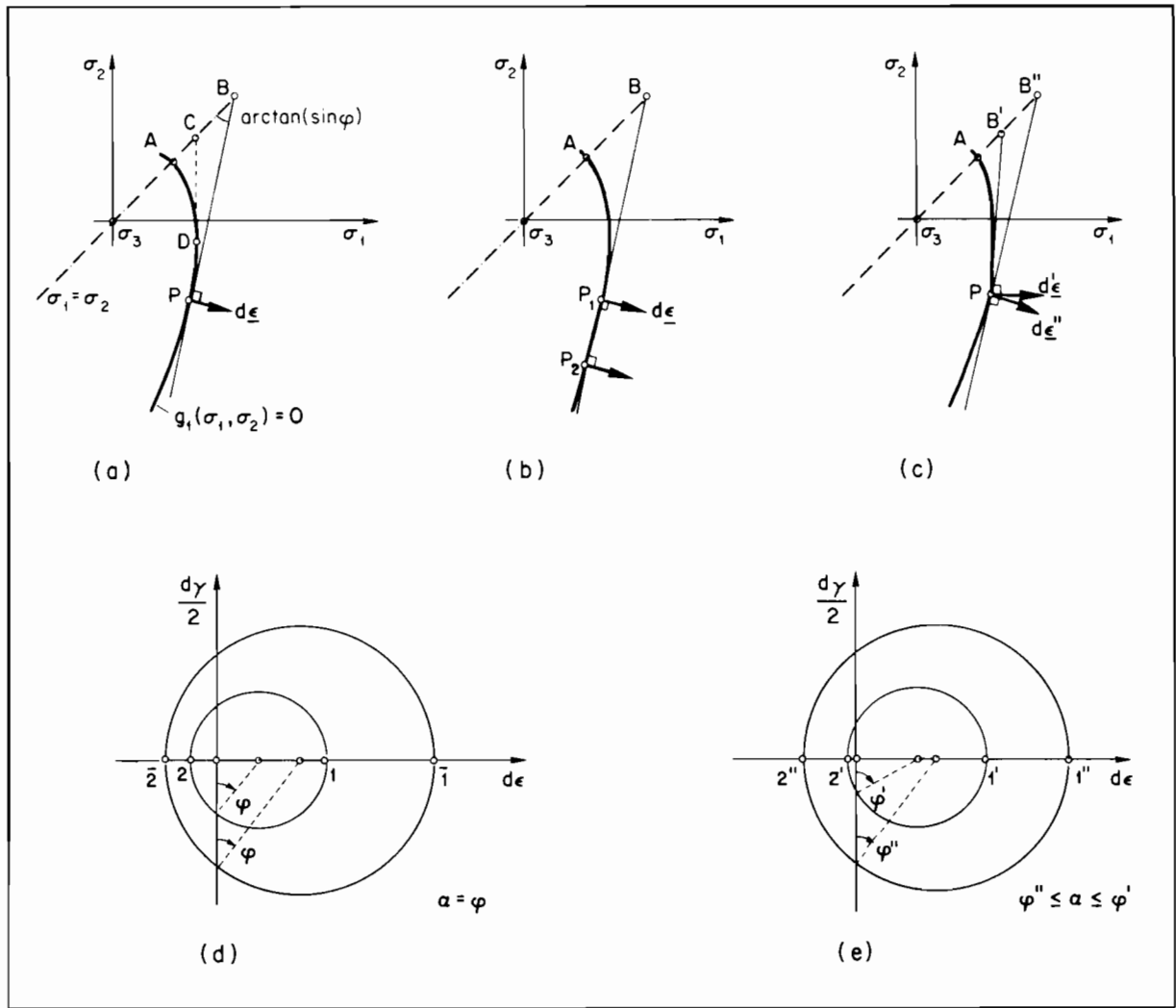


Bild 5.4 : Zulässige verträgliche σ_{ij} bei Sprung von σ_3 an dS

Da mit (5.13) das Verhältnis ihrer Hauptwerte festgelegt ist, verbleibt als einzige freie Sprungmöglichkeit beim Durchgang durch dS die Veränderung des Kreisdurchmessers dy_{\max} . Die Verzerrungszinkremente am Uebergang zu dS sind

$$d\epsilon_x = 0, \quad d\epsilon_y = dy_{\max} \cdot \sin \alpha, \quad d\gamma_{xy} = dy_{\max} \cdot \cos \alpha, \quad d\epsilon_z = d\epsilon_3 = 0 \quad [y < 0] \quad (5.17)$$

und

$$d\bar{\epsilon}_x = 0, \quad d\bar{\epsilon}_y = d\bar{y}_{\max} \cdot \sin \alpha, \quad d\bar{\gamma}_{xy} = d\bar{y}_{\max} \cdot \cos \alpha, \quad d\bar{\epsilon}_z = d\bar{\epsilon}_3 = 0 \quad [y > 0] . \quad (5.18)$$

Es ist zu beachten, dass mit $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ die Hauptwerte $d\epsilon_1$ und $d\epsilon_2$ nicht negativ bzw. positiv sind. Ihr Verhältnis $(-d\epsilon_2)/(d\epsilon_1)$ ist gemäss (5.13) durch die Werte 1 und 0 begrenzt, d.h. die zugehörigen Vektoren $d\epsilon$ zeigen in den letzten Oktanten der $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ -Ebene. Spannungszustände, deren Bildpunkte auf den Bogen AD abgebildet werden, können mit solchen Verzerrungszuständen nicht verträglich sein. Die zur Achse σ_2 parallele Tangente CD an $g_1(\sigma_1, \sigma_2) = 0$ entspricht dem Grenzfall $\varphi = \alpha = \frac{\pi}{2}$. Damit ist nachgewiesen, dass im Zusammenhang mit der Behandlung der Verhältnisse an einer Unstetigkeitsfläche des Verschiebungsfeldes für isotropes Material ganz allgemein die spezielle verwendete Fließfläche durch die ihr zugeordnete Mohrsche Hüllkurve ersetzt werden darf. Solche Abschnitte der Fließfläche, für die eine Rückführung auf eine Mohrsche Hüllkurve nicht möglich ist, wie z.B. diejenigen, welche zum Bogen AD abgebildet werden, fallen ausser Betracht.

Erlaubt die Flie遥edingung $\Phi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$ beziehungsweise ihre Projektion $g_1(\sigma_1, \sigma_2) = 0$ eine plastische Verformung nicht nur unter hydrostatischem Zug, sondern auch unter hydrostatischem Druck, so können die durch eine Unstetigkeitsfläche S getrennten Teilkörper ineinander eindringen, d.h. es können negative Werte α ($-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$) auftreten. Für $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq 0$ zeigen die zugehörigen Vektoren $d\underline{\epsilon}$ in den zweitletzten Oktanten der $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ -Ebene. Die oben angestellten Ueberlegungen mit umschriebenen Flie遥yramiden von Coulomb im Hauptspannungsraum können durch Wechseln sämtlicher Vorzeichen der Hauptwerte leicht übertragen werden.

Der im Bild 5.4 (b) dargestellte Fall einer entlang P_1P_2 schwach konvexen Berandung $g_1(\sigma_1, \sigma_2) = 0$ entspricht einem zur Achse σ_3 parallelen Teilstück der Flie遥lche $\Phi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$. Alle Punkte dieser Ebene sind Bildpunkte von Spannungszuständen, welche mit dem Verzerrungszustand $d\underline{\epsilon}(\alpha)$ verträglich sind. Gegenüber dem soeben besprochenen Fall Bild 5.4 (a) ergeben sich keine neuen kinematischen Gesichtspunkte, d.h. die mit den Verzerrungskreisen in Bild 5.4 (d) zum Ausdruck gebrachten Verhältnisse bleiben bestehen.

Die in Bild 5.4 (c) dargestellte stark konvexe Berandung $g_1(\sigma_1, \sigma_2) = 0$ weist in P eine Singularität auf. Alle Spannungszustände, deren Bildpunkte auf $\Phi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$ bei der Projektion auf die Ebene $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ zum Punkt P abgebildet werden, sind mit Vektoren $d\underline{\epsilon}$ verträglich, deren positive Richtung in den durch $d\underline{\epsilon}'$ und $d\underline{\epsilon}''$ gebildeten Winkelraum weist. Den Tangenten $B'P$ und $B''P$ in P entsprechen die Grössen φ' und φ'' . Für den Neigungswinkel α des Relativverschiebungsvektors $[d\underline{u}]$ gegenüber dS gilt $\varphi' \geq \alpha \geq \varphi''$. Beim Durchgang durch dS kann nicht nur $d\gamma_{\max}$ springen, sondern es kann sich auch das Verhältnis der Hauptwerte $d\epsilon_1$ und $d\epsilon_2$ innerhalb der mit φ' und φ'' festgelegten Grenzen ändern, d.h. es ist

$$\frac{1 + \sin\varphi'}{1 - \sin\varphi'} \geq \frac{d\epsilon_1}{(-d\epsilon_2)} \geq \frac{1 + \sin\varphi''}{1 - \sin\varphi''} \quad (5.19)$$

Die Verzerrungszinkremente am Uebergang zu dS sind

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon_x &= \frac{d\gamma_{\max}}{2} \cdot (\sin\beta - \sin\alpha), \quad d\gamma_{xy} = d\gamma_{\max} \cdot \cos\alpha, \quad d\epsilon_z = d\epsilon_3 = 0 & [y < 0], \\ d\epsilon_y &= \frac{d\gamma_{\max}}{2} \cdot (\sin\beta + \sin\alpha), \quad d\gamma_{xy} = d\gamma_{\max} \cdot \cos\alpha, \quad d\epsilon_z = d\epsilon_3 = 0 & [y < 0] \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

und

$$\left. \begin{aligned} d\bar{\epsilon}_x &= \frac{d\bar{\gamma}_{\max}}{2} \cdot (\sin\bar{\beta} - \sin\alpha), \quad d\bar{\gamma}_{xy} = d\bar{\gamma}_{\max} \cdot \cos\alpha, \quad d\bar{\epsilon}_z = d\bar{\epsilon}_3 = 0 & [y > 0], \\ d\bar{\epsilon}_y &= \frac{d\bar{\gamma}_{\max}}{2} \cdot (\sin\bar{\beta} + \sin\alpha), \quad d\bar{\gamma}_{xy} = d\bar{\gamma}_{\max} \cdot \cos\alpha, \quad d\bar{\epsilon}_z = d\bar{\epsilon}_3 = 0 & [y > 0] \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

wobei α , β und $\bar{\beta}$ zwischen φ' und φ'' liegen. Mit $(d\epsilon_1' - d\epsilon_2') = d\gamma_{\max}$, $(d\epsilon_1'' - d\epsilon_2'') = d\bar{\gamma}_{\max}$, $\varphi' = \beta$ und $\varphi'' = \bar{\beta}$ beschreiben beispielsweise die in Bild 5.4 (e) dargestellten Kreise $1'2'$ und $1''2''$ die durch (5.20) und (5.21) gegebenen Verzerrungszustände beiderseits dS .

An einer *Unstetigkeitsfläche eines statisch zulässigen Spannungsfeldes* können mit den Bezeichnungen von Bild 5.3 (a) höchstens die Komponenten σ_x , σ_z und τ_{xz} des Spannungstensors σ_{ij} springen. Weist ein mit dem Spannungszustand verträglicher Verschiebungszustand an dS eine Unstetigkeit auf, so kann mit Drehung des Koordinatensystems $\{x, y, z\}$ um die Achse y erreicht werden, dass der Relativverschiebungsvektor $[d\underline{u}]$ in der Ebene $\{x, y\}$ liegt. In diesem Fall beschränkt sich der Sprung in σ_{ij} auf $\sigma_z = \sigma_3$, wie oben ausgeführt. Wenn der mit dem Spannungszustand verträgliche Verschiebungszustand stetig ist, besitzt das gemeinsame Hauptachsensystem der Tensoren σ_{ij} und $d\epsilon_{ij}$ im allgemeinen nicht mehr die in Bild 5.3 (a) angegebene Lage. Zudem kann es auf beiden Seiten von S verschieden orientiert sein, wegen der Stetigkeit von $d\underline{u}_i$ sind indessen auch die Ableitungen $d\underline{u}_{i,x}$ und

$du_{i,z}$ und damit die Verzerrungsinkremente de_x , de_z und dy_{xz} stetig. Somit gilt

$$[\sigma_{ij}][de_{ij}] = 0 \quad (5.22)$$

Für inkompressibles Material ist wegen der Inkompressibilitätsbedingung $de_{(1)} = 0$ mit de_x und de_z auch de_y stetig. Ferner kann durch Drehung des Koordinatensystems um die Achse y erreicht werden, dass auch $[dy_{yz}]$ verschwindet, womit nur noch dy_{xy} springen kann.

Mit Hilfe der Beziehung (5.22) wird in der Folge nachgewiesen, dass für isotrope Materialien, deren Fliessflächen im Hauptspannungsraum stark konvex sind, der Verzerrungstensor de_{ij} auf beiden Seiten einer Unstetigkeitsfläche des Spannungszustandes verschwindet. Ferner ergeben sich Folgerungen für schwach konvexe Fliessflächen und für Probleme ebener Fliesszustände.

Gemäss Bild 5.5 (a) werden die Spannungstensoren auf beiden Seiten von dS mit σ_{ij} und $\bar{\sigma}_{ij}$ bezeichnet und die zugehörigen Verzerrungstensoren mit de_{ij} und $d\bar{e}_{ij}$. Wenn das Material auf beiden Seiten von dS fliesst, entsprechen den Tensoren σ_{ij} und $\bar{\sigma}_{ij}$ Bildpunkte im sechsdimensionalen euklidischen Raum die auf der Fliessfläche liegen, und den Tensoren de_{ij} und $d\bar{e}_{ij}$ entsprechen Vektoren, die in diesen Punkten zur Fliessfläche orthogonal sind und nach aussen weisen. Die Hauptachsentransformation von σ_{ij} führt zu einem Vektor $\underline{\sigma}$ im Hauptspannungsraum, dessen Endpunkt P auf der Fliessfläche liegt. Diese Transformation überführt auch den Tensor de_{ij} in die Hauptform. Ihr entspricht im Hauptspannungsraum ein in P zur Fliessfläche orthogonaler und nach aussen weisender Vektor $d\underline{e}$. Entsprechend führt die Hauptachsentransformation von $\bar{\sigma}_{ij}$ zu einem Vektor $\bar{\underline{\sigma}}$ mit Endpunkt \bar{P} auf der Fliessfläche und zu einem in \bar{P} zur Fliessfläche orthogonalen $d\bar{\underline{e}}$. In der deviatorischen Ebene Bild 5.5 (b) bezeichnen die Vektoren \underline{s} und $d\underline{e}$ die deviatorischen Anteile von $\underline{\sigma}$ und $d\underline{e}$. Der Bogen $P_1 \bar{P} P_2$ stellt den Schnitt der Fliessfläche mit der der ersten Grundvarianten $\bar{\sigma}_{(1)}$ von $\bar{\sigma}_{ij}$ entsprechenden deviatorischen Ebene durch \bar{P} dar. Unterwirft man den Tensor $\bar{\sigma}_{ij}$ andererseits der Hauptachsentransformation für σ_{ij} , so entsteht der Tensor σ_{ij}^* , dessen Diagonalglieder als Komponenten eines Vektors $\underline{\sigma}^* = (\sigma_{11}^*, \sigma_{22}^*, \sigma_{33}^*)$ im Hauptspannungsraum aufgefasst werden können. Wegen der Invarianz von $\bar{\sigma}_{(1)}$ liegt der Endpunkt P^* von $\underline{\sigma}^*$ in derselben deviatorischen Ebene wie \bar{P} . Mit einer geeigneten Numerierung der Achsen kann zudem erreicht werden, dass der deviatorische Anteil \underline{s}^* von $\underline{\sigma}^*$ wie \underline{s} in dem durch die projizierten Achsen σ_1 und $-\sigma_2$ begrenzten Sektor liegt. Wegen der Extremaleigenschaft der Hauptwerte gilt

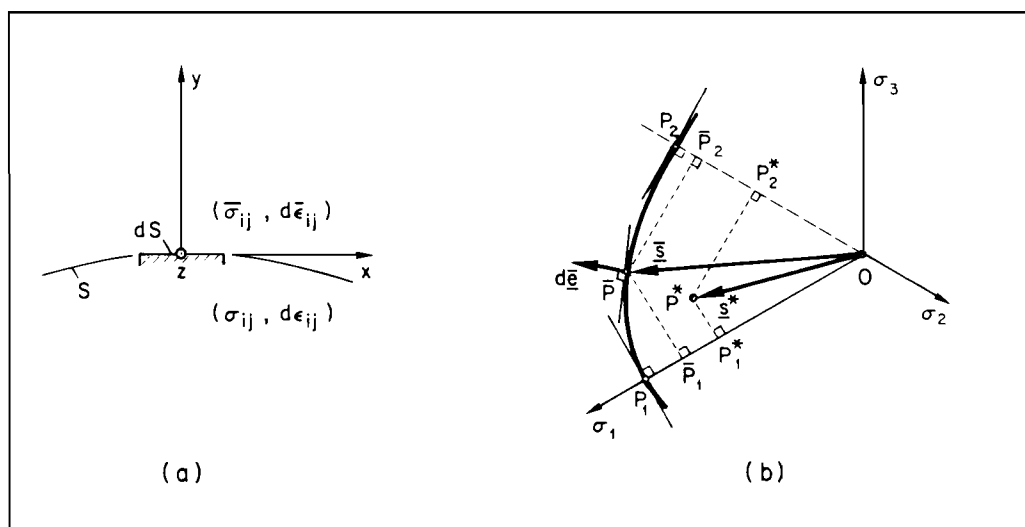


Bild 5.5 : Unstetigkeit eines zulässigen Spannungsfeldes

$$\bar{s}_1 \geq s_{11}^*, \quad \bar{s}_2 \leq s_{22}^* \quad , \quad (5.23)$$

d.h., der Endpunkt P^* kann nicht ausserhalb des Vierecks $O\bar{P}_1\bar{P}_2$ liegen, entspricht also einem aplastischen Spannungszustand. Da mit $[\sigma_{ij}] = (\bar{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij})$

$$-[\sigma_{ij}]d\epsilon_{ij} = (\sigma_{ij} - \bar{\sigma}_{ij})d\epsilon_{ij} = (\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^*) \cdot d\underline{\epsilon} \quad (5.24)$$

ist, folgt aus dem Prinzip der maximalen Dissipationsarbeit (3.17) die Beziehung

$$-[\sigma_{ij}]d\epsilon_{ij} \geq 0 \quad (5.25)$$

und durch Vertauschen von σ_{ij} mit $\bar{\sigma}_{ij}$ entsprechend

$$[\sigma_{ij}]d\bar{\epsilon}_{ij} \geq 0 \quad . \quad (5.26)$$

Mit (5.25), (5.26) und $[d\epsilon_{ij}] = (d\epsilon_{ij} - d\bar{\epsilon}_{ij})$ hat man

$$(\bar{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij})d\bar{\epsilon}_{ij} + (\sigma_{ij} - \bar{\sigma}_{ij})d\epsilon_{ij} = [\sigma_{ij}][d\epsilon_{ij}] \geq 0 \quad . \quad (5.27)$$

Für stark konvexe Fliessflächen im Hauptspannungsraum und nichtverschwindende $[\sigma_{ij}]$ wäre der Ausdruck linkerhand in (5.27) positiv, wenn $d\epsilon_{ij}$ und $d\bar{\epsilon}_{ij}$ nicht beide identisch verschwinden. Alsdann ergäbe sich mit $[\sigma_{ij}][d\epsilon_{ij}] > 0$ ein Widerspruch zu (5.22). Dieser Widerspruch hebt sich nur auf, wenn $d\epsilon_{ij} = d\bar{\epsilon}_{ij} = 0$ ist. Damit ist nachgewiesen, dass für isotrope Materialien, deren Fliessflächen im Hauptspannungsraum stark konvex sind, auf beiden Seiten einer Unstetigkeitsfläche eines zulässigen Spannungszustandes die damit verträglichen Verzerrungszustände verschwinden.

Führt die Hauptachsentransformation von σ_{ij} auch $\bar{\sigma}_{ij}$ in die Hauptform über, so fallen $\underline{\sigma}^*$ mit $\underline{\sigma}$, \underline{s}^* mit \underline{s} und P^* mit \bar{P} zusammen. Für Fliessflächen, die schwach konvexe Teilstücke enthalten, muss in diesem Fall kein Widerspruch zwischen (5.27) und (5.22) auftreten, sofern P und $P^* = \bar{P}$ auf einem geradlinigen Stück der Fliessfläche liegen. Damit ist gezeigt, dass für isotrope Materialien, deren Fliessflächen geradlinige Stücke enthalten, entweder auf beiden Seiten einer Unstetigkeitsfläche eines zulässigen Spannungszustandes die damit verträglichen Verzerrungszustände verschwinden oder die Spannungszustände beidseits der Unstetigkeitsfläche gleiche Hauptrichtungen haben und Bildpunkten entsprechen, die auf einem geradlinigen Stück der Fliessfläche liegen. Dabei ist zu beachten, dass wegen der Stetigkeit der Normalspannung σ_y an dS alle Sprünge $[\sigma_{ij}]$ ausser Betracht fallen, die einer rein hydrostatischen Spannungsänderung entsprechen. Aus dieser Feststellung folgt insbesondere, dass für inkompressible isotrope Materialien die eine stark konvexe Fliessfigur besitzen, der Verzerrungszustand auf beiden Seiten einer Unstetigkeitsfläche des Spannungszustandes verschwindet.

Bei einem ebenen Fliesszustand in der Ebene $\{x, y\}$ verschwinden die Dehnung $d\epsilon_z$ und die Schiebungen dy_{xz} und dy_{yz} . Die Achse $z \equiv 3$ ist Hauptachse der Tensoren σ_{ij} und $d\epsilon_{ij}$. Da die Hauptspannung σ_3 in der für ebenes Fliessen massgebenden allgemeinen Bedingung (3.63) nicht auftritt, muss sie nicht weiter beachtet werden. Wie in diesem Abschnitt gezeigt wurde, kann an einer Unstetigkeitsfläche des Verschiebungsfeldes für den Fall verträglicher Spannungsfelder ganz allgemein nur σ_3 springen. Daraus folgt für den ebenen Fliesszustand, dass Unstetigkeitslinien des Verschiebungsfeldes nicht mit solchen eines damit verträglichen Spannungsfeldes zusammenfallen können.

An dem in Bild 5.6 (a) dargestellten Element dS einer Unstetigkeitslinie S eines zulässigen Spannungsfeldes im ebenen Fliesszustand springt von den Spannungskomponenten σ_x , σ_y und τ_{xy} nur σ_x . Die Konstruktion der Spannungskreise in Bild 5.6 (b) zeigt, dass für

$[\sigma_x] \neq 0$ und $\tau_{xy} \neq 0$ das gemeinsame Hauptachsensystem der Tensoren σ_{ij} und $d\epsilon_{ij}$ auf der einen Seite von dS in jedem Fall von demjenigen der Tensoren $\bar{\sigma}_{ij}$ und $d\bar{\epsilon}_{ij}$ auf der anderen Seite von dS abweicht, so dass nach dem oben diskutierten allgemeinen Ergebnis $d\epsilon_{ij} = d\bar{\epsilon}_{ij} = 0$ ist. Für $\tau_{xy} = 0$ fallen die Hauptrichtungen auf beiden Seiten von dS mit den Richtungen x und y zusammen. Sie können so numeriert werden, dass mit $\sigma_1 = \sigma_y = \bar{\sigma}_y = \bar{\sigma}_1$ für den Sprung der zur x -Achse parallelen Spannungskomponente die Relationen

$$\sigma_2 < \sigma_1 = \bar{\sigma}_1 < \bar{\sigma}_2 \quad (5.28)$$

beziehungsweise

$$\bar{\sigma}_2 < \sigma_2 < \sigma_1 = \bar{\sigma}_1 \quad (\text{oder } \bar{\sigma}_2 > \sigma_2 > \sigma_1 = \bar{\sigma}_1) \quad (5.29)$$

bestehen, wie dies mit den Bildern 5.6 (c), (d) und (e) beziehungsweise mit den Bildern 5.6 (f), (g) und (h) illustriert ist. Für den Fall (5.28) liegen die Bildpunkte P und \bar{P} mit den Koordinaten (σ_1, σ_2) und $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2)$ in der Hauptspannungsebene $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ auf einer

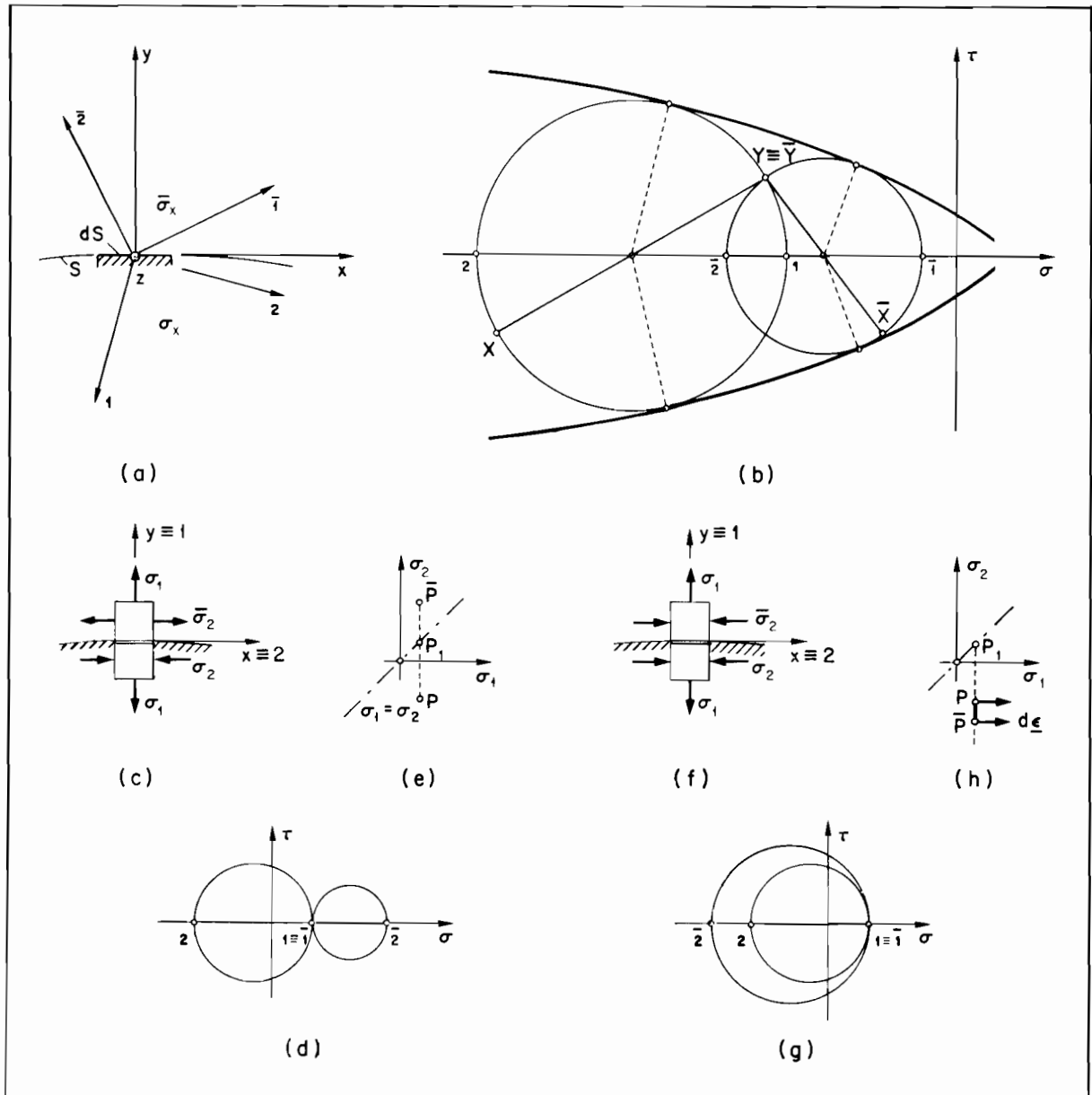


Bild 5.6 : Unstetigkeitslinie eines zulässigen Spannungsfeldes im ebenen Fließzustand

zur σ_2 -Achse parallelen Geraden P, P_1, \bar{P} auf verschiedenen Seiten der hydrostatischen Achse $\sigma_1 = \sigma_2$. Wegen der Symmetrie der Berandung $g_1(\sigma_1, \sigma_2) = 0$ des aplastischen Bereichs bezüglich der hydrostatischen Achse können sie nicht auf einem geradlinigen Stück dieser Berandung liegen, so dass wiederum $d\epsilon_{ij} = d\bar{\epsilon}_{ij} = 0$ folgt. Für den Fall (5.29) liegen P und \bar{P} auf einer Seite der hydrostatischen Achse. Falls das zur Achse σ_2 parallele Verbindungsstück $P\bar{P}$ in Bild 5.6 (h) Teil der Berandung $g_1(\sigma_1, \sigma_2) = 0$ des aplastischen Bereichs in der Hauptspannungsebene ist, kann das Material mit $d\epsilon = (d\epsilon_1, 0)$ beiderseits der Unstetigkeitslinie fließen. Insbesondere kann der Hauptwert $d\epsilon_1 \geq 0$ beim Durchgang durch die Unstetigkeitslinie springen. Diese Überlegungen lassen sich ohne weiteres auf den in (5.29) in Klammern angedeuteten Fall eines kompressiblen Materials übertragen, welches unter reinem hydrostatischem Druck zu fließen vermag. Hier kann der Hauptwert $d\epsilon_1 \leq 0$ beim Durchgang durch die Unstetigkeitslinie springen. Damit ist ganz allgemein nachgewiesen, dass im ebenen Fliezzustand auf beiden Seiten einer Unstetigkeitslinie S eines zulässigen Spannungsfeldes nur dann plastisches Fließen auftreten kann, wenn die Tangente an S auf beiden Seiten von S Hauptrichtung ist und die Bildpunkte der beiderseitigen Spannungszustände in der Hauptspannungsebene auf einem geradlinigen zu einer Achse parallelen Stück der Berandung des aplastischen Bereichs liegen.

5.5 Material mit nicht zugeordnetem Flie遢gesetz

Die Ausführungen über Traglastverfahren werden im folgenden mit einem Hinweis auf Materialien abgeschlossen, die einer bestimmten Art eines sogenannt nicht zugeordneten Flie遢gesetzes genügen.

Gemäss Bild 5.7 (a) werde der den Ursprung O enthaltende aplastische Bereich im sechs-dimensionalen Spannungsraum von der als konvex vorausgesetzten Flie遢fläche mit der Gleichung

$$\Phi(\sigma_{ij}) = 0 \quad (3.5)$$

umschlossen. Für Spannungszustände, deren Bildpunkte auf der Flie遢fläche liegen, und die man als Endpunkte von Vektoren $\underline{\sigma}$ betrachten kann, sollen sich plastische Verzerrungsinkremente einstellen können. Diese können als Komponenten von Vektoren $d\epsilon(\underline{\sigma})$ aufgefasst werden, welche eine feste, nur von $\underline{\sigma}$ abhängige Richtung haben sollen. Die elementare

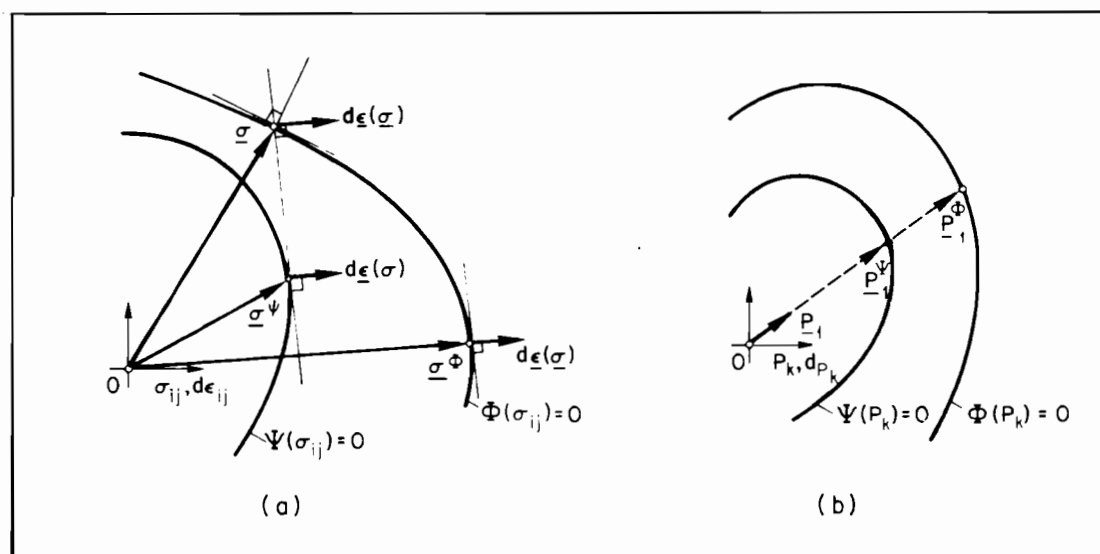


Bild 5.7: Material mit nicht zugeordnetem Flie遢gesetz

Dissipationsarbeit ist nach (3.3) gegeben durch

$$d\bar{A} = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} = \underline{\sigma} \cdot d\underline{\epsilon}(\underline{\sigma}) \geq 0, \quad [d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^P]. \quad (5.30)$$

Der Fliessfläche $\Phi(\sigma_{ij}) = 0$ soll eine einbeschriebene Fläche mit der Gleichung

$$\Psi(\sigma_{ij}) = 0 \quad (5.31)$$

zugeordnet werden können, die man als Einhüllende aller zu $d\underline{\epsilon}(\underline{\sigma})$ normaler Hyperebenen durch die Endpunkte der Vektoren $\underline{\sigma}$ betrachten kann und die einen konvexen Bereich umschliesst, der wegen (5.30) den Ursprung 0 enthält. Für beliebige Vektoren $\underline{\sigma}^\Psi$ in diesem Bereich gilt

$$(\underline{\sigma}^\Psi - \underline{\sigma}) \cdot d\underline{\epsilon}(\underline{\sigma}) \leq 0. \quad (5.32)$$

Die elementare Dissipationsarbeit $d\bar{A}$ für das betrachtete Material mit nicht zugeordnetem Fliessgesetz ist also nicht geringer als diejenige, welche sich unter dem gleichen Verzerrungszustand für ein Material Ψ ergibt, dessen aplastischer Bereich von der Fläche (5.31) umschlossen ist, und das der Theorie des plastischen Potentials genügt. Umgekehrt ist $d\bar{A}$ nicht grösser als die elementare Dissipationsarbeit, welche sich unter $d\underline{\epsilon}(\underline{\sigma})$ für ein Material Φ ergibt, dessen aplastischer Bereich von der Fliessfläche (3.5) umschlossen ist, und das der Theorie des plastischen Potentials genügt, d.h. es ist

$$(\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^\Phi) \cdot d\underline{\epsilon}(\underline{\sigma}) \leq 0. \quad (5.33)$$

Nach Abschnitt 4.3 entspricht einem starr-plastischen Körper aus Ψ -Material unter einer m -parametrischen Belastung ein fester konvexer aplastischer Bereich in R_m , dessen Oberfläche durch

$$\Psi(P_k) = 0 \quad (5.34)$$

gegeben sei. Die Inkremente dp_k der verallgemeinerten Verschiebungen bilden Vektoren $d\underline{p}$, deren Richtung mit der äusseren Normalen auf die Fläche (5.34) in den Endpunkten der zugehörigen Vektoren \underline{p} zusammenfällt. Ist derselbe Körper aus Φ -Material, so erhält man entsprechend einen aplastischen Bereich mit der Oberfläche

$$\Phi(P_k) = 0. \quad (5.35)$$

Infolge der aus (5.32) und (5.33) sich ergebenden Beziehung

$$(\underline{\sigma}^\Psi - \underline{\sigma}^\Phi) \cdot d\underline{\epsilon} \leq 0 \quad (5.36)$$

ist der aplastische Bereich des Ψ -Materials in demjenigen des Φ -Materials enthalten, wie dies mit Bild 5.7 (b) illustriert ist.

Mit Hilfe der Grenzwertsätze kann nun eine Aussage über alle Belastungen gemacht werden, die den Kollaps eines Körpers aus Material mit nicht zugeordnetem Fliessgesetz der betrachteten Art hervorrufen können. Zu diesem Zweck werden der Spannungszustand und der Verzerrungszustand des Körpers beim Kollaps mit den Vektoren \underline{S} und $d\underline{E}$ im Funktionenraum bezeichnet. Die Vektoren \underline{p} und $d\underline{p}$ in R_m entsprechen den zugehörigen verallgemeinerten Lasten und Verschiebungen. Der Verzerrungszustand $d\underline{E}$ entspricht einem nichttrivialen kinematisch zulässigen Verschiebungszustand $d\underline{U}$, der mit Rücksicht auf (5.32) für einen Körper aus Ψ -Material instabil ist. Andererseits entspricht \underline{S} einem statisch zulässigen, mit Rücksicht auf (5.33) für einen Körper aus Φ -Material stabilen Spannungszustand. Demgemäss entsprechen allen Kollapszuständen des Körpers aus Material mit nicht zugeordnetem Fliessgesetz Bildpunkte in R_m , die in dem durch die zugehörigen Flächen (5.34) und (5.35)

begrenzten Bereich liegen. Insbesondere folgt für den Fall einer einparametrischen Belastung $\underline{P} = \lambda \cdot \underline{P}_1$ mit $\underline{P}_1^\Psi = \lambda^\Psi \cdot \underline{P}_1$ und $\underline{P}_1^\Phi = \lambda^\Phi \cdot \underline{P}_1$ die Beziehung

$$\lambda^\Psi \leq \lambda \leq \lambda^\Phi, \quad (5.37)$$

wie dies in Bild 5.7 (b) angedeutet ist. Die Einschränkung (5.37) des Lastparameters λ wird nach RADENKOVIC (1961) benannt.

Im Unterschied zu Körpern, deren Material dem Prinzip der maximalen Dissipationsarbeit genügt, kann für Körper der hier betrachteten Art nicht gezeigt werden, dass die Bildpunkte aller Kollapsbelastungszustände auf einer Fläche in R_m liegen, sondern lediglich, dass sich alle diese Bildpunkte in dem durch die Flächen (5.34) und (5.35) begrenzten Bereich befinden. Die für Körper aus Material mit zugeordnetem Fließgesetz im Rahmen der Theorie 1. Ordnung bestehende Unabhängigkeit der Traglasten vom Belastungsprozess, von initialen Spannungs- und Verformungszuständen sowie von den elastischen Eigenschaften der Körper entfällt. Um zu einer über (5.37) hinausgehenden Aussage über die Traglasten zu gelangen, muss die Untersuchung starr-plastischer Systeme durch die aufwendigere Untersuchung der zugehörigen elastisch-plastischen Systeme ersetzt werden.

III. ANWENDUNGEN AUF STAHLBETON

Although concrete is a material of very limited deformability, indications are that the load carrying capacity of reinforced and prestressed structures will, in time, be computed on the basis of the limit theorems of plastic analysis and design.

DANIEL C. DRUCKER (1961)

6. ANNAHMEN

6.1 Uebersicht

Dieser Abschnitt enthält eine Zusammenstellung der hauptsächlichsten Annahmen, welche den Kapiteln 7, 8 und 9 zugrunde gelegt werden. In den beiden folgenden Abschnitten werden diese Annahmen durch verschiedene Bemerkungen ergänzt und zum Teil begründet.

Zum Zweck der Berechnung der Traglast von Bauteilen aus Stahlbeton werden für den Beton, für die Bewehrung und für den Verbund zwischen Beton und Bewehrung folgende Idealisierungen vorausgesetzt:

1. Der Beton sei ein homogenes und isotropes, ideal plastisches Material. Er folge einer durch die Bedingungen

$$|\tau| \leq c \cdot \sigma \cdot \tan \varphi \quad \left[\tan \varphi = \frac{3}{4}, \quad c = \frac{f_c}{2} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{f_c}{4} \right] \quad (6.1)$$

und

$$\sigma \leq f_t \quad [f_t \geq 0] \quad (6.2)$$

bestimmten Fließbedingung von Coulomb-Mohr und dem zugeordneten Fließgesetz, vgl. Bild 6.1. Die Werte f_c und f_t bezeichnen die einachsige Druck- und Zugfestigkeit.

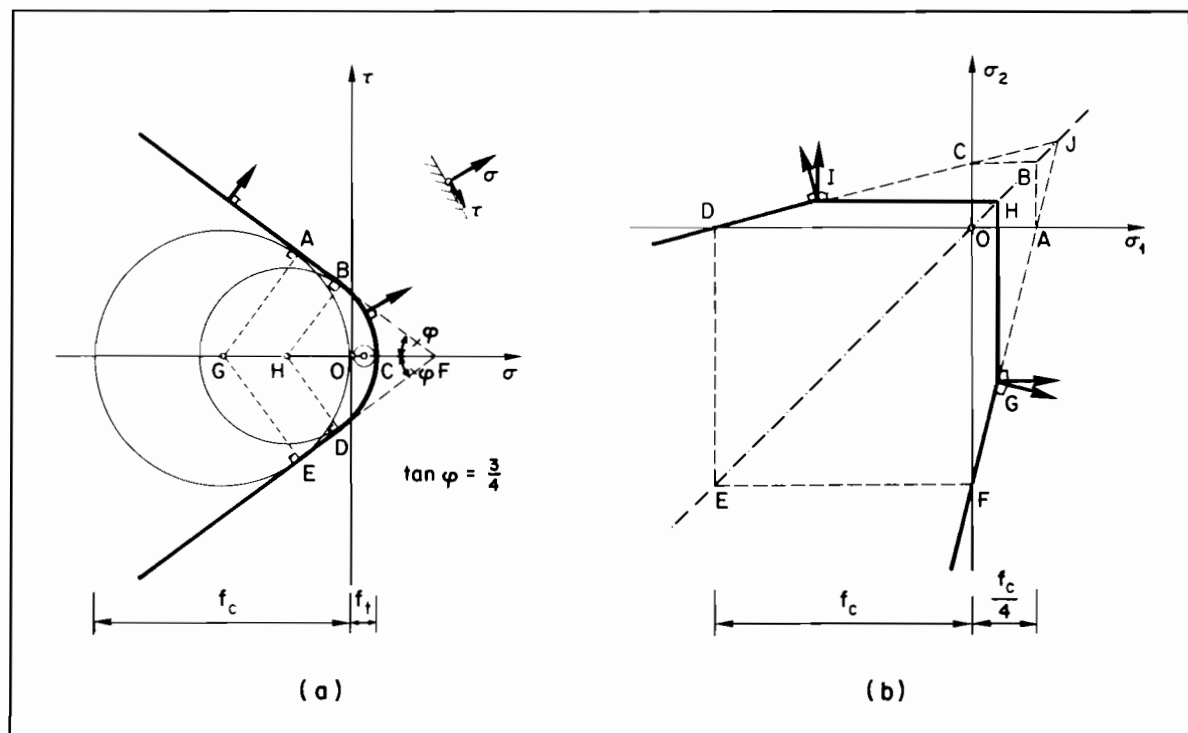


Bild 6.1: Fließbedingung für Beton

2. In den als ideal plastisch vorausgesetzten Bewehrungsstäben herrsche ein einachsiger Spannungszustand in Stabrichtung. Sofern nichts Abweichendes festgelegt wird seien die Fließgrenzen auf Zug und auf Druck betragsmässig gleich gross, d.h. es gelte

$$|\sigma| \leq f_y . \quad (6.3)$$

Die Verteilung der Bewehrung und ihre Verankerung sei derart, dass ihre Wirkung durch äquivalente mittlere Spannungen erfasst werden kann.

3. Zwischen dem Beton und der Bewehrung ergeben sich keine Relativverschiebungen, d.h., es sei ein starrer Verbund vorhanden.

6.2 Beton

Wohl kaum ein Baustoff besitzt ein von so vielen Faktoren beeinflusstes Verhalten wie Beton. Die Fachliteratur bietet hierzu eine verwirrende Fülle von Informationen.

Im Rahmen dieser Arbeit werden gemäss Abschnitt 3.1 zeitabhängige Aspekte des Materialverhaltens von der Betrachtung ausdrücklich ausgeschlossen. Das Langzeitverhalten des Betons, sein Kriechen und Schwinden werden nicht untersucht. Ferner sei daran erinnert, dass die gewählte Beschreibung des Materialverhaltens einer rein phänomenologischen Betrachtungsweise entspricht. Es wird lediglich versucht, die experimentell erhaltenen Ergebnisse zu beschreiben, nicht aber diese etwa im Sinne bruchmechanischer Theorien zu interpretieren.

Im normalen Erfahrungsbereich ist Beton unter Druckbeanspruchungen beschränkt verformungsfähig. Unter Zugbeanspruchungen verhält er sich spröde. Bild 6.2 (a) zeigt ein typisches Spannungs-Dehnungs-Diagramm von Beton unter einachsiger Beanspruchung. Auffallend ist die ausgeprägte Nichtlinearität der Kennlinie OB für Druckbeanspruchung und die nach dem Erreichen der Druckfestigkeit f_c sich ergebende, mit der Linie BC charakterisierte Entfestigung. Die starke Abhängigkeit des Verhaltens von der Belastungsgeschichte zeigt sich etwa in der Gestalt der Hysteresis-Schleife DEF infolge einer Entlastung mit anschliessender Wiederbelastung. Obwohl die Zugfestigkeit f_t nur rund einen Zehntel der Druckfestigkeit f_c beträgt, kann die Kennlinie OA des Zugversuchs nicht linear sein. Beim Zugversuch stellt sich ein abrupter Trennbruch entlang einer zur Beanspruchungsrichtung orthogonalen Rissfläche ein. Im Gegensatz dazu ergeben sich beim Versagen des Betons im Druckversuch mehrere Hauptrisse parallel zur Beanspruchungsrichtung. In beiden Fällen erfolgt die Rissbildung senkrecht zur Richtung der maximalen Dehnung.

In neuerer Zeit wurden sehr viele Untersuchungen über die Verformung und die Bruchfestigkeit von Beton unter zweiachsiger Beanspruchung durchgeführt. Einen Überblick enthalten z.B. die ausführlichen Arbeiten von LINK (1972, 1976) und von KUPFER (1973). In Bild 6.2 (b) sind Ergebnisse der bekannten Versuche von KUPFER (1969) an scheibenförmigen Prüfkörpern dargestellt. Durch die gewählte Art der Lasteintragung über Stahlbürsten resultierte bei diesen Versuchen eine sehr geringe Behinderung der Querdehnung der Prüfkörper. Damit konnte dieser ungewollte Einfluss weitgehend ausgeschaltet werden. Bei zweiachsiger Druckbeanspruchung ergibt sich im Vergleich zur einachsigen Druckbeanspruchung ein ansehnlicher Festigkeitszuwachs. Unter zweiachsiger Druck/Zug-Beanspruchung nimmt die Druckfestigkeit mit zunehmender Zugbeanspruchung annähernd linear ab, und bei zweiachsiger Zugbeanspruchung bleibt die Zugfestigkeit praktisch konstant. In allen Fällen stellt sich das Versagen durch Bildung von Rissflächen senkrecht zur Richtung der maximalen Dehnung ein, und es ergibt sich beim Bruch eine gewisse Volumenzunahme oder Dilatation. Unter zweiachsigem Druck nimmt mit zunehmendem Verhältnis σ_2/σ_1 [$0 \leq \sigma_2 < \sigma_1$] die senkrecht zur Beanspruchungsebene gerichtete maximale Dehnung ϵ_3 beim Bruch stark, die Bruchstau-

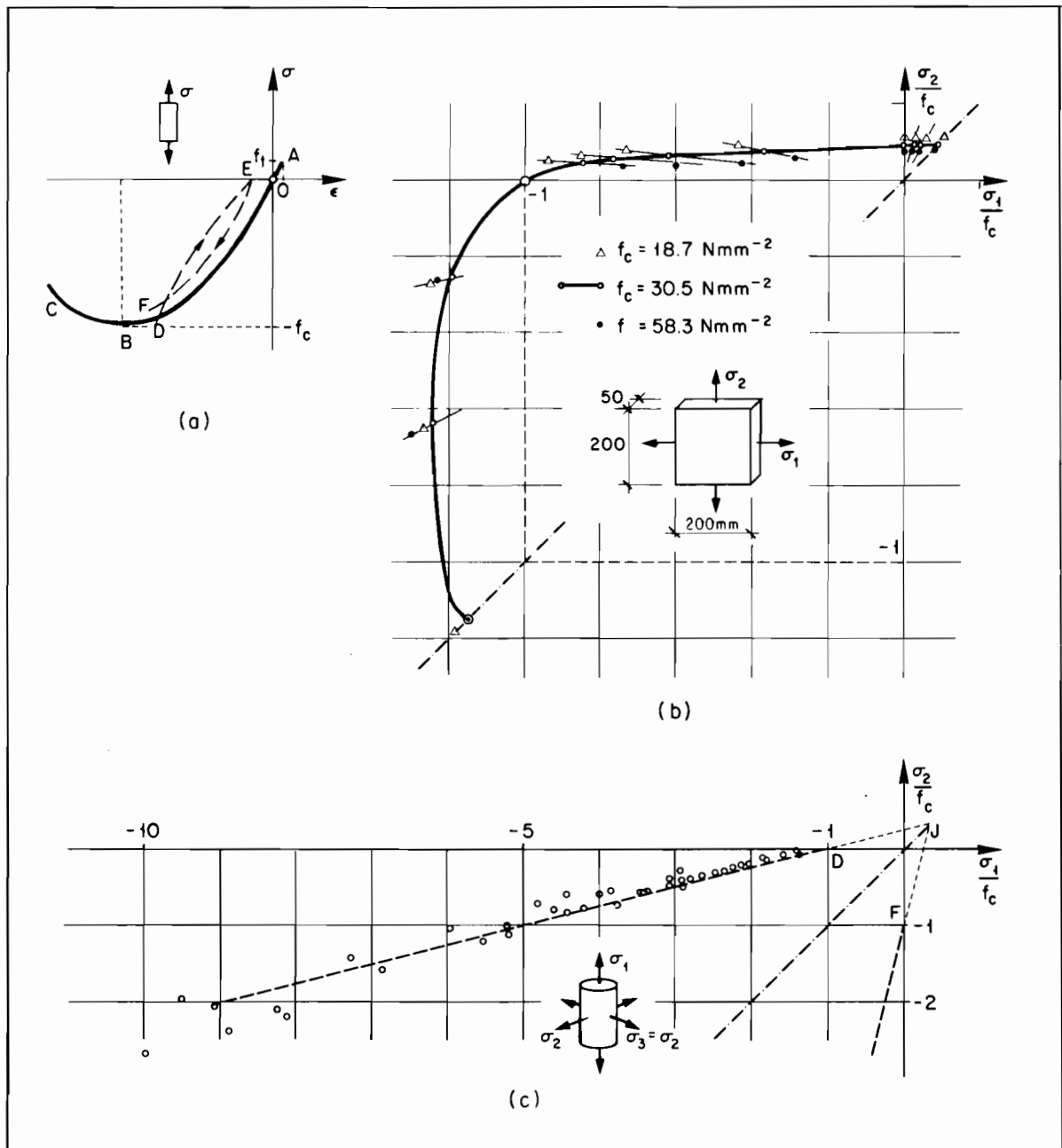


Bild 6.2: Versuche an Betonkörpern

chung ϵ_1 dagegen wesentlich schwächer zu. Unter zweiachsiger Druck/Zug-Beanspruchung nehmen mit abnehmendem Verhältnis σ_2/σ_1 [$\sigma_2 \geq 0 > \sigma_1$] sowohl die Dehnungen ϵ_2 als auch die Stauchungen ϵ_1 beim Bruch ab, und unter zweiachsigem Zug ist die maximale Dehnung ϵ_2 [$\sigma_2 > \sigma_1 \geq 0$] annähernd konstant.

Th. v. KÁRMÁN (1911) berichtete erstmals über Festigkeitsversuche an Marmor und Sandstein unter allseitigem Druck. Bei den von ihm an zylinderförmigen Proben durchgeführten Versuchen kann der Achsialdruck σ_1 unabhängig vom Manteldruck $\sigma_2 = \sigma_3$ verändert werden. Je nach der Grösse der Achsialspannung σ_1 spricht man von Druckversuchen ($\sigma_1 < \sigma_2 = \sigma_3$) oder Zugversuchen ($\sigma_2 = \sigma_3 < \sigma_1$). In der Boden- und Felsmechanik erlangten derartige sogenannte Triaxialversuche eine grosse Bedeutung. RICHART, BRANDTZAEG und BROWN (1928) und nach ihnen viele weitere Forscher berichteten über solche Versuche an Betonproben. Bild 6.2 (c) enthält eine einer Veröffentlichung von MENNE (1977) entnommene Zusammenstellung entsprechender Versuchsergebnisse. Für nicht allzu grosse hydrostatische Drücke,

etwa $\sigma_H \geq -2 \cdot f_c$, nimmt die achsiale Druckfestigkeit mit zunehmendem Manteldruck annähernd linear zu. Die mit dem Erreichen der achsialen Druckfestigkeit verbundene Stauchung in achsialer Richtung nimmt ebenfalls linear zu, jedoch etwa fünfmal rascher als die Druckfestigkeit, vgl. SARGIN (1971). Mit zunehmendem Manteldruck ergeben sich im Spannungs-Dehnungs-Diagramm immer schwächer gekrümmte Kennlinien, und der Effekt einer Entfestigung nach Ueberschreiten der Druckfestigkeit nimmt allmählich ab, d.h., die Kennlinien weisen immer ausgeprägter eine Art Fließsplateau auf.

Echte dreiachsiale Versuche, bei denen ein beliebiger räumlicher Spannungszustand erzeugt werden kann, werden erst in letzter Zeit durchgeführt. Die verwendeten Versuchsanlagen unterscheiden sich hauptsächlich dadurch, wie die Belastung auf die würfelförmigen Prüfkörper aufgebracht wird, ohne dass die Querdehnung der Prüfkörper wesentlich behindert wird. Bei der von LINSE (1978) beschriebenen Anlage wurde das bewährte Prinzip der Belastungsbürsten aus Stahl verwendet. SCHICKERT und WINKLER (1977) benutzten eine Anlage mit sogenannt schlaffen Belastungsflächen, bei der einzelne Belastungsstempel die Belastung von einem Druckkissen auf den Prüfkörper übertragen. Die im Gang befindlichen umfangreichen Untersuchungen über das Verformungs- und Bruchverhalten von Beton unter beliebigen dreiachsigen Beanspruchungszuständen mit einmaliger und wiederholter Lasteintragung und unter Dauerlast sollten die Formulierung einer allgemeinen Theorie des mechanischen Verhaltens von Beton ermöglichen, welche kontinuumsmechanische und bruchmechanische Betrachtungsweisen in sich vereint.

Bereits in der Einleitung zu dieser Arbeit wurde darauf hingewiesen, dass einer umfassenden Anwendung der Plastizitätstheorie im Stahlbetonbau hauptsächlich Einwände entgegenstehen, die das Verhalten des Betons betreffen. In der Tat kann mit plastischen Modellen nur ein Teil der oben aufgeführten Phänomene einigermaßen zutreffend erfasst werden. Von den verschiedenen, im Hinblick auf eine möglichst wirklichkeitsnahe Erfassung des Verformungs- und Bruchverhaltens von Beton vorgeschlagenen theoretischen Modellen liefern vorderhand spezielle elastisch-verfestigend plastische Modelle in Kombination mit angepassten Bruchbedingungen die besten Resultate, vgl. CHEN (1978). Freilich können einzelne Phänomene auch mit diesen verhältnismässig weit entwickelten Modellen nur unbefriedigend oder überhaupt nicht erfasst werden. Zudem ist ihre Anwendung auf praktische Probleme schwierig. Angesichts dieses Sachverhaltes und nach den in der Einleitung und im Abschnitt 4.1 angestellten Ueberlegungen zur Bedeutung von Traglastberechnungen stellt die drastische Idealisierung des Betons als ideal plastisches Material und die Anwendung von Traglastverfahren für die Bemessung von Bauteilen aus Stahlbeton trotz allen Einschränkungen eine echte Alternative zu der Verwendung raffinierterer Theorien einerseits und zur Benützung der vielen bisher vorgeschlagenen semi-empirischen Bemessungsverfahren andererseits dar. Die Wahl einer möglichst einfachen aber trotzdem ausreichend allgemeinen und aussagekräftigen Fließbedingung für Beton bildet dazu die notwendige Grundlage.

Die hier gewählte Fließbedingung von Coulomb-Mohr erfüllt die Forderung nach einer möglichst einfachen Formulierung. Dank der Linearität der auftretenden Beziehungen ist sie für die analytische Behandlung geeignet. Dagegen eignet sie sich für numerische Berechnungen weniger, da die Fließfläche Kanten und Ecken aufweist, die von Fall zu Fall eine separate Diskussion erfordern.

Im Hauptspannungsraum wird die durch die Gleitbruchbedingung (6.1) bestimmte irregulär hexagonale Pyramide mit drei durch die Trennbruchbedingung (6.2) bestimmten Ebenen gestützt. In Bild 6.1 (b) ist der Schnitt der resultierenden Fließfläche mit der Ebene $\sigma_3 = 0$ dargestellt. Als Grenze des aplastischen Bereichs im ebenen Spannungszustand ergibt sich das Sechseck DEFGHI. Im Vergleich mit der in Bild 6.2 (b) dargestellten Hüllkurve der Betonfestigkeit unter zweiachsiger Beanspruchung wird die Festigkeitserhöhung unter zweiachsiger Druckbeanspruchung vernachlässigt. Dagegen werden die Verhältnisse im Bereich zweiachsiger Druck/Zug-Beanspruchung und unter zweiachsigem Zug recht zutreffend erfasst.

Die Wahl von $\tan\varphi = 3/4$ scheint für nicht allzu grosse hydrostatische Drücke ausreichend begründet. Die in Bild 6.2 (c) eingetragenen Geraden JD und JF entsprechen jenen in Bild 6.1 (b). Es ergibt sich eine recht gute Uebereinstimmung mit den aus Triaxialversuchen ermittelten Festigkeitswerten. Es ist in diesem Zusammenhang bemerkenswert, dass MDERSCH (1912) für die Druckfestigkeit des Kernbetons von umschnürten Säulen eine lineare Funktion des durch die Umschnürungsbewehrung ausgeübten Manteldruckes ansetzte. Er stützte seine Ueberlegungen über die Wirkung einer Umschnürungsbewehrung namentlich auf die 1911 veröffentlichten v. Kármánschen Versuche unter allseitigem Druck. Er erkannte, dass die Kennlinien der v. Kármánschen Versuche im Spannungs-Dehnungs-Diagramm gleichartig verlaufen wie jene von Versuchen an umschnürten Säulen. Für die ihm zur Verfügung stehenden Versuchsergebnisse setzte er mit den Bezeichnungen von Bild 6.2 (c) die Geradengleichung $\sigma_1 = -f_c + a \cdot \sigma_2$ an, wobei er den Parameter a als von der Betonzusammensetzung abhängig betrachtete. Mit den Beziehungen (3.53), (3.54) und (3.55) folgt aus der Annahme $\tan\varphi = \frac{3}{4}$ der Wert $a = 1/\zeta = 4$. Damit ergibt sich eine befriedigende Uebereinstimmung mit den von Mörsch betrachteten Säulenversuchen.

Die im Abschnitt 6.1 getroffene Voraussetzung der Isotropie bedeutet, dass allfällige durch die Herstellung des Betons bedingte Anisotropien nicht beachtet werden. Davon zu unterscheiden ist eine durch die Beanspruchung bedingte Anisotropie. Eine solche ist im allgemeinen bei der Behandlung von Beton als elastisch-plastisches Kontinuum zu berücksichtigen, wenn der fortschreitenden Rissbildung angemessen Rechnung getragen werden soll. Dies kann dadurch erfolgen, dass an den - bei einer Kontinuumsbetrachtung "unendlich benachbarten" - einmal entstandenen Rissflächen als Normalspannungen nur Druckspannungen zugelassen werden, und dass die Uebertragung von Schubspannungen über die "unendlich schmalen" Risse im Vergleich zu ungerissenem Beton auf geeignete Art modifiziert wird. Allerdings sind die Zusammenhänge zwischen den an Rissen auftretenden Verschiebungen und den zugehörigen, über die Risse übertragenen Kräften erst unvollständig erforscht. Dementsprechend steht die Formulierung allgemeiner Beziehungen für das Verformungsverhalten des gerissenen Kontinuums noch aus. Meistens wird vorderhand die Möglichkeit der Uebertragung von Schubspannungen an Rissflächen irgendwie beschränkt oder überhaupt ausgeschlossen, vgl. zum Beispiel die Arbeiten von SCHAEFER, LINK und MEHLHORN (1975) oder von CHEN (1978). Einen zusammenfassenden Ueberblick über den heutigen Stand der Forschung erarbeitete WALRAVEN (1978).

Wirkliche Risse sind nicht "unendlich benachbart" und "unendlich schmal". Sie haben einen endlichen Abstand und eine endliche Breite. Mit dem Öffnen von Rissen entstehen sukzessive neue Tragstrukturen aus noch ungerissenen, durch Rissflächen begrenzten Teilkörpern, wie dies mit Bild 6.3 (a) angedeutet ist. Die Teilkörper stehen im allgemeinen

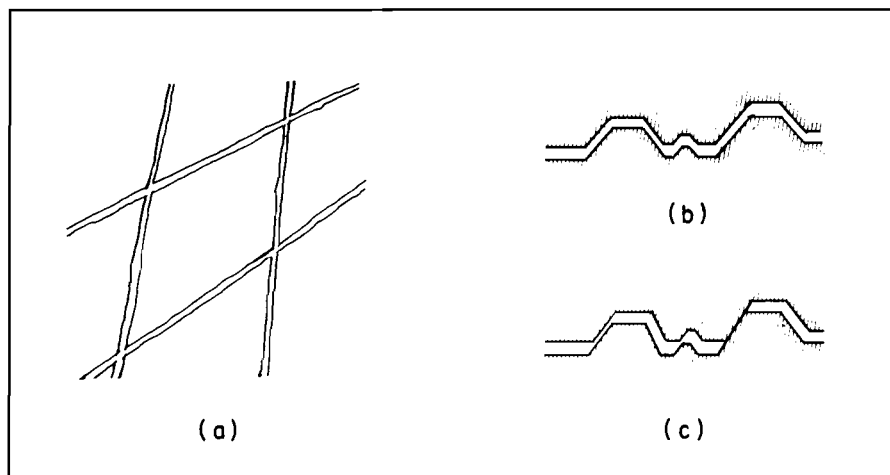


Bild 6.3: Rissbildung und Verschiebungen an Rissflächen

mit ihren Nachbarn entlang bestimmten Stücken der verzahnten Rissflächen in kraftschlüssigem Kontakt. Unter einer wachsenden Belastung kann die Kraftübertragung über die Risse hinweg zu neuen Rissen Anlass geben und damit zu einer weiteren Kräfteumlagerung führen. Es ist anzunehmen, dass die Kräfteübertragung in Rissen im allgemeinen von der ganzen dem betrachteten Zustand vorangegangenen Verformungsgeschichte abhängig ist. Diese Vorstellung kann man unter Zuhilfenahme eines einfachen Zahnmodells der unregelmässigen Rissfläche gemäss Bild 6.3 (b) verständlich machen. Wie man sieht, können gewisse Verschiebungen ohne Kraftaufwand erfolgen, da sie nicht zu einem neuerlichen Kontakt der Rissufer führen. In anderen Fällen, etwa bei der im Bild 6.3 (c) dargestellten Situation, ergibt sich nach einer bestimmten Verschiebung stückweise ein neuer Kontakt der Rissufer. Gewisse zusätzliche Verschiebungen können dann nur noch unter Kraftaufwand erfolgen. Unter Umständen werden dabei mit lokalen Brüchen die Rissufer allmählich zerstört, und der Widerstand gegen eine weitere Verschiebung nimmt entsprechend ab.

Die hier angestellten Überlegungen geben Anlass zu einigen weiteren Bemerkungen über den Einfluss der Rissbildung und die damit zusammenhängende Frage der Berücksichtigung der Betonzugfestigkeit. Betrachtet werde ein starr-plastisches Tragsystem, das den Annahmen von Abschnitt 6.1 genügt. Unterwirft man das System einer einparametrischen Belastung, so resultieren in einem Last-Verschiebungs-Diagramm gemäss Bild 6.4 (a) etwa die Kennlinien DDE und OFG, je nachdem, ob die Betonzugfestigkeit berücksichtigt oder vernachlässigt wird. Die Parameter λ und δ stehen für die verallgemeinerte Belastung und die zugehörige verallgemeinerte Verschiebung im Sinne von Abschnitt 4.3. Für eine allgemeine mehrparametrische Belastung ergeben sich etwa die mit Bild 6.4 (b) charakterisierten aplastischen Bereiche ABCE und ABDA. Da eine Verminderung der Fließgrenze nicht zu einer Erhöhung der Traglast führen kann, ist der aplastische Bereich ABDA des Systems ohne Zugfestigkeit im aplastischen Bereich ABCE des Systems mit Zugfestigkeit enthalten. Möglicherweise ergeben sich für gewisse Belastungen dieselben Traglasten. Dies ist mit der beiden aplastischen Bereichen gemeinsamen Linie AB angedeutet. Im allgemeinen führt die Vernachlässigung der Betonzugfestigkeit jedoch zu einer Verminderung der Traglast.

In Wirklichkeit werden sich je nach Belastungsgeschichte mit der fortschreitenden Rissbildung andere Tragstrukturen von durch Rissflächen begrenzten Betonkörpern ausbilden.

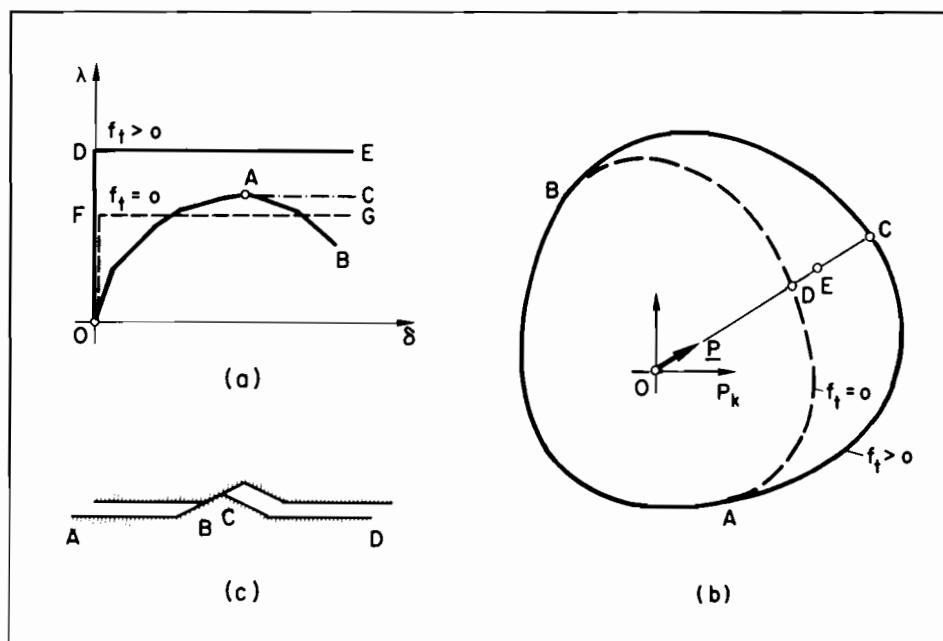


Bild 6.4: Einfluss der Betonzugfestigkeit und der Rissbildung

Man erwartet, dass die mit dem Reißen verbundene Entfestigung bewirkt, dass die Traglasten des Systems mit Zugfestigkeit im allgemeinen nicht erreicht werden können, und man vermutet einen deutlichen Einfluss der Belastungsgeschichte auf die in Versuchen tatsächlich erreichbaren Höchstlasten. Im Bild 6.4 (a) ergebe sich beispielsweise für die oben betrachtete einparametrische Belastung die Kennlinie OAB. Es ist zu beachten, dass der Verlauf dieser Linie, im Unterschied zu den rechnerischen Werten für die Traglasten, von initialen Spannungs- und Verformungszuständen, d.h. von der bisherigen Belastungsgeschichte nicht unabhängig ist.

Nimmt man an, man kenne die Tragstruktur beim Erreichen der Höchstlast in Punkt A von Bild 6.4 (a), so kann man zum Vergleich mit den starr-plastischen Systemen mit und ohne Zugfestigkeit ein drittes Tragsystem definieren, das kurz als Risskörpersystem bezeichnet werden soll. Das Risskörpersystem besteht aus noch ungerissenen Betonkörpern, die entlang Teilstücken der sie trennenden Rissflächen miteinander in Kontakt stehen, wie dies schematisch mit Bild 6.4 (c) dargestellt ist. Genügen die ungerissenen Betonkörper den Annahmen von Abschnitt 6.1, so folgt, dass unabhängig von den für die Kraftübertragung in den Rissflächen geltenden Bedingungen der Kollaps des Risskörpersystems unter Belastungen eintreten muss, die bei sonst gleichen Bedingungen zum Kollaps des zugehörigen Systems mit Zugfestigkeit führen. Können die für die Rissflächen geltenden Bedingungen durch Angabe von speziellen Fliessbedingungen erfasst werden und gilt auch dort das zugeordnete Fliessgesetz, so kann der aplastische Bereich des Risskörpersystems bestimmt werden. Er ist in demjenigen des Systems mit Zugfestigkeit enthalten. Im Bild 6.4 (a) erhält man in diesem Fall die Kennlinie AC und im Bild 6.4 (b) auf dem der betrachteten einparametrischen Belastung $\lambda \cdot P$ entsprechenden Strahl ODC den Punkt E. Für den Fall einer von der betrachteten, der Belastung $\lambda \cdot P$ vorhergehenden Belastungsgeschichte abweichenden Vorgeschichte ergäbe sich im allgemeinen ein anderes Risskörpersystem mit einem anderen aplastischen Bereich. Der Punkt E wäre in diesem Bereich entweder enthalten oder nicht enthalten, d.h., es ergäbe sich je nachdem eine grössere oder eine kleinere Höchstlast. Können schliesslich nur die Bedingungen angegeben werden, unter welchen sich entlang den Rissflächen ein Bruch einstellt, ist jedoch das Prinzip der maximalen Dissipationsarbeit nicht erfüllt, so kann man gemäss Abschnitt 5.5 die Bruchbedingungen der Rissflächen als deren Fliessbedingungen interpretieren und den aplastischen Bereich des Risskörpersystems unter der Annahme bestimmen, das zugeordnete Fliessgesetz gelte. Nach dem Theorem von Radenkovic, (5.37), entsprechen allen Belastungen, die zum Kollaps führen, Bildpunkte innerhalb dieses Bereichs.

Die für das Risskörpersystem gemachten Aussagen können lediglich dazu dienen, den Einfluss der Makrorissbildung qualitativ zu beschreiben. Für die Ermittlung der tatsächlich erreichbaren Höchstlasten sind sie nicht direkt geeignet, da die Kenntnis der Tragstruktur und der entlang den Rissflächen beim Erreichen der Höchstlast geltenden Bedingungen die Betrachtung der vorangegangenen Belastungsgeschichte voraussetzt. Ferner ist zu beachten, dass Beton nur als makroskopisch homogen bezeichnet werden kann. Mit der Annahme, der Beton sei homogen, beschränkt man sich auf Aussagen über Betonkörper, deren Abmessungen den Durchmesser des Grösstkorns des verwendeten Zuschlagstoffs um ein Mehrfaches übertreffen. Diese Einschränkung gilt insbesondere für die Teilkörper des Risskörpersystems. Die sie trennenden Risse sind Makrorisse. Der Einfluss von Mikrorissen kann nur indirekt berücksichtigt werden, indem man die Fliessfläche für Beton auf geeignete Art schrumpfen lässt, d.h. eine bestimmte Entfestigung infolge Mikrorissbildung pauschal in Rechnung stellt.

Bei der praktischen Anwendung der mit den Annahmen von Abschnitt 6.1 begründeten starr-plastischen Theorie wird oft die Betonzugfestigkeit vernachlässigt. Die Ueberlegungen am Risszahnmodell und am Risskörpersystem lassen die Annahme $f_t = 0$ für bewehrten Beton als gerechtfertigt erscheinen, da die Aktivierung von Kräften in der Bewehrung bestimmte Verschiebungen erfordert, welche im allgemeinen mit dem Reißen des Betons und mit einer allmählichen Umlagerung der Kräfte verbunden sind. Für unbewehrten Beton wird dagegen die

Tragfähigkeit oft massgebend von der Betonzugfestigkeit beeinflusst, da die entlang den Rissflächen verlorene Zugfestigkeit nicht mehr durch Umlagerung auf Zugkräfte in der Bewehrung und Druckkräfte im Beton kompensiert werden kann. Das Versagen stellt sich bei sehr kleinen Verformungen durch Bildung eines Mechanismus von durch Rissflächen getrennten, nicht durch Bewehrung zusammengehaltenen Betonkörpern ein, der als Risskörpermechanismus bezeichnet werden kann. Die Anwendung der Annahmen von Abschnitt 6.1 kann in solchen Fällen bei Berücksichtigung der Betonzugfestigkeit zu realistischen Abschätzungen der Tragfähigkeit führen. Dies wird durch die Untersuchungen von CHEN und DRUCKER (1969) über die Tragfähigkeit von unbewehrten Betonblöcken unter konzentrierten Kräften eindrücklich bestätigt.

Wird die Betonzugfestigkeit vernachlässigt, d.h. $f_t = 0$ gesetzt, so verbleibt als einziger die Fließbedingung bestimmender Parameter der Wert f_c . Der Wert von f_c ist nun allerdings nicht einfach der in einachsigen Druckversuchen gemessenen Festigkeit gleichzusetzen. Vielmehr wird man in der Regel ein gegenüber dem einachsigen Druckfestigkeitswert um einen bestimmten Betrag reduziertes *Fließspannungsniveau* f_c in die Rechnung einführen, um eine befriedigende Übereinstimmung zwischen theoretischen Traglasten und experimentellen Höchstlasten zu erhalten. Rechnerisch wirkt sich dies gleich aus wie die Berücksichtigung einer gewissen isotropen Entfestigung des Betons, eines Schrumpfens seines aplastischen Bereichs.

Das einfache Konzept eines Fließspannungsniveaus oder einer *wirksamen Festigkeit* (engl.: effective strength) in Verbindung mit der Anwendung der Plastizitätstheorie wird in der Bodenmechanik seit langem benützt. Die Einfachheit des Konzeptes wird mit dem Nachteil erkaufte, dass das Fließspannungsniveau f_c im allgemeinen je nach Problemstellung aufgrund von Versuchen unterschiedlich festgelegt werden muss. In der Tat beinhaltet die Abminderung gegenüber dem einachsigen Druckfestigkeitswert sehr verschiedene Einflüsse. Ausser der Belastungsgeschichte und der aus der Makro- und Mikrorissbildung resultierenden Entfestigung wird implizit auch ein mögliches Abweichen vom angenommenen Prinzip der maximalen Dissipationsarbeit erfasst.

Die richtige Festlegung von f_c ist ein für die Anwendung der Traglastverfahren auf Stahlbeton grundlegendes Problem. Allerdings ist es nicht in allen Fällen so bedeutend, wie man auf den ersten Blick meinen könnte. Sofern die beim Kollaps im Beton dissipierte Arbeit im Verhältnis zur Gesamtdissipation in Beton und Bewehrung gering ist, wird das Problem weitgehend entschärft. Alsdann ist eine allenfalls zu vorsichtige Wahl des Fließspannungsniveaus f_c nur von unbedeutendem Einfluss auf die Traglast. Andererseits kann in solchen Fällen die extreme Annahme eines unendlich druckfesten Betons, $f_c \rightarrow \infty$, zu brauchbaren Näherungen führen. Diese Überlegungen treffen beispielsweise für schwach bewehrte Platten zu, die vorwiegend auf Biegung beansprucht werden.

Die Problematik der Festlegung von f_c zeigt sich darin, dass man mit einer zu vorsichtigen Wahl von f_c theoretische obere Grenzwerte der Traglast berechnen kann, die unter der in Versuchen tatsächlich erreichbaren Höchstlast liegen und mit einer zu unvorsichtigen Wahl von f_c theoretische untere Grenzwerte der Traglast, welche über der tatsächlich erreichbaren Höchstlast liegen. Die angestrebte weitere Ausdehnung der Anwendung von Traglastverfahren für die Bemessung im Stahlbetonbau erfordert deshalb in jedem Fall eine sorgfältige Interpretation von Versuchsergebnissen. Mit dieser Voraussetzung ermöglicht die Anwendung der Plastizitätstheorie eine sichere, einfache und dennoch ausreichend genaue Bemessung auf einer einheitlichen theoretischen Basis.

Für die Anwendung der kinematischen Methode werden im folgenden noch die Bedingungen erörtert, die sich aus der verwendeten speziellen Fließbedingung von Coulomb-Mohr und dem zugeordneten Fließgesetz für Verschiebungsfelder ergeben, welche Unstetigkeitsflächen aufweisen. Dazu werden die Bilder 5.3 und 6.1 betrachtet. Für die bei einer Rela-

tivverschiebung vom Betrag eins pro Flächeneinheit dissipierte Arbeit findet man mit Gl. (5.14) die Beziehung

$$\frac{dA}{dS} = \frac{f_c}{2} \cdot (1 - \sin \alpha) + f_t \cdot \frac{\sin \alpha - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad [\alpha \geq \varphi], \quad |[du]| = 1 \quad (6.4)$$

für beliebige φ . Für $\tan \varphi = 3/4$ beziehungsweise $\sin \varphi = 3/5$ gilt

$$\frac{dA}{dS} = \frac{f_c}{2} \cdot (1 - \sin \alpha) + \frac{f_t}{2} \cdot (5 \cdot \sin \alpha - 3) \quad [\sin \alpha \geq \frac{3}{5}] \quad |[du]| = 1 \quad (6.5)$$

Bei der Herleitung dieser Beziehungen wurde der Durchmesser $f_c - 2 \cdot \sin \varphi \cdot f_t / (1 - \sin \varphi)$ des Mohrschen Spannungskreises BCDB mit Zentrum H in Bild 6.1 (a) verwendet. Dieser Kreis entspricht den Bildpunkten G und I in Bild 6.1 (b). Für den Grenzfall $\alpha = \frac{\pi}{2}$ folgt aus (6.4) und (6.5) die Gleichung

$$\frac{dA}{dS} = f_t \quad [\alpha = \frac{\pi}{2}], \quad |[du]| = 1 \quad (6.6)$$

und bei Vernachlässigung der Betonzugfestigkeit ist

$$\frac{dA}{dS} = \frac{f_c}{2} \cdot (1 - \sin \alpha) \quad [\alpha \geq \varphi], \quad |[du]| = 1 \quad (6.7)$$

Die allgemeine Beziehung (6.4) wurde wohl erstmals von CHEN und DRUCKER (1969) angegeben.

Wirkliche Rissflächen dürfen nicht mit Unstetigkeitsflächen des Verschiebungsfeldes in dem als starr-plastisches Material idealisierten Beton verwechselt werden. Nur für den einen reinen Trennbruch entsprechenden Grenzfall $\alpha = \frac{\pi}{2}$ entspricht die Unstetigkeitsfläche einer Rissfläche. Für diesen Fall führte MUELLER (1976), (1978) den Begriff "Kollapsriss" ein. Müller vernachlässigte die Betonzugfestigkeit, d.h. er beschränkte sich gemäss (6.6) auf den Fall $\frac{dA}{dS} = f_t = 0$. Für die Untersuchung von Risskörpermechanismen unbewehrter Betonkörper ist diese Einschränkung fallen zu lassen.

Im ebenen Fliezzustand sind die Unstetigkeitsflächen des Verschiebungsfeldes zur verzerrungsfreien Richtung parallele Zylinderflächen. Ihre Spuren in der zur verzerrungsfreien Richtung orthogonalen Ebene sollen allgemein als *Fliesslinien* bezeichnet werden. Für den Sonderfall einer zur Fliesslinie orthogonalen Relativverschiebung, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, wird die Bezeichnung *Kollapsriss* verwendet. Alle anderen Fälle mit $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ sollen als *Gleitlinien* bezeichnet werden.

Schliesslich ist noch zu bemerken, dass dieselben Bezeichnungen auch für unstetige Verschiebungsfelder in Scheiben verwendet werden, in denen ein ebener Spannungszustand herrscht. Dabei ist zu beachten, dass der Winkel α zwischen Fliesslinie und Relativverschiebungsvektor nicht mehr der Bedingung $\alpha \geq \varphi = \arctan(3/4)$ genügen muss, sondern zwischen den Werten $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ liegen kann. Die pro Flächeneinheit dissipierte Arbeit folgt für $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \arctan(3/4)$ aus (6.7) und für $\arctan(3/4) \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ aus (6.4).

6.3 Bewehrung und Verbund

Zur Bewehrung des Betons werden schlaffe Stahlstäbe oder -netze und vorgespannte Drähte, Litzen oder Kabel verwendet, die im wesentlichen als Zugglieder wirken. Mit der Profilierung der Oberfläche der Stäbe oder Drähte und mit der Injektion von Spanngliedern bezweckt man einen ausreichend guten Verbund zwischen Beton und Bewehrung, so dass die Kraftübertragung zwischen Bewehrung und Beton mit möglichst geringem Schlupf erfolgt.

Zur Erörterung der Annahmen von Abschnitt 6.1 ist in der Folge der Einfachheit halber nur von Bewehrungsstäben die Rede. Die angestellten Ueberlegungen gelten jedoch sinngemäss auch für eine Bewehrung mit Drähten, Litzen oder Kabeln.

Mit der Annahme eines einachsigen Spannungszustandes in Stabrichtung wird vorausgesetzt, die Stabrichtung sei überall Hauptrichtung des Spannungszustandes, und die restlichen Spannungskomponenten seien gegenüber der Hauptspannung in Stabrichtung vernachlässigbar. Dies bedeutet, dass der Zusammenhang zwischen den einzelnen Fasern der Bewehrungsstäbe als gelöst betrachtet wird. Wie man leicht einsieht, ist diese Annahme umso besser gerechtfertigt, je kleiner der Durchmesser d der Bewehrung ist, d.h., je grösser ihre Oberfläche im Verhältnis zu ihrer Querschnittsfläche ist oder mit anderen Worten, je feiner die Bewehrung verteilt ist. Im Grenzfall besteht die Bewehrung aus kontinuierlich verteilten Einzelfasern, und ihre Wirkung kann durch äquivalente mittlere Spannungen erfasst werden. Die für den Fall $d \rightarrow 0$ mögliche Kraftübertragung zwischen Stahl und Beton ist mit Bild 6.5 (a) illustriert. Entlang einer nicht fliessenden, ideal plastischen Bewehrung können Verbundkräfte in Stabrichtung auftreten, und für den Fall gekrümmter Bewehrungsstäbe ergeben sich zusätzlich Umlenkkräfte senkrecht dazu. Es ist zu beachten, dass sich für $d \rightarrow 0$ jede beliebige, nur durch die Fliessgrenzen beschränkte Spannungsänderung in der Bewehrung mit endlichen Verbundspannungen auf einer unendlich kleinen Länge einstellen kann. Dies bedeutet insbesondere, dass die Bewehrung an ihrem Ende auf einer unendlich kleinen Länge voll verankert ist. Allgemein können an beliebigen Flächen Spannungssprünge im Beton und in der Bewehrung auftreten, die sich gegenseitig aufheben.

Für die Bewehrung wird ein ideal plastisches Verhalten vorausgesetzt. Für Traglastberechnungen ist die starr-ideal plastische Idealisierung mit den Kennlinien OAB und OCD in Bild 6.5 (b) ausreichend. Oft wird die Mitwirkung der Bewehrung auf Druck vernachlässigt, d.h. es wird mit der Kennlinie EOAB gerechnet. Zur einheitlichen Festlegung der Fliessgrenze f_y bei naturharten und bei kaltverformten Stählen wird in der Regel die sogenannte Streckgrenze verwendet, der Spannungswert, dem eine plastische Dehnung von 2‰ entspricht.

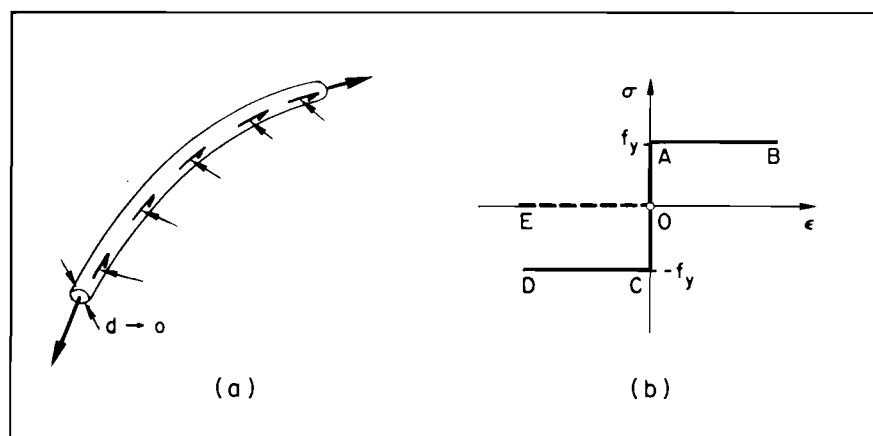


Bild 6.5: Vorausgesetzte Eigenschaften der Bewehrung

Aufgrund der Annahme 3 in Abschnitt 6.1 erfährt die im Beton eingebettete Bewehrung dieselben Verzerrungssinkremente wie der Beton. Es ergeben sich keine Relativverschiebungen zwischen Beton und Bewehrung. Die Bewehrung fliesst auf Zug oder Druck, je nachdem, ob ein positives oder negatives Dehnungssinkrement in ihrer Richtung auftritt. Die Spannung in einer starren Bewehrung stellt sich innerhalb der Fliessgrenzen so ein, dass die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt werden.

Wirkliche Bewehrungsstäbe haben einen endlichen Durchmesser. Einfache Abschätzungen zeigen, dass sie unter Umständen beträchtliche Querkräfte im Sinne einer DÜbelwirkung über Risse hinweg übertragen können. In den durch die Rissflächen getrennten Betonkörpern ergeben sich dabei örtlich hohe Pressungen unter den Bewehrungsstäben, und der Spannungszustand in der Bewehrung kann erheblich vom angenommenen einachsigen Spannungszustand abweichen. Ein weiterer Unterschied zwischen Annahmen und Wirklichkeit ergibt sich für die Verankerung der Bewehrung im Beton. Tatsächlich ist eine bestimmte endliche Verankerungslänge der Bewehrungsstäbe erforderlich, da nicht unendlich grosse Verbundspannungen auftreten können.

Die Vernachlässigung von Verdübelungskräften und die theoretische Möglichkeit einer unendlich kleinen Verankerungslänge sind Folgen der oben beschriebenen Ersatzvorstellung voneinander gelöster und kontinuierlich verteilter Einzelfasern anstelle von diskreten Bewehrungsstäben mit endlichem Durchmesser. Eine angemessene Berücksichtigung der hier vernachlässigten Effekte würde gegenüber der einfachen kontinuumsmechanischen Beschreibung eine sehr viel aufwendigere theoretische Behandlung voraussetzen. Im Hinblick auf die praktische Bemessung werden die erwähnten Nachteile deshalb in Kauf genommen. In vielen Fällen wird es sich ohnehin um für die Traglast sekundäre oder zumindest um in ihrer Wirkung recht gut abschätzbare Einflüsse handeln.

Die gewählte kontinuumsmechanische Betrachtungsweise setzt eine ausreichend feine Verteilung und eine gute Verankerung der Bewehrung voraus. Sie ist anwendbar auf Stahlbetonteile, deren Abmessungen den mittleren gegenseitigen Abstand der Bewehrungsstäbe um ein Mehrfaches übertreffen und bei denen das örtliche Abweichen vom angenommenen Spannungszustand bei der Verankerung der Bewehrungsstäbe als sekundäres Problem vernachlässigt werden kann. Alsdann kann die Wirkung der Bewehrung durch äquivalente mittlere Spannungen erfasst werden.

Es ergeben sich zwei unterschiedliche Betrachtungsweisen, je nachdem, ob die kontinuierlich verteilten Bewehrungsfasern vom Beton getrennt oder mit diesem zusammen behandelt werden. Im ersten Fall sind die zwischen Beton und Bewehrung wirkenden *Verbund-, Umlenk- und Verankerungskräfte als äussere Kräfte* auf den Beton aufzubringen. Dazu werden sie bei der Untersuchung des allenfalls geeignet unterteilten Beton-Kontinuums als Volumenkkräfte und als statische Randbedingungen berücksichtigt. Eine Unterteilung des Kontinuums ist nötig, wenn Spannungssprünge im Beton und in der Bewehrung untersucht werden, die sich gegenseitig aufheben. Im zweiten Fall betrachtet man den mit kontinuierlich verteilten Bewehrungsfasern durchsetzten Boden als *Stahlbeton-Kontinuum*. Unterwirft man dieses Kontinuum beliebigen verallgemeinerten Verformungssinkrementen $dq_k = dq_k^p$, so ergeben sich im Raum der zugehörigen verallgemeinerten Spannungen Q_k die mit Bild 6.6 illustrierten Verhältnisse. Für die Bewehrung und für den Beton allein erhält man die Stützebenen $E_s(dq_k)$ und $E_c(dq_k)$. Ihre Abstände $|\underline{OP}_s|$ und $|\underline{OP}_c|$ vom Ursprung entsprechen gemäss (4.15) bis auf den Faktor $1/|dq|$ den elementaren Dissipationsarbeiten in der Bewehrung und im Beton. Üblicherweise vernachlässigt man bei der Berechnung der elementaren Dissipationsarbeit im Beton die Verminderung des Betonvolumens durch die eingelegte Bewehrung, da die geometrischen Bewehrungsgehalte μ sehr klein sind, $\mu \ll 1$. Die Gesamtheiten der Stützebenen $E_s(dq_k)$ und $E_c(dq_k)$ umhüllen die aplastischen Bereiche der Bewehrung und des Betons mit den Oberflächen $\Phi_s(Q_k) = 0$ und $\Phi_c(Q_k) = 0$. Die elementare Dissipationsarbeit

$$\cdot dA = Q_{ck} dq_k + Q_{sk} dq_k \quad (6.8)$$

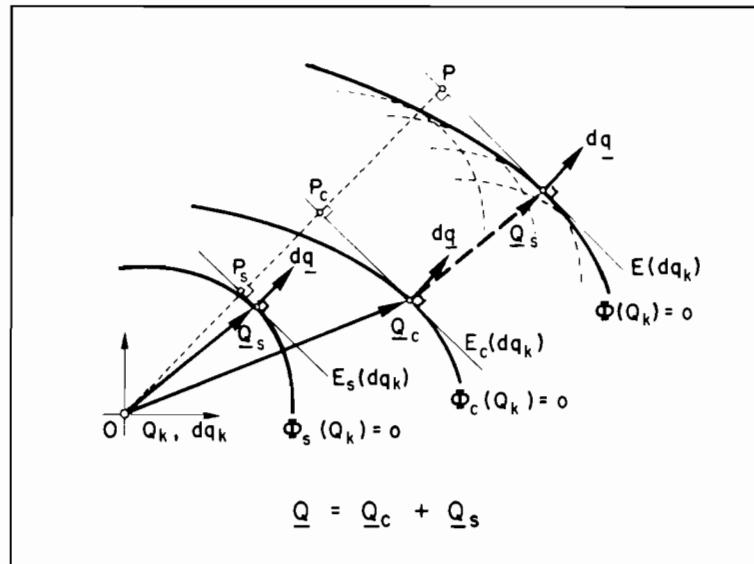


Bild 6.6: Aplastischer Bereich des Stahlbeton-Kontinuums

im Stahlbeton-Kontinuum setzt sich aus den Anteilen im Beton und in der Bewehrung zusammen. Der Abstand $|OP|$ der Stützebene $E(dq_k)$ vom Ursprung ist gleich der Summe der Abstände der Stützebenen $E_c(dq_k)$ und $E_s(dq_k)$. Die Fließfläche $\Phi(Q_k) = 0$ des Stahlbetons ist die Einhüllende aller Stützebenen $E(dq_k)$. Aus der Betrachtung von Bild 6.6 ergibt sich noch eine andere, bei der praktischen Anwendung oft nützliche geometrische Deutung der Fließfläche des Stahlbetons. Die mit dem Verformungszinkrement $d\bar{q}$ verträgliche verallgemeinerte Spannung \underline{Q} im Stahlbeton folgt aus der Addition der bezüglich der Fließflächen $\Phi_c(Q_k) = 0$ und $\Phi_s(Q_k) = 0$ verträglichen Anteile \underline{Q}_c und \underline{Q}_s , d.h.

$$\underline{Q} = \underline{Q}_c + \underline{Q}_s \quad . \quad (6.9)$$

Verschiebt man die Fließfläche $\Phi_s(Q_k) = 0$ der Bewehrung rein translatorisch derart, dass ihr Ursprung nicht ausserhalb der nicht verschobenen Fließfläche $\Phi_c(Q_k) = 0$ des Betons zu liegen kommt, so ergibt sich die Fließfläche $\Phi(Q_k) = 0$ des Stahlbetons als Umhüllende aller möglichen verschobenen Lagen von $\Phi_s(Q_k) = 0$. Natürlich können die Rollen von $\Phi_s(Q_k) = 0$ und $\Phi_c(Q_k) = 0$ vertauscht werden, d.h., die Fließfläche des Betons kann als verschobene und diejenige der Bewehrung als nicht verschobene Fließfläche betrachtet werden.

7. EBENE UND ACHSIALSYMMETRISCHE PROBLEME

7.1 Flie遥edingung im ebenen Spannungszustand

Als erstes Beispiel für die am Ende von Abschnitt 6.3 eingeführte Betrachtungsweise des Stahlbeton-Kontinuums werden im folgenden Flie遥edingungen für den Fall des ebenen Spannungszustandes entwickelt.

Betrachtet wird ein differentiellcs Scheibenelement gemäss Bild 7.1 (a) mit den Abmessungen dx und dy in der Scheibenebene $\{x,y\}$. Die Spannungszustände im Beton und in der Bewehrung werden als eben und über die Scheibendicke konstant vorausgesetzt. Die zur Scheibenebene normale z -Richtung ist Hauptrichtung des Spannungszustandes und die zugehörige Hauptspannung verschwindet,

$$\sigma_z = \sigma_3 = 0 . \quad (7.1)$$

Die zur Scheibenebene parallelen Spannungskomponenten σ_x , σ_y und τ_{xy} und die zugehörigen Verzerrungssinkremente $d\epsilon_x$, $d\epsilon_y$ und dy_{xy} sind von x und y allein abhängig.

Als verallgemeinerte Verformungen werden die Verzerrungssinkremente $d\epsilon_x$, $d\epsilon_y$ und dy_{xy} eingeführt. Wegen der Voraussetzung (7.1) ist

$$\sigma_z \cdot d\epsilon_z = \sigma_3 \cdot d\epsilon_3 = 0 , \quad (7.2)$$

d.h. $d\epsilon_z = d\epsilon_3$ muss nicht weiter beachtet werden. Immerhin sei bemerkt, dass sich nach (3.58), (3.57) und (3.59) für Spannungszustände im Beton, deren Bildpunkte mit den Punkten E und F in Bild 6.1 (b) zusammenfallen oder auf deren Verbindungsstrecke liegen, $d\epsilon_3 \geq 0$ ergibt. Dagegen ist in den Flie遥egimen FG, G und GH $d\epsilon_3 = 0$, mithin auch der Flie遥zustand eben.

Die verallgemeinerten Spannungen N_x , N_y und N_{xy} im Stahlbetonelement haben die Dimension einer gewöhnlichen Spannung, da die Elementdicke bequcmlichkeitshalber gleich eins gesetzt wurde. Nach (6.9) entsprechen allen Linearkombinationen

$$N_x = n_x + z_x, \quad N_y = n_y + z_y, \quad N_{xy} = n_{xy} + z_{xy} \quad (7.3)$$

von Spannungen $\{n_x, n_y, n_{xy}\}$ und $\{z_x, z_y, z_{xy}\}$, welche die Flie遥edingungen des Betons und der Bewehrung nicht verletzen, Punkte im aplastischen Bereich des Stahlbetonelementes.

Einer Bewehrung in der unter dem Winkel ϑ zur x -Achse geneigten Richtung η , Bild 7.1 (b), entspricht der äquivalente Spannungszustand

$$z_\eta = \mu_\eta \cdot \sigma . \quad (7.4)$$

μ_η und σ bezeichnen den Bewehrungsgehalt und die durch (6.3) beschränkte Spannung in den Bewehrungsstäben. Transformation des einachsigen Spannungszustandes (7.4) auf die rechtwinkligen Koordinaten x und y ergibt

$$z_x = z_\eta \cdot \cos^2 \vartheta, \quad z_y = z_\eta \cdot \sin^2 \vartheta, \quad z_{xy} = z_\eta \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta . \quad (7.5)$$

Diese Spannungen werden als Komponenten von Vektoren im Spannungsraum Bild 7.1 (c) aufgefasst.

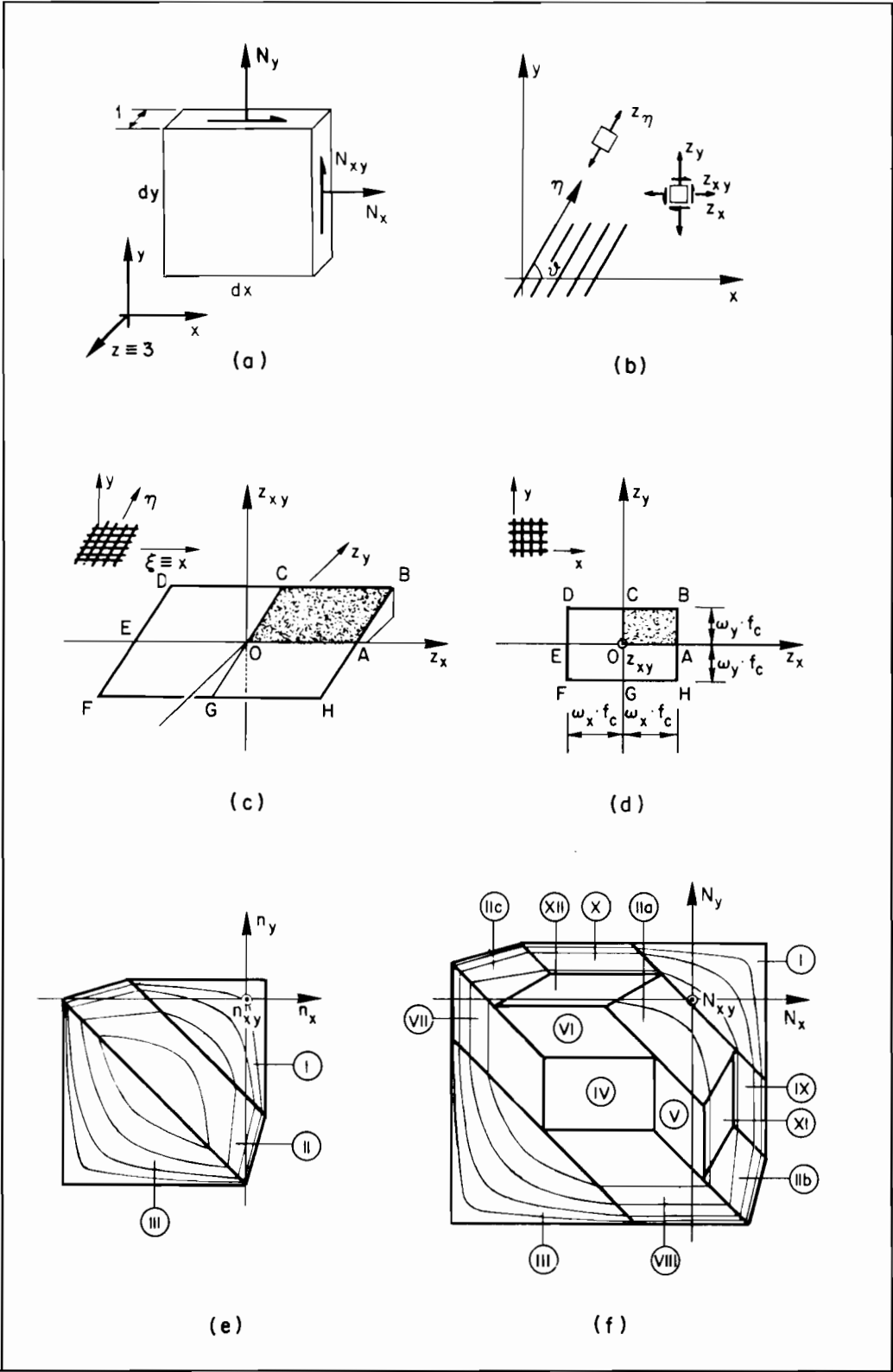


Bild 7.1: Fließflächen im ebenen Spannungszustand

Für das dargestellte schiefwinklige Bewehrungsnetz erhält man den parallelogrammförmigen aplastischen Bereich BDFH. Wird die Mitwirkung der Bewehrung auf Druck vernachlässigt, so wird der aplastische Bereich auf das Parallelogramm DABC reduziert. Für eine Bewehrung in drei Richtungen ist der aplastische Bereich ein Parallelepipet, und für noch mehr Bewehrungsrichtungen kann der aplastische Bereich sinngemäss durch Linearkombination aller möglicher Spannungszustände in den Bewehrungen konstruiert werden.

Bild 7.1 (e) zeigt die für den Beton angenommene Fliessfläche, vgl. Bild 6.1 (b). Sie besteht aus drei elliptischen Kegeln mit den Gleichungen

$$I : n_{xy}^2 - (f_t - n_x) \cdot (f_t - n_y) = 0, \quad (7.6)$$

$$II : n_{xy}^2 - [\zeta \cdot (f_c + n_y) - n_x] \cdot [\zeta \cdot (f_c + n_x) - n_y] \cdot \frac{1}{(1+\zeta)^2} = 0, \quad (7.7)$$

d.h. nach (3.57) und (6.1) mit $\zeta = 1/4$

$$II : n_{xy}^2 - \left[\frac{1}{4} \cdot (f_c + n_y) - n_x \right] \cdot \left[\frac{1}{4} \cdot (f_c + n_x) - n_y \right] \cdot \frac{16}{25} = 0 \quad (7.8)$$

und

$$III: n_{xy}^2 - (f_c + n_x) \cdot (f_c + n_y) = 0. \quad (7.9)$$

Die Kegelachsen liegen in der Geraden $n_x - n_y = n_{xy} = 0$ und die Schnittkurven der Kegel mit Ebenen $n_x + n_y = \text{konst.}$ sind Ellipsen mit Halbachsenverhältnis $\sqrt{2}:1$. Diese Eigenschaften sind Ausdruck der vorausgesetzten Isotropie der Fliessbedingung des Betons, vgl. SAYIR (1970).

Die Linearkombination der Fliessfläche Bild 7.1 (e) mit dem aplastischen Bereich Bild 7.1 (d) einer orthogonalen Bewehrung ergibt die in Bild 7.1 (f) dargestellte Fliessfläche des Stahlbetonelementes. Mit den Ausdrücken

$$\omega_x = \mu_x \cdot \frac{f_y}{f_c}, \quad \omega_y = \mu_y \cdot \frac{f_x}{f_c} \quad (7.10)$$

lauten die Gleichungen der den verschiedenen Fliessregimen entsprechenden Flächenstücke

$$I : N_{xy}^2 - (f_t + \omega_x \cdot f_c - N_x) \cdot (f_t + \omega_y \cdot f_c - N_y) = 0; \quad (7.11)$$

$$IIa : N_{xy}^2 - [\zeta \cdot (f_c + N_y - \omega_y \cdot f_c) + \omega_x \cdot f_c - N_x] \cdot [\zeta \cdot (f_c + N_x - \omega_x \cdot f_c) + \omega_y \cdot f_c - N_y] \cdot \frac{1}{(1+\zeta)^2} = 0, \quad (7.12)$$

$$IIb : N_{xy}^2 - [\zeta \cdot (f_c + N_y + \omega_y \cdot f_c) + \omega_x \cdot f_c - N_x] \cdot [\zeta \cdot (f_c + N_x - \omega_x \cdot f_c) - \omega_y \cdot f_c - N_y] \cdot \frac{1}{(1+\zeta)^2} = 0, \quad (7.13)$$

$$IIc : N_{xy}^2 - [\zeta \cdot (f_c + N_y - \omega_y \cdot f_c) - \omega_x \cdot f_c - N_x] \cdot [\zeta \cdot (f_c + N_x + \omega_x \cdot f_c) + \omega_y \cdot f_c - N_y] \cdot \frac{1}{(1+\zeta)^2} = 0, \quad (7.14)$$

d.h. mit $\zeta = 1/4$

$$IIa : N_{xy}^2 - [f_c \cdot (\frac{1}{4} - \frac{\omega_y}{4} + \omega_x) + \frac{N_y}{4} - N_x] \cdot [f_c \cdot (\frac{1}{4} - \frac{\omega_x}{4} + \omega_y) + \frac{N_x}{4} - N_y] \cdot \frac{16}{25} = 0, \quad (7.15)$$

$$IIb : N_{xy}^2 - [f_c \cdot (\frac{1}{4} + \frac{\omega_y}{4} + \omega_x) + \frac{N_y}{4} - N_x] \cdot [f_c \cdot (\frac{1}{4} - \frac{\omega_x}{4} - \omega_y) + \frac{N_x}{4} - N_y] \cdot \frac{16}{25} = 0, \quad (7.16)$$

$$IIc : N_{xy}^2 - [f_c \cdot (\frac{1}{4} - \frac{\omega_y}{4} - \omega_x) + \frac{N_y}{4} - N_x] \cdot [f_c \cdot (\frac{1}{4} + \frac{\omega_x}{4} + \omega_y) + \frac{N_x}{4} - N_y] \cdot \frac{16}{25} = 0; \quad (7.17)$$

$$III : N_{xy}^2 - [f_c \cdot (1 + \omega_x) + N_x] \cdot [f_c \cdot (1 + \omega_y) + N_y] = 0, \quad (7.18)$$

$$IV : N_{xy}^2 - \frac{f_c^2}{4} = 0, \quad (7.19)$$

$$V : N_{xy}^2 + [N_x + f_c \cdot (\frac{1}{2} - \omega_x)]^2 - \frac{f_c^2}{4} = 0, \quad (7.20)$$

$$VI : N_{xy}^2 + [N_y + f_c \cdot (\frac{1}{2} - \omega_y)]^2 - \frac{f_c^2}{4} = 0, \quad (7.21)$$

$$VII : N_{xy}^2 + [N_x + f_c \cdot (\frac{1}{2} + \omega_x)]^2 - \frac{f_c^2}{4} = 0, \quad (7.22)$$

$$VIII : N_{xy}^2 + [N_y + f_c \cdot (\frac{1}{2} + \omega_y)]^2 - \frac{f_c^2}{4} = 0; \quad (7.23)$$

$$IX : N_{xy}^2 + [N_x + f_c \cdot (\frac{1}{2} - \omega_x) - f_t \cdot \frac{1+\zeta}{2 \cdot \zeta}]^2 - \frac{1}{4} \cdot (f_c - f_t \cdot \frac{1-\zeta}{\zeta})^2 = 0, \quad (7.24)$$

$$X : N_{xy}^2 + [N_y + f_c \cdot (\frac{1}{2} - \omega_y) - f_t \cdot \frac{1+\zeta}{2 \cdot \zeta}]^2 - \frac{1}{4} \cdot (f_c - f_t \cdot \frac{1-\zeta}{\zeta})^2 = 0, \quad (7.25)$$

d.h. mit $\zeta = 1/4$

$$IX : N_{xy}^2 + [N_x + f_c \cdot (\frac{1}{2} - \omega_x) - \frac{5}{2} \cdot f_t]^2 - \frac{1}{4} \cdot (f_c - 3 \cdot f_t)^2 = 0. \quad (7.26)$$

$$X : N_{xy}^2 + [N_y + f_c \cdot (\frac{1}{2} - \omega_y) - \frac{5}{2} \cdot f_t]^2 - \frac{1}{4} \cdot (f_c - 3 \cdot f_t)^2 = 0; \quad (7.27)$$

$$XI : N_{xy}^2 - \frac{1}{4 \cdot \zeta} \cdot [(\omega_x \cdot f_c - N_x) \cdot (1 - \zeta) + \zeta \cdot f_c]^2 = 0, \quad (7.28)$$

$$XII : N_{xy}^2 - \frac{1}{4 \cdot \zeta} \cdot [(\omega_y \cdot f_c - N_y) \cdot (1 - \zeta) + \zeta \cdot f_c]^2 = 0, \quad (7.29)$$

d.h. mit $\zeta = 1/4$

$$XI : N_{xy}^2 - [(\omega_x \cdot f_c - N_x) \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot f_c]^2 = 0, \quad (7.30)$$

$$XII : N_{xy}^2 - [(\omega_y \cdot f_c - N_y) \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot f_c]^2 = 0. \quad (7.31)$$

Die Grenzen der Fließregime sind gegeben durch

$$I : N_x \leq f_t + \omega_x \cdot f_c, \quad N_y \leq f_t + \omega_y \cdot f_c, \quad N_x + N_y \geq f_c \cdot (\omega_x + \omega_y - 1) + f_t \cdot \frac{1+\zeta}{\zeta} \quad (7.32)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{IIa: } f_c \cdot (\omega_x + \omega_y - 1) &\leq N_x + N_y \leq f_c \cdot (\omega_x + \omega_y - 1) + f_t \cdot \frac{1+\zeta}{\zeta}, \\ (1+\zeta^2) \cdot [N_y - f_c \cdot (\omega_y - \frac{\zeta}{1+\zeta})] &\leq 2 \cdot \zeta \cdot [N_x - f_c \cdot (\omega_x - \frac{1}{1+\zeta})], \\ (1+\zeta^2) \cdot [N_x - f_c \cdot (\omega_x - \frac{\zeta}{1+\zeta})] &\leq 2 \cdot \zeta \cdot [N_y - f_c \cdot (\omega_y - \frac{1}{1+\zeta})], \end{aligned} \right\} \quad (7.33)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{IIb: } f_c \cdot (\omega_x - \omega_y - 1) &\leq N_x + N_y \leq f_c \cdot (\omega_x - \omega_y - 1) + f_t \cdot \frac{1+\zeta}{\zeta}, \\ (1+\zeta^2) \cdot [N_x - f_c \cdot (\omega_x - \frac{\zeta}{1+\zeta})] &\geq 2 \cdot \zeta \cdot [N_y + f_c \cdot (\omega_y + \frac{1}{1+\zeta})], \\ \zeta \cdot [N_y + f_c \cdot (\omega_y + 1)] &\geq N_x - \omega_x \cdot f_c, \end{aligned} \right\} \quad (7.34)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{IIc: } f_c \cdot (\omega_y - \omega_x - 1) &\leq N_x + N_y \leq f_c \cdot (\omega_y - \omega_x - 1) + f_t \cdot \frac{1+\zeta}{\zeta}, \\ (1+\zeta^2) \cdot [N_y - f_c \cdot (\omega_y - \frac{\zeta}{1+\zeta})] &\geq 2 \cdot \zeta \cdot [N_x + f_c \cdot (\omega_x + \frac{1}{1+\zeta})], \\ \zeta \cdot [N_x + f_c \cdot (\omega_x + 1)] &\geq N_y - \omega_y \cdot f_c, \end{aligned} \right\} \quad (7.35)$$

$$\text{III: } N_x \geq -f_c \cdot (1 + \omega_x), \quad N_y \geq -f_c \cdot (1 + \omega_y), \quad N_x + N_y \leq -f_c \cdot (1 + \omega_x + \omega_y), \quad (7.36)$$

$$\text{IV: } -f_c \cdot (\frac{1}{2} + \omega_x) \leq N_x \leq -f_c \cdot (\frac{1}{2} - \omega_x), \quad -f_c \cdot (\frac{1}{2} + \omega_y) \leq N_y \leq -f_c \cdot (\frac{1}{2} - \omega_y), \quad (7.37)$$

$$\text{V: } -f_c \cdot (\frac{1}{2} - \omega_x) \leq N_x \leq f_c \cdot (\omega_x - \frac{\zeta}{1+\zeta}), \quad f_c \cdot (\omega_x - \omega_y - 1) \leq N_x + N_y \leq f_c \cdot (\omega_x + \omega_y - 1), \quad (7.38)$$

$$\text{VI: } -f_c \cdot (\frac{1}{2} - \omega_y) \leq N_y \leq f_c \cdot (\omega_y - \frac{\zeta}{1+\zeta}), \quad f_c \cdot (\omega_y - \omega_x - 1) \leq N_x + N_y \leq f_c \cdot (\omega_x + \omega_y - 1), \quad (7.39)$$

$$\text{VII: } -f_c \cdot (1 + \omega_x) \leq N_x \leq -f_c \cdot (\frac{1}{2} + \omega_x), \quad -f_c \cdot (1 + \omega_x + \omega_y) \leq N_x + N_y \leq f_c \cdot (\omega_y - \omega_x - 1), \quad (7.40)$$

$$\text{VIII: } -f_c \cdot (1 + \omega_y) \leq N_y \leq -f_c \cdot (\frac{1}{2} + \omega_y), \quad -f_c \cdot (1 + \omega_x + \omega_y) \leq N_x + N_y \leq f_c \cdot (\omega_x - \omega_y - 1), \quad (7.41)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{IX: } f_c \cdot (\omega_x - \omega_y - 1) + f_t \cdot \frac{1+\zeta}{\zeta} &\leq N_x + N_y \leq f_c \cdot (\omega_x + \omega_y - 1) + f_t \cdot \frac{1+\zeta}{\zeta}, \\ f_c \cdot (\omega_x - \frac{\zeta}{1+\zeta}) + f_t \cdot \frac{2}{1+\zeta} &\leq N_x \leq f_c \cdot \omega_x + f_t, \end{aligned} \right\} \quad (7.42)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{X: } f_c \cdot (\omega_y - \omega_x - 1) + f_t \cdot \frac{1+\zeta}{\zeta} &\leq N_x + N_y \leq f_c \cdot (\omega_x + \omega_y - 1) + f_t \cdot \frac{1+\zeta}{\zeta}, \\ f_c \cdot (\omega_y - \frac{\zeta}{1+\zeta}) + f_t \cdot \frac{2}{1+\zeta} &\leq N_y \leq f_c \cdot \omega_y + f_t, \end{aligned} \right\} \quad (7.43)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{XI: } f_c \cdot (\omega_x - \frac{\zeta}{1+\zeta}) &\leq N_x \leq f_c \cdot (\omega_x - \frac{\zeta}{1+\zeta}) + f_t \cdot \frac{2}{1+\zeta} \\ 2 \cdot \zeta \cdot [N_y + f_c \cdot (\omega_y + \frac{1}{1+\zeta})] &\geq (1+\zeta^2) \cdot [N_x - f_c \cdot (\omega_x - \frac{\zeta}{1+\zeta})] \geq 2 \cdot \zeta \cdot [N_y - f_c \cdot (\omega_y - \frac{1}{1+\zeta})], \end{aligned} \right\} \quad (7.44)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{VII: } f_c \cdot (\omega_y - \frac{\zeta}{1+\zeta}) &\leq N_y \leq f_c \cdot (\omega_y - \frac{\zeta}{1+\zeta}) + f_t \cdot \frac{2}{1+\zeta}, \\ 2 \cdot \zeta \cdot [N_x + f_c \cdot (\omega_x + \frac{1}{1+\zeta})] &\geq (1+\zeta^2) \cdot [N_y - f_c \cdot (\omega_y - \frac{\zeta}{1+\zeta})] \geq 2 \cdot \zeta \cdot [N_x - f_c \cdot (\omega_x - \frac{1}{1+\zeta})]. \end{aligned} \right\} \quad (7.45)$$

Die $\{N_x, N_y\}$ -Ebene ist Symmetrieebene der Fliessfläche. Bild 7.1 (f) zeigt die obere Hälfte der Fliessfläche in Höhenliniendarstellung. Die Aequidistanz der Höhenlinien beträgt $0.1 \cdot f_c$. Beim Uebergang von der Fliessfläche des Betons, Bild 7.1 (e), zu derjenigen des Stahlbetons, Bild 7.1 (f), werden die Kegelflächen I und III einfach verschoben. Der Kegel II zerfällt in drei Teilstücke. Die neu entstehenden Flächenstücke IV, XI und XII sind eben, und die Flächen V-X sind kreiszylindrisch.

Die mit dem Faktor $\sqrt{2}$ in $|N_{xy}|$ -Richtung gestreckte Fliessfläche Bild 7.1 (f) besitzt keine Rotationssymmetrie bezüglich der Drehachse $N_x - N_y = N_{xy} = 0$, ist mithin nach der im Anschluss an (7.9) gemachten Bemerkung anisotrop. Die Hauptrichtungen des verallgemeinerten Verformungszustandes $\{de_x, de_y, dy_{xy}\}$ fallen mit denjenigen des Spannungszustandes $\{n_x, n_y, n_{xy}\}$ im Beton zusammen, im allgemeinen jedoch nicht mit jenen des verallgemeinerten Spannungszustandes $\{N_x, N_y, N_{xy}\}$ des Stahlbetonelementes. Als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass in der spannungsfreien Ebene $\{x, y\}$ ein spezielles Bezugssystem existiert, in welchem die Hauptachsen des verallgemeinerten Verformungszustandes und des verallgemeinerten Spannungszustandes zusammenfallen, gilt nach SAYIR (1970): Es gibt eine ebene Kurve auf der Fliessfläche im Raum $\{N_x, N_y, N_{xy} \cdot \sqrt{2}\}$, längs welcher alle Normalen zur Fliessfläche in der Kurvenebene liegen, und die Kurvenebene enthält die Achse $N_x - N_y = N_{xy} \cdot \sqrt{2} = 0$. Diese Bedingung ist für den Fall einer Bewehrung in x- und y-Richtung, d.h. für ein orthotropes Stahlbetonelement, offensichtlich für die Schnittkurve der Fliessfläche mit ihrer Symmetrieebene $\{N_x, N_y\}$ erfüllt.

In den Fliessregimen V-XII fliesst die Bewehrung in einer Richtung nicht. Es gilt entweder $de_x = 0$ oder $de_y = 0$. Im Fliessregime IV ist die Bewehrung in x- und in y-Richtung starr, $de_x = de_y = 0$. In den Fliessregimen I und IIa fliesst die gesamte Bewehrung auf Zug. In den Fliessregimen IIb und IIc fliesst die Bewehrung in einer Richtung auf Zug und in der anderen auf Druck. Im Fliessregime III fliesst die gesamte Bewehrung auf Druck. Vernachlässigt man den Einfluss der gedrückten Bewehrung, d.h. rechnet man mit dem aplastischen Bereich DABC in Bild 7.1 (d), so können alle Ableitungen ohne weiteres angepasst werden. Dazu sind in den Beziehungen (7.11) bis (7.45) lediglich die einer gestauchten Bewehrung entsprechenden Glieder $\omega_x \cdot f_c$ oder/und $\omega_y \cdot f_c$ zu unterdrücken. Die Zylinder V-X und die Ebenen XI und XII werden auf die Hälfte verkürzt, und das Rechteck IV wird auf einen Viertel reduziert.

Vernachlässigt man die Betonzugfestigkeit, $f_t = 0$, so verschwindet in der Fliessfläche des Betons in Bild 7.1 (e) das Regime II. In Bild 7.1 (f) verschwinden die Fliessregime IIa, IIb, IIc und die Regime IX-XII. Es verbleiben einzig die beiden Kegel I und III, die Ebene IV und die Kreiszylinder V-VIII.

Betrachtet man schiefwinklige Bewehrungsnetze gemäss Bild 7.1 (c), so bemerkt man zunächst, dass mit (7.5) für beliebige Bewehrungsrichtungen ϑ die Beziehung

$$z_{xy}^2 - z_x \cdot z_y = 0 \quad (7.46)$$

gilt. Der Vergleich mit (7.6) und (7.9) zeigt, dass der Vektor mit den Komponenten z_x , z_y und z_{xy} in jedem Fall zu einer Erzeugenden der beiden Kegel I und III parallel ist. Mithin werden diese Kegel beim Uebergang zu der Fliessfläche des Stahlbetonelementes immer nur rein translatorisch verschoben und zerfallen nicht wie der Kegel II in verschiedene Teilstücke. Die Kegelflächen werden durch elliptische Zylinderflächen und durch Ebenenstücke verbunden. Die Konstruktion dieser Flächen nach dem Prinzip (6.9) erfolgt gleich wie beim Uebergang von den Bildern 7.1 (d) und (e) zu (f). Es sei noch bemerkt, dass eine beliebige schiefwinklige Bewehrung für einen bestimmten festgehaltenen Spannungszustand

$\{z_x, z_y, z_{xy}\}$ durch eine fiktive *äquivalente orthogonale Bewehrung* in den Hauptspannungsrichtungen ersetzt werden kann. Dieses Vorgehen kann für die Fließregime I und III verwendet werden, da die Kegel I und III nur translatorisch verschoben werden, der Spannungszustand in der Bewehrung also konstant ist. Die Methode einer orthogonalen Ersatzbewehrung käme auch für die einzelnen Teilstücke des Fließregimes II in Frage. In jedem dieser Teilstücke ist der Spannungszustand in der Bewehrung konstant, weicht jedoch von dem in den anderen Teilstücken ab. Hingegen versagt die Methode bei den ebenen und zylindrischen Teilstücken der Fließfläche, da sich der Spannungszustand in der Bewehrung verändert. Hier kann die Methode lediglich als Näherung betrachtet werden.

Die Fließfläche Bild 7.1 (f) wurde bereits in einer früheren Arbeit des Verfassers (1978 b) diskutiert. In jener Arbeit wurde auch auf die von anderen Autoren unter eingeschränkteren Voraussetzungen behandelten Fließbedingungen hingewiesen. NIELSEN (1963) ermittelte die Fließfläche unter den Voraussetzungen $f_t = 0$ und $\omega = \omega_x = \omega_y$. Für geringe Bewehrungsgehalte, etwa $\omega < 0.1$, schlug er vor, mit der umschriebenen, aus den beiden Kegeln I und III allein bestehenden isotropen Fläche zu rechnen. In einer späteren Arbeit diskutierte NIELSEN (1971) die kinematischen Bedingungen für Scheiben, welche dieser umschriebenen isotropen Fließbedingung und dem zugeordneten Fließgesetz folgen. MARTI und THUERLIMANN (1977 a) diskutierten die Fließbedingung unter Zugrundelegung der Fließbedingung von Coulomb, d.h. mit $\zeta \cdot f_c = f_t$. MUELLER (1978) behandelte die Fließbedingung unter der Annahme $f_t = 0$ für beliebige Bewehrung und untersuchte die statischen und kinematischen Bedingungen in Scheiben für die verschiedenen Fließregime. Für orthogonal bewehrte Elemente wurde dieselbe Fließbedingung auch von CLYDE (1977) angegeben, mit dem Ziel, neuere Entwicklungen in der Theorie der Stahlbetonträger, wie die Fachwerkmodellvorstellung und die "skew bending theory" für torsionsbeanspruchte Balken, einander gegenüberzustellen. In theoretischer Übereinstimmung mit den Arbeiten von Müller und Clyde wurden von CLARK (1976) Formeln zur Bemessung schiefer oder orthogonaler Bewehrung für eine gegebene Beanspruchung durch Membrankräfte entwickelt.

Wie die Interpretation von Versuchen zeigt, wird die in diesem Abschnitt dargelegte Theorie für Verhältnisse, die jenen von Fließregime I entsprechen, gut bestätigt. Im folgenden wird lediglich ein Überblick über Arbeiten gegeben, die dies belegen. Die Arbeit von NIELSEN (1971) enthält eine ausführliche Diskussion von Versuchen an Stahlbetonscheiben. Insbesondere untersuchte Nielsen die Versuche von PETER (1964) an quadratischen Scheiben mit orthogonaler Bewehrung unter einachsiger Zugbeanspruchung. Dieselben Versuche wurden auch von BAUMANN (1972) kommentiert. Eine weitere Bestätigung ergibt sich aus der Interpretation von Versuchen an unterbewehrten Stahlbetonträgern mit dünnwandigem geschlossenem Querschnitt, die durch konstante Biege- und Torsionsmomente beansprucht werden. Das von LAMPERT (1970) beschriebene räumliche Fachwerkmodell führt für diesen Fall zu einer guten Übereinstimmung mit Versuchen. Die statische Fachwerkmodell-Lösung wurde durch MUELLER (1976, 1978) zur vollständigen Lösung im Sinne von Abschnitt 5.2 ergänzt. Er zeigte, dass der beim Fachwerkmodell angenommene Spannungszustand den Verhältnissen von Fließregime I entspricht und wies die Existenz von mit diesem statisch zulässigen und stabilen Spannungszustand verträglichen, nichttrivialen, kinematisch zulässigen Mechanismen nach.

Für die Beurteilung der Gültigkeit der für die weiteren Fließregime entwickelten Beziehungen ist man hauptsächlich auf die Interpretation von Schubversuchen an Stahlbetonträgern angewiesen, bei denen der Bruch durch das Versagen des Stegbetons eingeleitet wurde. Die Untersuchungen von BRAESTRUP (1974), NIELSEN et al. (1976) und von MUELLER (1978) zeigen, dass die Höchstlasten und die Bruchmechanismen bei solchen Versuchen mit einer plastischen Berechnung gut erfasst werden können. Auf die grundlegende Frage der richtigen Festlegung der wirksamen Betonfestigkeit f_c wurde bereits im Abschnitt 6.2

hingewiesen. Im nächsten Kapitel wird diese Frage im Zusammenhang mit der Anwendung der in diesem Kapitel entwickelten Theorie des ebenen Spannungszustandes auf Scheiben und aus Scheiben zusammengesetzte Bauteile erneut erörtert.

7.2 Ebener Spannungszustand und ebener Fliesszustand

Im letzten Abschnitt wurden Fliessbedingungen für ein differentielles Scheibenelement im ebenen Spannungszustand entwickelt. In diesem Abschnitt werden die unter der Voraussetzung eines ebenen Spannungszustandes möglichen Spannungs- und Verformungsfelder unter Rückführung auf das Problem des ebenen Fliesszustandes in einem Material, das einer Fliessbedingung von Mohr und dem zugeordneten Fliessgesetz folgt, allgemein diskutiert. Die im ebenen Spannungszustand für die angenommene Fliessbedingung für Beton geltenden Beziehungen folgen anschliessend als Sonderfall. Die Grundlagen für die folgende Darstellung sind namentlich in den Abschnitten 3.3, 4.2 und 5.4 enthalten.

Die Unbekannten in fliessenden Bereichen sind die drei Spannungskomponenten σ_x , σ_y und τ_{xy} , die zugehörigen Verzerrungssinkremente $d\epsilon_x$, $d\epsilon_y$ und $d\gamma_{xy}$, der im Fliessgesetz (3.8) auftretende skalare Faktor $\lambda \geq 0$ und die beiden Verschiebungssinkremente du_x und du_y . Zur Bestimmung dieser neun Grössen stehen zwei Gleichgewichtsbedingungen (4.11), die Fliessbedingung (3.5), drei Gleichungen (3.8) und drei kinematische Relationen (4.12) zur Verfügung. Sofern das Dehnungssinkrement $d\epsilon_z = d\epsilon_3$ in Richtung der Normalen auf die spannungsfreie Ebene und die zugehörige Veränderung der Scheibendicke ebenfalls bestimmt werden sollen, kann dies mit Hilfe je einer weiteren Gleichung (3.8) und (4.12) erfolgen. Man vergleiche in diesem Zusammenhang die Bemerkung zur Gleichung (7.2) im Abschnitt 7.1.

Im Abschnitt 3.3 wurde gezeigt, dass sich für den ebenen Fliesszustand jede Fliessbedingung für isotropes Material auf eine Bedingung

$$q = g(p) \quad (3.66)$$

in der Ebene mit den Koordinaten

$$p = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_i + \sigma_k), \quad q = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_i - \sigma_k) \quad [\sigma_i \geq \sigma_j \geq \sigma_k] \quad (3.64)$$

reduziert. Unter einer bestimmten Einschränkung ist die Rückführung von (3.66) auf eine Bedingung

$$|\tau| - f(\sigma) \leq 0 \quad (3.62)$$

vom Typ der Mohrschen Hüllkurve möglich. Wie unten gezeigt wird, kann die angenommene Fliessbedingung für Beton im ebenen Spannungszustand als Zusammensetzung zweier Kurven (3.66) aufgefasst werden, welche den im Abschnitt 3.3 präzisierten Eigenschaften für die Funktion $g(p)$ genügen. Deshalb wird zunächst der *ebene Fliesszustand* in einem Material betrachtet, das einer beliebigen Fliessbedingung von Mohr und dem zugeordneten Fliessgesetz folgt. Diese Problemstellung führt im allgemeinen auf ein hyperbolisches System partieller Differentialgleichungen. Die für den ebenen Spannungszustand im Stahlbeton geltenden Beziehungen ergeben sich anschliessend durch Spezialisierung. Dabei sind insbesondere die parabolischen Grenzfälle der im allgemeinen hyperbolischen Probleme zu beachten.

Die Gleichgewichtsbedingungen (4.11) führen für den Fall ebenen Fliessens in der $\{x,y\}$ -Ebene auf

$$\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + k_x = 0, \quad \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + k_y = 0. \quad (7.47)$$

Die Flie遥edingung (3.66) wird mit der von (3.64) abweichenden Konvention

$$-p = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2), \quad q = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 - \sigma_2) \quad [\sigma_1 \geq \sigma_3 \geq \sigma_2] \quad (7.48)$$

verwendet,

$$q = q(p). \quad (7.49)$$

Bezeichnet gemäss Bild 7.2 (a) θ den Winkel zwischen der x-Achse und der Richtung 1 der grössten Hauptspannung σ_1 , so drücken unter Verwendung von (7.49) die Beziehungen

$$\sigma_x = -p + q(p) \cdot \cos 2\theta, \quad \sigma_y = -p - q(p) \cdot \cos 2\theta, \quad \tau_{xy} = q(p) \cdot \sin 2\theta \quad (7.50)$$

die Spannungskomponenten σ_x , σ_y und τ_{xy} in Abhängigkeit der Funktionen $p(x,y)$ und $\theta(x,y)$ aus, vgl. Bild 7.2 (b). Aus Bild 7.2 (b) liest man die Beziehung

$$\frac{dq}{dp} = \sin \varphi \quad (7.51)$$

ab. Damit erhält man für die in den Gleichgewichtsbedingungen (7.47) auftretenden Ableitungen der Spannungskomponenten (7.50) die Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x,x} &= -p_{,x} + \sin \varphi \cdot p_{,x} \cdot \cos 2\theta - 2 \cdot q \cdot \sin 2\theta \cdot \theta_{,x}, \\ \tau_{xy,y} &= \sin \varphi \cdot p_{,y} \cdot \sin 2\theta + 2 \cdot q \cdot \cos 2\theta \cdot \theta_{,y}, \\ \tau_{xy,x} &= \sin \varphi \cdot p_{,x} \cdot \sin 2\theta + 2 \cdot q \cdot \cos 2\theta \cdot \theta_{,x}, \\ \sigma_{y,y} &= -p_{,y} - \sin \varphi \cdot p_{,y} \cdot \cos 2\theta + 2 \cdot q \cdot \sin 2\theta \cdot \theta_{,y}. \end{aligned} \right\} \quad (7.52)$$

Einsetzen in (7.47) ergibt

$$\left. \begin{aligned} -p_{,x} \cdot (1 - \sin \varphi \cdot \cos 2\theta) + p_{,y} \cdot \sin \varphi \cdot \sin 2\theta - \theta_{,x} \cdot 2 \cdot q \cdot \sin 2\theta + \theta_{,y} \cdot 2 \cdot q \cdot \cos 2\theta + k_x &= 0, \\ p_{,x} \cdot \sin \varphi \cdot \sin 2\theta - p_{,y} \cdot (1 + \sin \varphi \cdot \cos 2\theta) + \theta_{,x} \cdot 2 \cdot q \cdot \cos 2\theta + \theta_{,y} \cdot 2 \cdot q \cdot \sin 2\theta + k_y &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.53)$$

ein System zweier quasilinearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung für die unbekannten Funktionen p und θ der Variablen x und y .

Für $|\sin \varphi| < 1$ ist das System (7.53) *hyperbolisch*. Es besitzt zwei Scharen reeller *Charakteristiken*, deren Verlauf in jedem Punkt durch

$$\frac{dy}{dx} = \tan \left[\theta \pm \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right] \quad (7.54)$$

gegeben ist. In Bild 7.2 (a) sind die mit (7.54) bestimmten *charakteristischen Richtungen* mit I und II bezeichnet. Der von ihnen gebildete stumpfe Winkel $\frac{\pi}{2} + \varphi$ wird von der Richtung 1 der grössten Hauptspannung σ_1 halbiert. Die Tatsache, dass die *Winkel zwischen den charakteristischen Richtungen von den Hauptrichtungen halbiert* werden, ist eine von der speziellen Wahl des Bezugssystems unabhängige Eigenschaft. An den zu den Charakteristiken

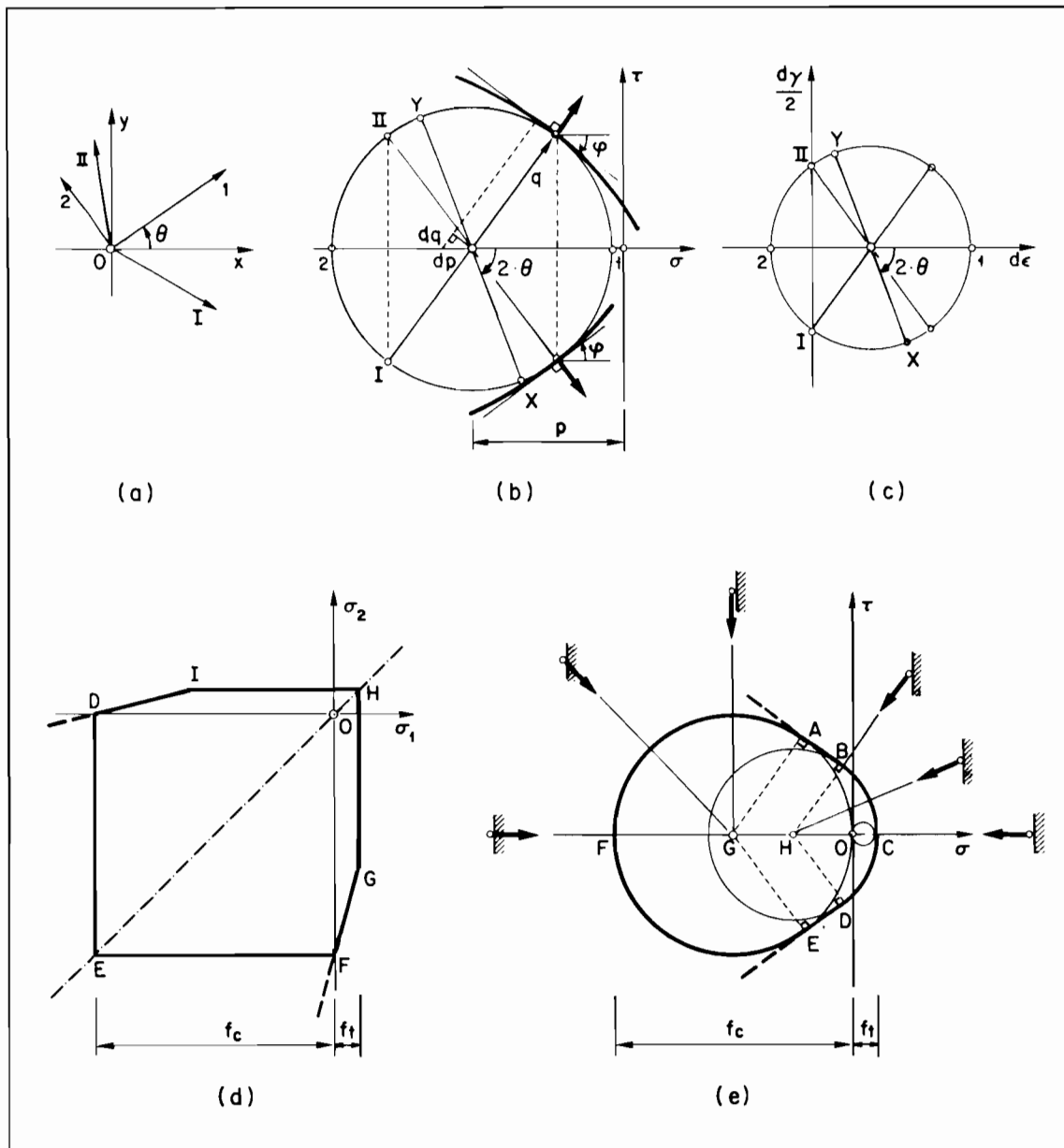


Bild 7.2: Charakteristische Richtungen

parallelen und zur $\{x, y\}$ -Ebene normalen Flächenelementen ist die Fließbedingung (7.49) oder die äquivalente Bedingung (3.62) gerade erfüllt. Ihnen entsprechen Bildpunkte in der Spannungsebene Bild 7.2 (b), in denen der Spannungskreis die Hüllkurve (3.62) berührt.

Fällt die Richtung I mit der x -Achse zusammen, d.h. ist $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$, so lautet das System (7.53)

$$\left. \begin{aligned} -p_{,x} \cdot (1 + \sin^2 \varphi) + p_{,y} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi - \theta_{,x} \cdot 2 \cdot q \cdot \cos \varphi - \theta_{,y} \cdot 2 \cdot q \cdot \sin \varphi + k_x &= 0, \\ p_{,x} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi - p_{,y} \cdot \cos^2 \varphi - \theta_{,x} \cdot 2 \cdot q \cdot \sin \varphi + \theta_{,y} \cdot 2 \cdot q \cdot \cos \varphi + k_y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.55)$$

Multiplikation der zweiten dieser beiden Gleichungen mit $\tan \varphi$ und Addition ergibt

$$-p_{,x} - \theta_{,x} \cdot \frac{2 \cdot q}{\cos \varphi} + (k_x + k_y \cdot \tan \varphi) = 0, \quad (7.56)$$

eine Gleichung, in der nur partielle Ableitungen nach x auftreten. Der in Klammern gesetzte Ausdruck $(k_x + k_y \cdot \tan\varphi) = k^I$ in (7.56) ist die Komponente der Volumenkraft in I-Richtung im *schiefwinkligen* Koordinatensystem $\{I, II\}$. Bezeichnet man die *krummlinigen* Koordinaten entlang den Charakteristiken I und II mit ξ und η , so erhält man aus (7.56) die differentielle Beziehung

$$dp + d\theta \cdot \frac{2 \cdot q}{\cos\varphi} - k^I d\xi = 0 \quad (7.57)$$

entlang einer Charakteristik I ($\eta = \text{konst.}$) und mit entsprechenden Ueberlegungen die Beziehung

$$dp - d\theta \cdot \frac{2 \cdot q}{\cos\varphi} - k^{II} d\eta = 0 \quad (7.58)$$

entlang einer Charakteristik II ($\xi = \text{konst.}$). Die schiefwinkligen Komponenten k^I und k^{II} der Volumenkraft sind bei allgemeiner Orientierung der Koordinatensysteme gemäss Bild 7.2 (a) gegeben durch

$$\left. \begin{aligned} k^I \cdot \cos\varphi &= k_x \cdot \sin\left[\theta + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right] - k_y \cdot \cos\left[\theta + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right] , \\ k^{II} \cdot \cos\varphi &= k_x \cdot \sin\left[\theta - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right] + k_y \cdot \cos\left[\theta - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right] . \end{aligned} \right\} \quad (7.59)$$

Die Gleichungen (7.57) und (7.58) werden nach MANDEL (1942) benannt. Sie ermöglichen die numerische Bestimmung der Spannungen in fliessenden Bereichen mit Hilfe der Methode der Charakteristiken. Es ist bemerkenswert, dass sich das Spannungsproblem bei geeignet vorgegebenen Randbedingungen unabhängig vom Verformungsproblem lösen lässt. Dieser Sachverhalt ist wohlbekannt, vgl. z.B. GEIRINGER (1958) oder SALENÇON (1974).

Zur Betrachtung des Verformungsproblems werden zunächst aus dem der Fliessbedingung (7.49) zugeordneten Fliessgesetz (3.8) gemäss (3.57) die Verzerrungsinkremente

$$d\epsilon_1 = \lambda \cdot (1 + \sin\varphi), \quad d\epsilon_2 = -\lambda \cdot (1 - \sin\varphi) \quad [\lambda \geq 0] \quad (7.60)$$

in den Hauptrichtungen berechnet. Der zugehörige Verzerrungskreis ist in Bild 7.2 (c) dargestellt. Sein Radius misst λ . Die Dehnungsinkremente in den charakteristischen Richtungen verschwinden,

$$d\epsilon_I = d\epsilon_\xi = 0, \quad d\epsilon_{II} = d\epsilon_\eta = 0, \quad (7.61)$$

d.h., die Charakteristiken sind *inextensibel*. Dies ist eine zweite, von der speziellen Wahl des Bezugssystems unabhängige oder eben charakteristische Eigenschaft.

Um aus (7.61) eine Aussage über die Verschiebungsinkremente zu gewinnen ist es zweckmässig, den Vektor $d\underline{u}$ des Verschiebungsinkrementes in einem Punkt in seine zu den Charakteristiken orthogonalen Komponenten zu zerlegen. Die Projektionen du_ξ und du_η von $d\underline{u}$ auf die Charakteristiken I und II können auch als Projektionen der zur Charakteristik II orthogonalen Komponente von $d\underline{u}$ auf die Charakteristik I und als Projektion der zur Charakteristik I orthogonalen Komponente von $d\underline{u}$ auf die Charakteristik II aufgefasst werden. Die Inextensibilitätsbedingung beim Fortschreiten entlang einer Charakteristik I ($\eta = \text{konst.}$) bedingt das Verschwinden der *kovarianten Ableitung* von du_ξ nach ξ ,

$$du_{\xi,\xi} - du_\xi \cdot \tan\varphi \cdot \left(\theta - \frac{\varphi}{2}\right)_{,\xi} - \frac{du_\eta}{\cos\varphi} \cdot \left(\theta - \frac{\varphi}{2}\right)_{,\xi} = 0. \quad (7.62)$$

Der zweite und der dritte Summand entsprechen den Beiträgen der zu den Charakteristiken II und I orthogonalen Komponenten von du infolge der Aenderung der Richtung I beim Fortschreiten entlang der krummlinigen Charakteristik. Die Beträge der zu den Charakteristiken II und I orthogonalen Komponenten von du sind $|du_\xi/\cos\varphi|$ und $|du_\eta/\cos\varphi|$. Einer Drehung der Richtung I im Gegenuhrzeigersinn entspricht gemäss Bild 7.2 (a) ein positives Inkrement $d(\theta - \frac{\pi}{2})$. Ist die Charakteristik gerade, so verbleibt einzig der von der kinematischen Relation (4.12) her bekannte erste Summand $du_{\xi,\xi}$. Für eine Charakteristik II ($\xi = \text{konst.}$) erhält man

$$du_{\eta,\eta} + du_\eta \cdot \tan\varphi \cdot (\theta + \frac{\varphi}{2})_{,\eta} + \frac{du_\xi}{\cos\varphi} \cdot (\theta + \frac{\varphi}{2})_{,\eta} = 0. \quad (7.63)$$

Die Gleichungen (7.62) und (7.63) ermöglichen die Bestimmung der Verschiebungsinkremente in fliessenden Bereichen unter Verwendung der Methode der Charakteristiken. Dabei ist zu beachten, dass sich der (für $\varphi \geq 0$ stumpfe) Winkel zwischen den positiven Charakteristikenrichtungen nicht vergrössern kann, d.h. es muss die Bedingung

$$du_{\xi,\eta} + du_{\eta,\xi} - (du_\xi \cdot \tan\varphi + \frac{du_\eta}{\cos\varphi}) \cdot (\theta - \frac{\varphi}{2})_{,\eta} + (\frac{du_\xi}{\cos\varphi} + du_\eta \cdot \tan\varphi) \cdot (\theta + \frac{\varphi}{2})_{,\xi} \geq 0 \quad (7.64)$$

in jedem Punkt erfüllt sein. Den beiden ersten Summanden in (7.64) entspricht für $\varphi = 0$ der aus der kinematischen Relation (4.12) folgende Ausdruck für das Schiebungsinkrement $dy_{\xi\eta}$. Der dritte und der vierte Summand stehen für die Beiträge infolge Aenderung der Richtung I beim Fortschreiten entlang einer Charakteristik II ($\xi = \text{konst.}$) beziehungsweise infolge Aenderung der Richtung II beim Fortschreiten entlang einer Charakteristik I ($\eta = \text{konst.}$).

Die Charakteristiken sind mögliche Unstetigkeitslinien für das Feld der Verschiebungsinkremente du , d.h. sie sind *mögliche Gleitlinien* ($\varphi \neq \frac{\pi}{2}$). Mit den im Abschnitt 5.4 eingeführten Bezeichnungen gilt entlang einer Gleitlinie I ($\eta = \text{konst.}$)

$$[du_\eta] = 0, \quad [du_\xi] \geq 0 \quad (7.65)$$

und entlang einer Gleitlinie II ($\xi = \text{konst.}$)

$$[du_\xi] = 0, \quad [du_\eta] \geq 0, \quad (7.66)$$

d.h. der Sprungvektor $[du]$ ist orthogonal zu der Charakteristik, welche nicht Gleitlinie ist und zeigt in den von den Charakteristiken gebildeten stumpfen Winkelraum.

Wie im Abschnitt 5.4 gezeigt wurde, können Unstetigkeitslinien des Verschiebungsfeldes nicht mit solchen eines damit verträglichen Spannungsfeldes zusammenfallen. Ferner wurde nachgewiesen, dass auf beiden Seiten einer Unstetigkeitslinie eines zulässigen Spannungsfeldes nur dann plastisches Fliessen auftreten kann, wenn die Tangente an die Unstetigkeitslinie auf beiden Seiten von S Hauptrichtung ist, und die Bildpunkte der beiderseitigen Spannungszustände in der Hauptspannungsebene auf einem geradlinigen zu einer Achse parallelen Stück der Berandung des aplastischen Bereichs liegen. Die Unstetigkeitslinie des Spannungszustandes ist in jedem Fall inextensibel.

Bevor die bisher für eine beliebige Fliessbedingung von Mohr entwickelten Beziehungen auf die spezielle, für Beton angenommene Fliessbedingung angewendet werden, ist noch der für $\sin\varphi = 1$ entstehende *parabolische Grenzfall* des Systems (7.53) zu untersuchen. Unter dieser Voraussetzung fallen die durch (7.54) gegebenen beiden Charakteristikenscharen mit den durch

$$dy + dx \cdot \cot \theta = 0 \quad (7.67)$$

bestimmen Trajektorien der kleinsten Hauptspannung σ_2 zusammen. Die grösste Hauptspannung, σ_1 , ist konstant, $\sigma_1 = \text{konst.}$. Dagegen ist die kleinste Hauptspannung, σ_2 , im allgemeinen variabel. Mit dieser Feststellung, unter Beachtung von $\cos \varphi = 0$ und unter Zuhilfenahme von (7.48) reduziert sich das System (7.55) auf

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{2,x} - \theta_{,y} \cdot (\sigma_1 - \sigma_2) + k_x &= 0, \\ -\theta_{,x} \cdot (\sigma_1 - \sigma_2) + k_y &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.68)$$

wobei zu beachten ist, dass $\theta = \frac{\pi}{2}$ zugrunde gelegt wurde. Von bekannten Anfangswerten für σ_2 und θ entlang einer nicht charakteristischen Kurve ausgehend kann mit diesen Beziehungen der Verlauf der Charakteristiken und die längs ihnen sich einstellende Änderung von σ_2 bestimmt werden.

Falls keine Volumenkräfte auftreten, $k_x = k_y = 0$, sind die Charakteristiken nach der zweiten Gleichung (7.68) Geraden, welche nach (7.67) mit der y-Achse den Winkel θ einschliessen. Die Charakteristiken bilden eine einparametrische Geradenschar mit der Gleichung

$$\tan \theta - f(x+y \cdot \tan \theta) = 0. \quad (7.69)$$

f bezeichnet eine beliebige, aus Anfangswerten des Parameters θ entlang einer nicht charakteristischen Kurve zu bestimmende Funktion. Ist θ beispielsweise entlang $y = 0$ gegeben, so kann die zu (7.69) äquivalente Bedingung

$$F(x, y, \xi) = x + y \cdot \tan \theta(\xi) - \xi = 0 \quad (7.70)$$

formuliert werden. ξ bezeichnet die Abszisse der Schnittpunkte der Schargeraden mit der x-Achse. Die Gleichung der Einhüllenden der Geradenschar folgt durch Nullsetzen der Ableitung von F nach ξ ,

$$\frac{dF}{d\xi} = y \cdot \frac{d[\tan \theta(\xi)]}{d\xi} - 1 = 0 \quad (7.71)$$

und Elimination des Parameters ξ aus (7.70) und (7.71). Die erste Gleichung (7.68) kann wegen $\sigma_1 = \text{konst.}$ in der Form

$$(\sigma_2 - \sigma_1)_{,x} + \theta_{,y} \cdot (\sigma_2 - \sigma_1) = 0 \quad (7.72)$$

geschrieben werden. $\theta_{,y}$ ist umgekehrt proportional zum Abstand vom Berührungspunkt der Charakteristik mit der Hüllkurve. Die Integration von (7.72) ist damit möglich und zeigt, dass auch die Differenz $(\sigma_2 - \sigma_1)$ zu diesem Abstand umgekehrt proportional ist.

Zur Betrachtung des Verformungsproblems im parabolischen Fall ist es zweckmässig, die zu den Charakteristiken orthogonalen Trajektorien von σ_1 als η -Linien ($\xi = \text{konst.}$) zu wählen. Dieser Wahl entspricht in (7.62) der Ansatz $\varphi = 0$, und es folgt als Ausdruck der Inextensibilität der Charakteristiken die Bedingung

$$du_{\xi,\xi} - du_{\eta} \cdot \theta_{,\xi} = 0. \quad (7.73)$$

Für den Sonderfall verschwindender Volumenkräfte mit geraden Charakteristiken können die möglichen Verschiebungsfelder allgemein angegeben werden. Wegen $\theta_{,\xi} = 0$ verschwindet der

erste Summand in (7.73) zusammen mit dem zweiten. Der Bedingung $du_{\xi,\xi} = 0$ entspricht eine reine Translation einer Charakteristik. Der Faktor du_{η} im zweiten Summanden in (7.73) beschreibt eine zweite, zur charakteristischen Geraden orthogonale, in der Richtung der Trajektorien von σ_1 weisende Verschiebung entlang einer Charakteristik, welche mit deren reiner Translation zusammengesetzt werden kann. Da die rechten Winkel zwischen den Hauptspannungstrajektorien bei der Verformung erhalten bleiben, ist die Wahl von $du_{\eta}(\xi)$ eingeschränkt. In Anlehnung an (7.64) ergibt sich die Bedingung

$$du_{\eta,\xi} - du_{\eta} \cdot \theta_{,\eta} = 0. \quad (7.74)$$

Da der Faktor $\theta_{,\eta}$ umgekehrt proportional zum Abstand vom Berührungspunkt von Charakteristik und Hüllkurve ist, zeigt die Integration von (7.74), dass $du_{\eta}(\xi)$ zu diesem Abstand proportional, mithin linear in ξ ist. Die Charakteristiken bleiben gerade und ungedehnt. Die Verschiebungsfelder können aus reinen Translationen der Charakteristiken und aus zu diesen senkrechten und entlang den Charakteristiken linear sich ändernden Verschiebungen zusammengesetzt werden.

Die Charakteristiken sind mit der am Ende von Abschnitt 6.2 für den Fall $\alpha = \varphi = \frac{\pi}{2}$ eingeführten Bezeichnung *mögliche Kollapsrisse*. Für den betrachteten parabolischen Grenzfall können sie auch Unstetigkeitslinien des Spannungszustandes sein, d.h. die zur Charakteristik parallele Hauptspannung σ_2 kann springen. Tatsächlich liegen genau die im Abschnitt 5.4 anhand der Bilder 5.6 (f), (g) und (h) diskutierten Verhältnisse vor.

Die für Beton im *ebenen Spannungszustand* angenommene Fliegsbedingung ist in den Bildern 7.2 (d) und (e) dargestellt. Dem sechseckigen applastischen Bereich DEFGHI in der Ebene $\sigma_3 = 0$ von Bild 7.2 (d) entspricht in der Spannungsebene Bild 7.2 (e) der von den Geradenstücken AB und DE und von den Kreisbogen BCD und EFA begrenzte Bereich. Zuzolge der Symmetrie der Fliegsbedingung in den Hauptspannungen genügt für die folgende Diskussion die Betrachtung der Hälfte EFGH der Berandung des applastischen Bereichs in Bild 7.2 (d), wobei wie bisher $\sigma_1 \geq \sigma_2$ gewählt wird. In Bild 7.2 (e) genügt die Betrachtung der Hälfte FABC der Berandung des applastischen Bereichs, d.h. man kann sich auf positive τ beschränken.

Spannungszuständen, die zu Bildpunkten auf der Geraden EF in Bild 7.2 (d) abgebildet werden, entsprechen in Bild 7.2 (e) Spannungskreise, welche die Berandung des applastischen Bereichs in F berühren. Bildpunkten auf den Geraden FG und GH in Bild 7.2 (d) entsprechen Spannungskreise in Bild 7.2 (e), welche die Berandung des applastischen Bereichs in Punkten auf der Geraden AB, beziehungsweise im Punkt C berühren. Den Fliegsregimen E und H in Bild 7.2 (d) entsprechen die zu den Punkten F und C degenerierten Spannungskreise in Bild 7.2 (e) und den Fliegsregimen F und G in Bild 7.2 (d) die Spannungskreise ADEF und BCD mit den Zentren G und H.

Die beiden durch die Geraden $\sigma + f_c/2 = 0$ in Bild 7.2 (e) getrennten Teilstücke der Kurve FABC können offensichtlich als Mohrsche Hüllkurven aufgefasst werden, welche die im Abschnitt 3.3 präzisierten Eigenschaften aufweisen. Dabei sind die Ueberlegungen für den Bereich $\sigma \geq -f_c/2$ ($\varphi \geq 0$) durch Wechseln der Vorzeichen von σ auf den Bereich $\sigma \leq -f_c/2$ ($\varphi \leq 0$) zu übertragen.

In Bild 7.2 (e) sind die in den verschiedenen Fliegsregimen möglichen Relativverschiebungen $[du]$ an einem durch Schraffur hervorgehobenen Element dS einer Unstetigkeitslinie des Verschiebungsfeldes (d.h. einer Fliegslinie) mit fetten Pfeilen angedeutet, vgl. Bild 5.3. In den Fliegsregimen C und F, d.h. in den Regimen GH und EF in Bild 7.2 (d),

ist $[du]$ zu dS orthogonal. Der Fall von Fließregime C in Bild 7.2 (e) entspricht einem Kollapsriss. Im Fließregime AB, d.h. im Regime FG in Bild 7.2 (d), ist $[du]$ unter dem mit (6.1) angenommenen Winkel $\varphi = \arctan(3/4)$ zu dS geneigt. Für die Kreisbogenregime BC und AF, d.h. die Regime G und F in Bild 7.2 (d), sind alle durch die eben erwähnten Fälle begrenzten Neigungen von $[du]$ möglich. Für den Bereich $\varphi > 0$ ergibt sich entlang einer Fließlinie eine Trennung der Teilkörper auf beiden Seiten und für den Bereich $\varphi < 0$ ein gegenseitiges Eindringen. Auf diesen Sachverhalt wurde bereits im Abschnitt 5.4 hingewiesen. Schliesslich sei noch bemerkt, dass den Regimen AB, BC und D in Bild 7.2 (e), d.h. den Regimen FG, G und GH in Bild 7.2 (d) ein ebener Fließzustand entspricht.

Für die Regime FA, AB und BC in Bild 7.2 (e), d.h. für die Regime F, FG und G in Bild 7.2 (d), ist $|\sin\varphi| < 1$. Die Problemstellung ist mithin hyperbolisch. Für die Regime F und C in Bild 7.2 (e), d.h. für die Regime EF und GH in Bild 7.2 (d), ist $|\sin\varphi| = 1$, die Problemstellung demnach parabolisch.

Mit den in diesem Abschnitt entwickelten Beziehungen, namentlich mit den grundlegenden Beziehungen (7.57), (7.58) und (7.62) bis (7.64) für den allgemeinen hyperbolischen Fall und den Ergänzungen für die parabolischen Grenzfälle, können allgemeine Probleme des ebenen Spannungszustandes und des ebenen Fließzustandes in Bauteilen aus Stahlbeton gelöst werden. Die Wirkung der Bewehrung wird mit statischen Randbedingungen und mit Volumenkräften erfasst. Dabei ist zu beachten, dass die Bewehrung nach den Annahmen von Kapitel 6 auf Zug oder auf Druck fließt, je nachdem, ob im Beton, in dem sie eingebettet ist, ein positives oder ein negatives Dehnungsinkrement in ihrer Richtung auftritt.

Mit Bild 7.3 werden die für die Bewehrung massgebenden kinematischen Verhältnisse für den allgemeinen hyperbolischen Fall $|\sin\varphi| < 1$ illustriert. Die Bilder 7.3 (a) und (b) gelten für den Fall $\varphi > 0$ und die Bilder 7.3 (c) und (d) für den Fall $\varphi < 0$. Die Bewehrung bleibt starr, wenn ihre Richtung mit derjenigen der Charakteristiken zusammenfällt. Für $\varphi > 0$ fließt die Bewehrung in nicht starren Gebieten auf Zug oder auf Druck, je nachdem, ob ihre Richtung in den von den Charakteristiken gebildeten stumpfen oder spitzen Winkelraum fällt. Für $\varphi < 0$ sind die Verhältnisse gerade umgekehrt.

Als Beispiel eines hyperbolischen Problems wird mit Bild 7.4 der Fall einer aus parallelen Stäben gebildeten starren Bewehrung in einem im Regime F von Bild 7.2 (d) plastifizierten Gebiet untersucht. Die Richtung $\xi \equiv x$ der starren Bewehrung ist im ganzen Gebiet eine charakteristische Richtung, $de_\xi = 0$. Alle nicht aus der Wirkung von Bewehrungen herrührenden Volumenkräfte seien vernachlässigbar. Ferner bestehe die gesamte noch vorhandene Bewehrung, welche nicht in ξ -Richtung weist, aus geraden Stäben, deren Widerstand sich entlang der Stabachse nicht verändert. Solche Bewehrungsstäbe könnten nur Volumenkräfte verursachen, wenn sie starr blieben, d.h. mit geraden η -Charakteristiken zusammenfielen. Aus (7.58) folgt jedoch aus der Annahme $k^{II} \neq 0$, dass sich der Winkel θ entlang einer η -Charakteristik verändern würde, $d\theta = -(k^{II}/f_c) \cdot \cos\varphi \cdot d\eta \neq 0$, diese mithin nicht gerade sein könnte, was im Widerspruch zur eben getroffenen Voraussetzung steht. Es verbleiben deshalb als einzige nicht zu vernachlässigende Volumenkräfte die der Änderung der Spannung z_ξ in der starren Bewehrung entsprechenden Grössen

$$k^I = k_\xi = \frac{dz_\xi}{d\xi} \quad . \quad (7.75)$$

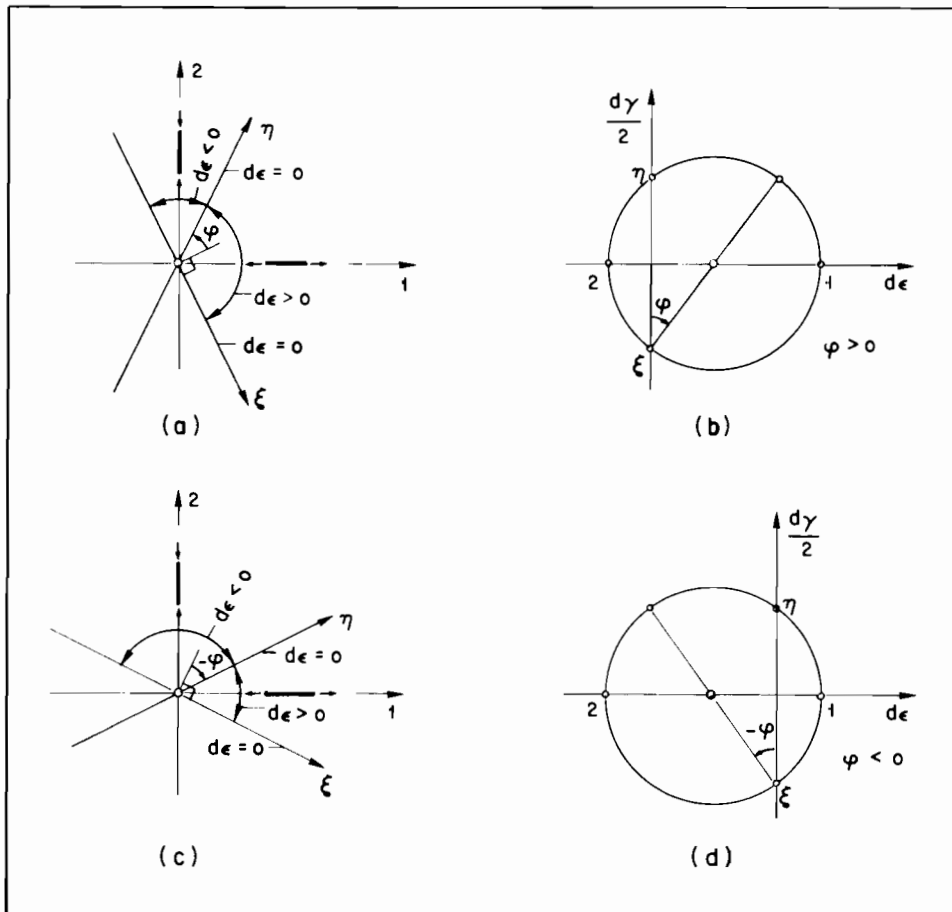


Bild 7.3: Dehnungssinkremente in Bewehrungsrichtung

Aus (7.58) erhält man wegen $p = q = f_c/2$, $\cos\varphi > 0$ und $k^{II} = 0$ die Bedingung $d\theta = 0$ entlang einer η -Charakteristik. Die η -Charakteristiken sind deshalb Geraden, welche mit der x -Achse den Winkel $2\cdot\theta$ einschliessen. Sie bilden eine einparametrische Geradenschar mit der zu (7.70) analogen Gleichung

$$F(x, y, \xi) = x - y \cdot \cot[2\cdot\theta(\xi)] - \xi = 0. \quad (7.76)$$

Aus (7.57) folgt mit (7.75) und $2\cdot\theta = \frac{\pi}{2} + \varphi$

$$dz_\xi = \frac{d\theta \cdot f_c}{\cos\varphi} = \frac{d\theta \cdot f_c}{\sin(2\cdot\theta)} = \frac{f_c}{2} \cdot \frac{d(\tan\theta)}{\tan\theta} \quad (7.77)$$

mit dem Integral

$$z_\xi = \frac{f_c}{2} \cdot \ln[\tan\theta(\xi)] + f(\eta). \quad (7.78)$$

Die Spannung in der starren Bewehrung nimmt zu mit wachsendem θ , d.h. mit abnehmender Neigung der Betondrucktrajektorien 2.

Es sei noch bemerkt, dass die Einhüllende H der η -Charakteristiken in Bild 7.4 nicht im Innern des fließenden Gebietes, sondern höchstens an seinem Rand liegen kann. Läge H im Innern des fließenden Gebietes, so würden die Normalspannungen σ und die Schubspannungen τ entlang H gemäss (3.62) in jedem Punkt die Fließbedingung $\tau + f(\sigma) = 0$ erfüllen, wobei zu beachten ist, dass τ entlang η -Charakteristiken mit der in Bild 7.2 angenommenen Konvention negativ ist. Entlang H müsste notwendig die differentielle Beziehung (7.58) für

7.3 Achsialsymmetrischer Fliesszustand

Die im letzten Abschnitt entwickelten Ueberlegungen für den ebenen Fliesszustand in einem Material, das einer Fliessbedingung von Mohr und dem zugeordneten Fliessgesetz folgt, werden im folgenden auf das Problem des achsialsymmetrischen Fliesszustandes in einem solchen Material übertragen. Die Untersuchung beschränkt sich auf solche Fliessregime, für welche die bekannte Hypothese von HAAR und v. KÁRMÁN (1909) erfüllt ist, wonach die Hauptspannung $\sigma_\vartheta = \sigma_3$ in Azimutalrichtung mit einer der Hauptspannungen in der Meridianebene zusammenfällt. Es ist also entweder

$$\sigma_\vartheta = \sigma_1 \quad (7.80a)$$

oder

$$\sigma_\vartheta = \sigma_2 \quad , \quad (7.80b)$$

wobei σ_1 wie früher die grösste und σ_2 die kleinste Hauptspannung bezeichnet. Unter Verwendung von Zylinderkoordinaten $\{r, \vartheta, z\}$ werden die Gleichgewichtsbedingungen (4.11) zu

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r,r} + \frac{1}{r} \cdot \tau_{r\vartheta,\vartheta} + \tau_{rz,z} + \frac{1}{r} \cdot (\sigma_r - \sigma_\vartheta) + k_r &= 0 \quad , \\ \tau_{r\vartheta,r} + \frac{1}{r} \cdot \sigma_{\vartheta,\vartheta} + \tau_{\vartheta z,z} + \frac{2}{r} \cdot \tau_{r\vartheta} + k_\vartheta &= 0 \quad , \\ \tau_{rz,r} + \frac{1}{r} \cdot \tau_{\vartheta z,\vartheta} + \sigma_{z,z} + \frac{1}{r} \cdot \tau_{rz} + k_z &= 0 \quad , \end{aligned} \right\} \quad (7.81)$$

und die kinematischen Relationen (4.12) lauten

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon_r &= du_{r,r} & d\epsilon_\vartheta &= \frac{1}{r} \cdot (du_{\vartheta,\vartheta} + du_r) & d\epsilon_z &= du_{z,z} \\ d\gamma_{\vartheta z} &= du_{\vartheta,z} + \frac{1}{r} \cdot du_{z,\vartheta} & d\gamma_{rz} &= du_{r,z} + du_{z,r} & \\ & & d\gamma_{r\vartheta} &= \frac{1}{r} \cdot (du_{r,\vartheta} - du_\vartheta) + du_{\vartheta,r} & \end{aligned} \right\} \quad (7.82)$$

Für den Fall der Achsialsymmetrie sind alle Grössen von ϑ unabhängig, und die Azimutalrichtung ϑ ist Hauptrichtung. Die zweite Gleichung (7.81) liefert $k_\vartheta = 0$. Aus der vierten und aus der sechsten Gleichung (7.82) folgt, dass du_ϑ höchstens einer Starrkörperrotation um die z-Achse entsprechen kann. Für den achsialsymmetrischen Fliesszustand verbleiben demnach die Gleichgewichtsbedingungen

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r,r} + \tau_{rz,z} + \frac{1}{r} \cdot (\sigma_r - \sigma_\vartheta) + k_r &= 0 \quad , \\ \tau_{rz,r} + \sigma_{z,z} + \frac{1}{r} \cdot \tau_{rz} + k_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.83)$$

und die kinematischen Relationen

$$d\epsilon_r = du_{r,r}, \quad d\epsilon_\vartheta = \frac{1}{r} \cdot du_r, \quad d\epsilon_z = du_{z,z}, \quad d\gamma_{rz} = du_{r,z} + du_{z,r}. \quad (7.84)$$

Die Fliessbedingung wird wie im Abschnitt 7.2 in der Form

$$q = q(p) \quad (7.49)$$

verwendet, mit

$$-p = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2), \quad q = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 - \sigma_2) \quad [\sigma_1 \geq \sigma_3 \geq \sigma_2] . \quad (7.48)$$

θ bezeichnet den Winkel zwischen den Richtungen r und 1 . Die Spannungskomponenten können mit den zu (7.50) analogen Beziehungen

$$\sigma_r = -p + q(p) \cdot \cos 2\theta, \quad \sigma_z = -p - q(p) \cdot \cos 2\theta, \quad \tau_{rz} = q(p) \cdot \sin 2\theta, \\ \sigma_\theta = -p - \epsilon \cdot q(p) \quad (7.85)$$

ausgedrückt werden, wenn die Hypothese (7.80) von Haar und v. Kármán in die Form

$$\sigma_\theta = -p - \epsilon \cdot q(p), \quad \epsilon = -1 \quad \text{oder} \quad \epsilon = +1 \quad (7.86)$$

gefasst wird. Die Beziehung

$$\frac{dq}{dp} = \sin \varphi \quad (7.51)$$

gilt weiterhin. Aus (7.83) folgt mit (7.85) und (7.51) das System

$$\left. \begin{aligned} -p_{,r} \cdot (1 - \sin \varphi \cdot \cos 2\theta) + p_{,z} \cdot \sin \varphi \cdot \sin 2\theta - \theta_{,r} \cdot 2 \cdot q \cdot \sin 2\theta + \\ + \theta_{,z} \cdot 2 \cdot q \cdot \cos 2\theta + \frac{q}{r} \cdot (\cos 2\theta + \epsilon) + k_r = 0 \\ p_{,r} \cdot \sin \varphi \cdot \sin 2\theta - p_{,z} \cdot (1 + \sin \varphi \cdot \cos 2\theta) + \theta_{,r} \cdot 2 \cdot q \cdot \cos 2\theta + \\ + \theta_{,z} \cdot 2 \cdot q \cdot \sin 2\theta + \frac{q}{r} \cdot \sin 2\theta + k_z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.87)$$

zweier quasilinearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung für die unbekannten Funktionen p und θ der Variablen r und z . Bis auf die zweitletzten, zu den Volumenkräften k_r und k_z hinzutretenden Summanden $\frac{q}{r} \cdot (\cos 2\theta + \epsilon)$ und $\frac{q}{r} \cdot \sin 2\theta$ ist das System (7.87) mit (7.53) identisch. Für $|\sin \varphi| < 1$ ist es hyperbolisch und besitzt zwei Scharen reeller Charakteristiken, deren Verlauf in jedem Punkt der Meridianebene durch

$$\frac{dz}{dr} = \tan[\theta \pm (\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})] \quad (7.88)$$

gegeben ist. Anstelle der differentiellen Beziehungen (7.57) und (7.58) erhält man die Gleichungen

$$dp + d\theta \cdot \frac{2 \cdot q}{\cos \varphi} - k^I \cdot d\xi + \frac{q \cdot d\xi}{r \cdot \cos \varphi} \cdot \{\sin[\theta - (\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})] - \epsilon \cdot \sin[\theta + (\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})]\} = 0 \quad (7.89)$$

entlang einer Linie $\eta = \text{konst.}$ und

$$dp - d\theta \cdot \frac{2 \cdot q}{\cos \varphi} - k^{II} \cdot d\eta - \frac{q \cdot d\eta}{r \cdot \cos \varphi} \cdot \{\sin[\theta + (\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})] - \epsilon \cdot \sin[\theta - (\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})]\} = 0 \quad (7.90)$$

entlang einer Linie $\xi = \text{konst.}$ Die Komponenten k^I und k^{II} der Volumenkraft folgen allgemein aus den Beziehungen (7.59), wenn die Indizes x und y durch r und z ersetzt werden.

Aus dem der Fliessbedingung (7.49) zugeordneten Fliessgesetz (3.8) folgt gemäss (3.58) und (3.59)

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon_1 &= [\lambda + \frac{\mu}{2} \cdot (1 + \epsilon)] \cdot (1 + \sin\varphi), \\ d\epsilon_2 &= -[\lambda + \frac{\mu}{2} \cdot (1 - \epsilon)] \cdot (1 - \sin\varphi), \\ d\epsilon_\vartheta &= -\epsilon \cdot \mu \cdot (1 - \epsilon \cdot \sin\varphi) \end{aligned} \right\} \quad [\lambda \geq 0, \mu \geq 0, \epsilon = \pm 1] \quad (7.91)$$

Der Summand $\epsilon \cdot \mu / 2$ in den eckigen Klammern der ersten und zweiten Gleichung (7.91) bewirkt die Dehnungssinkremente

$$d\epsilon_\xi = d\epsilon_\eta = \epsilon \cdot \frac{\mu}{2} \cdot \cos^2\varphi \quad (7.92)$$

in den charakteristischen Richtungen. Die halbe Winkeländerung zwischen einer charakteristischen Richtung und ihrer Normalen ist gleich dem Produkt des Radius $(\lambda + \mu/2)$ des Verzerrungskreises mit $\cos\varphi$. Demnach ist das halbe Schiebungssinkrement $d\gamma_{\xi\eta}/2$ bezüglich einer normierten, schiefwinkligen Basis mit den Richtungen (7.88) gegeben durch

$$\frac{d\gamma_{\xi\eta}}{2} = (\lambda + \frac{\mu}{2}) \cdot \cos^2\varphi \geq 0. \quad (7.93)$$

Durch Multiplikation der dritten Gleichung (7.91) mit $-(1 + \epsilon \cdot \sin\varphi)/2$ und Berücksichtigung der zweiten Gleichung (7.84) erhält man für (7.92)

$$d\epsilon_\xi = d\epsilon_\eta = -\frac{du_r}{2 \cdot r} \cdot (1 + \epsilon \cdot \sin\varphi). \quad (7.94)$$

Wegen $\mu \geq 0$ und $\sin\varphi < 1$ ist nach der dritten Gleichung (7.91) das Produkt $\epsilon \cdot d\epsilon_\vartheta$ nicht positiv, d.h. es gilt

$$\epsilon \cdot \frac{du_r}{r} \leq 0. \quad (7.95)$$

Wegen $\lambda \geq 0$ ist nach (7.93) $d\gamma_{\xi\eta} \geq \mu \cdot \cos^2\varphi$, d.h. mit Multiplikation von (7.92) mit $2 \cdot \epsilon$ und Berücksichtigung von (7.94)

$$d\gamma_{\xi\eta} \geq -\epsilon \cdot \frac{du_r}{r} \cdot (1 + \epsilon \cdot \sin\varphi). \quad (7.96)$$

Die Gleichungen (7.94) entsprechen den Beziehungen (7.62) und (7.63) für den ebenen Fließzustand und die Ungleichungen (7.95) und (7.96) der Relation (7.64).

8. SCHEIBEN UND AUS SCHEIBEN ZUSAMMENGESetzte BAUTEILE

Die in den Abschnitten 7.2 und 7.1 erarbeiteten Grundlagen werden in diesem Kapitel zur Berechnung der Traglast von scheibenförmigen und aus Scheiben zusammengesetzten Bauteilen angewendet. Das Schwergewicht liegt bei der Entwicklung vollständiger Lösungen und bei Lösungen nach der statischen Methode.

In vielen Fällen können die Spannungsfelder mit Fachwerkmodellen beschrieben werden. Insbesondere für die praktische Bemessung ist es oft vorteilhaft, von einfachen Fachwerkmodellen auszugehen. Für manche zunächst nur schwer Überblickbare Fälle verfügt der Ingenieur damit über ein anpassungsfähiges Hilfsmittel, mit dem er eine klare Vorstellung der Kraftübertragung gewinnen und darauf gestützt eine zweckmässige Dimensionierung der Beton- und Stahlquerschnitte vornehmen kann.

Mit dem Abschnitt 8.1 werden den folgenden Abschnitten einige Bemerkungen zur Entwicklung von Fachwerkmodellen für Stahlbetonträger vorangestellt. In den Abschnitten 8.2 und 8.3 werden Träger mit Rechteckquerschnitt und aus Scheiben zusammengesetzte Bauteile behandelt, und im Abschnitt 8.4 werden Probleme bei Verbindungsstellen und Fugen zwischen verschiedenen Scheiben diskutiert.

8.1 Zur Entwicklung von Fachwerkmodellen

Die Einführung von Fachwerkmodellen zur Bemessung von Stahlbetonträgern wird gewöhnlich mit den Namen von Ritter und Mörsch in Verbindung gebracht.

W. RITTER (1899, S. 59f.) beschrieb anhand von Bild 8.1 (a) die Berechnung der Bügel in mit "Stangen" längsbewehrten Trägern wie folgt: "Die flacheisernen Bügel, welche um die Stangen herum gelegt werden, sollen nach Hennebiques Anschauung die scherenden Kräfte aufnehmen. Dabei denkt man sich gewöhnlich, dass die Bügel zusammen mit den Stangen und dem Beton eine Art Fachwerk bilden, in welchem die Bügel die Zugstreben und der Beton, in der Richtung der punktierten Linien wirkend, die Druckstreben darstelle. Diese Linien werden, den Druckkurven entsprechend, unter 45° laufend angenommen. Auf Grund dieser Anschauung werden nun die Bügel statisch berechnet und zwar nach der Formel $Q = 2 \cdot \sigma \cdot b \cdot d$, worin Q die Scherkraft und b und d Breite und Dicke des Flacheisens bezeichnen. Der Faktor 2 rührt daher, dass jeder Bügel zwei Aeste besitzt Die Formel setzt voraus, dass die Entfernung e der Bügel gleich dem Abstand z von Druck- und Zugmittelpunkt sei. Macht man e grösser als z , so vergrössert sich proportional die Spannung. Es ist also allgemein $\sigma = Q \cdot e / (2 \cdot b \cdot d \cdot z)$...".

Ritter fragte sich allerdings, ob die Hennebiquesche Anschauung richtig sei: "In wie weit nun die Auffassung des Erfinders bezüglich der Wirkung seiner Bügel richtig ist, lässt sich schwer sagen ..." und meinte: "Die Wirkungsweise der Bügel besteht aber nach meiner Ansicht eher darin, dass sie den in der Richtung der Zugkurven wirkenden Zugspannungen widerstehen und das frühzeitige Eintreten von Rissen verhüten. Zu dem Ende müssten sie freilich annähernd unter 45° gestellt werden; doch würde diese Anordnung die Herstellung nicht unbedeutend erschweren."

Bezüglich der Wirkung senkrechter Bügel räumte Ritter immerhin ein "Dass die Bügel auch in senkrechter Stellung die Tragkraft des Balkens erhöhen, wird man kaum in Abrede stellen können" und schloss "in wie weit aber obige Formel auf Zuverlässigkeit Anspruch ma-

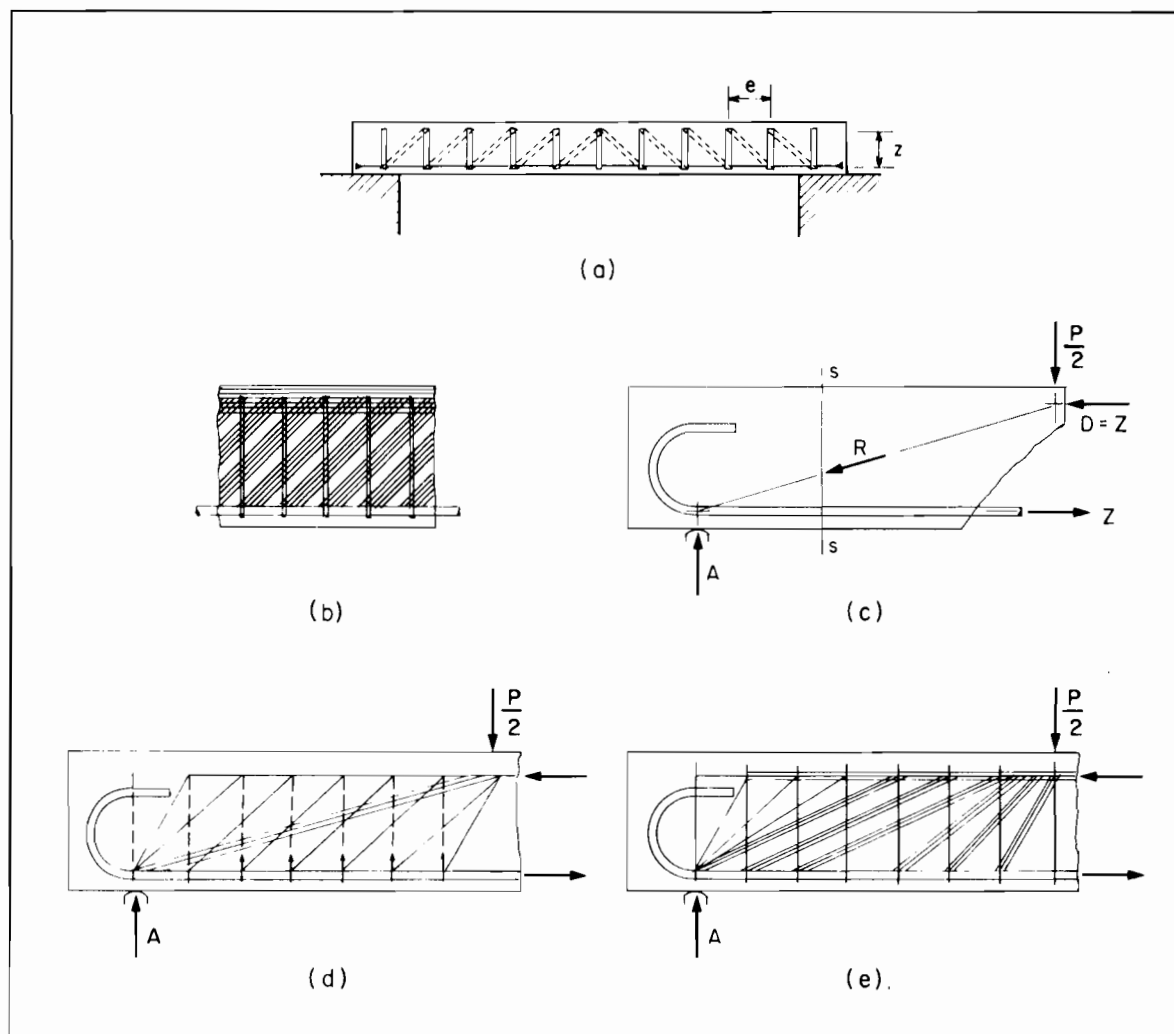


Bild 8.1: Fachwerkmodelle nach Ritter (Hennebique) und Mörsch

chen kann und den tatsächlichen Verhältnissen entspricht, lässt sich auf theoretischem Wege schwerlich bestimmen. Hier wären vergleichende Versuche am Platze."

Derartige Versuche wurden Ende 1906 auf Vorschlag von Mörsch mit Plattenbalken angestellt. MÖRSCH (1908) beschrieb diese Versuche und er nahm auch Bezug auf Versuche der Materialprüfungsanstalt Stuttgart an Balken mit rechteckigem und T-förmigem Querschnitt, über die C. v. BACH (1907) berichtete.

Mörsch vertrat bezüglich der Wirkung vertikaler Bügel in schubbeanspruchten Trägern die Meinung (S. 168), dass "... die Bügel, die in einem unter 45° gelegten Schnitt getroffen werden, eine vorzeitige Zerstörung des Trägerendes verhindern können, wenn sie zusammen im stande sind, die Querkraft aufzunehmen ..." und beschrieb anschliessend anhand von Bild 8.1 (b) das folgende Fachwerkmodell: "Unter der gemachten Voraussetzung wirken die Bügel wie die gezogenen Vertikalen eines Fachwerks, das druckfähige, nach der Mitte ansteigende Diagonalen enthält." In seinen Schlussfolgerungen aus den Versuchen stellte er fest (S. 192): "Die Berechnung der Bügel kann unter der Annahme erfolgen, dass alle in einem unter 45° durch den Steg gelegten Schnitt getroffenen Bügelquerschnitte die betreffende Querkraft aufzunehmen haben." Damit beantwortete Mörsch Ritters Frage nach der Zuverlässigkeit der Formel für die Beanspruchung der Bügel in positivem Sinn. Bis auf verschiedene spätere Anpassungen war die heute noch gebräuchlichste Bemessungsmethode für

die Schubbewehrung von Trägern begründet.

MOERSCH (1922) veröffentlichte die anhand der Versuche des Deutschen Ausschusses für Eisenbeton gewonnenen neuen Erkenntnisse "Über den Wert der Bügel und der Schrägeisen" (S. 99 ff.). Ueber diese Versuche berichteten C. v. BACH und O. GRAF (1911, 1912, 1921). Die Betrachtung des Verhaltens eines durch zwei symmetrische Einzellasten belasteten Balkens mit T-Querschnitt ohne Bügel, aber mit einer mit Rundhaken versehenen Längsbewehrung gemäss Bild 8.1 (c) führte ihn (S. 112) zum Schluss, dass der Gleitwiderstand zwischen Beton und Längseisen mit zunehmender Belastung sukzessive abgenommen habe, und er folgerte: "Zum Schluss konnte ein nennenswerter Gleitwiderstand nicht mehr vorhanden sein, und es musste dann eine direkte Abstützung der Last nach den Endhaken zu ... stattgefunden haben... . Die Resultierende R auf die Betonquerschnitte s-s, die oberhalb der Gleitrisse noch statisch wirksam waren, hatte also die in der Abbildung ... eingezeichnete Lage."

Für die mit Bügeln versehenen Balken überlegte er sich (S. 115 f.), dass gemäss Bild 8.1 (d) "unter der Höchstlast im Balken zwei Zustände der Spannungsverteilung übereinander gelagert seien, nämlich derjenige ..., wonach ein Teil P_H der Last sich unmittelbar nach den Endhaken abstützt und eine auf die ganze Balkenlänge gleichbleibende Zugkraft Z_H erzeugt wird, und derjenige ... (nach Bild 8.1 (b), Anm. des Verf.), wo also unter der Last P_B die Eisenzugkraft Z_B von der Stelle des grössten Momentes durch gleich grosse Gleitwiderstände nach dem Auflager hin gleichmässig auf null abnimmt, wo aber die Druckstreben und Zugvertikalen nur im untersten Teil des Balkens ausgebildet sind."

Aus der Beobachtung der sekundären Schrägrisse an den Versuchsbalken entnahm Mörsch die in Bild 8.1 (e) dargestellte Form eines Fachwerks (S. 127), "wo die flachen Druckstreben gegen die Last hin eine aufrechtere Stellung einnehmen", und bei dem die Druckstreben mit der Balkenachse geringere Winkel als 45° bilden. Aufgrund der Feststellung "Für die Bügelbeanspruchung kämen dann nur die Schrägschnitte zwischen den flacheren Druckstreben in Frage, weil nur dort die ganze Querkraft gleich dem Auflagerwiderstand aufzunehmen ist, während in den auf den Lastangriff hinauslaufenden schrägen Schnitten schon ein Teil der Last vom Auflagerwiderstand abzuziehen ist" berechnete Mörsch "durchaus mögliche Zahlen" für die Zugbeanspruchung der Bügel. Obwohl er damit die Vorstellung eines Fachwerkmodells bestätigt sah, verzichtete er im Hinblick auf die praktische Bemessung auf ein Abweichen vom alten Konzept mit unter 45° geneigten Druckstreben: "Wenn wir so eine Bestätigung der Fachwerktheorie für die Bügelberechnung gefunden haben, so müssen wir hinsichtlich der praktischen Anwendung sagen, dass es schlechterdings unmöglich ist, die Neigung der sekundären Schrägrisse rechnerisch zu ermitteln, um danach die Bügelbemessung durchzuführen. Zweckmässig wird man also für den Neigungswinkel φ (der Druckstreben, Anm. des Verf.) eine möglichst ungünstige Annahme machen, und damit kommt man zu unserer gebräuchlichen Bügelrechnung, die $\varphi = 45^\circ$ voraussetzt"

Es ist bemerkenswert, dass Mörsch zur Interpretation von Versuchsergebnissen von den mit den Bildern 8.1 (c), (d) und (e) veranschaulichten Vorstellungen einer direkten Abstützung oder Strebenwirkung (c), einer Kombination von Fachwerkwirkung und Strebenwirkung (d) und einer Kombination von Fachwerkwirkung mit flacher Druckstrebenneigung mit einer Fächerwirkung bei den Lasteinleitungsstellen (e) ausging. Für die praktische Bemessung der Bügel in Trägerstegen beschränkte er sich hingegen ausdrücklich auf die Anwendung der 45° -Fachwerkmodellvorstellung.

Vor dem Hintergrund der Mörschschen Vorstellungen erscheinen die in den beiden folgenden Abschnitten dargelegten neueren Bestrebungen, die dahingehen, auf der Grundlage der

Plastizitätstheorie eine mögliche Tragwirkung als Fachwerk mit optimaler Druckstrebenneigung, eine Streben- oder Bogenwirkung und eine Fächerwirkung sowie kombinierte Tragwirkungen für die Bemessung ausdrücklich in Betracht zu ziehen, aus statischer Sicht nicht so revolutionär, wie sie vielfach dargestellt werden. Als wesentliche neue Aspekte sind vielmehr das Vorgehen im Rahmen einer auf einheitlichen Annahmen fussenden Theorie und die Verknüpfung mit kinematischen Ueberlegungen zu nennen.

MDERSCH (1922) entwickelte auch Formeln zur Berechnung der Bewehrung von kreiszylindrischen und prismatischen Körpern mit Rechteckquerschnitt unter reiner Torsion (S. 268 ff.). Er ging dabei von der in Versuchen gemachten Beobachtung von unter 45° geneigten "Druckgewölben" oder "Druckstreifen" im Beton aus und kam bezüglich den mit Längseisen und Ringen oder mit Spiralen unter 45° bewehrten Torsionszylindern zum Schluss (S. 273): "Längseisen und Ringe zusammen erhöhen den Widerstand gegen Drehung, aber nicht indem sie direkt Schubspannungen aufnehmen würden, sondern weil sich ein neues Gleichgewichtssystem zwischen den Druckstreifen und der Bewehrung bilden kann, nachdem die Zugrisse in schräger Richtung eingetreten sind. Diese Bewehrungsart bleibt aber in ihrer Wirkung weit hinter den Spiralen zurück, die ohne weiteres imstande sind, die vorher im Beton wirksam gewesenen Zugkräfte zu übernehmen. Diese Torsionsversuche haben damit zu einem Ergebnis geführt, das ähnlich auch bei den Versuchen über die Schubwirkung bei Plattenbalken erhalten wurde. Auch hier zeigt sich, dass die vertikalen Bügel keine horizontalen Schubkräfte übertragen können, sondern dass sie nach Eintritt der schrägen Schubrisse auf Zug wirken und so einen neuen Zustand des Gleichgewichtes ermöglichen. Die Schrägeisen sind den Bügeln überlegen, weil sie direkt die schiefen Zugspannungen des Betons aufnehmen können." Für rechteckige Torsionskörper mit Spiralbewehrung unter 45° berechnete Mörsch die Kräfte im Beton und in der Bewehrung sinngemäss aufgrund einer Fachwerkvorstellung mit unter 45° geneigten Betondruckstreben (S. 281 f.).

In den vergangenen beiden Jahrzehnten wurden die Vorstellungen von Mörsch unter Zugrundelegung der Plastizitätstheorie weiterentwickelt und verallgemeinert. LAMPERT (1970) berechnete den Bruchwiderstand von unterarmierten, durch Umlauftorsion, Biegung und Normalkraft beanspruchten Trägern unter Zugrundelegung eines räumlichen Fachwerkmodells mit "variabler Diagonalenneigung" (besser: optimaler Druckstrebenneigung). Aufgrund von Versuchen schlug er eine Beschränkung des Winkels zwischen Betondruckstreben und Trägerachse auf den durch die Werte $\arctan 0.5$ und $\arctan 2$ begrenzten Bereich vor. In den Arbeiten von GROB (1975), LUECHINGER (1977) und THUERLIMANN, GROB und LUECHINGER (1975) wurde die räumliche Fachwerkmodellvorstellung mit optimaler Druckstrebenneigung zur Bestimmung des Bruchwiderstandes von Trägern mit dünnwandigem offenem Querschnitt und von Kastenträgern unter Torsion, Biegung und Querkraft angewendet.

MUELLER (1976, 1978, 1979) zeigte, dass die statischen Annahmen des Fachwerkmodells mit optimaler Druckstrebenneigung den Verhältnissen von Regime I ($f_t = 0$) der in Bild 7.1 (f) dargestellten Fliessbedingung und den üblichen Annahmen der Balkentheorie entsprechen. Für Träger mit dünnwandigem, geschlossenem Querschnitt unter konstantem Torsions- und Biegemoment gab er nichttriviale, kinematisch zulässige Verschiebungszustände an, welche mit dem statisch zulässigen und stabilen Spannungszustand gemäss Fachwerkmodell verträglich sind. Damit ergänzte er die statische Fachwerkmodellösung für diesen Fall in aller Strenge zu einer vollständigen Lösung im Sinne von Abschnitt 5.2.

8.2 Träger und Scheiben mit Rechteckquerschnitt

Mit Bild 8.2 wird die bereits von Mörsch gemäss Bild 8.1 (c) in Betracht gezogene *direkte Abstützung* oder *Strebenwirkung* mit Hilfe der Traglastverfahren untersucht. Betrachtet wird eine Scheibe mit Rechteckquerschnitt. Ihr Eigengewicht wird vernachlässigt. Da die Querschnittsabmessungen für die Rechnung unwesentlich sind, werden die Beträge von Scheibendicke und Scheibenhöhe einfachheitshalber gleich eins gesetzt. Für die in Bild 8.2 (a) eingetragenen Kräfte V und H resultiert damit die Dimension einer Spannung.

Gemäss Bild 8.2 (a) wird die an ihrem unteren Rand entlang BC aufgelagerte Scheibe an ihrem oberen Rand durch eine im Abstand $(a + V/f_c)$ von der Auflagerreaktion wirkende Vertikalkraft V entlang EF belastet. Einzige Bewehrung sei eine parallel zum unteren Scheibenrand angeordnete Längsbewehrung, deren Fliesskraft $H = \omega \cdot f_c$ entlang AB auf die Scheibe übertragen werde. ω bezeichnet den mechanischen Längsbewehrungsgehalt. Dieser ist mit dem geometrischen Bewehrungsgehalt μ über die Beziehung $\omega = \mu \cdot f_y / f_c$ verbunden, vgl. (7.10). Die Betonzugfestigkeit wird vernachlässigt, $f_t = 0$.

Dem Spannungszustand in den beiden Dreiecken ABC und DEF in Bild 8.2 (a) entspricht Punkt E in Bild 6.1 (b), und in der Strebe ACDF herrscht ein einachsiger Druckspannungszustand an der Flieessgrenze. Der ganze Spannungszustand ist statisch zulässig und stabil. Die Wirkungslinien der Kräfte H und V treffen sich in den Mitten der Strecken AC und DF, und durch diese Punkte geht auch die strichpunktiert gezeichnete Wirkungslinie der resultierenden Strebenkraft. Die Wirkungslinie der resultierenden Strebenkraft kann man als Fachwerkstab auffassen und die Schnittpunkte der Wirkungslinien von V und H an den Stabenden als Fachwerkknoten. Durch Berücksichtigung der endlichen Betondruckfestigkeit f_c erhält man gleichsam durch Aufblasen des Fachwerkstabes eine endliche Breite der Betondruckstrebe und dreieckförmige Knotenbereiche mit endlicher Ausdehnung.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABC und FGA in Bild 8.2 (a) folgt die Beziehung

$$\frac{\omega}{(V/f_c)} = \frac{a + (V/f_c)}{1 - \omega} \quad , \quad (8.1)$$

und daraus erhält man

$$V = \frac{f_c}{2} \cdot (\sqrt{4 \cdot \omega \cdot (1 - \omega)} + a^2) - a \quad \left[\omega \leq \frac{1}{2} \right] \quad (8.2)$$

und für grosse ω

$$V = \frac{f_c}{2} \cdot (\sqrt{1 + a^2}) - a \quad \left[\omega \geq \frac{1}{2} \right] \quad (8.3)$$

In den Bildern 8.2 (b), (c) und (d) sind nichttriviale, kinematisch zulässige Verschiebungszustände dargestellt, welche mit dem Spannungszustand von Bild 8.2 (a) verträglich sind. Die Beziehungen (8.2) und (8.3) liefern die exakte Traglast. In Bild 8.2 (e) ist der Verlauf von V/f_c in Abhängigkeit von a für die Werte $\omega = .1$, $\omega = .2$ und $\omega \geq .5$ dargestellt.

Beim Bruchmechanismus Bild 8.2 (b) ist die Gerade CF eine Gleitlinie. Es ergibt sich eine rein translatorische Relativverschiebung $[du]$ der starr bleibenden Scheibenteile FGBC und EFC links und rechts der Gleitlinie. Nach Abschnitt 7.2 kann die Gerade CF als Charakteristik aufgefasst werden. Die zu CD parallele Hauptspannungsrichtung halbiert den Winkel zwischen der Normalen auf den Relativverschiebungsvektor $[du]$ und der Geraden CF.

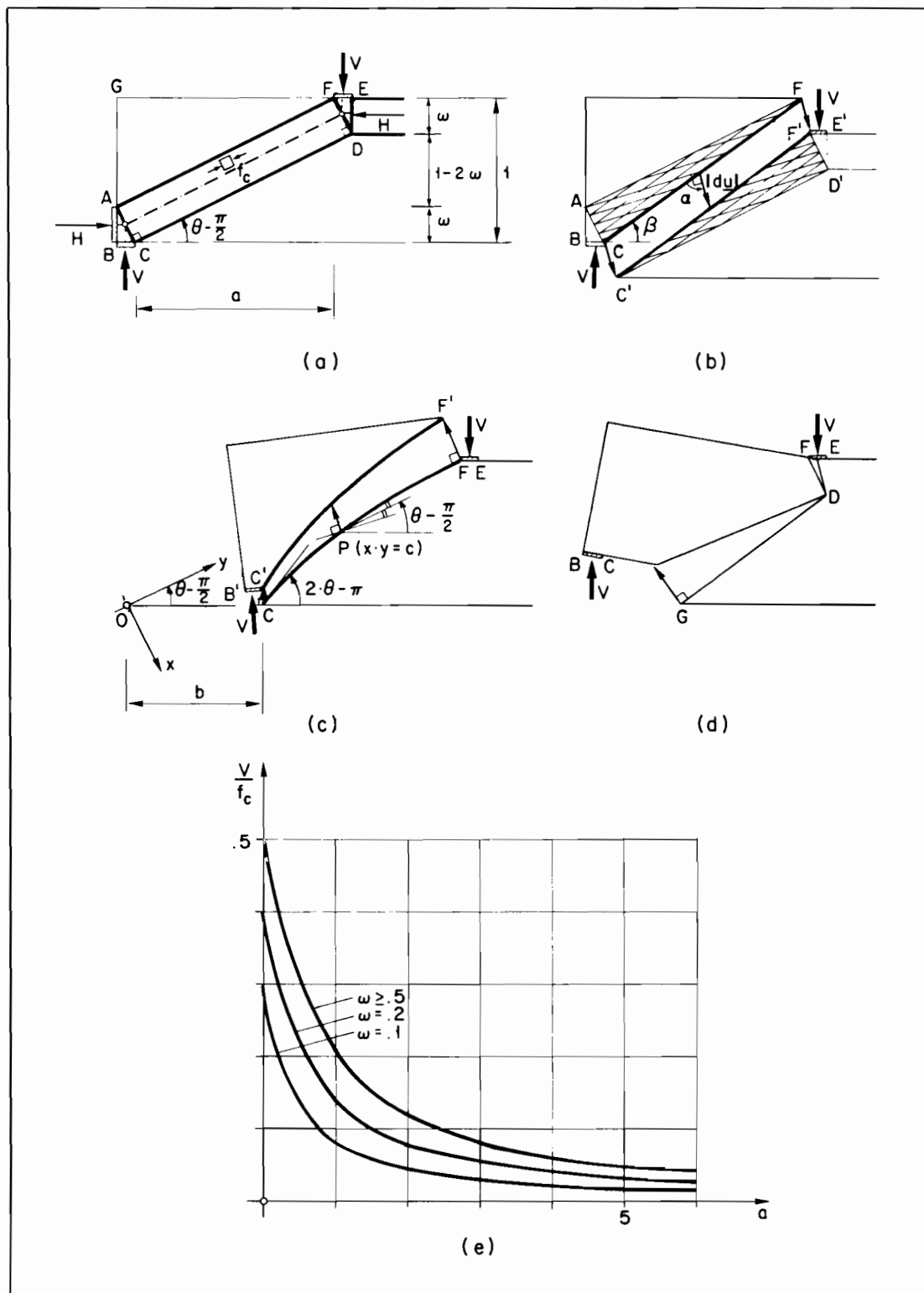


Bild 8.2: Strebenwirkung – keine Schubbewehrung

$[du]$ ist demnach zu der unter dem Winkel $(\alpha + \beta - \frac{\pi}{2})$ geneigten Geraden AD orthogonal. Die Länge der Strecke AD ist gleich derjenigen von CF, also mit $\beta = \operatorname{arccot} a$ gleich $1/\sin\beta$. Aus Bild 8.2 (a) entnimmt man die Beziehung

$$\frac{-\cos(\alpha+\beta)}{\sin\beta} = 1-2\cdot\omega \quad \left[\omega \leq \frac{1}{2}\right] \quad (8.4)$$

für den Winkel α . Für grosse ω gilt

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \quad \left[\omega \geq \frac{1}{2}\right], \quad (8.5)$$

d.h., es ergibt sich eine Relativverschiebung in vertikaler Richtung, und die Längsbe-
wehrung bleibt starr.

Beim Bruchmechanismus Bild 8.2 (c) rotiert der starre Scheibenteil B'C'F' links einer ge-
krümmten Gleitlinie CPF relativ zum Teil CFE rechts dieser Linie um das auf der Verlänge-
rung von BC liegende Momentanzentrum O. In einem beliebigen Punkt P auf CF muss die unter
dem Winkel $\theta - \frac{\pi}{2}$ gegenüber BC geneigte Hauptrichtung den Winkel zwischen der Tangente an
die Gleitlinie in P und der Normalen OP auf den Relativverschiebungsvektor in P halbieren.
Mit den kartesischen Koordinaten x und y mit Ursprung in O gemäss Bild 8.2 (c) erhält man
damit die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \quad (8.6a)$$

mit der Lösung

$$x \cdot y = c, \quad (8.6b)$$

d.h. die Gleitlinie ist eine Hyperbel. Das Momentanzentrum O liegt in jedem Fall auf der
Verlängerung der Geraden DA in Bild 8.2 (a). Gemäss (8.6b) gilt nämlich für die Koordina-
ten der Punkte C und F

$$x_C \cdot y_C = x_F \cdot y_F = c.$$

Da ferner die Beziehungen

$$x_A = x_F, \quad y_A = y_C, \quad x_D = x_C, \quad y_D = y_F$$

bestehen, folgt

$$\frac{x_A}{y_A} = \frac{x_D}{y_D}, \quad (8.7)$$

d.h. die Geraden DA und DD fallen zusammen. Der Wert c folgt aus der Bedingung, dass die
Hyperbel (8.6b) durch C(F) geht. Der Abstand b des in Bild 8.2 (c) willkürlich auf der
Verlängerung von BC gewählten Momentanzentrums O ergibt sich aus dem Schnitt der Geraden
BC und AD. Für den Grenzfall, bei dem O mit A zusammenfällt, degeneriert die Hyperbel
(8.6b) zur Linie CAF. Der Beton wird entlang CA gestaucht, und entlang AF ergibt sich ein
Kollapsriss. Für den anderen Grenzfall, bei dem O im Unendlichen liegt, resultiert wie-
derum der Translationsmechanismus Bild 8.2 (b). Die Hyperbel ist zur Geraden degeneriert.
Für Momentanzentren rechts von DF und nach oben konkave Hyperbeln gelten die Ueberlegun-
gen sinngemäss.

Beim Bruchmechanismus Bild 8.2 (d) rotiert der starre Scheibenteil BCGDF relativ zum ebenfalls starren Teil EFDG um das Momentanzentrum D. Entlang DF wird der Beton gestaucht, und entlang DG ergibt sich ein Kollapsriss. Der Mechanismus entspricht für $G \equiv C$ dem Grenzfall mit Momentanzentrum im Endpunkt D der Verlängerung von AD, bei dem die hyperbelförmige Gleitlinie CF zu den Schenkeln des rechten Winkels CDF degeneriert. Wegen der Annahme $f_t = 0$ ist die Lage von G im spannungsfreien Gebiet rechts von C beliebig. Anstatt entlang DF kann Betonstauchen auch entlang DE eingeführt werden. Ergänzt man dies mit einem vertikalen Kollapsriss DG, so erhält man das bekannte Bild eines Biegebruchmechanismus.

Die bisherigen Überlegungen mit der kinematischen Methode erfüllen die Forderung nach Verträglichkeit mit dem Spannungszustand im Beton. Sie gelten uneingeschränkt, wenn die Kraft $H = \omega \cdot f_c$ als äussere Horizontalkraft entlang AB auf den Beton übertragen wird. Entspricht hingegen H wie vorausgesetzt der Fliesskraft einer zum Scheibenrand parallelen Längsbewehrung, so sind einige Ergänzungen hinsichtlich der kinematischen Zulässigkeit der untersuchten Mechanismen nötig. Es wird angenommen, die Längsbewehrung bestehe aus einer oder mehreren zum Scheibenrand parallelen Lagen. Sie übertrage die im Abstand $\frac{\omega}{2}$ vom unteren Scheibenrand wirkende resultierende Fliesskraft H über eine starre Lastverteilplatte AB auf den Beton. Kinematische Zulässigkeitsbedingung ist, dass die Längsbewehrung in keinem Fall gestaucht wird. Für $\omega < \frac{1}{2}$ und Momentanzentren auf der Verlängerung von DA links von A folgt, dass nur solche Mechanismen zulässig sind, deren Momentanzentren unterhalb der Verlängerung der untersten Lage der Längsbewehrung liegen. Für Mechanismen mit Momentanzentren rechts von D auf der Verlängerung von AD ergibt sich keine solche Beschränkung. Für $\omega \geq \frac{1}{2}$ ist auf der horizontalen Verlängerung von DA links von A einzig ein im Unendlichen liegendes Momentanzentrum und damit eine reine vertikale Translation entlang der Geraden CF möglich. Die Längsbewehrung bleibt dabei starr. Der Grenze $\omega = \frac{1}{2}$ zwischen fliessender und starrer Längsbewehrung entspricht auch gerade die Zulässigkeitsgrenze von Mechanismen mit Momentanzentren rechts von D auf der Verlängerung von AD, für die in jedem Fall eine Dehnung der Bewehrung resultiert. Schliesslich sei noch bemerkt, dass durch Linearkombination der hier betrachteten kinematisch zulässigen Mechanismen beliebige weitere zulässige Mechanismen gewonnen werden können.

Wird die Längsbewehrung mit der Fliesskraft $\omega \cdot f_c$ nicht im Abstand $\frac{\omega}{2}$ vom unteren Scheibenrand angeordnet, sondern, wie dies oft geschieht, am unteren Scheibenrand selbst, so können alle bisherigen Überlegungen weiter verwendet werden. Es ist lediglich zu beachten, dass das einachsige Druckspannungsfeld ACDF in Bild 8.2 (a) nach links fortzusetzen ist und dementsprechend das Dreieck ABC mit dem zweiachsigen Druckspannungszustand entfällt. Der Vergrösserung des Hebelarms der inneren Kräfte im Schnitt ED von $(1-\omega)$ auf $(1-\omega/2)$ entspricht die Verminderung der Auflagerpressung bei BC von f_c auf $f_c \cdot \cos^2 \theta$ und damit eine Vergrösserung des Abstandes $(a + V/f_c)$ zwischen Vertikalkraft V und Auflagerreaktion um $V \cdot \tan^2 \theta / (2 \cdot f_c)$. Vielfach wird die Auflagerbreite geringer sein als $V/(f_c \cdot \cos^2 \theta)$. Eine statisch zulässige Fortsetzung des Spannungszustandes wird in solchen Fällen jedoch oft möglich sein, wenn die Scheibe einen beim Auflager überstehenden Teil besitzt, der etwa mit vertikalen Bügeln und mit einer Längsbewehrung am oberen Scheibenrand versehen wird.

Die anhand von Bild 8.2 gewonnenen Ergebnisse sind direkt anwendbar auf Konsolen und Balken ohne Schubbewehrung unter konzentrierten Einzellasten. Sie können ferner als Grundlage zur Untersuchung einer beliebigen *Fächerwirkung* betrachtet werden. In der Tat erhält man durch Addition mehrerer Streben ein diskretisiertes Abbild eines kontinuierlichen Fächers. Ferner ist zu beachten, dass die erhaltenen Lösungen nicht nur unter der Voraussetzung eines ebenen Spannungszustandes Gültigkeit haben, sondern auch für den

ebenen Fliesszustand, solange $\tan(\theta - \frac{\pi}{2}) \leq \frac{1}{2}$ ist. Damit sind sie auch für Probleme der Traglast von Platten in weiten Bereichen nicht lediglich als Lösungen nach der statischen Methode, sondern als vollständige Lösungen zu betrachten.

DRUCKER (1961) untersuchte Streben- und Bogenwirkung in Balken mit Rechteckquerschnitt unter Einzellasten und gleichmässig verteilter Belastung mit Hilfe der Traglastverfahren. Er beschrieb den in Bild 8.2 (a) dargestellten Spannungszustand und gab als damit verträgliche Mechanismen Biegebruchmechanismen mit vertikalen Kollapsrissen DG gemäss Bild 8.2 (d) an. NIELSEN et al. (1976) untersuchten ebenfalls den in Bild 8.2 (a) dargestellten Spannungszustand und gaben als verträglichen Mechanismus den Translationsmechanismus Bild 8.2 (b) an. MUELLER (1978) untersuchte die Tragwirkung von rechteckigen Scheiben, die an zwei gegenüberliegenden Seiten an starre Körper anschliessen. Für die direkte Abstützung in solchen Scheiben ohne Schubbewehrung entspricht das von ihm untersuchte Spannungsfeld dem durch vertikale Linien durch die Punkte C und F definierten Ausschnitt der Grösse $a \cdot 1$ aus Bild 8.2 (a). Als verträgliche Mechanismen gab Müller die in Bild 8.2 (b) und (c) dargestellten Starrkörpermechanismen an. Wegen der starren vertikalen Berandung durch C fand er für den zweiten Mechanismus die kinematische Zulässigkeitsbedingung $\theta \leq 3 \cdot \pi/4$. Als neues Ergebnis der vorliegenden Arbeit ist der Nachweis zu betrachten, dass die Momentanzentren der allgemeinen Rotationsmechanismen mit hyperbelförmigen Gleitlinien durch C und F in jedem Fall auf den beiderseitigen Verlängerungen der Geraden AD liegen.

Als nächstes Beispiel wird bei sonst gleichen Voraussetzungen mit Bild 8.3 der Einfluss von Normalkräften untersucht.

Die Normalkraft $N = v \cdot f_c$ wirke wie in Bild 8.3 (a) angegeben im Abstand d vom oberen Scheibenrand. Zur Druckstrebe EIJL infolge $H = \omega \cdot f_c$ tritt die Strebe ACLQ infolge N hinzu. Dem Spannungszustand in den Bereichen ABC, DFGIE und JKMPQL entspricht wiederum Punkt E in Bild 6.1 (b) und in den Rechtecken BDEC, EIJL und ACLQ herrscht ein einachsiger Druckspannungszustand an der Fliessgrenze. Mit einfachen geometrischen Überlegungen anhand von Bild 8.3 (a) erhält man unter den Voraussetzungen

$$\frac{v}{2} \leq d, \quad \frac{v}{2} \leq 1-d; \quad \omega \leq 1-d - \frac{v}{2} \quad (8.8)$$

die Beziehung

$$\frac{d - \frac{v}{2}}{a + \frac{v}{f_c}} \cdot v + \frac{1-v-\omega}{a + \frac{v}{f_c}} \cdot \omega = \frac{v}{f_c}, \quad (8.9)$$

welche für $v = 0$ oder für $d = 1 - \frac{v}{2}$ und $\omega = 0$ wieder auf (8.1) führt. Aus (8.9) folgt

$$v = \frac{f_c}{2} \cdot \left(\sqrt{4 \cdot v \cdot \left(d - \frac{v}{2}\right) + 4 \cdot \omega \cdot (1-v-\omega) + a^2} - a \right), \quad (8.10)$$

wobei ausser den Ungleichungen (8.8), namentlich der dritten dieser Bedingungen, noch die Restriktion

$$\omega \leq \frac{1}{2} - \frac{v}{2} \quad (8.11)$$

zu beachten ist. Für $d \leq \frac{1}{2}$ stellt (8.11) die strengere Bedingung für ω dar, und für $d \geq \frac{1}{2}$ ist die dritte Ungleichung (8.8) massgebend. Durch Ersetzen von ω durch $(1-d - \frac{v}{2})$ folgt aus (8.10)

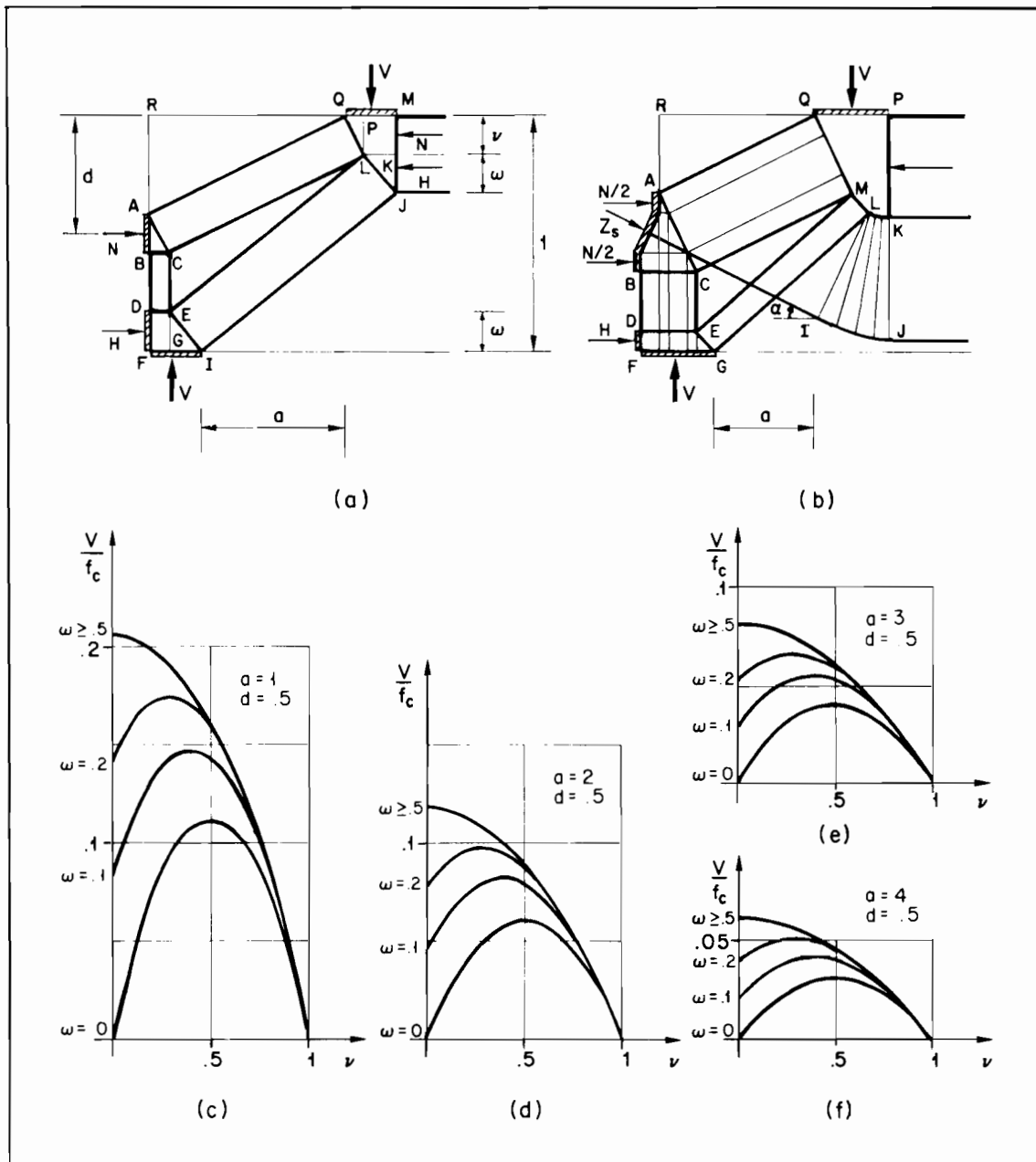


Bild 8.3: Strebenwirkung – Einfluss von Normalkräften

$$V = \frac{f_c}{2} \cdot \left(\sqrt{4 \cdot \left(d - \frac{v}{2}\right) \cdot \left(1 - d + \frac{v}{2}\right) + a^2} - a \right) \quad \left[d \geq \frac{1}{2}, \omega \geq 1 - d - \frac{v}{2} \right] \quad (8.12)$$

und entsprechend durch Ersetzen von ω durch $\left(\frac{1}{2} - \frac{v}{2}\right)$

$$V = \frac{f_c}{2} \cdot \left(\sqrt{4 \cdot v \cdot \left(d - \frac{v}{2}\right) + (1-v)^2 + a^2} - a \right) \quad \left[d \leq \frac{1}{2}, \omega \geq \frac{1}{2} - \frac{v}{2} \right] \quad (8.13)$$

Für $d = \frac{1}{2}$ liefern sowohl (8.12) als auch (8.13)

$$V = \frac{f_c}{2} \cdot \left(\sqrt{1 - v^2 + a^2} - a \right) \quad \left[d = \frac{1}{2}, \omega \geq \frac{1}{2} - \frac{v}{2} \right] \quad (8.14)$$

und damit bestätigt man für $v = 0$ die Beziehung (8.3). Unter derselben Voraussetzung führt die der Restriktion (6.11) unterworfenene Beziehung (8.10) auf (8.2).

In Anlehnung an die mit Bild 8.2 angestellten Überlegungen können nichttriviale, kinematisch zulässige und mit dem in Bild 8.3 (a) dargestellten Spannungszustand verträgliche Mechanismen einfach angegeben werden. Für den durch (8.10), (8.11) und (8.8) bestimmten Fall mit fließender Bewehrung kann ein Biegebruchmechanismus gemäß Bild 8.2 (d) mit Momentanzentrum J, Betonstauchen entlang JQ und einem Kollapsriss unterhalb J zugeordnet werden. Verschwindet das spannungsfreie Dreieck CEL, so liefert ein Translationsmechanismus gemäß Bild 8.2 (b) mit einer vertikalen Relativverschiebung entlang der geraden Gleitlinie IQ wiederum die für nicht fließende Bewehrung geltende Beziehung (8.12).

In den Bildern 8.3 (c) bis (f) sind die Beziehungen (8.10) und (8.14) für $d = \frac{1}{2}$ und vier verschiedene a ausgewertet.

J.F. JENSEN (1979) behandelte für zentrische Normalkraft, $d = \frac{1}{2}$, ebenfalls den in Bild 8.3 (a) dargestellten Spannungszustand. Er nahm an, die Längsbewehrung sei am unteren Scheibenrand angeordnet und ihre Wirkung $H = \omega \cdot f_c$ könne im Überstehenden Scheibenteil vom Auflager so übertragen werden, dass sie entlang der Strecke DF eine gleichmässige Betonpressung vom Betrag f_c hervorrufen. Damit berechnete er die für $d = \frac{1}{2}$ aus (8.10) folgende Beziehung für V und für $v \geq 1-2\omega$ die Gleichung (8.14). Durch Betrachtung eines Bruchmechanismus mit Momentanzentren in den Punkten D und J, Betonstauchen längs den Geraden DI und JQ sowie einem Kollapsriss JI bestätigte er die erhaltenen Ausdrücke für V .

Jensens Vorgehen ist offensichtlich korrekt, solange $H = \omega \cdot f_c$ einfach als äussere Normalkraft betrachtet wird, die im Abstand $\omega/2$ vom unteren Scheibenrand wirkt. Entspricht jedoch H einer Bewehrung mit Verbund, so müsste diese entweder selbst im Abstand $\omega/2$ vom unteren Scheibenrand angeordnet sein, wenn man sich auf eine Lage beschränkt, und dann dürfte entlang DI kein Betonstauchen auftreten, da die Bewehrung sonst gestaucht würde, oder aber es müsste die Fortsetzung des Spannungszustandes im links über das Auflager auskragenden Scheibenteil richtig diskutiert werden, wie dies oben für den Fall einer einzigen Betondruckstrebe angedeutet wurde. Wesentlich ist die Tatsache, dass für fließende Bewehrung in jedem Fall ein verträglicher Biegebruchmechanismus gefunden werden kann. Auf diese Zusammenhänge hat der Verfasser bereits in der Diskussion zu Jensens Beitrag hingewiesen, vgl. ROSTAM (1979, S. 134).

Für den in Bild 8.3 (b) dargestellten Fall mit einer zusätzlichen, unter dem Winkel α geneigten Bewehrung mit Fließkraft Z_s können die Beziehungen (8.8) bis (8.14) weiter verwendet werden, wenn v um den Betrag $Z_s \cdot \cos \alpha / f_c$ erhöht wird und für V der Beitrag der Vertikalkomponente $Z_s \cdot \sin \alpha$ berücksichtigt wird. Der Anteil $Z_s \cdot \sin \alpha$ an V wird entlang KL aus dem fächerartigen Druckfeld IJKL auf den zweiachsig beanspruchten Bereich KLMQP übertragen. Als verträgliche Mechanismen können Biegebruchmechanismen mit Momentanzentren in L oder K, Betonstauchen entlang LQ oder KP und Kollapsrisse im Winkelraum GLI oder rechts von KJ eingeführt werden. Für noch kompliziertere Fälle mit weiteren Streben ergeben sich keine grundsätzlich neuen Schwierigkeiten.

Mit Bild 8.4 wird die *Bogenwirkung* in einer gewichtlosen Scheibe mit Rechteckquerschnitt unter einer gleichmässig verteilten Belastung p untersucht. Einzige Bewehrung sei wieder eine parallel zum Scheibenrand angeordnete Längsbewehrung, deren Resultierende $H = \omega \cdot f_c$ im Abstand $\omega/2$ vom unteren Scheibenrand wirkt, und die entlang der Strecke AB in Bild 8.4 (a) eine gleichmässige Pressung vom Betrag f_c hervorruft. Die Betonzugfestigkeit wird vernachlässigt.

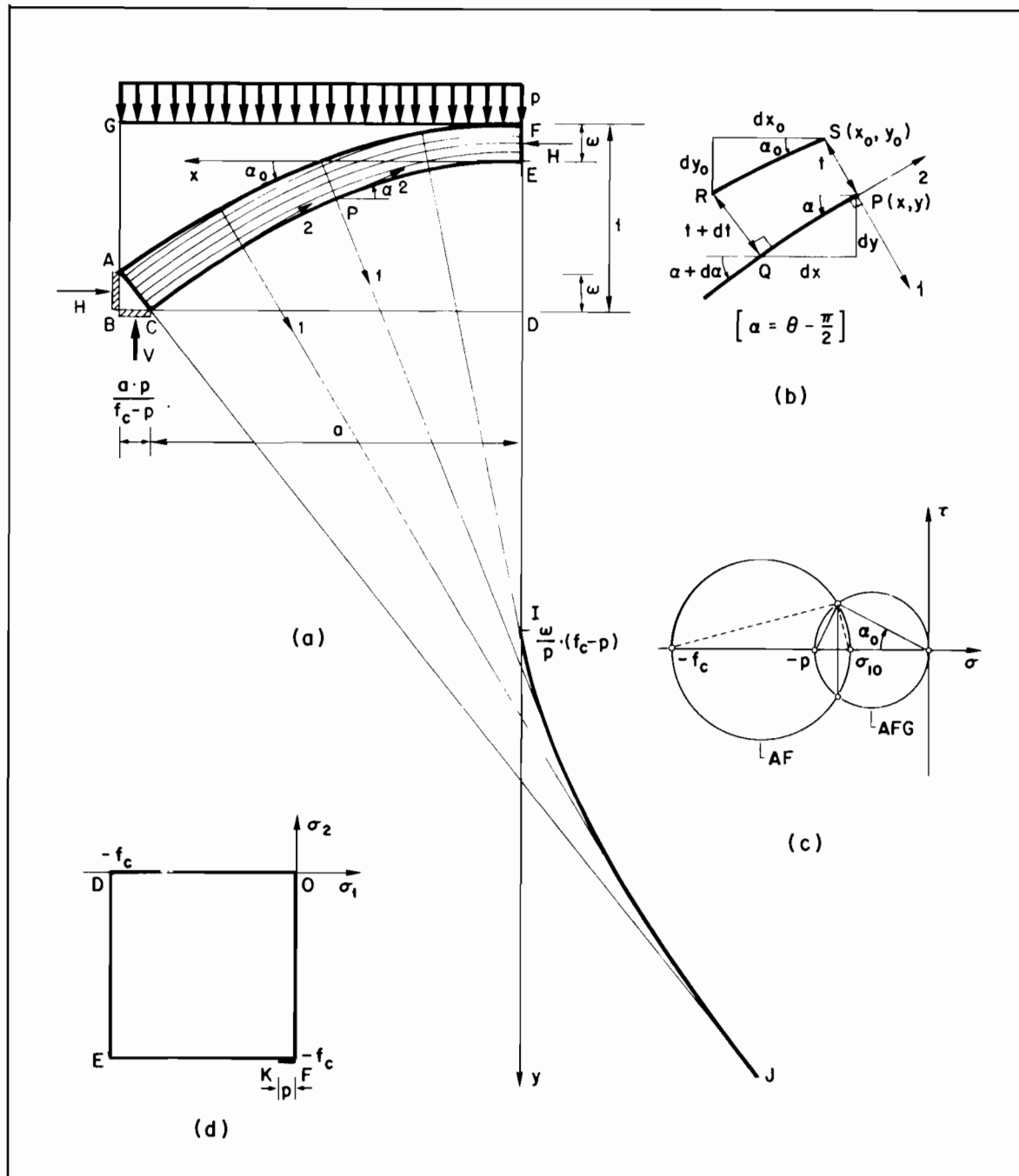


Bild 8.4: Bogenwirkung

Den Spannungszuständen in den Bereichen ABC und CDE in Bild 8.4 (a) entsprechen die Punkte E und O in Bild 8.4 (d). Im Bereich AFG herrscht ein konstanter einachsiger Druckspannungszustand $\sigma_2 = -p$, und dem Spannungszustand im Bogen ACEF entsprechen Punkte auf der Strecke FK in Bild 8.4 (d). Die Linien AF, AC und CE sind Unstetigkeitslinien des Spannungsfeldes.

Zur Untersuchung des Spannungszustandes im Bogen ACEF wird in Bild 8.4 (a) das kartesische Koordinatensystem $\{x, y\}$ mit Ursprung in E gewählt. Bild 8.4 (b) zeigt ein aus dem Bogen ACEF ausgeschnittenes Element PSRQ. Die Bogendicke wird mit t bezeichnet und der Winkel zwischen der x -Achse und der Tangente an PQ in P mit α . Die gekrümmten Trajektorien von $\sigma_2 = -f_c$ sind zu der den Winkel α mit der y -Achse einschliessenden geraden Trajektorie PS von σ_1 orthogonal. Im Unterschied zu PQ fällt der Rand SR des Elementes nicht mit einer σ_2 -Trajektorie zusammen. Der Winkel zwischen der x -Achse und der Tangente an SR in S wird

mit α_0 bezeichnet. Wegen der mit x zunehmenden Dicke t ist für positive x $\alpha_0 < \alpha$.

Da die Komponente in x -Richtung der Spannungserresultierenden am Schnitt PS in Bild 8.4 (b) gleich $H = \omega \cdot f_c$ sein muss, folgt für die Bogendicke t

$$t = \frac{\omega}{\cos \alpha} \quad . \quad (8.15)$$

Gleichgewicht der Komponenten in y -Richtung erfordert

$$[(t+dt) \cdot \sin(\alpha+d\alpha) - t \cdot \sin \alpha] \cdot f_c - p \cdot dx_0 = 0 \quad ,$$

was unter Beachtung von

$$dx_0 = dx + (t+dt) \cdot \sin(\alpha+d\alpha) - t \cdot \sin \alpha$$

und Vernachlässigung von Gliedern zweiter Ordnung zu

$$(t \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha + dt \cdot \sin \alpha) \cdot (f_c - p) - p \cdot dx = 0 \quad (8.16)$$

führt. Gleichgewicht der Komponenten in x -Richtung verlangt

$$(t+dt) \cdot \cos(\alpha+d\alpha) - t \cdot \cos \alpha = 0 \quad ,$$

was nach Bild 8.4 (b) $dy_0 = dy$ bedeutet und woraus

$$dt = t \cdot \tan \alpha \cdot d\alpha \quad (8.17)$$

resultiert. Einsetzen von (8.17) in (8.16) bringt unter Berücksichtigung von (8.15) die Differentialgleichung

$$\frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{p}{\omega \cdot (f_c - p)} \cdot dx \quad (8.18)$$

mit der Lösung

$$\tan \alpha = \frac{p \cdot x}{\omega \cdot (f_c - p)} \quad , \quad (8.19)$$

bei der die Randbedingung für $x = 0$ bereits erfüllt ist. Integration der rechten Seite von (8.19) über x ergibt die Parabelgleichung

$$y = \frac{p}{f_c - p} \cdot \frac{x^2}{2 \cdot \omega} \quad (8.20)$$

für die Bogenrandlinie EPC in Bild 8.4 (a), wobei wiederum die Randbedingung für $x = 0$ bereits berücksichtigt wurde.

Unter Beachtung von (8.16) ist

$$dx_0 = dx + \sin \alpha \cdot dt + t \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha = dx \cdot \frac{f_c}{f_c - p} \quad ,$$

und mit $dy_0 = dy$ erhält man

$$\tan \alpha_0 = \frac{dy_0}{dx_0} = y'_0 = \frac{dy}{dx} \cdot \left(1 - \frac{p}{f_c}\right) = \tan \alpha \cdot \left(1 - \frac{p}{f_c}\right) \quad . \quad (8.21)$$

Wegen $x = x_0 - t \cdot \sin \alpha$ folgt aus (8.19) und (6.15)

$$\tan \alpha = \frac{p}{f_c} \cdot \frac{x_0}{w}.$$

Einsetzen in (8.21) liefert die Differentialgleichung

$$\tan \alpha_0 = y'_0 = \frac{p}{f_c} \cdot \frac{x_0}{w} \cdot (f_c - p) \quad (8.22)$$

für die Bogenrandlinie AF in Bild 8.4 (a). Als Lösung erhält man die Parabelgleichung

$$y_0 = \frac{p \cdot (f_c - p)}{2 \cdot w \cdot f_c^2} \cdot x_0^2 - w \quad (8.23)$$

wenn die Randbedingung $y_0(0) = -w$ berücksichtigt wird.

Dem Spannungszustand im Bogen ACEF von Bild 8.4 (a) entspricht nach den Überlegungen von Abschnitt 7.2 ein parabolisches Problem mit $\sin \varphi = -1$. Die Trajektorien der variablen Hauptspannung σ_1 sind die Charakteristiken. Sie bilden eine einparametrische Geradenschar mit einer Hüllkurve. Die Spannungsdifferenz ($\sigma_1 - \sigma_2$) ist zum Abstand vom Berührungspunkt der Charakteristik mit der Hüllkurve umgekehrt proportional.

Wegen der Orthogonalität der Hauptspannungstrajektorien ist die Hüllkurve IJ in Bild 8.4 (a) gleich der Evoluten der Parabel EPC mit der Gleichung (8.20).

Aus den Formeln

$$x_H = x - \frac{y' \cdot [1 + (y')^2]}{y''}, \quad y_H = y + \frac{1 + (y')^2}{y''} \quad (8.24)$$

für die Koordinaten der Krümmungsmittelpunkte einer Kurve $y(x)$ folgen die Gleichungen

$$x_H = - \frac{p^2 \cdot x^3}{w^2 \cdot (f_c - p)^2}, \quad y_H = \frac{w \cdot (f_c - p)}{p} \cdot \left[1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{p^2 \cdot x^2}{w^2 \cdot (f_c - p)^2} \right] \quad (8.25)$$

für die Punkte auf der Hüllkurve IJ.

Für die Punkte E und F mit den Abständen $w \cdot (f_c/p - 1)$ und $w \cdot f_c/p$ von I bestätigt man mit

$$\frac{f_c}{f_c - p} = \frac{\frac{w}{p} \cdot f_c}{\frac{w}{p} \cdot (f_c - p)}$$

die umgekehrte Proportionalität der Differenz ($\sigma_1 - \sigma_2$) zum Abstand vom Berührungspunkt I der σ_1 -Trajektorie FEI mit der Hüllkurve IJ. Die Verhältnisse in einem beliebigen Punkt der Unstetigkeitslinie AF des Spannungsfeldes werden mit den Spannungskreisen in Bild 8.4 (c) illustriert. Die Normalspannung $-p \cdot \cos^2 \alpha_0$ am Bogenrand AF ist stetig. Mit (8.21) erhält man für die Hauptspannung σ_{10} gemäss Bild 8.4 (c) nach einiger Rechnung

$$\sigma_{10} = \frac{-p}{1 + \tan^2 \alpha \cdot \left(1 - \frac{p}{f_c}\right)} \quad (8.26)$$

Diese Gleichung kann auch aufgrund der Kenntnis des hyperbolischen Verlaufs von ($\sigma_1 - \sigma_2$) unter Verwendung von (8.24) und (8.15) aus der Bedingung $\sigma_1 = 0$ entlang dem Bogenrand (8.20) ermittelt werden.

Die Auflagerbreite BC in Bild 8.4 (a) ist nach (8.19) gegeben durch

$$\omega \cdot \tan \alpha(a) = \frac{p \cdot a}{f_c - p} \quad . \quad (8.27)$$

und die Auflagerreaktion V ist demnach

$$V = \frac{p \cdot a}{1 - \frac{p}{f_c}} = p \left(a + \frac{p \cdot a}{f_c - p} \right) \quad . \quad (8.28)$$

Die Momentengleichgewichtsbedingung für die verteilte Belastung p und die Kräfte V und H liefert

$$\frac{p \cdot a}{1 - \frac{p}{f_c}} \cdot \frac{a}{2} - \omega \cdot f_c \cdot (1 - \omega) = 0 \quad ,$$

woraus

$$p = f_c \cdot \frac{2 \cdot \omega \cdot (1 - \omega)}{a^2 + 2 \cdot \omega \cdot (1 - \omega)} \quad \left[\omega \leq \frac{1}{2} \right] \quad (8.29)$$

folgt. Für grosse ω ist

$$p = f_c \cdot \frac{1}{1 + 2 \cdot a^2} \quad \left[\omega \geq \frac{1}{2} \right] \quad . \quad (8.30)$$

Als mit dem untersuchten Spannungszustand verträglicher, nichttrivialer, kinematisch zulässiger Verschiebungszustand kann ein Biegebruchmechanismus mit Momentanzentrum im Punkt E von Bild 8.4 (a) betrachtet werden. Der Beton wird entlang EF gestaucht, und im Winkelraum DEC können sich ein oder mehrere Kollapsrisse mit Enden in E öffnen.

Es sei noch bemerkt, dass die Ueberlegungen anhand von Bild 8.4 ohne weiteres auf den Fall erweitert werden können, bei dem der Betonbogen nicht nur von oben, sondern auch von unten durch gleichmässig verteilte Druckspannungen in y -Richtung belastet wird, etwa durch Umlenkkräfte aus parabolisch geführten Spanngliedern. Alsdann fällt der untere Bogenrand nicht mehr mit einer Trajektorie von σ_2 zusammen.

In Bild 8.5 ist ein zweiter, statisch zulässiger und stabiler Spannungszustand für das anhand von Bild 8.4 untersuchte Problem angegeben. Die für diesen Spannungszustand charakteristische Tragwirkung wird kurz als Fächerwirkung bezeichnet. Als verträglicher, nichttrivialer, kinematisch zulässiger Verschiebungszustand kann wiederum ein Biegebruchmechanismus betrachtet werden, und die Traglast ist durch (8.29) und (8.30) bestimmt.

Dem Spannungszustand im Bereich ABC von Bild 8.5 (a) entspricht Punkt E in Bild 8.5 (b), und demjenigen im fächerförmigen Gebiet $ACEG$ entsprechen Punkte auf der Grenze OF des aplastischen Bereichs in Bild 8.5 (b). Der Spannungszustand im Bereich EFG von Bild 8.5 (a) ist konstant und entspricht Punkt K in Bild 8.4 (d). Die Linien AC und EG in Bild 8.5 (a) sind Unstetigkeitslinien des Spannungsfeldes.

Das Spannungsproblem für den Fächerbereich $ACEG$ in Bild 8.5 (a) ist parabolisch mit $\sin \varphi = 1$. Bis auf die Rollen von σ_1 und σ_2 besteht eine vollkommene Analogie zum Spannungsproblem für den Bogen $ACEF$ in Bild 8.4 (a), für welches $\sin \varphi = -1$ war. Die Trajektorien der variablen Hauptdruckspannung σ_2 bilden eine einparametrische Geradenschar. Dem Bogen EPC in Bild 8.4 (a), entlang dem $\sigma_2 = -f_c$ und $\sigma_1 = 0$ ist, entspricht die Berandung AC des Fächerbereichs in Bild 8.5 (a). Die Linie AC ist eine Parabel und genügt in dem in Bild 8.5 (c) eingetragenen Koordinatensystem der Gleichung

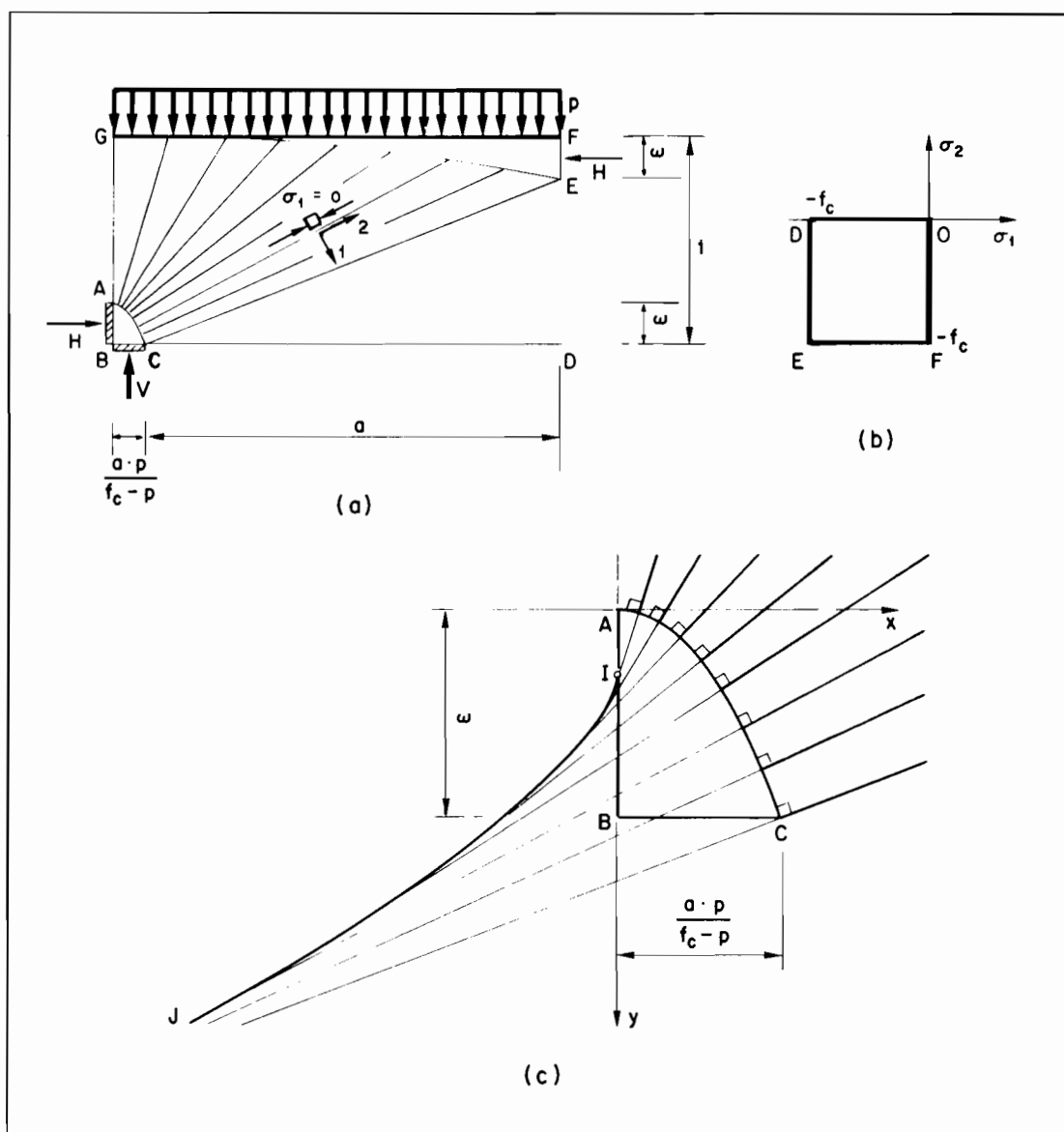


Bild 8.5: Fächerwirkung

$$y = \frac{\omega \cdot (f_c - p)^2}{a^2 \cdot p^2} \cdot x^2 \quad . \quad (8.31)$$

Die Gleichung der Hüllkurve IJ der Trajektorien von σ_2 in Bild 8.5 (c) folgt aus (8.24), und für die Kurve GE in Bild 8.5 (a) erhält man die Gleichung

$$y = -1 + \omega \cdot \left[1 - \frac{x^2}{a^2} \cdot \left(1 - \frac{p}{f_c} \right)^2 \right] \quad . \quad (8.32)$$

Ein dritter statisch zulässiger und stabiler Spannungszustand ist in Bild 8.6 angegeben. Der Spannungszustand in den Teilbereichen ABC und 1 bis 4 in Bild 8.6 (a) ist konstant. Das Gebiet CDE ist spannungsfrei. Die Lage des Punktes I folgt aus der Bedingung, dass die Resultierende des einachsigen Spannungszustandes im Gebiet 4 parallel zu dessen Rand CE wirkt, d.h. mit BCD den Winkel $\arctan [(1-\omega)/a]$ einschliesst. Beachtet man, dass sich diese Resultierende aus der Horizontalkraft H und aus der der verteilten Belastung p entlang FI entsprechenden Vertikalkraft zusammensetzt, und dass die zu AC orthogonale Resultierende aus H und der verteilten Belastung p entlang FG den Winkel $\arctan [2 \cdot (1-\omega)/a]$ mit BCD einschliesst, so folgt, dass der Punkt I die Strecke FG gerade halbiert.

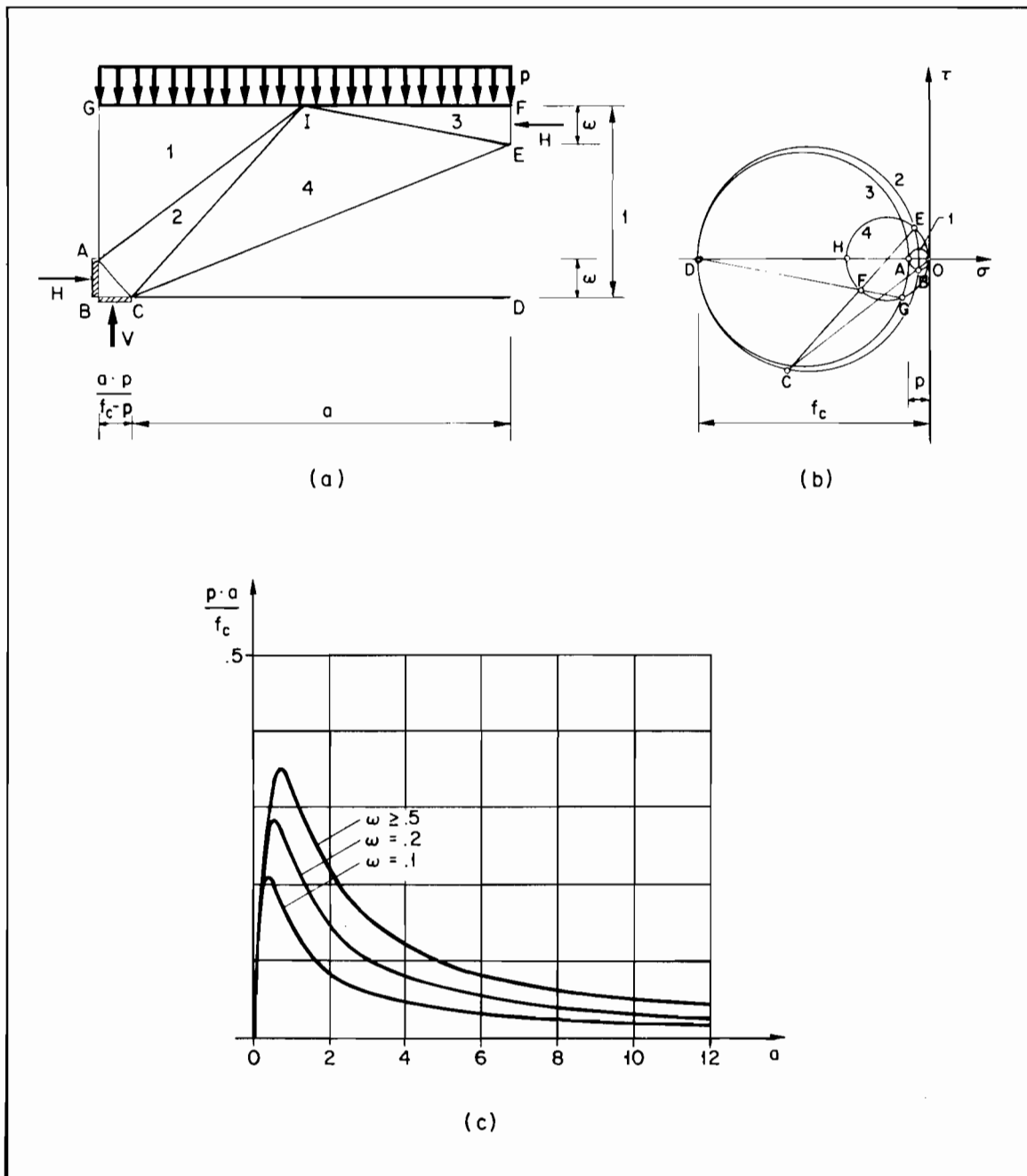


Bild 8.6: Diskontinuierliches Spannungsfeld

Damit können die in Bild 8.6 (b) dargestellten Spannungskreise gezeichnet werden. Die Punkte O, C, D und F sind die Pole der Kreise 1, 2, 3 und 4. Den stetigen Normalspannungen und Schubspannungen an den Unstetigkeitslinien AI, CI und EI in Bild 8.6 (a) entsprechen die auf den Verbindungsgeraden der zugehörigen Pole liegenden Punkte B, E und G in Bild 8.6 (b).

Wird die Bewehrung am unteren Scheibenrand BCD eingelegt, so kann das Spannungsfeld Bild 8.6 (a) weiter verwendet werden. Es ist lediglich das Gebiet 2 bis zum Schnittpunkt der Geraden AI und BCD nach links fortzusetzen. Das Gebiet ABC verschwindet. Für diesen Fall wurde das Spannungsfeld von NIELSEN (1971) angegeben.

J.F. JENSEN (1979) behandelte ebenfalls das im Bild 8.6 (a) dargestellte Spannungsfeld, wobei er allerdings voraussetzte, die Längsbewehrung sei am unteren Scheibenrand angeord-

net und ihre Wirkung $H = \omega \cdot f_c$ könne im Überstehenden Scheibenteil links vom Auflager so übertragen werden, dass sie entlang AB die gleichmässige Pressung f_c hervorrufe. Bezüglich diesem Vorgehen gelten die bereits im Anschluss an die Diskussion von Bild 8.3 (a) gemachten Bemerkungen.

In Bild 8.6 (c) sind die Beziehungen (8.23) und (8.30) für $\omega = .1$, $\omega = .2$ und $\omega \geq .5$ ausgewertet. Die dargestellten Kurven gelten für die in den Bildern 8.4, 8.5 und 8.6 untersuchten Spannungsfelder, welche alle mit einem verträglichen Biegebruchmechanismus eine vollständige Lösung abgeben und somit nicht lediglich untere Grenzwerte für die Traglast, sondern diese selbst liefern. Die unterschiedlichen Spannungsfelder illustrieren die am Ende von Abschnitt 5.3 diskutierten Ergebnisse über die Eindeutigkeit von Spannungsfeldern vollständiger Lösungen. Der Spannungszustand ist bei allen Lösungen in den Bereichen identisch, in denen sich plastische Verformungen ergeben können, nämlich entlang EF, wo der Beton gestaucht wird und im Winkelraum DEC, wo sich Kollapsrisse mit Enden in E einstellen können. In den Bereichen, die bei allen Lösungen starr bleiben, sind dagegen unterschiedliche statisch zulässige und stabile Spannungsfelder möglich.

Probleme der Tragfähigkeit von Scheiben mit Rechteckquerschnitt wurden von NIELSEN (1971) unter Zugrundelegung der Plastizitätstheorie eingehend untersucht. In Bild 8.7 sind einige von ihm angegebene Lösungen mit diskontinuierlichen Spannungsfeldern dargestellt.

Die rechteckige Scheibe ABDE in Bild 8.7 (a) wird entlang EF durch die gleichmässig verteilte Last p belastet. An den vertikalen Rändern AG und BD können Schubkräfte abgetragen werden. Den Spannungszuständen in den verschiedenen, durch Unstetigkeitslinien getrennten Bereichen entsprechen die in Bild 8.7 (b) dargestellten Spannungskreise. Das Spannungsfeld ist stabil, wenn in den Bereichen 3 und 4 eine gleichmässig verteilte horizontale Bewehrung angeordnet ist, deren Widerstand der äquivalenten mittleren Spannung $\omega \cdot f_c$ entspricht. Der Eckbereich 5 ist spannungsfrei. Die Grösse dieses Bereichs erhält man aus der Überlegung, dass sich die auf den Bereich AIH wirkenden resultierenden Kräfte im Punkt M schneiden und die Wirkungslinie ML der Spannungsergebnisse im Bereich HIL zur Geraden FH parallel ist. Der Punkt K halbiert die Strecke IJ. Damit ist die Konstruktion der Spannungskreise 1, 2, 3 und 4 mit den Polen A, B, D und E in Bild 8.7 (b) bestimmt.

Bild 8.7 (c) zeigt eine rechteckige Scheibe, welche entlang HG durch p belastet wird, und die entlang AB und CD aufgelagert ist. Da die Lastbreite HG in der Zeichnung gerade gleich der Summe der Auflagerbreiten gewählt wurde, ist $p = q$. Das Spannungsfeld ist stabil, wenn in den Bereichen 3 und 4 eine horizontale Bewehrung mit dem äquivalenten Widerstand $\omega \cdot f_c$ angeordnet ist. Die Spannungskreise in Bild 8.7 (d) sind bestimmt, sobald die Lage der Punkte E und J in Bild 8.7 (c) bekannt ist. Diese erhält man aus der Parallelität von HJ zur Geraden NQ durch den Schnittpunkt Q der auf den Bereich BKJ wirkenden Kräfte. Die Spannungskreise 1 bis 5 in Bild 8.7 (d) haben die Pole A, B, D, E und Q.

Wird die Belastung p über die gesamte Länge des Scheibenrandes DG in Bild 8.7 (a) verteilt, so fallen die Punkte E und C mit D zusammen und die Bereiche 2 und 5 verschwinden. In Bild 8.7 (c) wandern mit wachsender Lastbreite GH die Punkte G und E zum Punkt F, und die Bereiche 2 und 5 verschwinden im Grenzfall.

Bild 8.7 (e) zeigt eine Konsole ACD unter gleichmässig verteilter Belastung p . Das Spannungsfeld mit den zugehörigen Spannungskreisen in Bild 8.7 (f) ist stabil, wenn der Be-

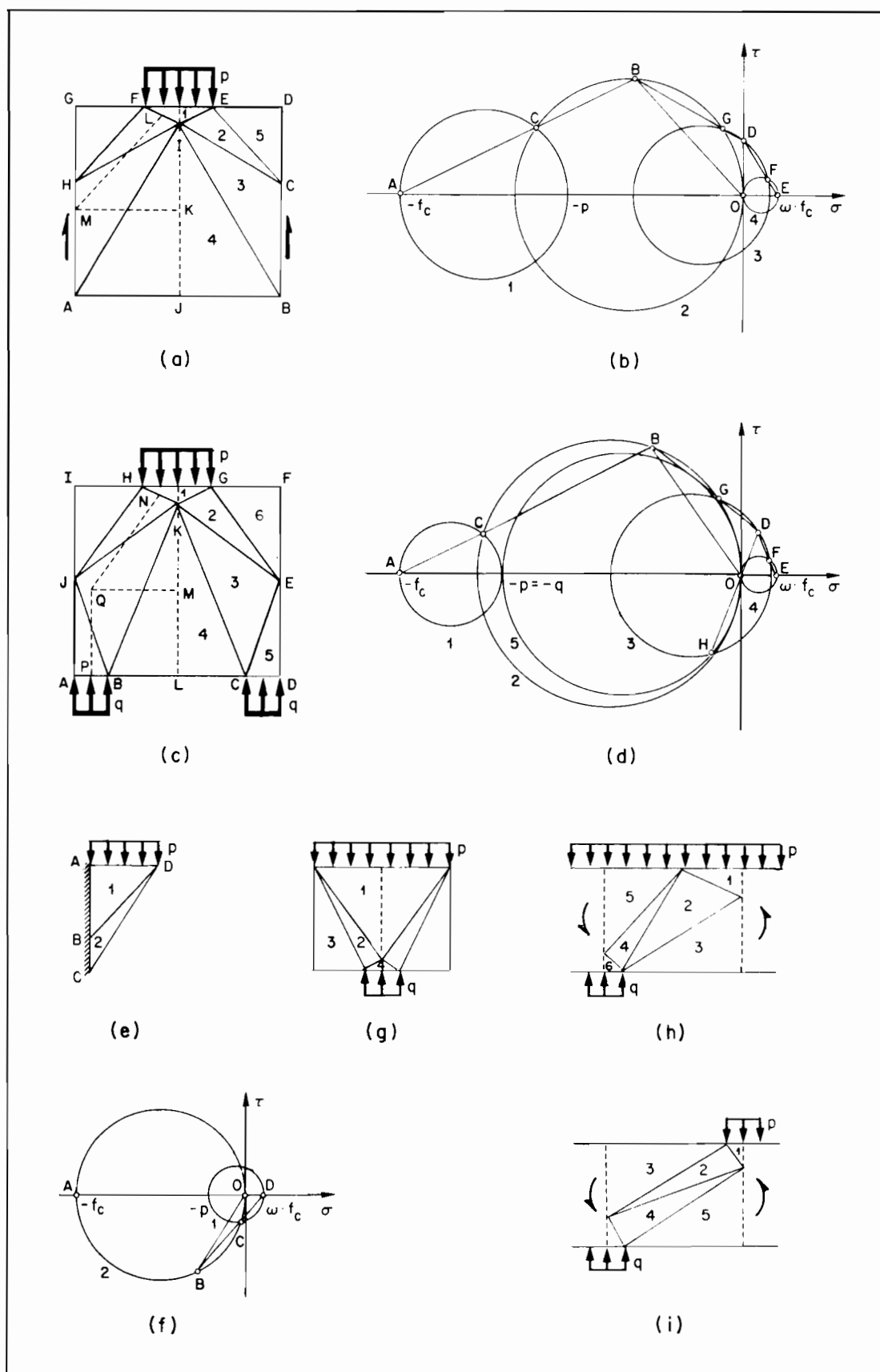


Bild 8.7: Von Nielsen untersuchte Probleme

reich 1 eine horizontale Bewehrung mit dem äquivalenten Widerstand $\omega \cdot f_c$ enthält. Als verträglicher Mechanismus kann wie für die in den Bildern 8.7 (a) und (c) dargestellten Spannungsfelder ein Biegebruchmechanismus zugeordnet werden. Der Punkt B in Bild 8.7 (e) ist Momentanzentrum, entlang BA öffnet sich ein Kollapsriss, und der Beton im Bereich 2 wird entlang der Normalen zum freien Rand CD durch B gestaucht.

Das in Bild 8.7 (g) dargestellte Spannungsfeld erhält man aus Bild 8.7 (c), wenn man dort die Punkte B und C in den Punkt L wandern lässt, die Scheibe auf den Kopf stellt und die Rollen von p und q vertauscht. Die Bereiche 4 und 5 verschwinden, und den Bereichen 3, 2, 6 und 1 entsprechen die Bereiche 1, 2, 3 und 4 in Bild 8.7 (g). Bis auf den zweiachsig gedrückten Bereich 4 entspricht die Lösung andererseits derjenigen in Bild 8.7 (e).

Für durchlaufende Scheiben mit unterschiedlichen Stützen- und Feldmomenten unter gleichmäßig verteilter Belastung und unter konzentrierter Belastung untersuchte Nielsen die in den Bildern 8.7 (h) und (i) dargestellten Spannungsfelder. Diese Felder können analog entwickelt werden, wie jene in den Bildern 8.6 (a) und 8.7 (c).

Wesentlich ist insbesondere die Feststellung, dass sich allen in Bild 8.7 gezeigten Fällen ein Biegebruchmechanismus zuordnen lässt. Dies veranlasste Nielsen (1971, S. 143) zur Bemerkung: "We can conclude that if the failure in the concrete were generally of plastic character, reinforced beams without shear reinforcement at the usual test would only fail in bending, failure of anchorage or local crushing at the forces applied or at the supports." Die Möglichkeit eines Schubversagens führte er auf das spröde Bruchverhalten des Betons zurück: "When shear failure which cannot be referred to one of these forms of failure, has been observed, it is, therefore, due to the brittle character of the failure of the concrete. As the strength must then be strongly dependent on the strain capacity and tensile strength of the concrete, it is not surprising that these tests have given very large scattering of the test results, and that it has been difficult to draw any final conclusions."

Im Hinblick auf die praktische Bemessung im allgemeinen Fall durchlaufender Scheiben kam Nielsen (1971, S. 168 f.) zum Schluss: "... it is reasonable to assume that for arbitrary loads at the top side of a continuous disc it is valid that no vertical reinforcement is necessary when the horizontal reinforcement is carried through. The dimensioning may therefore take place by dimensioning the horizontal reinforcement so that it is able to carry the moments in question. ... Furthermore, it is obvious to assume that a combination of homogeneous reinforcement and concentrated reinforcement at top and bottom is usable, if only the compressions at the concentrated forces and the supports are kept below the ultimate compressive strength. We may therefore imagine a disc dimensioned so that we are beginning by supplementing a vertical and horizontal minimum reinforcement, and provided additional reinforcement is necessary, an additional concentrated reinforcement is supplied."

Nielsens Bemerkungen bezüglich der Möglichkeit des Schubversagens von Balken ohne Schubbewehrung bedürfen einer Ergänzung. Dazu wird der mit Bild 8.2 untersuchte Fall eines Balkens unter Einzellasten betrachtet. Die in den Bildern 8.2 (b), (c) und (d) dargestellten Mechanismen führen für $\omega \leq \frac{1}{2}$ alle zu der durch (8.2) gegebenen Traglast. Nur der Mechanismus Bild 8.2 (d) ist ein Biegebruchmechanismus. Für $\omega \geq \frac{1}{2}$ fließt die Bewehrung nicht, und als Mechanismus verbleibt die Möglichkeit einer senkrecht zur Balkenachse gerichteten relativen Translation $[du]$ der beiden durch die Unstetigkeitslinie CF in Bild 8.2 (b) getrennten Balkenteile. Die Traglast für diesen Fall ist durch (8.3) gegeben. Nur für kleine und mittlere Bewehrungsgehalte, $\omega \leq \frac{1}{2}$, lässt sich demnach das Versagen

theoretisch als Biegebruch deuten. Dabei ist zu beachten, dass die Berücksichtigung der endlichen Ausdehnung der Betondruckstrabe im Vergleich zu der nach der plastischen Balkenbiegetheorie für einen an seinem unteren Rand längsbewehrten Balken berechneten Traglast eine Verminderung der Traglast um den Faktor $(1-w)/(1-w/2)$ verursacht. Durch Einführen des im Abschnitt 6.2 beschriebenen Konzeptes einer wirksamen Festigkeit f_c , die unter der an zylindrischen Prüfkörpern gemessenen einachsigen Druckfestigkeit liegt, ergibt sich eine Ernöhung der mechanischen Bewehrungsgehalte w . Für nach Balkenbiegetheorie mittlere Bewehrungsgehalte gerät man damit in den Gültigkeitsbereich $w \geq \frac{1}{2}$ der Lösung (6.3), welche theoretisch eine Deutung als Biegebruch nicht zulässt.

Für die Interpretation von Versuchen ist nach den Ueberlegungen in Abschnitt 6.2 sowohl der Einfluss der beschränkten Verformungsfähigkeit des Betons als auch derjenige seiner Zugfestigkeit zu beurteilen. Meistens führen die Vernachlässigung der Betonzugfestigkeit und der Ansatz einer im Vergleich zur einachsigen Druckfestigkeit angemessen reduzierten wirksamen Festigkeit zu befriedigenden Ergebnissen. Allerdings sollte der Wert von f_c nicht einfach aus den Bruchlasten von Balken mit den unterschiedlichsten konstruktiven Ausbildungen festgelegt werden. Vielmehr ist in jedem Fall zu prüfen, ob nicht einfach die gewählte konstruktive Ausbildung zu einem lokalen Versagen bei der Verankerung der Bewehrung oder bei den Lasteinleitungsstellen führte. Damit kann die Streuung der Versuchsergebnisse verkleinert werden.

Die Berücksichtigung der Betonzugfestigkeit wirkt sich im wesentlichen wie eine Schubbewehrung aus. Oberhalb einer bestimmten Schlankheit eines Balkens, d.h. für Werte von a , die über einer bestimmten Grenze liegen, ist die Schubtragfähigkeit von a unabhängig, und der Balken versagt auf Biegung, so wie es die Balkenbiegetheorie voraussetzt.

Wird jedoch die Betonzugfestigkeit wie für die Bemessung im Stahlbetonbau üblich vernachlässigt, so liefert die Balkenbiegetheorie im allgemeinen keine verlässlichen Werte für die Traglast. Darauf hat schon DRUCKER (1961, S.54 f.) hingewiesen: "Beam theory in fact provides neither a lower bound nor an upper bound of much value in computing load carrying capacity if a material is unable to take tension. There is no valid lower bound because there is no consideration of transmission of force from the steel to the concrete without causing any tensile stress in the idealized material or without causing appreciable tensile stress over an appreciable area in the actual concrete. The upper bound given by ordinary beam theory is likely to be far too high when the usual plane section remaining plane mode of deformation is chosen."

Nach diesen Bemerkungen werden mit Bild 8.8 die Ergebnisse von Schubversuchen an Plattenstreifen, über die MARTI, PRALONG und THUERLIMANN (1977) berichteten, mit der in diesem Abschnitt entwickelten Theorie verglichen. Die als einfache Balken gelagerten Plattenstreifen mit einer Stützweite von 2.40 m wurden durch zwei in Abständen von 0.63 m von den Auflagern symmetrisch angeordnete Einzellasten V belastet. Zur Vermeidung lokaler Brüche bei der Verankerung der Längsbewehrung und bei der Krafteinleitung an den Auflagern wurden die Plattenstreifen mit stählernen Endplatten versehen, an deren Aussenseiten die Bewehrung fixiert werden konnte. Nur der Versuchskörper PS 8 enthielt eine Schubbewehrung. Die Versuchskörper PS 9 und PS 10 waren mit je einer trapezförmig verlaufenden, nicht injizierten Litze vorgespannt. Die in der Tabelle Bild 8.8 angegebenen Werte Z_s entsprechen den beim Bruch von PS 9 und beim ersten Lastmaximum von PS 10 effektiv vorhandenen Kräften in den Litzen. Die Plattenstreifen PS 7, PS 10 und PS 11 wurden über die Endplatten zentrisch durch Normalkräfte N belastet.

Bei den Versuchen PS 6, PS 9 und PS 11 ergaben sich schlagartige Brüche in den Schubbe-

dem äquivalenten mechanischen Bewehrungsgehalt $\omega' = 0.03$ zugewiesen wird. Die theoretische Traglast V_{Th} wird dadurch um 4% erhöht. Für die Plattenstreifen PS 7, PS 9 und PS 11 liegt die Längsbewehrung zur Sicherstellung des Gleichgewichtes an der Endplatte ungefähr in der richtigen Höhe. Beim Plattenstreifen PS 10 liegt die schwache Längsbewehrung höher als mit (8.10) angenommen, $\omega/2 = .02 < .10$. Die theoretische Traglast wird bei Berücksichtigung dieses Einflusses um 2% auf $V_{Th} = 80$ kN vermindert.

Beim Plattenstreifen PS 8 konnte sich dank der schwachen Schubbewehrung eine Kombination von Strebenwirkung und Fächerwirkung ausbilden. Die Schubbewehrung allein konnte nicht die ganze Querkraft V_{Exp} aufnehmen. Die Dehnung der Längsbewehrung bei den Auflagern betrug beim Erreichen der Höchstlast etwa 1.5‰ und wuchs bis zu den Lasteinleitungsstellen ungefähr linear bis zur Dehnung bei Fließbeginn von 2.6‰ an. Für diesen Fall liefert der aus der plastischen Balkenbiegetheorie folgende Wert $V_{Th} = 135$ kN eine gute Abschätzung für die tatsächliche Höchstlast vor dem Biegebruch.

Die Uebereinstimmung der theoretischen Traglasten mit den experimentellen Bruchlasten ist befriedigend. Die Werte V_{Th} für die Versuche PS 7, PS 8 und PS 10 liegen zwischen den experimentellen Werten für V am Anfang und am Ende der massgebenden Belastungsstufen, bei denen die Verformungen konstant gehalten wurden und damit eine gewisse Relaxation auftreten konnte. Bei der Beurteilung der Werte V_{Th} und V_{Exp} für den Versuch PS 6 kann zum Vergleich der für $\omega = 0.5$ und $f_c = 28$ N/mm² entstehende, durch (8.3) gegebene Grenzfall $V_{Th} = 0.07 \cdot f_c \cdot 400 \cdot 180 \text{ mm}^2 = 141$ kN herangezogen werden. Solange die Betonzugfestigkeit vernachlässigt und nicht einfach nur nach der kinematischen Methode gerechnet wird, was für die Interpretation von Versuchen ohnehin nur beschränkt zulässig sein kann, darf nicht angenommen werden, die experimentelle Bruchlast $V_{Exp} = 112$ kN entspreche diesem Grenzfall der höchsten erreichbaren Schubbruchlast, indem die wirksame Betonfestigkeit f_c rückwärts zu 22 N/mm² oder 80% der Prismendruckfestigkeit festgelegt wird. Alsdann müsste nämlich aus Gleichgewichtsgründen die schwache obere Längsbewehrung eine Kraft von 149 kN aufnehmen, welche ihre Fließzugkraft von 107 kN weit übersteigt. Für die Versuche PS 9 und PS 11 können ähnliche Ueberlegungen angestellt werden.

Mit Bild 8.9 werden Spannungsfelder untersucht, bei denen *Strebenwirkung und Fächerwirkung kombiniert* sind.

Bild 8.9 (a) zeigt eine Konsole, die entlang AB durch die gleichmässig verteilte Last p belastet ist. Das Eigengewicht sei vernachlässigbar, und als einzige Bewehrung sei entlang AB eine konzentrierte Längsbewehrung angeordnet. Das Problem entspricht jenem von Bild 8.5 mit dem Unterschied, dass die Betondruckzone EFG in Bild 8.5 (a) hier durch die Längsbewehrung am oberen Scheibenrand ersetzt ist.

Zur Lösung wird zunächst angenommen, die Belastung p wirke nicht nur entlang AB in Bild 8.9 (a), sondern sei links von B bis zu der Vertikalen durch den Punkt D fortgesetzt, als ob es sich um ein Scheibenende handeln würde wie in Bild 8.5. Mit dem fiktiven Bewehrungsgehalt ω_0 erhält man für die Begrenzungskurve OCE des Fächers ABCE, entlang der gerade die einachsige Betondruckfestigkeit f_c erreicht wird, die Hyperbelgleichung

$$(y + 1 - \omega_0)^2 - x^2 \cdot \left(\frac{f_c}{p} - 1 \right) = (1 - \omega_0)^2 \quad . \quad (8.33)$$

Für die Last p folgt:

$$p = f_c \cdot \frac{2 \cdot \omega_0 \cdot \left(1 - \frac{\omega_0}{2} \right)}{a^2 + 2 \cdot \omega_0 \cdot \left(1 - \frac{\omega_0}{2} \right)} \quad [\omega_0 \leq 1] \quad . \quad (8.34)$$

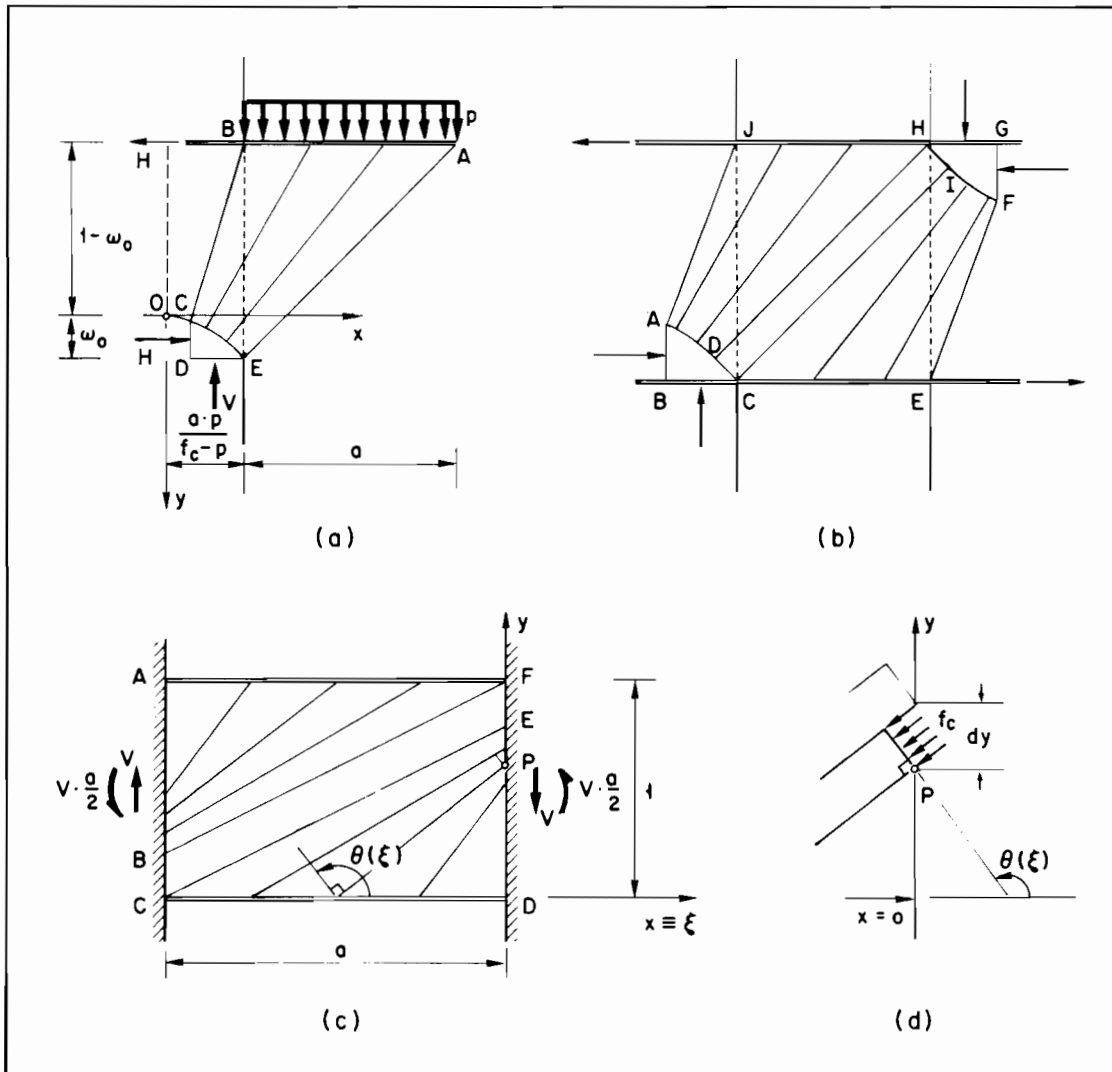


Bild 8.9: Kombination Fächerwirkung und Strebenwirkung

Für $\omega_0 \geq 1$ degeneriert die Hyperbel OCE mit der Gleichung (8.33) zu einer Geraden

$$y = a \cdot x \quad (8.35)$$

durch den Punkt E mit den Koordinaten $(1/a, 1)$, und für die Last p ergibt sich

$$p = f_c \cdot \frac{1}{1 + a^2} \quad [\omega_0 \geq 1] . \quad (8.36)$$

Der Fächer ABCE degeneriert in diesem Fall zu einem konstanten einachsigen Druckspannungsfeld an der Fließgrenze. Aus den Bedingungen

$$\frac{V}{f_c} = \frac{p \cdot a}{f_c} = x_E - x_C = \frac{p \cdot a}{f_c - p} - x_C, \quad y_C = \omega_0 - \omega$$

für die Koordinaten von C und den wirklichen Bewehrungsgehalt ω erhält man unter Berücksichtigung von (8.33) und (8.34)

$$(1 - \omega)^2 = (1 - \omega_0)^2 + 2 \cdot \omega_0 \cdot \left(1 - \frac{\omega_0}{2}\right) \cdot \left[\frac{2 \cdot \omega_0 \cdot \left(1 - \frac{\omega_0}{2}\right)}{a^2 + 2 \cdot \omega_0 \cdot \left(1 - \frac{\omega_0}{2}\right)} \right]^2 . \quad (8.37)$$

Daraus kann $\omega_0(\omega)$ durch Probieren bestimmt werden.

Für

$$\omega \geq \frac{a^2}{1 + a^2} \quad (8.36)$$

wird $\omega_0 = 1$. In diesem Fall sind (8.35) und (8.36) massgebend. Als nichttrivialer, kinematisch zulässiger und mit dem Spannungsfeld Bild 8.9 (a) verträglicher Verschiebungszustand kann ein Biegebruchmechanismus mit Momentanzentrum in C angegeben werden. Entlang BC ergibt sich ein Kollapsriss, die Bewehrung fliesst, und der Beton wird entlang CE gestaucht. Für $\omega_0 \geq 1$ kann beispielsweise ein Mechanismus mit Momentanzentrum in B als verträglicher Verschiebungszustand betrachtet werden. Dabei fliesst die Bewehrung nicht, und der Beton wird entlang der Normalen zum freien Rand AE durch B gestaucht. Ist AE nicht ein freier Rand, so kann ein zu Bild 8.2 (c) analoger Mechanismus mit einer hyperbelförmigen Gleitlinie durch B und E mit Momentanzentrum auf der Verlängerung von AB links von B eingeführt werden.

Bild 8.9 (b) zeigt für ein Verbindungselement CEHJ zweier Scheiben die Kombination zweier fächerförmiger Spannungsfelder ADHJ und CEFI gemäss Bild 8.9 (a) mit einer Strebe DCIH gemäss Bild 8.2 (a). Der verteilten Belastung p in Bild 8.9 (a) entspricht eine zu CJ und EH parallele Schubbewehrung mit dem äquivalenten Widerstand $\omega_y \cdot f_c = p$.

MUELLER (1978) nahm an, die an das Verbindungselement anschliessenden Scheiben seien starr und untersuchte anstelle des Spannungsfeldes Bild 8.9 (b) dasjenige in Bild 8.9 (c). Die Fortsetzung des Spannungsfeldes in den von ihm als starr angenommenen Bereichen untersuchte er nicht.

Beim Spannungsfeld Bild 8.9 (c) wird angenommen, die Betondruckfestigkeit f_c sei entlang den Rändern AB und DF der Fächer ABF und CDE und in der Strebe BCEF gerade erreicht. Gemäss (7.70) lautet die Gleichung einer Charakteristik durch einen beliebigen Punkt P am Rand des parabolischen Gebietes CDE

$$\xi = x + y \cdot \tan \theta(\xi) \quad . \quad (8.39)$$

Aus Bild 8.9 (d) erhält man mit

$$\alpha(\xi) = \theta(\xi) - \frac{\pi}{2} \quad (8.40)$$

als Gleichgewichtsbedingung für die an einem Fächerelement angreifenden Kräfte in y-Richtung

$$f_c \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot dy \Big|_{x=0} = - \omega_y \cdot f_c \cdot d\xi \quad . \quad (8.41)$$

ω_y bezeichnet den mechanischen Bewehrungsgehalt der Schubbewehrung. Mit

$$k(\xi) = \cot \alpha(\xi) \quad (8.42)$$

erhält man aus (8.39) und (8.41)

$$\frac{dy}{d\xi} \Big|_{x=0} = -\frac{1}{k} + \frac{\xi}{k^2} \cdot \frac{dk}{d\xi} = -\omega_y \cdot \frac{k^2 + 1}{k} \quad ,$$

woraus die Differentialgleichung

$$\frac{d\xi}{\xi} = \frac{dk}{k \cdot (1 - \omega_y) - \omega_y \cdot k^3}$$

für $k(\xi)$ mit dem Integral

$$\frac{2 \cdot (1 - \omega_y)}{\xi} = \frac{\text{konst} \cdot \omega_y \cdot k^2}{1 - \omega_y - \omega_y \cdot k^2} \quad (8.43)$$

folgt. Für eine geschätzte Ordinate y_E des Punktes E in Bild 8.9 (c) kann die Konstante in (8.43) bestimmt werden. Die Querkraft V setzt sich aus dem durch die Bügel aufgenommenen Anteil $\omega_y \cdot f_c \cdot a$ und dem von y_E abhängigen Strebenanteil zusammen, der mit (8.2) berechnet werden kann. Die Zugkraft in der Längsbewehrung setzt sich aus dem für die Aufnahme der Horizontalkomponente der Strebenkraft nötigen Anteil und dem Zuwachs

$$\omega_y \cdot f_c \cdot \int_{-a}^{\xi} k(\xi) d\xi$$

entlang CD zusammen, der mit (8.43) und y_E bestimmt ist. Aus der Bedingung, dass in den Punkten D und A in Bild 8.9 (c) die Längsbewehrung gerade die Fließgrenze erreicht, kann y_E und damit der maximale untere Grenzwert für die Traglast durch Probieren ermittelt werden.

Zur Gegenüberstellung von Theorie und Experiment idealisierte Müller den von PAULAY (1969) experimentell untersuchten "Shear Wall Coupling Beam 391" als Scheibe gemäss Bild 8.9 (c) mit einer Höhe von 36.1 inches und einer Länge von 40 inches. Die Fließwiderstände der konzentrierten Bewehrung entlang den Rändern AF und CD betrugen je 105 kips. Müller berücksichtigte ferner eine über die Scheibenlänge gleichmässig verteilte Schubbewehrung mit einem Widerstand von 3.11 kips/inch und eine über die Scheibenhöhe gleichmässig verteilte zusätzliche Längsbewehrung mit einer Fließkraft von 37.4 kips. Die Druckfestigkeit der 6 inches dicken Scheibe betrug 27.4 kips/inch. Unter Zugrundelegung des Spannungsfeldes Bild 8.9 (c) berechnete Müller für voll mitwirkende Betonüberdeckung der Schubbewehrung einen Wert $V = 182$ kips. Für die Zugkräfte in der konzentrierten Längsbewehrung in den Punkten C und D ermittelte er die Werte $Z_C = 17$ kips und $Z_D = 105$ kips. Die Bruchlast im Versuch betrug 174.5 kips, und die Zugkräfte in der konzentrierten Längsbewehrung waren $Z_C \approx 50$ kips und $Z_D = 105$ kips.

Wird der Auswertung das Spannungsfeld 8.9 (b) zugrunde gelegt, d.h. der Spannungszustand in die von Müller als starr vorausgesetzten Scheiben fortgesetzt, so erhält man bei sonst gleichen Annahmen die Werte $V = 173$ kips, $Z_C = 11$ kips und $Z_D = 105$ kips. Dazu wird a zunächst geschätzt, anschliessend mit (8.34) ω_o und mit (8.37) ω bestimmt und daraus $Z_D - Z_C$ berechnet. Damit ist eine verbesserte Schätzung für die Lage des Punktes D in Bild 8.9 (b) möglich, und die Rechnung kann wiederholt werden. Nach wenigen Iterationsschritten ergibt sich die Lage des Punktes D in Bild 8.9 (b) und die Grösse von V mit ausreichender Genauigkeit.

Mit Bild 8.10 wird das anhand von Bild 8.9 (c) diskutierte Problem nach der kinematischen Methode untersucht. Die durch das Schubwandverbindungselement verbundenen starren Scheiben können sich relativ zueinander nur translatorisch verschieben. Die beiden Relativverschiebungskomponenten können als verallgemeinerte Verschiebungen im Sinne von Abschnitt 4.3 aufgefasst werden. Die zugehörigen verallgemeinerten Lasten sind die Querkraft V und eine allenfalls vorhandene Normalkraft $N = v \cdot f_c$.

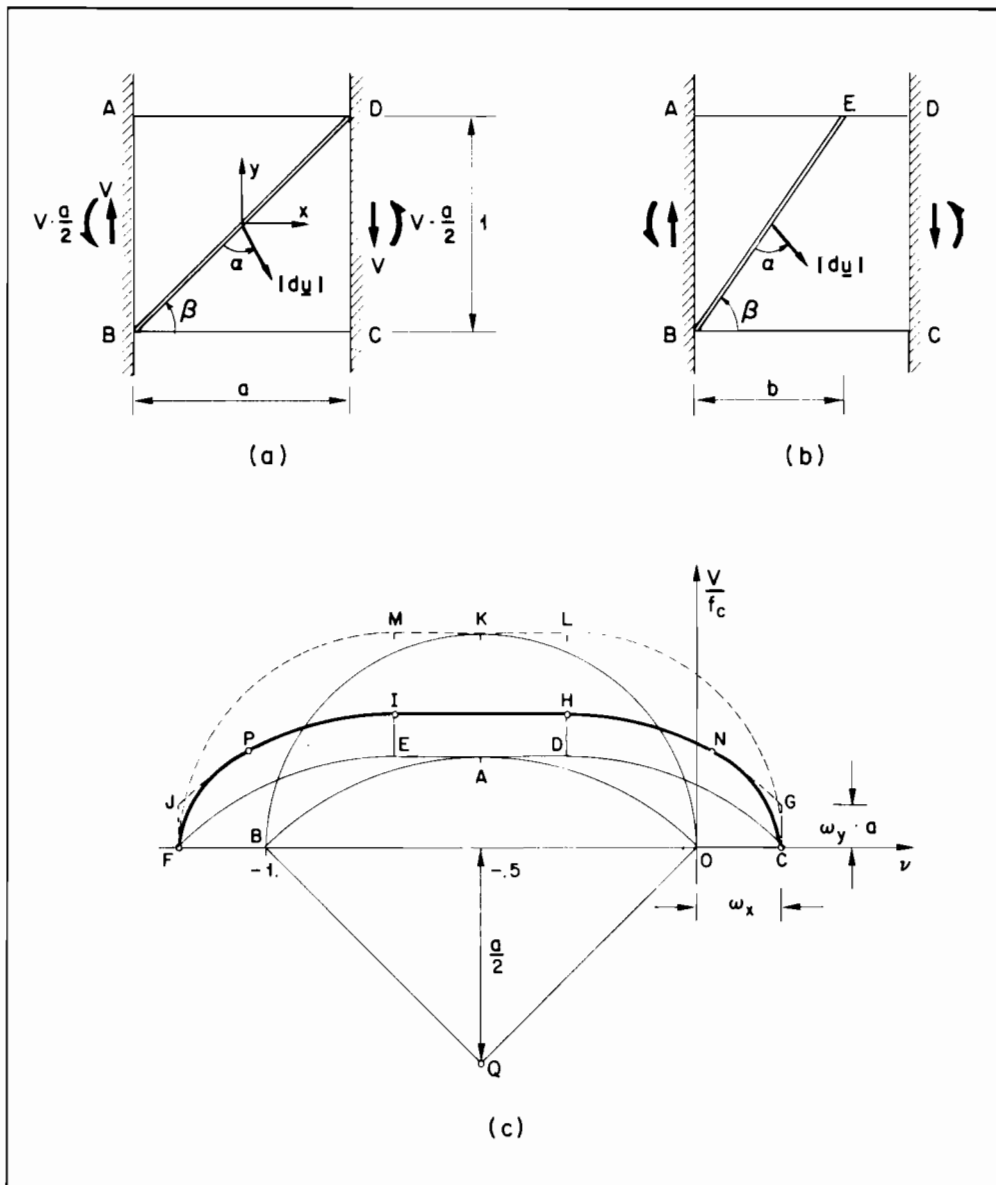


Bild 8.10: Schubwandverbindungselement – Kinematische Methode

Der Mechanismus Bild 8.10 (a) entspricht jenem von Bild 8.2 (b). Für ein unbewehrtes Element liefert er mit (8.2) die exakte Traglast, wenn in jener Gleichung ω durch $-v$ ersetzt wird. In Bild 8.10 (c) erhält man damit den Kreisbogen OAB mit Zentrum Q. Für ein mit ω_x längsbewehrtes Element erhält man gemäss (6.9) die Linie CDEF durch Translation des Bogens OAB um $\pm \omega_x$ in v -Richtung. Das Plateau DA entspricht der Lösung (8.3) für V .

Für ein Element mit Schubbewehrung liefert der Mechanismus Bild 8.10 (a) in Bild 8.10 (c) die Linie GNHIPJ, welche durch Translation von CDEF um $\omega_y \cdot a$ in V -Richtung entsteht. Zumindest im Bereich der Punkte G und J wird damit die Traglast sicher erheblich überschätzt. Für $\omega_x = 0$ liefert der in Bild 8.10 (b) dargestellte Mechanismus mit einer steil verlaufenden Gleitlinie BE mit

$$a \geq b = \cot \beta = \frac{(1 - 2 \cdot \omega_y) \cdot \sqrt{-v \cdot (1 + v)}}{\sqrt{\omega_y \cdot (1 - \omega_y)}} \quad (8.44)$$

den oberen Grenzwert

$$\frac{V}{f_c} = 2 \cdot \sqrt{-v \cdot (1 + v)} \cdot \sqrt{\omega_y \cdot (1 - \omega_y)} \quad (8.45)$$

Aus der Ungleichung in (8.44) folgen für

$$\omega_y \leq \omega_y^G = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{1+a^2}} \quad (8.46)$$

die Gültigkeitsbereiche

$$\left. \begin{aligned} -1 \leq v \leq -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - a^2 \cdot \frac{\omega_y \cdot (1-\omega_y)}{(1-2\omega_y)^2}} \\ 0 \leq v \leq -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - a^2 \cdot \frac{\omega_y \cdot (1-\omega_y)}{(1-2\omega_y)^2}} \end{aligned} \right\} \quad (8.47)$$

von (8.45). Für $\omega_y \geq \omega_y^G$ ist (8.45) für alle v zwischen 0 und -1 gültig. Die Gleichung (8.45) entspricht einer Ellipse mit Halbachsen $1/2$ und $\sqrt{\omega_y \cdot (1-\omega_y)}$. Die Bogen FP und CN in Bild 8.10 (c) sind durch Translation der Ellipsenstücke in den durch (8.47) beschränkten Bereichen um $\mp \omega_x$ entstanden. Eine unbeschränkte Steigerung des Schubbewehrungsgehaltes ω_y ist nutzlos. Für $\omega_y \rightarrow \frac{1}{2}$ beschreibt (8.45) den Kreis OKB in Bild 8.10 (c). Die Schubbewehrung bleibt starr, $de_y = 0$. Die Linie CLKMF kann als Projektion der Fließfläche Bild 7.1 (f) auf die Ebene $\{N_x, N_{xy}\}$ aufgefasst werden. Die Abschnitte CL, LKM und MF entsprechen den durch die Gleichungen (7.20), (7.19) und (7.22) beschriebenen Fließregimen V, IV und VII.

8.3 Aus Scheiben zusammengesetzte Bauteile

Im folgenden wird erörtert, wie die in den Abschnitten 7.1, 7.2 und 8.2 erarbeiteten Grundlagen zur Berechnung der Traglast und zur praktischen Bemessung von aus Scheiben zusammengesetzten Bauteilen angewendet werden können.

Die konzentrierte Längsbewehrung und die Druckzone oder Druck- und Zugzonen von Trägern werden oft zu *Stringern* idealisiert. Stringer sind lineare Tragelemente mit verschwindendem Querschnitt und endlichem einachsigen Widerstand. Bild 8.11 (b) zeigt einen Träger, der durch Hinzunahme zweier die Scheibe Bild 8.11 (a) berandender Stringer entstanden ist. Beim T-Träger Bild 8.11 (c) ist nur die untere Längsbewehrung als Stringer idealisiert. Der Kastenträger Bild 8.11 (d) besteht aus vier einzelnen Scheiben, die durch Stringer verbunden sind. Sofern der Spannungszustand in den durch Stringer begrenzten einzelnen Scheiben als konstant vorausgesetzt werden kann, können die im Abschnitt 7.1 entwickelten Beziehungen unmittelbar zur Bemessung dieser Scheiben und allenfalls zur Gewinnung von Interaktionsformeln für die aus mehreren Scheiben und Stringern zusammengesetzten Träger verwendet werden.

Für die Untersuchung allgemeiner Spannungsfelder und für die Bemessung der entsprechenden Beton- und Stahlquerschnitte verschafft man sich zweckmässig zunächst einen Ueberblick mit einem einfachen Fachwerkmodell. Diese Vorstellung eines Fachwerkmodells kann anschliessend verfeinert und gegebenenfalls zu einem diskontinuierlichen Spannungsfeld weiterentwickelt werden. Vielfach können die im Abschnitt 8.2 enthaltenen Angaben direkt oder mit leichten Anpassungen übernommen werden. Im allgemeinen ist jedoch die im Abschnitt 7.2 dargelegte Theorie des ebenen Spannungszustandes heranzuziehen. Als Beispiele für Probleme, bei denen nicht konstante Spannungszustände auftreten, können etwa jene der Kraftausbreitung in den Flanschen der Träger Bild 8.11 (c) und (e) angeführt werden.

Für den praktisch wichtigen Fall eines Einzelträgers gemäss Bild 8.11 (b) darf der Spannungszustand im Steg näherungsweise als konstant vorausgesetzt werden, wenn sich die

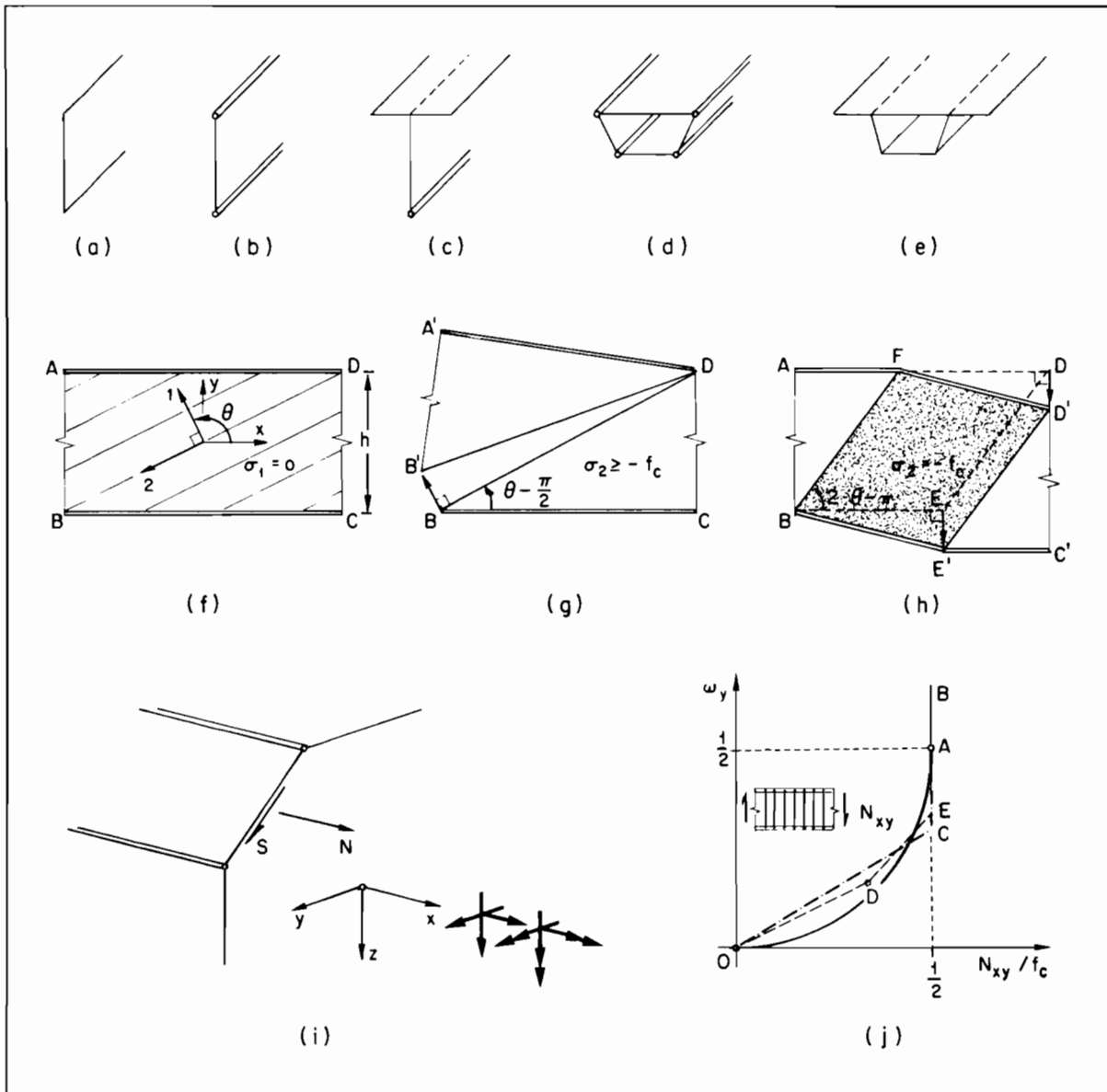


Bild 8.11: Aus Scheiben zusammengesetzte Träger

Querkraft, die Trägerhöhe und der Gehalt der Bewehrung im Steg in Richtung der Trägerachse nur schwach verändern und wenn von Krafteinleitungsproblemen abgesehen wird. Bild 8.11 (f) zeigt ein von den Stringern AD und BC begrenztes Trägerelement. Der Steg ABCD enthalte lediglich eine Schubbewehrung in y-Richtung mit dem mechanischen Bewehrungsgehalt ω_y , und die Widerstände der Stringer AD und BC werden mit Z_{fo} und Z_{fu} bezeichnet. Die Betonzugfestigkeit wird vernachlässigt, $f_t = 0$. Für nicht massgebende Betondruckfestigkeit, $\sigma_2 \geq -f_c$, erhält man mit $N_y = 0$ aus (7.11) die bekannten Bedingungen

$$\frac{M}{h} + \frac{N}{2} + \frac{V^2}{2 \cdot \omega_y \cdot h \cdot f_c} \leq Z_{fu}, \quad -\frac{M}{h} + \frac{N}{2} + \frac{V^2}{2 \cdot \omega_y \cdot h \cdot f_c} \leq Z_{fo} \quad (8.48)$$

für die Spannungsresultierenden M (Biegemoment), N (Normalkraft) und $V = N_{xy} \cdot h$ (Querkraft), wenn h den Stringerabstand bezeichnet. Für den in Bild 8.11 (g) dargestellten, mit dem angenommenen Spannungszustand verträglichen Mechanismus fließt die Schubbewehrung entlang BD. Der untere Stringer fließt in B, ist entlang BC jedoch starr. In der

ersten Relation (8.48) gilt das Gleichheitszeichen, wenn für M , N , V und Z_{fu} die Werte im Querschnitt AB des offenen Endes des Kollapsrisses BD eingesetzt werden. Für nicht massgebende Stringer, jedoch massgebende Betondruckfestigkeit, $\sigma_2 = -f_c$, liefert (7.21) die Grenze

$$V = h \cdot f_c \cdot \sqrt{\omega_y \cdot (1 - \omega_y)} \quad (8.49)$$

für die Querkraft V . Ein verträglicher Mechanismus, bei dem die Schubbewehrung fliesst, der Beton gestaucht wird und die Stringer starr bleiben, ist in Bild 8.11 (h) angegeben. Bei der Anwendung der Beziehungen (8.48) und (8.49) ist zu beachten, dass sie einer minimalen Mechanismusslänge von $h \cdot \cot(0 - \frac{\pi}{2})$ beziehungsweise von $h \cdot \cot(2 \cdot 0 - \pi)$ entsprechen.

Von statisch zulässigen und stabilen Spannungsfeldern in den einzelnen Scheiben eines Trägers ausgehend können durch Zusammenfassen der resultierenden Membrankräfte S und N aller Scheiben gemäss Bild 8.11 (i) resultierende Normalkräfte, Querkkräfte, Torsions- und Biegemomente des Trägers gewonnen werden, welche nicht zum Kollaps des Trägers führen. Umgekehrt können bei der Bemessung solcher Träger durch geeignete Aufteilung die resultierenden Kräfte durch äquivalente Membrankräfte in den einzelnen Scheiben ersetzt und diese für deren Wirkung bemessen werden. Vielfach wird eine querschnittsweise Bemessung aufgrund der vereinfachenden Annahme konstanter Spannungszustände im Querschnittsbereich in den einzelnen Scheiben praktisch bereits ausreichen. Immerhin ist bei diesem Vorgehen darauf zu achten, dass die gewählten Abmessungen und Bewehrungen nicht abrupt, sondern von einem betrachteten Querschnitt zum andern mehr oder weniger stetig ändern. Für die Bemessung von Krafteinleitungsbereichen und für den Fall von stark veränderlichen Schnittkräften, Querschnittsabmessungen oder Bewehrungsgehalten wird man sich in der Regel auf die in den Abschnitten 7.2 und 8.2 entwickelten Grundlagen stützen.

Sofern keine der letztgenannten Einschränkungen massgebend ist, geht man bei der praktischen Bemessung von Trägern unter kombinierter Beanspruchung zweckmässig nach der folgenden Methode vor:

1. Die Betonüberdeckung der Querbewehrung an der Trägersoberfläche wird als nicht wirksam betrachtet.
2. Die nach der Balkentheorie ermittelten Schnittkräfte werden durch ein äquivalentes Gleichgewichtssystem von Kräften in verschiedenen Scheiben innerhalb des Querschnittsumfanges ersetzt. Zu diesem Zweck werden die Dicken der einzelnen Scheiben zunächst geschätzt und damit Ausgangswerte für die Hebelarme der Scheibenkräfte festgelegt.
3. Durch Wahl der Querbewehrung kann für alle Scheiben die im allgemeinen zur Trägerachse schiefe resultierende Betondruckkraft und die erforderliche Längsbewehrung bestimmt werden.
4. Die geschätzten Scheibendicken werden mit den rechnerisch zur Aufnahme der resultierenden Betondruckkraft minimal erforderlichen Dicken verglichen. Dazu wird angenommen, die Druckspannungen im Beton erreichen die wirksame Betondruckfestigkeit f_c . f_c ist nach den Ausführungen in Abschnitt 6.2 aufgrund von Versuchen festzulegen. Im allgemeinen kann von einem mittleren Wert für f_c von etwa 60% der in einachsigen Druckversuchen ermittelten Festigkeit ausgegangen werden.
5. Sofern erforderlich wird das Vorgehen mit verbesserten Werten wiederholt.

Die nach dieser Methode ermittelten Bemessungsgrössen sollten als mittlere Werte in einem Bereich betrachtet werden, der sich auf beiden Seiten des betrachteten Querschnittes über eine Trägerlänge in der Grössenordnung der Querschnittsabmessungen erstreckt.

Zum Schluss dieses Abschnittes wird mit Bild 8.11 (j) auf das Problem der sogenannten oberen Schubspannungsgrenze hingewiesen. Das Problem wurde in neuester Zeit im Zusammenhang mit der Ergänzung der Norm SIA 162 (1968) durch die Richtlinie 34 (1976) und bei der Erarbeitung der neuen CEB-Mustervorschrift (1978) eingehend diskutiert. Aus der Sicht der Plastizitätstheorie stellt sich die Frage nach der Grösse der wirksamen Betonfestigkeit. Dazu gab MUELLER (1978) eine ausführliche Erörterung. Seine Ausführungen sollen hier nicht wiederholt, sondern lediglich mit einigen Bemerkungen ergänzt werden.

Betrachtet wird ein Trägerelement gemäss Bild 8.11 (f) mit zur Trägerachse orthogonaler Schubbewehrung. Der Kreisbogen OA in Bild 8.11 (j) entspricht der Gleichung (8.49) für die im Grenzfall nicht massgebender Stringer aufnehmbare Querkraft, und die zur w_y -Achse parallele Gerade AB entspricht der Gleichung (7.19) für das Regime IV der Fließfläche Bild 7.1 (f). Die Gerade DC entspricht der unteren Grenze $\tan(\theta - \frac{\pi}{2}) = 3/5$ für die nach Richtlinie 34 zur Norm SIA 162 und nach der verfeinerten Methode der CEB-Mustervorschrift frei wählbare Neigung der Betondrucktrajektorien. Fasst man die in der Richtlinie 34 ungefähr proportional zur Wurzel $\sqrt{\beta_c}$ aus der einachsigen Prismendruckfestigkeit β_c abgestufte obere Schubspannungsgrenze $6 \cdot \tau_r$ im Sinne von (7.19) als $f_c/2$ auf, so erhält man die Linie OCB. Demgegenüber folgt die obere Schubspannungsgrenze nach der CEB-Mustervorschrift vom Schnittpunkt der Geraden DC mit dem Kreisbogen OA an dem letzteren, wobei die wirksame Festigkeit f_c bei einem Stringerabstand gemäss Bild 8.11 (f) von 90% der statischen Höhe des Trägers zu $(2/3) \cdot \beta_c$ angenommen wird. NIELSEN und BRAESTRUP (1975) legten der Auswertung von 153 Versuchen die Kurve OAB zugrunde und ermittelten einen Mittelwert der wirksamen Festigkeit f_c von $0.72 \cdot \beta_c$. In einer neuen Arbeit von NIELSEN et al. (1978) wird als Mittelwert von f_c/β_c der von β_{c2} abhängige Wert $0.8 - \beta_c/(200 \text{ N/mm}^2)$ vorgeschlagen und als sicherer Wert $0.7 - \beta_c/(200 \text{ N/mm}^2)$. Der Vorschlag von MOOSECKER (1979) zur Schubbemessung von Stahlbetonbalken mit lotrechten Bügeln führt mit $f_c = 0.6 \cdot \beta_c$ zur Linie ODEB mit den Koordinaten $(\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$ und $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ der Punkte D und E. Dieser trilineare Ansatz kann als Näherung für den Viertelskreis OA aufgefasst werden, gleich wie der bilineare Ansatz nach Richtlinie 34 der Norm SIA 162.

Die hier angegebenen Werte für die wirksame Betonfestigkeit f_c sind über die Scheibendicke gemittelte Druckfestigkeitswerte, welche aus der Auswertung von Versuchen ermittelt wurden. Sie enthalten namentlich den Einfluss einer allfälligen Reduktion der mitwirkenden Scheibendicke durch Abblättern der Betonüberdeckung. Ausserdem sind sie durch die Art der konstruktiven Ausbildung der Versuchsträger beeinflusst. Es ist allerdings fraglich, ob aufgrund der vorliegenden Versuche eine saubere Trennung der verschiedenen Einflüsse möglich ist. Trotz den noch vorhandenen offenen Fragen kann festgehalten werden, dass die Tragfähigkeit von Stahlbetonträgern an der oberen Schubspannungsgrenze mit der Plastizitätstheorie recht zutreffend abgeschätzt werden kann. Bei einer vorsichtigen Wahl der Betonabmessungen und bei einer guten konstruktiven Ausbildung erhält man eine ausreichende Grundlage für die sichere Bemessung solcher Träger.

8.4 Fugen

Die Tragfähigkeit von Fugen lässt sich nach der Plastizitätstheorie mit den in den Abschnitten 5.4, 3.3, 6.2 und 7.1 erarbeiteten Grundlagen berechnen.

Gemäss Bild 8.12 (a) wird als Fuge eine dünne Zwischenschicht mit einer im Verhältnis zur Fugenlänge kleinen, jedoch endlichen Dicke d zwischen zwei Körpern AD und BC betrachtet. Das Fugenmaterial sei isotrop und ideal plastisch. Es sei kompressibel und folge dem Prinzip der maximalen Dissipationsarbeit.

Der Anordnung einer Fuge entspricht im Vergleich zur monolithischen Bauweise in der Regel eine Schwächung der Konstruktion, welche sich in einem lokalen Versagen in der Fuge bei starr bleibenden anschliessenden Körpern äussern kann. Der Fliesszustand in der Fuge ist in diesem Fall eben. Für die folgenden Betrachtungen ist es einerlei, ob man annimmt, es ergebe sich eine Unstetigkeit des Verschiebungsfeldes in der Fuge parallel zum Fugenrand oder ob man von einem über die Fugendicke konstanten Verzerrungszustand an einem Fugenelement ausgeht, wie dies mit Bild 8.12 (c) angedeutet ist. In jedem Fall genügt gemäss Abschnitt 5.4 und Bild 5.3 die Betrachtung der der Fliessfläche des Fugenmaterials zugeordneten Mohrschen Hüllkurve mit der Gleichung (3.66) beziehungsweise (7.49) in Bild 8.12 (d). Bei der Fortsetzung des Spannungszustandes in die starren Körper beiderseits der Fuge ist zu beachten, dass die Normalspannungen σ und die Schubspannungen τ an den Fugenrändern AD und BC in Bild 8.12 (b) stetig sind.

Als Anwendung wird mit Bild 8.13 der praktisch wichtige Fall einer Fuge in einem einachsigen Druckfeld untersucht. Nimmt man an, die der Fliessfläche des Fugenmaterials zugeordnete Mohrsche Hüllkurve entspreche dem Coulombschen Gesetz (3.52), so ergeben sich die mit den Bildern 8.13 (a) und (b) illustrierten Verhältnisse. Dem Spannungszustand in der Fuge entspricht der Spannungskreis APBQ mit Zentrum C und Pol Q in Bild 8.13 (b). Für den einachsigen Druckspannungszustand in den Körpern ABD und BCD in Bild 8.13 (a) erhält man den Spannungskreis DPDQ. Mit den Strecken $\overline{OP} = p \cdot \cos \beta$ und $\overline{OI} = c \cdot \cos \phi$ liest man

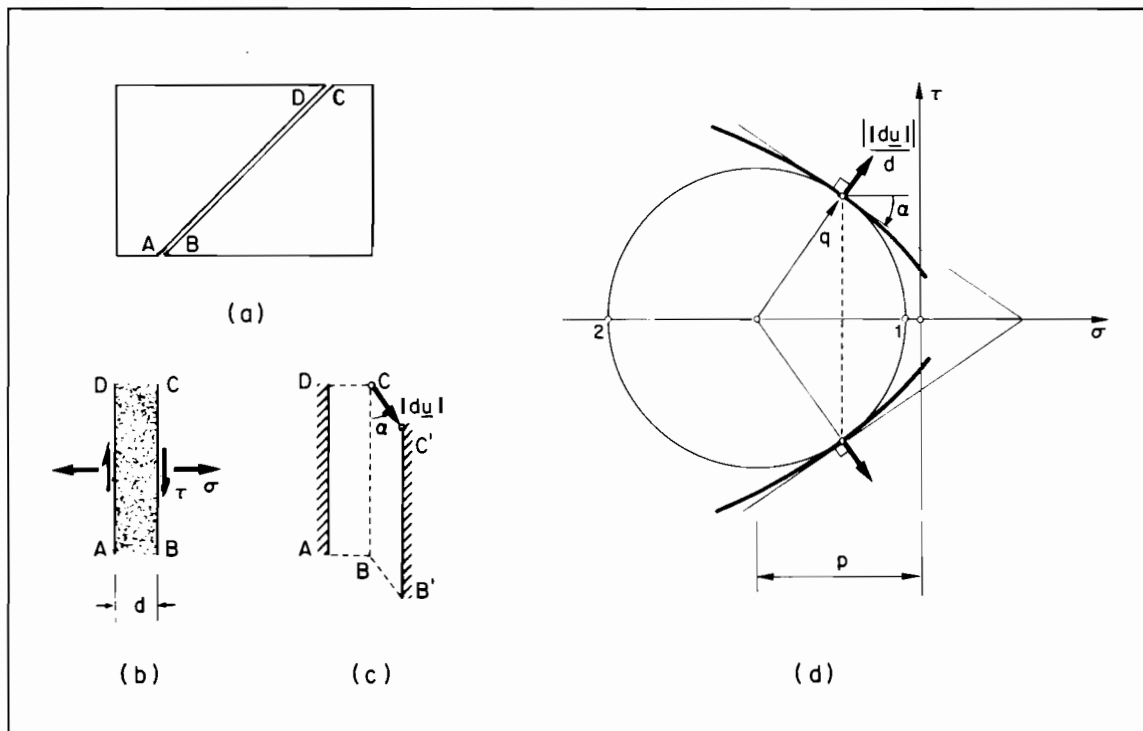


Bild 8.12: Isotrope, kompressible Fuge

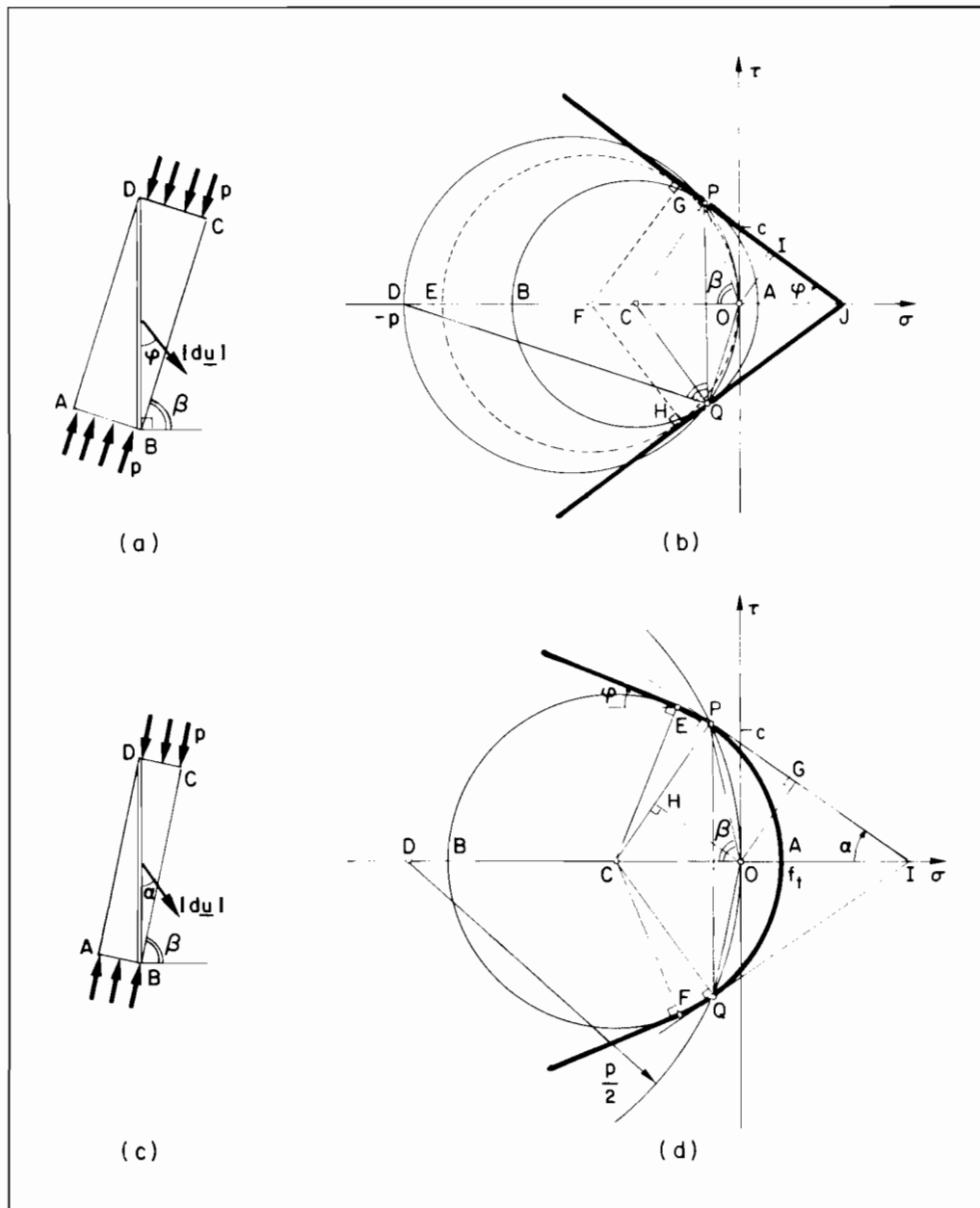


Bild 8.13: Fuge in einachsigem Druckfeld

aus dem Dreieck OIP in Bild 8.13 (b) die Beziehung

$$p = \frac{c \cdot \cos \varphi}{\cos \beta \cdot \sin(\beta - \varphi)} \quad (8.50)$$

ab. Für den Winkel $\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$ zwischen der Druckrichtung und der Normalen auf die Fuge erhält man das bereits durch die zweite Gleichung (3.54) ausgedrückte Minimum

$$p_{\min} = \frac{2 \cdot c \cdot \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad (8.51)$$

Die Spannungskreise für die Spannungszustände in der Fuge und im anschliessenden Material fallen unter diesen Umständen im strichlierten Kreis OGEH im Zentrum F in Bild 8.13 (b) zusammen.

Selbstverständlich gilt (8.50) nur solange der Spannungszustand in dem an die Fuge anschliessenden Material stabil ist, d.h. für Beton, sofern $p \leq f_c$ ist. Ferner ist zu be-

achten, dass für $\beta < \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}$ die zur Fliessebene normale mittlere Hauptspannung σ_3 im Fugenmaterial eine Druckspannung sein muss. Den Druckkräften $d \cdot \sigma_3$ entsprechen z.B. für den Fall von Stossfugen zwischen Scheiben gewisse Querkraftkräfte in den Scheiben senkrecht zu ihrer Ebene. Für den Fall, dass sich die Fuge nicht in einem einachsigen Druckfeld $-p = \sigma_2 \leq \sigma_1 = 0$ befindet, sondern in einem beliebigen ebenen Spannungsfeld mit den Hauptspannungen $\sigma_2 \leq \sigma_1$, kann (8.50) weiter verwendet werden, wenn p durch $-\sigma_2 + \sigma_1$ ersetzt wird und c durch $c - \sigma_1 \cdot \tan \phi$. In der Tat kann das Problem bei Hinzunahme von $\sigma_1 > 0$ durch Einführen einer um σ_1 nach rechts verschobenen fiktiven τ -Achse auf das in Bild 8.13 (b) untersuchte Problem zurückgeführt werden.

Schliesslich liefert (8.50) die Grösse von p für eine beliebige, der Fließfläche des Fugenmaterials zugeordnete Mohrsche Hüllkurve, sofern gemäss Bild 3.5 (e) die Werte c und ϕ für die im massgebenden Punkt zur Mohrschen Hüllkurve tangentielle Coulombsche Gerade verwendet werden. Von dieser Eigenschaft wird im folgenden Gebrauch gemacht.

Das mit den Bildern 8.13 (c) und (d) untersuchte Problem entspricht jenem in den Bildern 8.13 (a) und (b), mit dem Unterschied, dass die Fließbedingung des Fugenmaterials durch eine zusätzliche Trennbruchbedingung (3.75) beziehungsweise (6.2) ergänzt ist. Für den betrachteten massgebenden Punkt P in Bild 8.13 (d) ist ϕ in (8.50) durch α zu ersetzen. Für die Ordinate des Schnittpunktes der Tangente PGI an den Kreisbogen EPA in P erhält man unter Berücksichtigung von (5.14) und (3.54) aus dem Verhältnis der durch (6.4) und mit $\alpha = \phi$ durch (6.7) bestimmten Dissipationsarbeiten den Ausdruck

$$\frac{c \cdot \cos \phi}{\cos \alpha \cdot (1 - \sin \phi)} \cdot \left[1 - \sin \alpha + \frac{f_t \cdot (\sin \alpha - \sin \phi)}{c \cdot \cos \phi} \right] \quad [\alpha \geq \phi] \quad (8.52)$$

Einsetzen in (8.50) bringt

$$p = \frac{c \cdot \cos \phi}{(1 - \sin \phi) \cdot \cos \beta \cdot \sin(\beta - \alpha)} \cdot \left[1 - \sin \alpha + \frac{f_t \cdot (\sin \alpha - \sin \phi)}{c \cdot \cos \phi} \right] \quad (8.53)$$

Mit $\overline{OC} = (c \cdot \cos \phi - f_t) / (1 - \sin \phi)$ folgt aus der Betrachtung des Dreiecks DPG die implizite Beziehung

$$\tan(\beta - \alpha) \cdot \cos \alpha \cdot \left(1 - \frac{f_t}{c \cdot \cos \phi} \right) = 1 - \sin \alpha + \frac{f_t}{c \cdot \cos \phi} \cdot (\sin \alpha - \sin \phi) \quad (8.54)$$

für α . An der Gültigkeitsgrenze $\alpha = \phi$ der Beziehungen (8.52) bis (8.54) fällt der Punkt P gerade mit Punkt E zusammen, und es gilt $\overline{OC} \cdot \tan(\beta - \phi) = c$ oder

$$\tan(\beta - \phi) = (1 - \sin \phi) \cdot \left(\cos \phi - \frac{f_t}{c} \right)^{-1} \quad [\alpha = \phi] \quad (8.55)$$

Die Gleichungen (8.50) bis (8.55) stimmen mit den in einer Arbeit von B.C. JENSEN (1977) entwickelten Beziehungen überein. Allerdings ermittelte Jensen die Beziehung (8.50) unter der einschränkenden Annahme, das Fugenmaterial folge einer Fließbedingung von Coulomb, und (8.53) bestimmte er lediglich nach der kinematischen Methode. Das wichtigste Ergebnis der vorliegenden Darstellung ist der Nachweis der allgemeinen Anwendbarkeit von (8.50) für beliebiges isotropes, dem Prinzip der maximalen Dissipationsarbeit genügendes Fugenmaterial.

Mit Bild 8.14 werden die bisherigen Überlegungen auf bewehrte Fugen ausgedehnt. Gemäss Bild 8.14 (a) wird eine zur Fuge orthogonale Bewehrung betrachtet. Ihr auf die Druckfestigkeit f_c des Betons beiderseits der Fuge bezogener mechanischer Bewehrungsgehalt wird mit ω_x bezeichnet. Der Fall einer zur Fuge schiefen Bewehrung könnte nach den Prinzipien der Abschnitte 6.3 und 7.1 leicht erfasst werden.

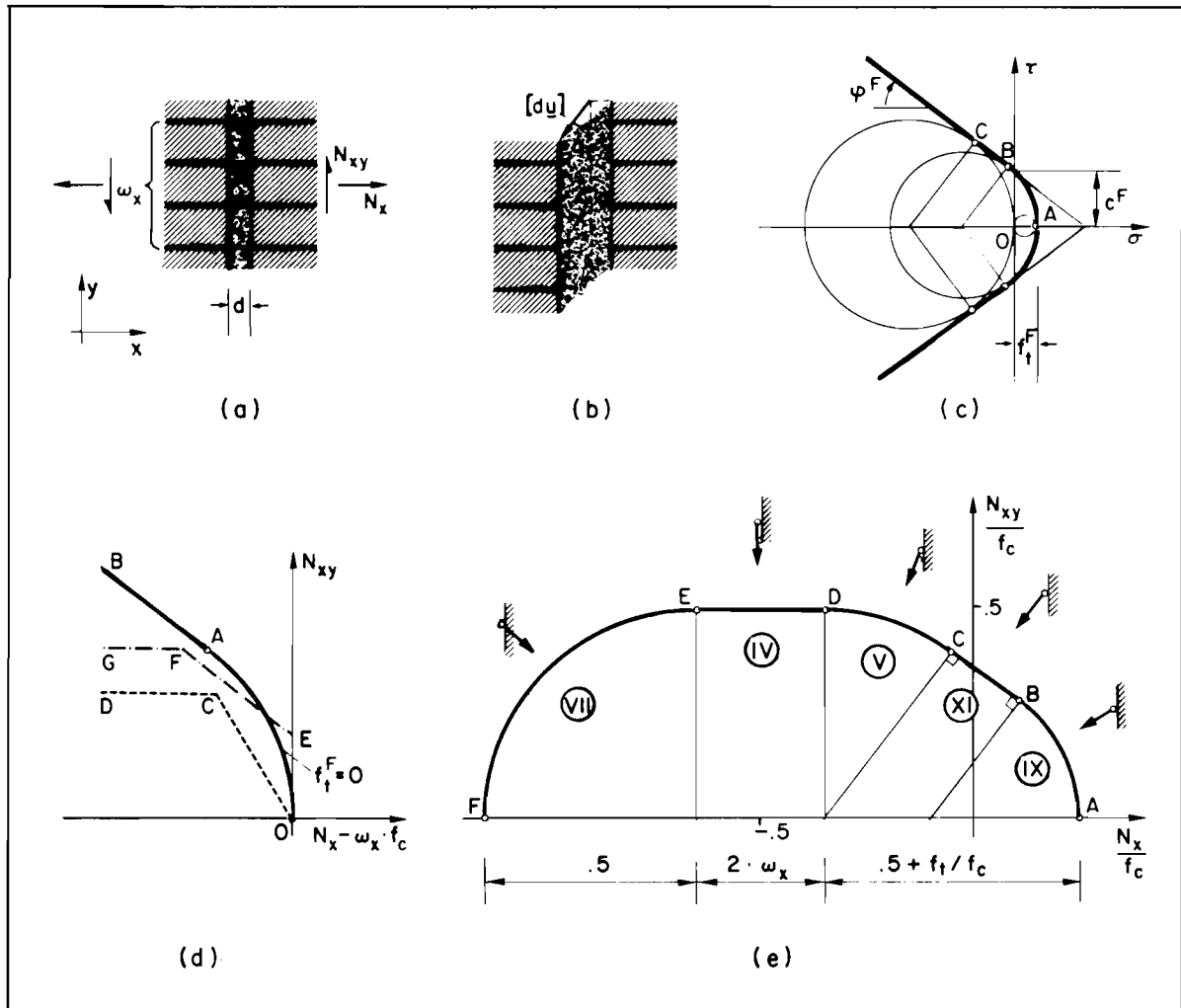


Bild 8.14 : Bewehrte Fuge

Die im Bild 8.14 (b) dargestellte Verformung beim Versagen der Fuge entspricht Bild 8.12 (c). Es ergibt sich eine Dilatation des Fugenmaterials, und die Bewehrung wird gedehnt. Den Komponenten des Relativverschiebungsvektors $[d\mathbf{u}]$ in x- und y-Richtung sind die verallgemeinerten Spannungen N_x und N_{xy} in Bild 8.14 (a) zugeordnet.

Die in Bild 8.14 (c) dargestellte Mohr-Coulombsche Fließbedingung für das Fugenmaterial gewährt mit den drei Parametern c^F , ϕ^F und f_t^F einen erheblichen Spielraum für die Anpassung an die jeweiligen Versuchsergebnisse verschiedener Materialien. Die Fließbedingung setzt sich aus dem Coulombschen Gesetz (3.52) und einer Trennbruchbedingung (3.75) zusammen und entspricht der mit (6.1) und (6.2) vorausgesetzten Fließbedingung für Beton.

Für eine bewehrte Fuge mit Fugenmaterial ohne Zugfestigkeit, $f_t^F = 0$, erhält man gemäß (6.9) aus der Linie ABC in Bild 8.14 (c) unmittelbar die Linie OAB in Bild 8.14 (d). Selbstverständlich fallen wieder nur solche Punkte auf OAB in Betracht, welche stabilen Spannungszuständen $\{N_x, N_{xy}\}$ im Stahlbeton beiderseits der Fuge entsprechen. Ferner ist zu beachten, dass sich für Punkte auf der Geraden AB zur Ebene $\{x, y\}$ normale Hauptdruckspannungen $\sigma_z = \sigma_3 \leq 0$ in der Fuge ergeben, welche z.B. bei Stossfugen zwischen Stahlbetonscheiben durch gewisse Querkzugkräfte in den Scheiben kompensiert werden müssen.

Zum Vergleich sind in Bild 8.14 (d) mit den Linien ODC und EFG Bruchbedingungen eingezeichnet, welche sich nach verschiedenen Versionen der bekannten "Shear-Friction"-Theorie ergeben. Diese Theorie geht von der Annahme eines zu der maximalen aus der Bewehrung

resultierenden Normalkraft $-w_x \cdot f_c$ in der Fuge proportionalen Reibungswiderstandes aus. Aufgrund dieser Annahme erhält man die einem kohäsionslosen Coulomb-Material entsprechende Gerade OC. Um eine befriedigende Uebereinstimmung mit Versuchen zu erhalten werden üblicherweise recht hohe Reibungsbeiwerte eingeführt, was einem steilen Anstieg der Geraden OC entspricht, und der Anwendungsbereich wird nach oben mit der Geraden CD begrenzt, welche als Tresca-Gerade interpretiert werden kann. Aus der Sicht statisch zulässiger und stabiler Spannungszustände im Fugenmaterial müsste allerdings beim Uebergang von OC zu CD der Bogen des Spannungskreises eingeführt werden, welcher OC und CD als Tangenten hat. Dadurch würde ein nach der vereinfachten Betrachtung zulässiger Spickel bei C entfallen. Bei einer verbesserten Version der "Shear-Friction"-Theory, welche eine bessere Anpassung an Versuchsergebnisse erlaubt, wird eine scheinbare Kohäsion \overline{OE} eingeführt, und die Neigung der Geraden EF bestimmenden Reibungsbeiwerte werden kleiner angesetzt. Bezüglich des Uebergangs von EF zu FG gelten die gleichen Bemerkungen wie für den Uebergang von OC zu CD.

Der Grenzfall $d = 0$ in Bild 8.14 (a) entspricht einer Kontaktfläche zwischen Stahlbetonkörpern ohne dazwischenliegendes Fugenmaterial. Bei einem Bruch in der Kontaktfläche ist diese eine Gleitlinie. Mit Bild 8.14 (e) wird das Kontaktproblem zweier Stahlbetonscheiben im ebenen Spannungszustand untersucht. Wegen $d_y = 0$ ist N_y nicht eine verallgemeinerte Spannung. Die Grenze ABCDEF des aplastischen Bereichs für die spezielle betrachtete Verformung folgt sofort aus der Projektion der Fliessfläche Bild 7.1 (f) auf die $\{N_x, N_{xy}\}$ -Ebene. Die Gleichungen der massgebenden Fliessregime und die zugehörigen Gültigkeitsgrenzen können der Zusammenstellung im Abschnitt 7.1 entnommen werden. Gleich wie beim Bild 7.2 (e) sind die in den verschiedenen Fliessregimen möglichen Relativverschiebungen $[d_u]$ an einem durch Schraffur hervorgehobenen Element der Kontaktfläche mit fetten Pfeilen angedeutet.

9. PLATTEN

9.1 Fließbedingungen für Plattenelemente

Die Spannungsergebnierenden am Plattenelement Bild 9.1 (a) sind die Querkräfte

$$V_x = \int_{-1/2}^{1/2} \tau_{zx} dz \quad , \quad V_y = \int_{-1/2}^{1/2} \tau_{zy} dz \quad , \quad (9.1)$$

die Membrankräfte

$$N_x = \int_{-1/2}^{1/2} \sigma_x dz \quad , \quad N_y = \int_{-1/2}^{1/2} \sigma_y dz \quad , \quad N_{xy} = \int_{-1/2}^{1/2} \tau_{xy} dz \quad (9.2)$$

und die Biegemomente

$$M_x = \int_{-1/2}^{1/2} \sigma_x \cdot z dz \quad , \quad M_y = \int_{-1/2}^{1/2} \sigma_y \cdot z dz \quad , \quad M_{xy} = \int_{-1/2}^{1/2} \tau_{xy} \cdot z dz \quad . \quad (9.3)$$

Beschränkt man sich durch Uebertragen der *Hypothese von Jacob Bernoulli* über die Balkenbiegung auf die Betrachtung spezieller Verformungszustände, bei denen Normalen zur Plattenmittelebene während der Verformung gerade und senkrecht zur verformten Mittelfläche bleiben, so ist

$$d\gamma_{zx} = d\gamma_{zy} = 0 \quad , \quad (9.4)$$

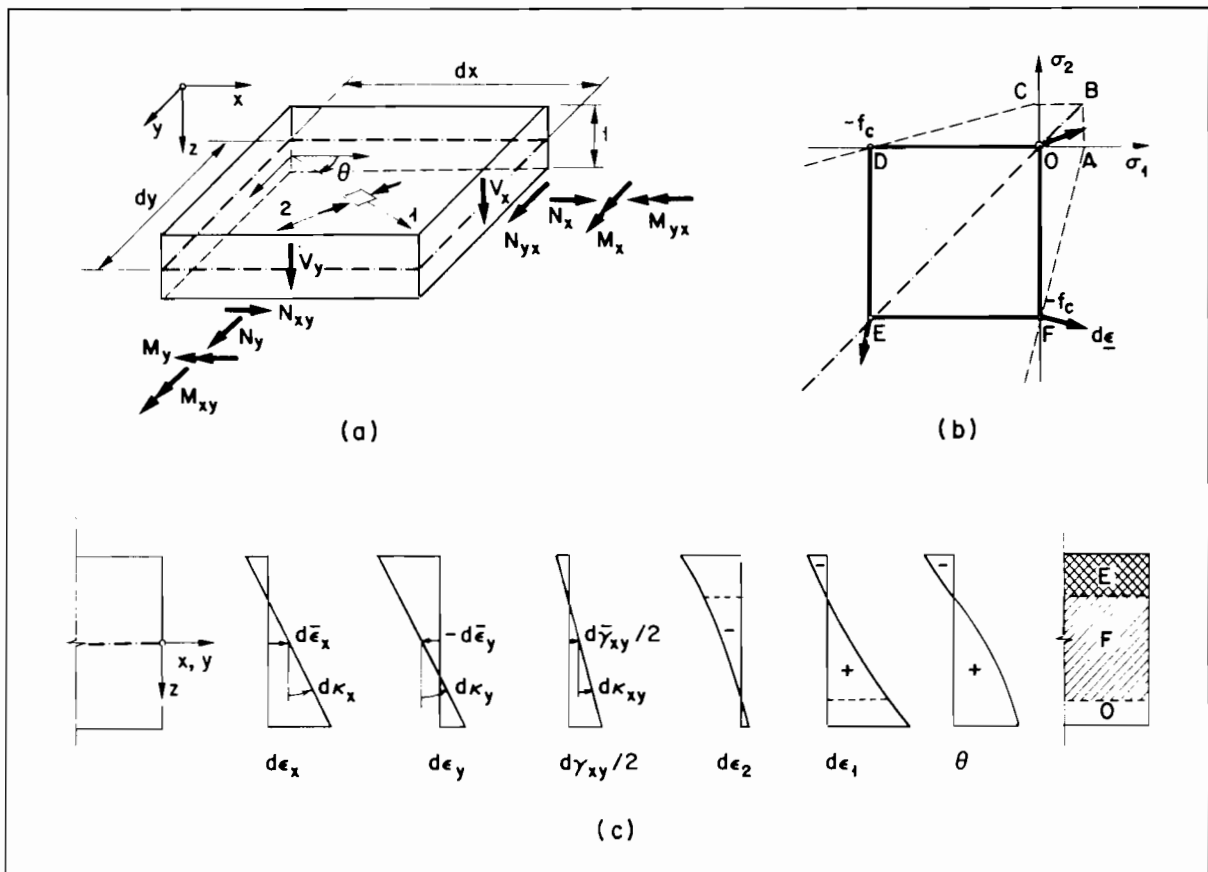


Bild 9.1: Plattenelement

und die Verzerrungssinkremente

$$d\epsilon_x = d\bar{\epsilon}_x + dk_x \cdot z, \quad d\epsilon_y = d\bar{\epsilon}_y + dk_y \cdot z, \quad \frac{d\gamma_{xy}}{2} = \frac{d\bar{\gamma}_{xy}}{2} + dk_{xy} \cdot z \quad (9.5)$$

sind gemäss Bild 9.1 (c) linear in z . Wegen (9.4) ist die z -Richtung eine Hauptrichtung für die Verzerrungssinkremente, d.h. $z \equiv 3$ und $d\epsilon_z = d\epsilon_3$. Für isotropes Material ist z auch Hauptrichtung verträglicher Spannungszustände. Mithin wird die Existenz von Schubspannungen $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ und $\tau_{zy} = \tau_{yz}$ ausgeschlossen. Einzelne Lamellen $z = \text{konst.}$ des Plattenelementes üben wegen $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ aufeinander keine Kräfte aus. Ferner lässt die aus (4.11) folgende Gleichgewichtsbedingung

$$\sigma_{z,z} + k_z = 0$$

für eine vernachlässigbare Volumenkraft k_z und für die Randbedingung $\sigma_z = 0$ an einer freien Oberfläche $z = \frac{1}{2}$ oder $z = -\frac{1}{2}$ des Plattenelementes nur den Schluss

$$\sigma_z = \sigma_3 = 0 \quad \left[-\frac{1}{2} \leq z \leq \frac{1}{2}\right] \quad (9.6)$$

zu, d.h. der Spannungszustand in allen Lamellen des Plattenelementes ist eben.

Gemäss (3.1) und nach den Beziehungen (9.2) bis (9.6) ist die elementare Deformationsarbeit

$$dA = \int_{-1/2}^{1/2} (\sigma_x \cdot d\epsilon_x + \dots) dz$$

gegeben durch

$$dA = N_x \cdot d\bar{\epsilon}_x + N_y \cdot d\bar{\epsilon}_y + N_{xy} \cdot d\bar{\gamma}_{xy} + M_x \cdot dk_x + M_y \cdot dk_y + M_{xy} \cdot 2 \cdot dk_{xy} \quad (9.7)$$

Die Verzerrungssinkremente $\{d\bar{\epsilon}_x, d\bar{\epsilon}_y, d\bar{\gamma}_{xy}\}$ der Mittelebene und die Krümmungssinkremente $\{dk_x, dk_y, 2 \cdot dk_{xy}\}$ sind im Sinne von (4.15) verallgemeinerte Verformungen. Die Membrankräfte $\{N_x, N_y, N_{xy}\}$ und die Biegemomente $\{M_x, M_y, M_{xy}\}$ sind die zugehörigen verallgemeinerten Spannungen.

Mit der Bindung (9.4) wird die Wirkung der in den Gleichungen (9.1) auftretenden Schubspannungen τ_{zx} und τ_{zy} vernachlässigt. Die Querkräfte (9.1) sind als für das Gleichgewicht notwendige Reaktionskräfte zu betrachten, gleich wie innere Kräfte eines starren Körpers.

Die mit der Uebertragung der Bernoullischen Hypothese eingeführte Betrachtungsweise ist offensichtlich nur für den Fall einer geringen Beanspruchung durch Querkräfte gerechtfertigt. Ferner ist ihre Berechtigung auch für den Fall einer veränderlichen Plattendicke oder bei starken Aenderungen der Bewehrungsgehalte, welche beträchtliche Schubspannungen τ_{xz} und τ_{yz} verursachen können, zu prüfen.

Mit (9.5) sind die Hauptwerte

$$\frac{d\epsilon_1}{2} = \frac{1}{2} \cdot (d\epsilon_x + d\epsilon_y) \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(d\epsilon_x - d\epsilon_y)^2 + d\gamma_{xy}^2} \quad (9.8)$$

der Verzerrungssinkremente in der Plattenebene bekannt. Für den die Hauptrichtungen gemäss Bild 9.1 (a) bestimmenden Winkel θ gilt

$$\tan(2 \cdot \theta) = \frac{d\gamma_{xy}}{d\epsilon_x - d\epsilon_y} \quad (9.9)$$

Der Verlauf von $d\epsilon_1$, $d\epsilon_2$ und θ über die Plattendicke ist für den angenommenen Satz verallgemeinerter Verformungen $\{d\bar{\epsilon}_x, \dots, d\kappa_x, \dots\}$ in Bild 9.1 (c) rechts angedeutet.

Gemäss (3.12) ist mit der Kenntnis der Verzerrungssinkremente (9.5), d.h. für jeden Satz verallgemeinerter Verformungen, die elementare Deformationsarbeit in irgend einer Lamelle $z = \text{konst.}$ eindeutig bestimmt, wenn die für $z = \text{konst.}$ massgebende Fliegsbedingung verwendet und (9.6) beachtet wird. Mithin ist (9.7) eine eindeutige Funktion der verallgemeinerten Verformungen. Die zugehörigen verallgemeinerten Spannungen können aus den zu (3.16) analogen Beziehungen

$$N_x = \frac{\partial [dA(d\bar{\epsilon}_x, \dots, d\kappa_x, \dots)]}{\partial (d\bar{\epsilon}_x)} , \dots \quad (9.10)$$

ermittelt werden.

Die gemäss den Annahmen in Abschnitt 6.1 für Beton im ebenen Spannungszustand bei Vernachlässigung von f_t resultierende spezielle Fliegsbedingung ist in Bild 9.1 (b) dargestellt. Für nicht verschwindende Verzerrungssinkremente $d\epsilon_1 > d\epsilon_2$ entspricht der verträgliche Spannungszustand im Beton den Punkten O, E oder F, je nachdem, ob $d\epsilon_1$ und $d\epsilon_2$ beide positiv oder negativ sind oder unterschiedliche Vorzeichen haben. Sofern die Bedingung

$$d\epsilon_x \cdot d\epsilon_y = \left(\frac{d\gamma_{xy}}{2} \right)^2$$

d.h. mit (9.5) die Gleichung

$$z^2 \cdot (d\kappa_x \cdot d\kappa_y - d\kappa_{xy}^2) + z \cdot (d\bar{\epsilon}_x \cdot d\kappa_y + d\bar{\epsilon}_y \cdot d\kappa_x - d\bar{\gamma}_{xy} \cdot d\kappa_{xy}) + (d\bar{\epsilon}_x \cdot d\bar{\epsilon}_y - \frac{1}{4} \cdot d\bar{\gamma}_{xy}^2) = 0 \quad (9.11)$$

erfüllt ist, verschwindet einer der Hauptwerte (9.8) der Verzerrungssinkremente. Für diesen Fall liegt der Bildpunkt des verträglichen Spannungszustandes im Beton auf der Quadratseite DF ($d\epsilon_1 > 0 = d\epsilon_2$) oder EF ($d\epsilon_1 = 0 > d\epsilon_2$).

Wie MORLEY (1966) bemerkte, ergeben sich aus der quadratischen Gleichung (9.11) im allgemeinen nicht mehr als zwei Niveaus z_1 und z_2 , für welche dieser Fall eintritt. Ueber die Plattendicke ergeben sich deshalb im Maximum drei durch z_1 und z_2 begrenzte Bereiche mit Spannungszuständen entsprechend den Punkten D, F und E in Bild 9.1 (b), wie dies in Bild 9.1 (c) ganz rechts angedeutet ist. Sofern (9.11) für mehr als zwei Werte von z erfüllt ist, müssen alle Klammerausdrücke in (9.11) verschwinden. Dies kann nur für den Fall einachsiger Verzerrungszustände mit über die Plattendicke konstanter Richtung eintreten, z.B. für eine Fliegs gelenklinie in t-Richtung, deren Normale n mit der x-Achse den Winkel $\theta = \text{konst.}$ bildet, und für die die Beziehung

$$d\epsilon_n = d\bar{\epsilon}_n + d\kappa_n \cdot z, \quad d\epsilon_t = 0 \quad (9.12)$$

gilt. Geht man demnach von (9.12) als Annahme aus, so sind die Hauptspannungen σ_t im Beton parallel zur Fliegs gelenklinie aus dem der Fliegsbedingung Bild 9.1 (b) zugeordneten Fliegs gesetz allein nicht bestimmt.

In diesem Abschnitt werden nur Plattenelemente betrachtet, die eine zu ihrer Ebene parallele Bewehrung enthalten. Die Bewehrung fliesst nach den Annahmen von Kapitel 6 auf Zug oder auf Druck, je nachdem, ob im Beton, in dem sie eingebettet ist, ein positives oder ein negatives Dehnungssinkrement in ihrer Richtung auftritt. Die in der Bewehrung dissipierte Arbeit ist durch (9.5), d.h. für jeden Satz verallgemeinerter Verformungen eindeutig bestimmt. Für den Fall starr bleibender Bewehrungen ergeben sich im sechsdimensionalen Raum der verallgemeinerten Spannungen fünfdimensionale hyperzylindrische Stücke der Fliegsfläche.

Mit (9.10) kann die Fliessfläche im Raum der verallgemeinerten Spannungen in Abhängigkeit von fünf die Richtung des Vektors der verallgemeinerten Verformungen $\{d\bar{\epsilon}_x, \dots, d\kappa_x, \dots\}$ bestimmenden Parametern punktweise ermittelt werden. Im allgemeinen gelingt es nicht, diese Parameter zu eliminieren und damit eine explizite Fliessbedingung in den verallgemeinerten Spannungen anzugeben. Oft interessiert man sich jedoch nur für bestimmte Projektionen der fünfdimensionalen allgemeinen Fliessfläche, indem einzelne verallgemeinerte Verformungen gleich null gesetzt, d.h. die zugehörigen verallgemeinerten Spannungen als innere Reaktionskräfte behandelt werden. In anderen Fällen werden bestimmte verallgemeinerte Spannungen als bekannt vorausgesetzt, d.h. man arbeitet mit Schnitten der allgemeinen Fliessfläche. Vielfach wird aufgrund solcher Vereinfachungen eine explizite Formulierung der Fliessbedingung ermöglicht.

Als Beispiel wird mit Bild 9.2 der Fall eines durch *Schub und Querbiegung* beanspruchten Plattenelementes angegeben, der in einer Arbeit von MARTI und THUERLIMANN (1977 b) untersucht wurde. Die Verformungen $d\bar{\epsilon}_x$, $d\kappa_x$ und $d\kappa_{xy}$ und die Membrankraft N_y werden gleich null gesetzt. Als gesuchte verallgemeinerte Spannungen verbleiben die Membrankraft N_{xy} und das Querbiegemoment M_y . Die in Bild 9.2 (b) für einen bestimmten Parametersatz angegebene Lösung ist der Schnitt der Projektion der allgemeinen Fliessfläche im Raum der verallgemeinerten Spannungen bezüglich N_x , M_x und M_{xy} mit der Ebene $N_y = 0$.

Die Bewehrung in y-Richtung sei in den beiden Ebenen $z = \pm d/2$ angeordnet, und sie folge den Fliessbedingungen

$$|z_l| \leq z_{yl} \quad , \quad |z_r| \leq z_{yr} \quad . \quad (9.13)$$

Von der oben erläuterten allgemeinen Methode zur Gewinnung von Fliessbedingungen für Plattenelemente abweichend wird das in Bild 9.2 (a) dargestellte Spannungsfeld den Ueberlegungen zugrunde gelegt. Es wird angenommen, der Spannungszustand im Beton entspreche Punkt F in Bild 9.1 (b). Der Winkel $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$ zwischen der Hauptdruckrichtung und der x-Achse ist über die Plattendicke variabel. Für die Grössen N_{xy} , M_y und N_y erhält man

$$\frac{N_{xy}}{f_c} = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1/2}^{1/2} \sin(2 \cdot \alpha) \, dz \quad , \quad \frac{M_y}{f_c} = \int_{-1/2}^{1/2} z \cdot \sin^2 \alpha \, dz + \frac{d}{2 \cdot f_c} \cdot (z_l - z_r) \quad (9.14)$$

und

$$\frac{N_y}{f_c} = \int_{-1/2}^{1/2} \sin^2 \alpha \, dz + \frac{1}{f_c} \cdot (z_l + z_r) = 0 \quad . \quad (9.15)$$

Nach der statischen Methode sucht man das Maximum von N_{xy} bei festen Werten M_y , z_l und z_r . Die erste Gleichung (9.14) und die durch die zweite Gleichung (9.14) und durch (9.15) gegebenen Nebenbedingungen bilden ein isoperimetrisches Variationsproblem. Mit den Lagrange'schen Multiplikatoren λ_1 und λ_2 für die beiden Nebenbedingungen liefert die Eulersche Differentialgleichung die Beziehung

$$-\cot(2 \cdot \alpha) = \lambda_1 \cdot z + \lambda_2 \quad . \quad (9.16)$$

Mit der Abkürzung

$$\omega = \frac{z_l + z_r}{f_c} \quad (9.17)$$

erhält man durch Substitution von z durch α gemäss (9.16) aus (9.15)

$$\tan \alpha_l \cdot \tan \alpha_r = \frac{\omega}{1 - \omega} \quad , \quad (9.18)$$

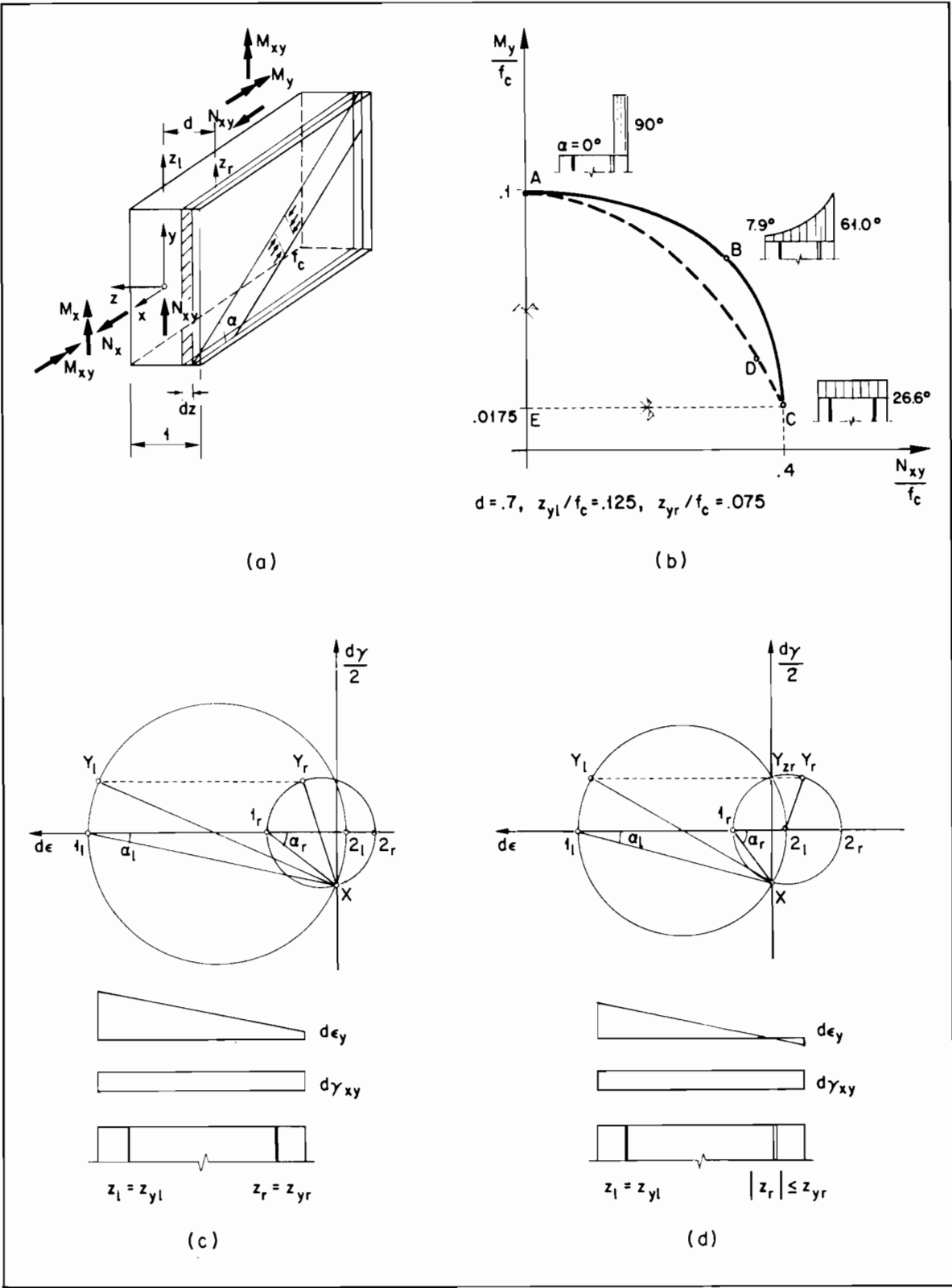


Bild 9.2: Schub und Querbiegung am Plattenelement

wobei $\alpha_1 = \alpha(\frac{1}{2})$ und $\alpha_r = \alpha(-\frac{1}{2})$ ist. Mit dem Parameter $t = \tan \alpha_r$ erhält man aus (9.14) und (9.18) die parametrische Darstellung

$$\left. \begin{aligned} N_{xy} &= f_c \cdot \omega \cdot \frac{t \cdot \ln[\frac{t^2}{\omega} \cdot (1-\omega)]}{t^2 - \frac{\omega}{1-\omega}} , \\ M_y &= \frac{d}{2} \cdot (z_1 - z_r) + \frac{f_c}{2 \cdot (t^2 - \frac{\omega}{1-\omega})^2} \cdot \{ \omega \cdot (1-\omega) \cdot [t^4 - (\frac{\omega}{1-\omega})^2] - 2 \cdot \omega^2 \cdot t^2 \cdot \ln[\frac{t^2}{\omega} \cdot (1-\omega)] \} \end{aligned} \right\} \quad (9.19)$$

Mit den Abkürzungen

$$k = \frac{\omega}{1-\omega} , \quad l = \frac{N_{xy}}{f_c \cdot (1-\omega)} , \quad m = \frac{2 \cdot M_y - d \cdot (z_1 - z_r)}{f_c \cdot \omega \cdot (1-\omega)} \quad (9.20)$$

liefert (9.19) eine quadratische Gleichung für t mit der Lösung

$$t = \tan \alpha_r = \frac{1}{1-m} \cdot [1 + \sqrt{1^2 - k \cdot (1-m^2)}] \quad (9.21)$$

Einsetzen in der ersten Gleichung (9.19) führt zur transzendenten Interaktionsgleichung

$$\begin{aligned} \Phi(N_{xy}, M_y) &= \ln \left\{ \frac{2 \cdot l \cdot [1 + \sqrt{1^2 - k \cdot (1-m^2)}]}{k \cdot (1-m)^2} - \frac{1+m}{1-m} \right\} - \\ &- \frac{2 \cdot l}{k \cdot (1-m)} \cdot \left[1 - \frac{k \cdot (1-m)}{1 + \sqrt{1^2 - k \cdot (1-m^2)}} \right] = 0 \quad (9.22) \end{aligned}$$

wobei noch bezüglich z_1 und z_r optimallisiert werden muss.

Die Schiebungsinkremente dy_{xy} sind voraussetzungsgemäss über die Plattendicke konstant, $dy_{xy}(z) = d\bar{y}_{xy} = \text{konst.}$. Die beiden weiteren nicht verschwindenden verallgemeinerten Verformungen $d\bar{\epsilon}_y$ und dk_y entsprechen einer linearen Variation von $d\epsilon_y$ über die Plattendicke. Gemäss (9.9) variiert demnach $\cot(2 \cdot \theta) = -\cot(\pi - 2 \cdot \theta) = -\cot(2 \cdot \alpha)$ linear mit z . Diese kinematische Bedingung entspricht der notwendigen Bedingung (9.16) für das Maximum von N_{xy} nach der statischen Methode.

Für nicht verschwindende Schiebungsinkremente entspricht der Spannungszustand im Beton dem mit Bild 9.2 (a) angenommenen einachsigen Druckspannungszustand. Der Fall $d\bar{y}_{xy} = 0$ mit $d\epsilon_1 > 0 = d\epsilon_2$ oder $d\epsilon_1 = 0 > d\epsilon_2$, d.h. nicht vollständig bestimmten Spannungszuständen im Beton entsprechend Punkten auf den Quadratseiten OF oder EF in Bild 9.1 (b), tritt nur für $N_{xy} = 0$ auf.

Sofern die Bewehrung sowohl links als auch rechts fliesst, sind in (9.17) die Flie遡sgrenzen z_{y1} und z_{yr} einzusetzen. Die kinematischen Verhältnisse sind mit Bild 9.2 (c) dargestellt.

Falls die Bewehrung auf der Querbiegedruckseite rechts nicht fliesst, herrscht für $z = -d/2$ ein Zustand reiner Schiebung mit $\alpha(-d/2) = \pi/4$, vgl. Bild 9.2 (d). In diesem Fall liefert (9.18)

$$t^2 = \tan^2 \alpha_r = \frac{\omega \cdot [(1-\omega) \cdot (1+d) - \omega \cdot (1-d)]}{(1-\omega) \cdot [\omega \cdot (1+d) - (1-\omega) \cdot (1-d)]} \quad (9.23)$$

wobei ω beliebige Werte entsprechend den Bedingungen $z_1 = z_{y1}$ und $|z_r| \leq z_{yr}$ annehmen kann. Der Fall $z_r = -z_{yr}$ tritt für eine sehr starke Bewehrung auf der linken Seite ein, $z_{y1} > z_{yr} + (f_c/2) \cdot (1-d)$. Dieser Fall kann nach den bisherigen Ueberlegungen sinngemäss behandelt werden, ebenso wie der für kleine oder negative M_y mögliche Fall $z_r = z_{yr}$, $|z_1| \leq z_{y1}$.

In Bild 9.2 (b) ist die resultierende Interaktionskurve ABC für einen bestimmten Parametersatz $\{d, z_{y1}/f_c, z_{yr}/f_c\}$ dargestellt. Die Kurve ist symmetrisch bezüglich den Geraden $N_{xy} = 0$ und $M_y = d/2 \cdot (z_{y1} - z_{yr})$. Für die Punkte A, B und C ist die Variation des Neigungswinkels α des Betondruckfeldes über die Plattendicke angegeben. In C ($m = 0$) erhält man die Ausdrücke

$$\tan \alpha = \sqrt{\frac{\omega}{1-\omega}} = \text{konst.}, \quad N_{xy} = f_c \cdot \sqrt{\omega \cdot (1-\omega)}, \quad \omega \cdot f_c = z_{y1} + z_{yr}, \quad (9.24)$$

welche den Verhältnissen von Regime VI in Bild 7.1 (f) entsprechen. Für den Punkt B verschwindet das Dehnungsinkrement $d\epsilon_y(-d/2)$ gerade. Die kinematischen Verhältnisse für Punkte auf den Bogen CB und BA in Bild 9.2 (b) werden durch die Bilder 9.2 (c) und (d) repräsentiert. Für den Punkt A gelten die Beziehungen

$$\alpha = 0 \quad \left[\frac{1}{2} \geq z \geq -\frac{d}{2} \right], \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \quad \left[-\frac{d}{2} \geq z \geq -\frac{1}{2} \right] \quad (9.25)$$

und

$$z_r = \frac{f_c}{2} \cdot (1-d) - z_{y1}, \quad M_y = d \cdot z_{y1} + \frac{f_c}{8} \cdot (1-d)^2, \quad (9.26)$$

da für die gewählten Parameter $z_{y1} < z_{yr} + \frac{f_c}{2} \cdot (1-d)$ und $z_{y1} + z_{yr} > (f_c/2) \cdot (1-d)$ ist. Zum Vergleich mit der vollständigen Lösung ist mit der Linie ADC das Ergebnis der im folgenden anhand von Bild 9.3 nach der statischen Methode durchgeführten Ueberlegungen angegeben, welche auf der Annahme eines konstanten einachsigen Druckspannungsfeldes im Beton über eine bestimmte Dicke $d_e \leq 1$ auf der Querbiegedruckseite beruhen.

Es sei noch bemerkt, dass gemäss (9.15) und (9.17) und nach dem Prinzip (6.9) die bisherigen Ueberlegungen durch Ersetzen von ω durch $\omega - N_y/f_c$ ohne weiteres auf den Fall $N_y \neq 0$ übertragen werden können. Ferner kann gemäss (7.5) auch der Fall einer zur Richtung y schiefen Bewehrung leicht erfasst werden. Damit können für beliebige, zueinander orthogonale Richtungen n und t die für den beschränkten Satz $\{d\bar{\epsilon}_n, d\bar{\gamma}_{nt}, dk_n\}$ verallgemeinerter Verformungen resultierenden verallgemeinerten Spannungen $\{N_n, N_{nt}, M_n\}$ angegeben werden. Ist ein solcher, gegenüber den in (9.12) auftretenden Grössen $d\bar{\epsilon}_n$ und dk_n um $d\bar{\gamma}_{nt}$ erweiterter Satz verallgemeinerter Verformungen entlang einer Linie mit Tangente t konzentriert, so spricht man nach BRAESTRUP (1970) von einer *verallgemeinerten Fließgelenklinie*. Ist diese Linie durch starre Plattenteile begrenzt, so muss sie gerade sein, damit die Plattendurchbiegungen stetig sein können.

Nach Abschluss der oben erwähnten Gemeinschaftsarbeit (1977 b) erhielt der Verfasser Kenntnis von einer Arbeit von COOKSON (1976, siehe auch 1979), in welcher Fließbedingungen für verallgemeinerte Fließgelenklinien im oben besprochenen Sinn erarbeitet werden. Cooksons Annahmen sind mit den in dieser Arbeit getroffenen Voraussetzungen identisch. Die von ihm angegebene parametrische Darstellung der Fließbedingung für die verallgemeinerten Spannungen $\{N_n, N_{nt}, M_n\}$ an einer verallgemeinerten Fließgelenklinie entspricht (9.19). Für die praktische Berechnung erörterte er verschiedene Näherungen für die recht mühsam zu handhabenden Ausdrücke. Im Gegensatz zu der vorliegenden Darstellung verzichtete Cookson jedoch auf die Parameterelimination aus seiner parametrischen Darstellung der Fließbedingung für $\{N_n, N_{nt}, M_n\}$. Mit einem Wert f_c entsprechend 60% der Würfeldruckfestigkeit des Betons fand er (1976) eine gute Uebereinstimmung zwischen Theorie und Versuchen.

Nach diesen Bemerkungen wird anhand von Bild 9.3 nach der statischen Methode ein unterer Grenzwert für die Traglast ermittelt. Es wird angenommen, der Beton sei über die Dicke d_e in einem konstanten einachsigen Druckspannungszustand mit konstantem Winkel α zwischen Hauptdruckrichtung und x -Achse und spannungsfrei im verbleibenden Teil $1-d_e$. Anstelle

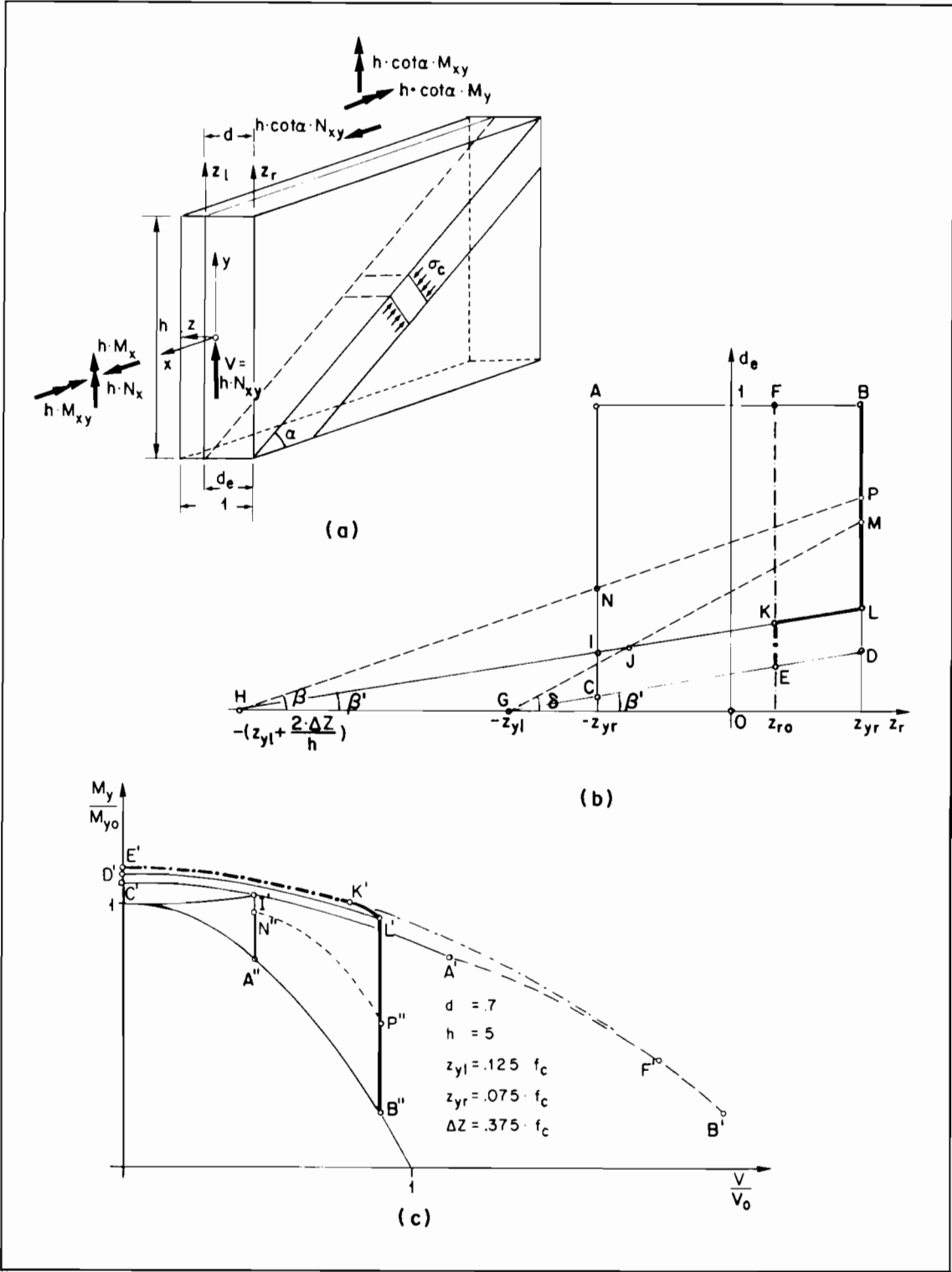


Bild 9.3: Schub und Querbiegung – Statische Methode

von (9.15) und (9.14) gilt

$$z_1 + z_r = d_e \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sigma_c \quad (9.27)$$

und

$$N_{xy} = \sqrt{(z_1 + z_r) \cdot (d_e \cdot \sigma_c - z_1 - z_r)} \quad , \quad M_y = (z_1 - z_r) \cdot \frac{d}{2} + (z_1 + z_r) \cdot \frac{1-d}{2} \quad (9.28)$$

N_{xy} wird für $\sigma_c = f_c$ maximal. Man kann ferner zeigen, dass in jedem Fall die maximale Last für $z_1 = z_{y1}$ angenommen wird, wenn die Bedingungen $z_{y1} \geq z_{yr}$ und $(z_{y1} + z_{yr})/f_c \leq 1/2$ erfüllt sind. Damit entspricht den Gleichungen (9.28) eine Abbildung der Ebene $\{z_r, d_e\}$, Bild 9.3 (b), in die Ebene $\{V = h \cdot N_{xy}, M_y\}$, Bild 9.3 (c).

In Bild 9.3 (b) sind Grenzen für z_r und d_e angegeben. z_r ist durch die Restriktion (9.13) begrenzt und d_e durch den aus (9.27) folgenden Wert mit $\sin^2 \alpha = 1$ und die Plattendicke 1, d.h.

$$1 \geq d_e \geq \frac{z_{y1} + z_r}{f_c} \quad (9.29)$$

(9.29) und die zweite Ungleichung (9.13) begrenzen den Bereich ABCD. Für den Winkel β' bei G erhält man aus (9.29)

$$\cot \beta' = f_c \quad (9.30)$$

Elimination von d_e aus (9.28) bringt

$$M_y + \frac{N_{xy}^2}{2 \cdot f_c} - [(z_{y1} - z_r) \cdot \frac{d}{2} + (z_{y1} + z_r) \cdot \frac{1}{2} - \frac{(z_{y1} + z_r)^2}{2 \cdot f_c}] = 0 \quad (9.31)$$

Nach der statischen Methode sucht man die äusserste Parabel der durch (9.31) bestimmten Parabelschar, d.h. man sucht das Maximum des Ausdruckes in den eckigen Klammern auf der linken Seite von (9.31). Dieser Ausdruck wird mit $\bar{M}_y(z_r)$ bezeichnet. Die Ableitung $d\bar{M}_y/dz_r$ verschwindet für

$$z_{ro} = \frac{f_c}{2} \cdot (1-d) - z_{y1} \quad (9.32)$$

Für $|z_{ro}| \leq z_{yr}$ ist

$$\bar{M}_y(z_{ro}) = \bar{M}_{yo} = d \cdot z_{y1} + \frac{f_c}{8} \cdot (1-d)^2$$

und (9.31) wird zu

$$\frac{M_y}{\bar{M}_{yo}} + \frac{N_{xy}^2}{2 \cdot f_c \cdot \bar{M}_{yo}} - 1 = 0 \quad (9.33)$$

Falls $z_{ro} > z_{yr}$ oder $z_{ro} < -z_{yr}$ ist, nimmt $\bar{M}_y(z_r)$ für $z_r = z_{yr}$ oder $z_r = -z_{yr}$ ein Maximum an. Diese Werte können unmittelbar in (9.31) eingesetzt werden.

Die Gerade AB in Bild 9.3 (b) wird in Bild 9.3 (c) zum Ellipsenbogen A'B' mit der Gleichung

$$\frac{(M_y + \frac{d}{4} \cdot f_c - d \cdot z_{y1})^2}{(\frac{d}{4} \cdot f_c)^2} + \frac{N_{xy}^2}{(\frac{f_c}{2})^2} - 1 = 0 \quad (9.34)$$

Die Koordinaten der Punkte A' und B' folgen aus (9.28):

$$N_{xy}(A', B') = \sqrt{(z_{y1} \mp z_{yr}) \cdot (f_c - z_{y1} \pm z_{yr})}, \quad M_y(A', B') = (z_{y1} \pm z_{yr}) \cdot \frac{d}{2}. \quad (9.35)$$

Im Bildpunkt F' von F besitzen die Parabel (9.33) und die Ellipse (9.34) eine gemeinsame Tangente. Die Koordinaten von F' sind gegeben durch

$$N_{xy}(F') = \frac{f_c}{2} \cdot \sqrt{1-d^2}, \quad M_y(F') = z_{y1} \cdot d - \frac{d}{4} \cdot f_c \cdot (1-d). \quad (9.36)$$

Im Interaktionsdiagramm Bild 9.3 (c) ergeben sich affine Parabeln (9.31), welche auf dem Ellipsenbogen A'B' enden. Die Bilder von Punkten auf der Geraden CD in Bild 9.3 (b) liegen in Bild 9.3 (c) auf der Ordinate, insbesondere der Punkt E', für den $z_r = z_{r0}$ ist. Die Parabel (9.33) ist die äusserste der Schar (9.31). Die schlussendlich nach der statischen Methode resultierende Interaktionskurve E'F'B' entspricht der Linie ADC in Bild 9.2 (b).

EWALD (1977) ging ebenfalls von dem in Bild 9.3 (a) dargestellten Spannungsfeld aus. Die von ihm (S. 82) angegebenen Beziehungen für das höchste aufnehmbare Querbiegemoment und für die Zugkraft in der Bewehrung auf der Querbiegedruckseite fallen mit (9.33) und (9.32) zusammen.

Die oben durchgeführte Diskussion anhand der Bilder 9.3 (b) und (c) wurde erstmals in der bereits angeführten Arbeit von MARTI und THUERLIMANN (1977 b) dargestellt. Insbesondere wurden in jener Arbeit die Grenzen der Definitionsbereiche der einzelnen Beziehungen untersucht und die von Ewald nicht angegebene Gleichung (9.34) hergeleitet. Ferner wurde die Lösung auf den im folgenden erörterten Fall eines Schubwandelementes mit massgebender Längsbewehrung ausgedehnt und damit der Bezug zu einem von THUERLIMANN (1977) veröffentlichten Bemessungsverfahren hergestellt.

Betrachtet wird ein von zwei parallelen Stringern im Abstand h begrenztes Schubwandelement, das durch die Querkraft $V = h \cdot N_{xy}$ und das Querbiegemoment M_y gemäss Bild 9.3 (a) beansprucht wird. Die beiden Stringer müssen zusätzlich zu allen anderen Wirkungen, z.B. aus Biegung und Normalkraft, je die Hälfte der aus dem geneigten Betondruckfeld resultierenden Kraft $h \cdot (\sigma_c \cdot d_e - z_1 - z_r)$ aufnehmen können. Bezeichnet ΔZ den verfügbaren zusätzlichen Widerstand des massgebenden Stringers, so ist Stringerfliessen durch

$$\Delta Z = \frac{h}{2} \cdot (\sigma_c \cdot d_e - z_1 - z_r) \quad (9.37)$$

charakterisiert. Anstelle der ersten Gleichung (9.28) und anstatt (9.27) und (9.29) erhält man

$$V = h \cdot N_{xy} = \sqrt{(z_1 + z_r) \cdot 2 \cdot h \cdot \Delta Z}, \quad (9.38)$$

$$\tan^2 \alpha = \frac{h}{2 \cdot \Delta Z} \cdot (z_1 + z_r) \quad (9.39)$$

und

$$1 \geq d_e \geq \frac{1}{f_c} \cdot (z_{y1} + z_r + \frac{2 \cdot \Delta Z}{h}). \quad (9.40)$$

Die Grenzen für z_r und d_e umschliessen den Bereich ABIL in Bild 9.3 (b). Für Punkte innerhalb dieses Bereichs, z.B. P, ist die Spannung σ_c im Betondruckfeld durch die Richtung β der Verbindungsgeraden mit H gegeben:

$$\cot \beta = \sigma_c. \quad (9.41)$$

Die zweite Gleichung (9.28) und (9.38) liefern mit den Abkürzungen

$$M_{y0} = d \cdot z_{y1}, \quad V_0^2 = 4 \cdot h \cdot \Delta Z \cdot z_{y1} \quad (9.42)$$

die Parabelgleichung

$$\frac{M_y}{M_{y0}} + \left(\frac{V}{V_0}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1-d_e}{d}\right) - 1 = 0 \quad (9.43)$$

Der höchste untere Grenzwert für M_y und V wird für minimales d_e erreicht, d.h. für $\sigma_c = f_c$. Die Gerade IL mit $\cot \beta' = f_c$ in Bild 9.3 (b) wird in Bild 9.3 (c) zur Kurve mit der Gleichung

$$\frac{M_y}{M_{y0}} + \left(\frac{V}{V_0}\right)^2 \cdot \left[1 - \frac{1}{d} + \frac{2 \cdot \Delta Z}{d \cdot h \cdot f_c} + \left(\frac{V}{V_0}\right)^2 \cdot \frac{2 \cdot z_{y1}}{d \cdot f_c}\right] - 1 = 0 \quad (9.44)$$

abgebildet. Die Koordinaten der Bildpunkte I' und L' sind

$$\left. \begin{aligned} V(I', L') &= \sqrt{(z_{y1} \mp z_{yr}) \cdot 2 \cdot h \cdot \Delta Z} \\ M_y(I', L') &= (z_{y1} \pm z_{yr}) \cdot \frac{d}{2} + (z_{y1} \mp z_{yr}) \cdot \left[\frac{1}{2} - \frac{2 \cdot \Delta Z + h \cdot (z_{y1} \mp z_{yr})}{2 \cdot h \cdot f_c} \right] \end{aligned} \right\} \quad (9.45)$$

und jene des Berührungspunktes K' der Kurven (9.33) und (9.44) sind gegeben durch

$$V(K') = \sqrt{(1-d) \cdot h \cdot f_c \cdot \Delta Z}, \quad M_y(K') = \bar{M}_{y0} - \frac{(1-d) \cdot \Delta Z}{2 \cdot h} \quad (9.46)$$

Für $d_e = 1$ verschwindet der Quotient im zweiten Klammerausdruck auf der linken Seite von (9.43). Die Koordinaten der Bildpunkte A'' und B'' sind durch die erste Gleichung (9.45) und die zweite Gleichung (9.35) gegeben.

Gemäss (9.38) werden Geraden $z_r = \text{konst.}$ in Bild 9.3 (b) zu Geraden $V = \text{konst.}$ in Bild 9.3 (c) abgebildet, deren Endpunkte auf dem Parabelbogen A''B'' liegen.

Ersetzt man in (9.44) f_c durch σ_c , so erhält man die Gleichung für das Bild N''P'' einer beliebigen Geraden HNP in Bild 9.3 (b).

Schliesslich folgt aus (9.27), dass für irgend einen Punkt in der Ebene $\{z_r, d_e\}$ von Bild 9.3 (b), z.B. M, die Betondruckspannung σ_c und der Neigungswinkel α des Druckfeldes gemäss

$$\cot \delta = \sigma_c \cdot \sin^2 \alpha \quad (9.47)$$

mit dem Neigungswinkel δ der Verbindungsgeraden von M und G verknüpft sind. Zusammen mit (9.41) ist damit α rein geometrisch bestimmt.

Für die in Bild 9.3 (c) angenommenen Parameter h und ΔZ resultiert die Interaktionskurve E'K'L'P''B''. Sie entspricht der in Bild 9.3 (b) hervorgehobenen Linie EKLPB. Entlang E'K' sind die Widerstände der Bewehrung auf der Querbiegedruckseite und die Stringer nicht massgebend. Entlang K'L' ist der Widerstand der Bewehrung auf der Querbiegedruckseite nicht massgebend und entlang L'B'' die Betondruckfestigkeit.

Die bisherigen Ausführungen geben Anlass, das bereits erwähnte, von THUERLIMANN (1977) vorgeschlagene Verfahren für die Schubbemessung bei Querbiegung neu zu betrachten. Ziel

des Verfahrens war eine Ergänzung der in der Richtlinie 34 zur Norm SIA 162 (1976) enthaltenen Regeln über die Schubbemessung von Stahlbetonträgern.

Gemäss Richtlinie 34 wird der Neigungswinkel α der Betondruckdiagonalen in schubbeanspruchten Trägern auf den Bereich

$$\frac{3}{5} \leq \tan \alpha \leq \frac{5}{3} \quad (9.48)$$

beschränkt. Ferner wird eine obere Schubspannungsgrenze

$$\frac{V}{h} = \tau \leq \tau_{\max} \quad (9.49)$$

angegeben.

Für Bewehrungsgehalte, denen irgend ein Punkt P im Dreieck OAB von Bild 9.4 (a) entspricht, fliesst gemäss (9.38) und Abschnitt 7.1 (Regime I) die Längs- und die Schubbewehrung. Die Restriktionen (9.48) und (9.49) beschränken gemäss (9.39) und (9.38) die mögliche Lage von P auf den Bereich OCD. Entlang der Hyperbel CD ist das Verhältnis f_c/σ_c variabel. In den Endpunkten C und D erhält man den Minimalwert $f_c/\sigma_{c \max}$.

Falls das Schubwandelement durch ein zusätzliches Querbiegemoment beansprucht wird, erhält man nach der statischen Methode die grössten unteren Grenzwerte für die Traglast, wenn die nach Richtlinie 34 maximale, in Betracht gezogene Betondruckspannung $\sigma_{c \max}$ über die Breite $d_e < 1$ gemäss Bild 9.3 (a) erreicht ist, d.h.

$$\frac{d_e}{1} = \frac{\sigma_c}{\sigma_{c \max}} \leq \frac{\tau}{\tau_{\max}} \quad (9.50)$$

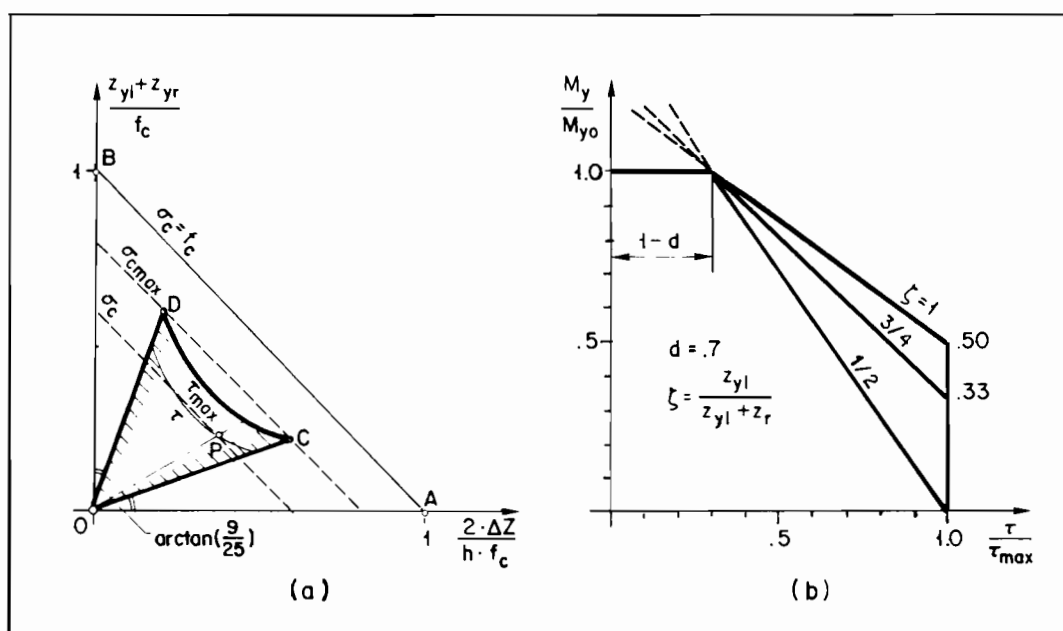


Bild 9.4: Schub und Querbiegung – Bemessungsverfahren

Unterdrückt man das Ungleichheitszeichen in (9.50), so folgt mit der Abkürzung

$$\zeta = \frac{z_{y1}}{z_{y1} + z_r} \quad (9.51)$$

aus der zweiten Gleichung (9.28) die auf der sicheren Seite liegende Näherung

$$\frac{M_y}{M_{y0}} = 1 + \frac{1}{2 \cdot \zeta} \cdot \left[\frac{1}{d} \cdot \left(1 - \frac{\tau}{\tau_{\max}} \right) - 1 \right]$$

für M_y . Diese Beziehung ist im Bemessungsdiagramm Bild 9.4 (b) dargestellt, zusammen mit der Näherung $M_y = M_{y0}$ für geringe Schubbeanspruchung, $\tau/\tau_{\max} \leq 1-d$. Die Näherung $M_y = M_{y0} = d \cdot z_{y1}$ ist auf der sicheren Seite, wenn $z_{y1} \leq (1-d) \cdot f_c \cdot z_r$ ist.

Die Arbeit von Thürlimann (1977) enthält einen Vergleich mit den Resultaten von Versuchen über Schub bei Querbiegung, über die KAUFMANN und MENN (1976) berichteten. Die Nachrechnung mit dem Bemessungsverfahren ergab für alle Versuche theoretische Widerstände, die unter den experimentell ermittelten Werten lagen.

Die Versuche von Kaufmann und Menn wurden auch von Ewald (1977) ausgewertet. Allerdings zog Ewald das Fließen der Längsbewehrung in den Bruchbereichen der Träger nicht in Betracht. Nach Ansicht des Verfassers gelangte er deshalb teilweise zu unrichtigen Folgerungen. Aus diesem Grund werden im folgenden die Versuche von Kaufmann und Menn aufgrund der oben entwickelten Überlegungen nach der statischen Methode mit Berücksichtigung des Widerstandes der Längsbewehrung erneut ausgewertet.

In Bild 9.5 sind Form und Abmessungen der sechs Versuchsträger dargestellt. Alle Träger wurden in zwei Laststellungen geprüft. Bei der Laststellung I wurden zwei Einzellasten V symmetrisch auf die über 6 m gespannten Träger aufgebracht. Bei der Laststellung II wurde ein Auflager um 2 m versetzt und eine Einzellast $2 \cdot V$ in der Mitte der auf 4 m verkleinerten

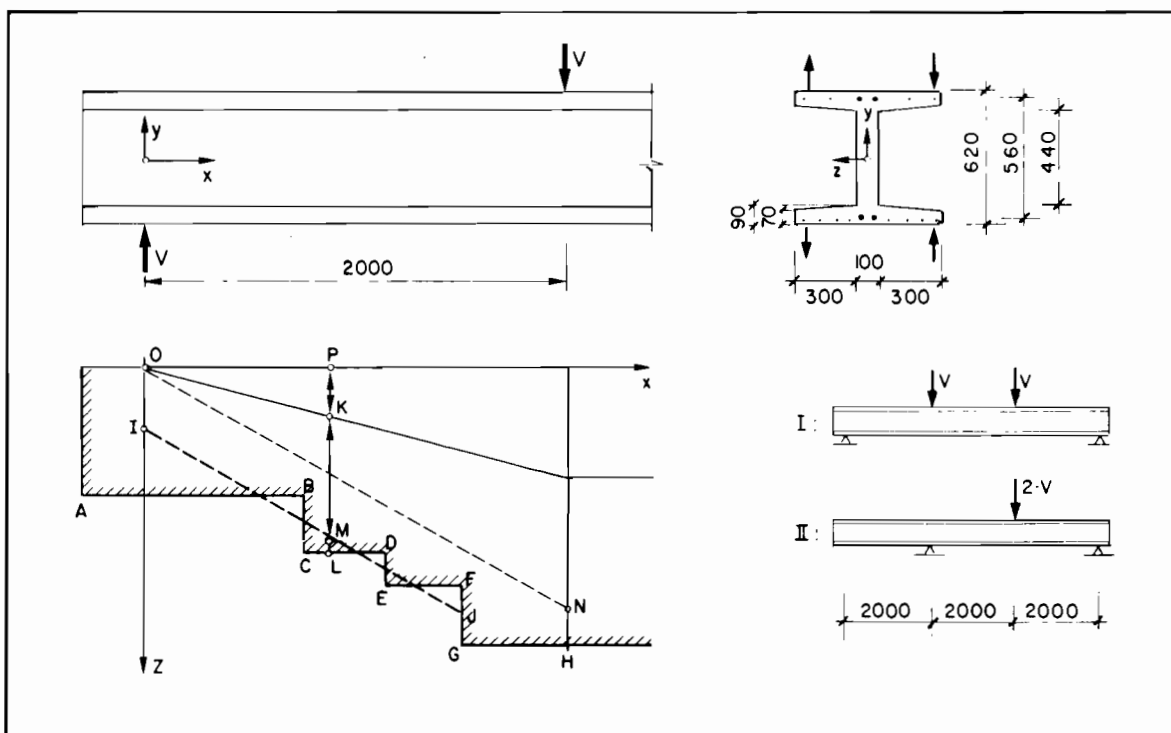


Bild 9.5: Versuche über Schub bei Querbiegung

ten Spannweite aufgebracht. Der Abstand der Lasteinleitungsstellen von den Auflagern betrug in jedem Fall 2 m. In beiden Laststellungen wurde auf der ganzen Trägerlänge ein Querbiegemoment im Trägersteg erzeugt.

Alle äusseren Abmessungen wurden bei den sechs Trägern konstant gehalten. Die Stegbreite mass 100 mm, die Steghöhe ohne Flanschen 440 mm und die totale Trägerhöhe 620 mm. Die Betonüberdeckung der Bewehrung betrug 10 mm.

In Bild 9.6 sind die Kennwerte der 12 Versuche und die zum Vergleich mit der oben entwickelten Theorie nötigen rechnerischen Grössen zusammengestellt.

Für die Träger S_1 bis S_3 und S_4 bis S_6 kamen zwei unterschiedliche Betonrezepturen zur Anwendung. Die Betondruckfestigkeitswerte der ersten drei Träger lagen im Mittel um ein Drittel über denen der Träger S_4 bis S_6 . Für die Auswertung wurden die bei relativ grosser Dehnungsgeschwindigkeit ermittelten Prismendruckfestigkeitswerte zugrunde gelegt.

Gehalt und Anordnung der Längs- und Bügelbewehrung waren von Träger zu Träger unterschiedlich. Im allgemeinen wurde die Längsbewehrung etwa gemäss der Linie ABCDEFGH in Bild 9.5 abgestuft. Dies erfolgte durch stumpfes Aneinanderschweissen von Stäben verschiedener Durchmesser.

Der in (9.37) auftretende, über den für reine Momentendeckung nötigen Widerstand hinausgehende zusätzliche Widerstand ΔZ ist von Punkt zu Punkt entlang der Träger verschieden und zusätzlich von der Beanspruchung V abhängig. Dies ist aus Bild 9.5 ersichtlich. Die Gerade OK bezeichne die für Momentendeckung nötige Zugkraft in der Längsbewehrung. In einem beliebigen Punkt P ist ΔZ durch die Strecke \overline{KL} gegeben. Entspricht die Gerade ON der für Momentendeckung nötigen Zugkraft in der Längsbewehrung beim Kollaps, so müsste man streng genommen das für den Punkt B resultierende minimale ΔZ als massgebend betrachten, wenn man von der Vorstellung eines offenen Kollapsrissendes an der Trägerunterseite mit lokal konzentriertem Fliessen der Längsbewehrung in B ausgeht. Aufgrund der Feststellung, dass die Längsbewehrung in den Versuchen, in denen sie überhaupt floss, ihre Fließdehnung stets über eine Länge von der Grössenordnung der Trägerhöhe erreichte, wurde für die vorliegende Auswertung ein anderes Vorgehen gewählt. Die Abstufungen der Längsbewehrung wurden entsprechend der Geraden IJ in Bild 9.5 linear approximiert. Als massgebendes ΔZ wurde das Ordinatenstück OI betrachtet.

Für die bezogene Steghöhe h wurde bei der Auswertung durchwegs $h = 440 \text{ mm}/100 \text{ mm} = 4.4$ gesetzt.

Mit diesen Festlegungen wurden die in Bild 9.6 dargestellten Interaktionsdiagramme für alle 12 Versuche bestimmt. Die experimentellen Höchstlasten sind jeweils mit einem + eingetragen. Angesichts der Unsicherheiten bei der Festlegung namentlich von ΔZ ist die Übereinstimmung der Theorie mit den Versuchen im allgemeinen als gut zu bezeichnen. In allen Fällen liefert die Theorie Werte auf der sicheren Seite. Die grössten Abweichungen ergeben sich für den Träger S_6 . Für die Laststellung I kann die Abweichung mit der Unsicherheit bei der Festlegung von ΔZ und damit von V_0 begründet werden. Zusätzlich wirkt sich in diesem Fall auch die konservative Annahme für h aus. Für die Laststellung II mit im Vergleich zu den anderen Versuchen geringer Schubbeanspruchung ist der Tatsache Rechnung zu tragen, dass die Bügelbewehrung an den Trägerenden und im mittleren Trägerdrittel verstärkt war. Berücksichtigt man alle 42 im Träger über eine Länge von 6.60 m angeordneten Bügel, so erhält man ein mittleres Bruchmoment unter reiner Querbiegebeanspruchung von 14.5 kN, d.h. einen Wert, der um 23% über dem in Bild 9.6 angegebenen Wert $M_y(D') = 11.6 \text{ kN}$ liegt und mit dem experimentellen Höchstwert $M_{y \text{ Exp}} = 15.5 \text{ kN}$ vergleichbar ist. Schliesslich sei noch festgehalten, dass die Theorie ausser für die Bügel auf den Quer-

Versuch	S ₁		S ₂		S ₃		S ₄		S ₅		S ₆		[...]
	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	
d	.72	.70	.72	.70	.72	.70	.71	.71	.72	.72	.72	.72	—
f _c	31.4	31.4	30.9	30.9	34.3	34.3	23.9	23.9	26.2	26.2	21.0	21.0	Nmm ⁻²
z _{yl}	136	208	136	417	136	208	208	208	271	271	136	136	kNm ⁻¹
z _{yr}	136	208	136	417	136	208	136	136	136	136	136	136	kNm ⁻¹
ΔZ	90	306	90	110	221	306	95	281	110	321	40	221	kN
V ₀	147	335	147	284	229	335	187	321	229	391	98	229	kN
M _{y0}	9.8	14.6	9.8	29.1	9.8	14.6	14.8	14.8	19.5	19.5	9.8	9.8	kN
V _{Exp}	163	335	165	290	242	333	215	298	241	316	159	126	kN
M _{yExp}	8.1	9.2	8.6	17.1	9.2	14.0	13.9	10.7	17.4	13.2	5.3	15.5	kN
z _{r0}	304	262	297	47	345	307	139	139	96	96	158	158	kNm ⁻¹
E': M _y =	—	—	—	32.7	—	—	—	—	22.1	22.1	—	—	kN
D': M _y =	12.4	18.1	12.4	—	12.5	18.3	17.4	17.4	—	—	11.8	11.8	kN
K': V =	—	—	—	21.2	—	—	—	—	18.9	32.2	—	—	kN
M _y =	—	—	—	28.9	—	—	—	—	18.5	11.9	—	—	kN
L': V =	147	335	147	284	229	335	170	292	199	339	98	229	kN
M _y =	10.6	8.8	10.6	23.6	8.5	9.9	14.2	8.1	18.1	10.7	10.6	5.3	kN
B'': M _y =	0	0	0	0	0	0	2.6	2.6	4.9	4.9	0	0	kN

Bild 9.6: Auswertung der Versuche Bild 9.5

biegedruckseiten bei den Versuchen S_5 und S_6 in Laststellung II fließen oder Nichtfließen der Bewehrungen richtig erfasst. Für S_5 in Laststellung II erwartet man theoretisch Nichtfließen der Bügel auf der Querbiegedruckseite, was der Beobachtung widerspricht. Die Beobachtung, dass bei S_6 in Laststellung II die Bügel rechts eindeutig nicht flossen, ist im Einklang mit der oben angeführten Abschätzung von $M_y = 14.5 \text{ kN}$, bei der mit einem um 27% grösseren Wert $z_{y1} = z_{yr} = 173 \text{ kNm}^{-1}$ gerechnet wird als in Bild 9.6. Alsdann ist $z_{ro} = 158 \text{ kNm}^{-1} < z_{yr}$, d.h. man erwartet auch theoretisch, dass die Bügel rechts nicht fließen.

9.2 Drillung in Platten und Torsion von Trägern

Im folgenden werden Fließbedingungen für orthogonal bewehrte Plattenelemente entwickelt, die bezüglich der Bewehrungsrichtungen durch reine Drillmomente beansprucht werden. Anschließend werden die Ueberlegungen auf den Fall torsionsbeanspruchter Träger mit Rechteckquerschnitt ausgedehnt. Die Ergebnisse dieses Abschnittes bilden die Grundlage zu der im nächsten Abschnitt durchgeführten Diskussion der Bedingungen an Plattenrändern und -ecken.

Das in Bild 9.7 (a) dargestellte Plattenelement sei an der Plattenunter- und -oberseite in den Richtungen x und y gleichmässig bewehrt. Der mechanische Bewehrungsgehalt pro Richtung und Lage wird mit ω bezeichnet. Einzige Beanspruchung ist das Drillmoment M_{xy} . Unter der Traglast ergeben sich gemäss Bild 9.7 (b) im Beton in den Bereichen $\frac{1}{2} \geq |z| \geq \frac{1}{2} - 2 \cdot \omega$ zwei einachsige Druckspannungsfelder an der Fließgrenze. Die Hauptdruckrichtungen halbieren die Winkel zwischen den Bewehrungsrichtungen.

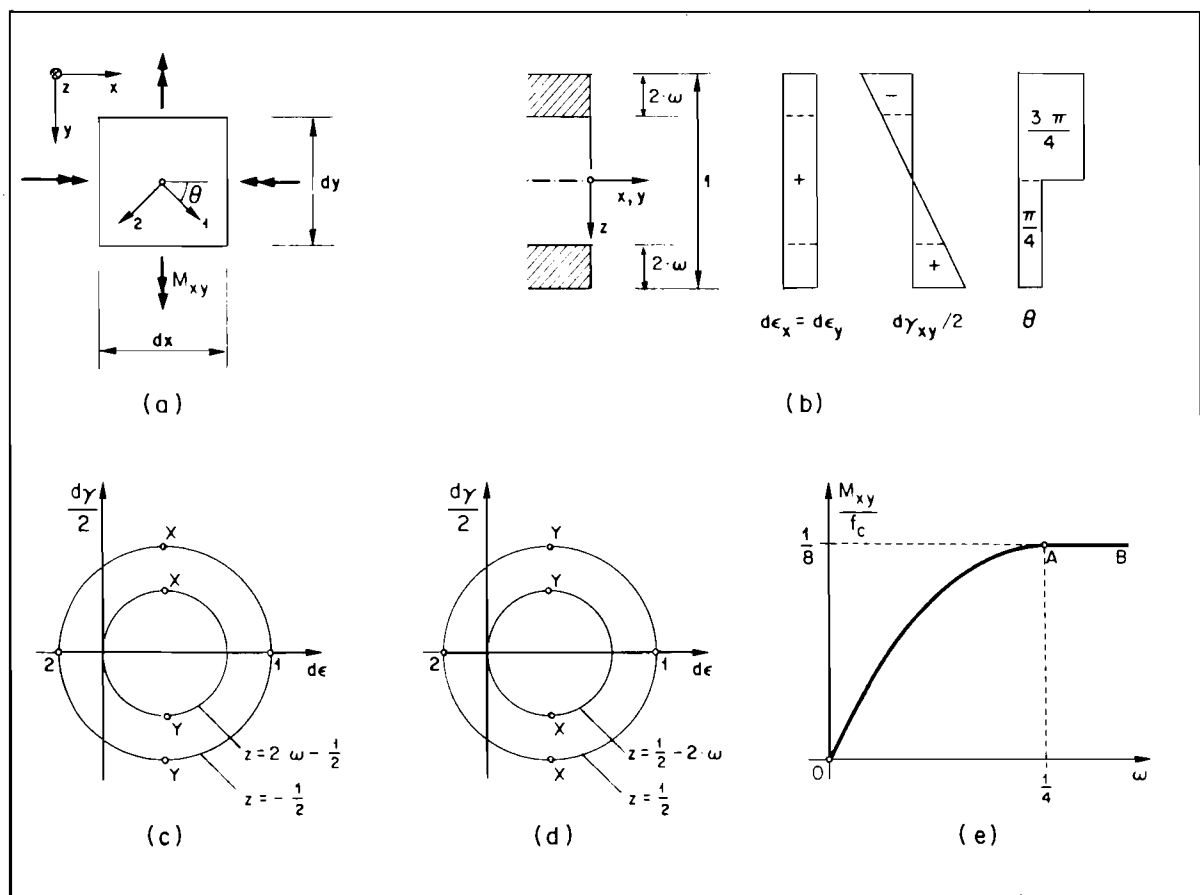


Bild 9.7: Reine Drillung — $\omega_x = \omega_y = \omega$

Die kinematischen Verhältnisse sind mit den Bildern 9.7 (b), (c) und (d) dargestellt. Die Dehnungsinkremente $d\epsilon_x = d\epsilon_y$ sind konstant und für $\omega < \frac{1}{4}$ positiv. Die Schiebungsinkremente folgen der Beziehung $dy_{xy}/2 = dk_{xy} \cdot z$. Für $z = 0$ springt der Richtungswinkel θ der Hauptrichtung 1 ($d\epsilon_1 \geq d\epsilon_2$) von $\pi/4$ auf $3 \cdot \pi/4$. Die Mittelpunkte der Verzerrungskreise in den Bildern 9.7 (c) und (d) haben alle die Abszisse $d\epsilon_x = d\epsilon_y$. Ihre Durchmesser sind zum Betrag $|z|$ des Abstandes der betrachteten Lamelle von der Mittelebene proportional.

Für $\omega \geq \frac{1}{4}$ ist $d\epsilon_x = d\epsilon_y = 0$. Die Bewehrung fliesst nicht. In allen Lamellen herrscht ein Zustand reiner Schiebung. Die Traglast verbleibt auf dem für $\omega = \frac{1}{4}$ angenommenen maximalen Wert.

Bild 9.7 (e) zeigt die Traglast in Abhängigkeit vom Bewehrungsgehalt. Die Kurve OA ist eine Parabel mit der Gleichung

$$M_{xy} = f_c \cdot \omega \cdot (1 - 2 \cdot \omega) \quad \left[\omega \leq \frac{1}{4} \right] . \quad (9.53)$$

Für grosse ω gilt

$$M_{xy} = f_c / 8 \quad \left[\omega \geq \frac{1}{4} \right] . \quad (9.54)$$

Das Resultat (9.53) kann direkt mit dem oberen Grenzwert $f_c \cdot \omega \cdot (1 - \omega/2)$ für M_{xy} verglichen werden, der sich für eine an den Oberflächen mit ω bewehrte Platte unter der Voraussetzung einer Fließgelenklinie (9.12) in der Richtung der Winkelhalbierenden der Bewehrungsrichtungen ergibt, wenn der Beitrag der Bewehrung in der Druckzone vernachlässigt wird. Man stellt fest, dass man für die Werte $\omega = 1/4$ und $\omega = 1/8$ die Traglast mit diesem Üblicherweise verwendeten oberen Grenzwert um 75% bzw. 25% überschätzt. Bei der praktischen Bemessung von Platten sollte dieses Ergebnis berücksichtigt werden. Für Plattenbereiche mit beträchtlichen Drillungsbeanspruchungen bezüglich der Bewehrungsrichtungen ist eine besonders vorsichtige Wahl der maximalen Bewehrungsgehalte angezeigt.

Nebenbei sei noch bemerkt, dass für $\omega \leq .1$

$$\frac{-d\epsilon_2}{d\epsilon_1} \leq \frac{2 \cdot \omega}{1 - 2 \cdot \omega} \leq \frac{2 \cdot 0.2}{2 \cdot 0.8} = \frac{1 - 0.6}{1 + 0.6} = \frac{1 - \sin\phi}{1 + \sin\phi} \quad [\tan\phi = \frac{3}{4}]$$

ist. Mithin kann für $\omega \leq .1$ nach dem der Fließbedingung Bild 9.1 (b) zugeordneten Fließgesetz $d\epsilon_2 = d\epsilon_3 = 0$, d.h. ausser dem Spannungszustand auch der Fließzustand im Beton eben sein.

Mit Bild 9.8 wird die Traglast eines in den beiden Richtungen x und y unterschiedlich, an Plattenunter- und -oberseite jedoch gleich bewehrten Plattenelementes unter reiner Drillung ermittelt. Gemäss Bild 9.8 (a) sind die Dehnungsinkremente $d\epsilon_x \leq d\epsilon_y$ für $\omega_x \geq \omega_y$ über die Plattendicke wiederum konstant und nicht negativ. Die Schiebungsinkremente folgen der Beziehung $dy_{xy}/2 = dk_{xy} \cdot z$. Die nach (9.9) resultierende Variation von θ über die Plattendicke ist ebenfalls angegeben. Die Hauptrichtung 2 schliesst mit der Richtung x der stärkeren Bewehrung Winkel ein, die kleiner als $\pi/4$ sind, vgl. Bild 9.8 (c). Bei bekannten Verhältnissen

$$d = \frac{d\bar{\epsilon}_y}{d\bar{\epsilon}_x} = \frac{d\epsilon_y}{d\epsilon_x} , \quad k = \frac{dk_{xy}}{d\bar{\epsilon}_x} = \frac{dk_{xy}}{d\epsilon_x}$$

kann $\theta(z)$ geometrisch gemäss Bild 9.8 (b) aus den Verzerrungskreisen bestimmt werden.

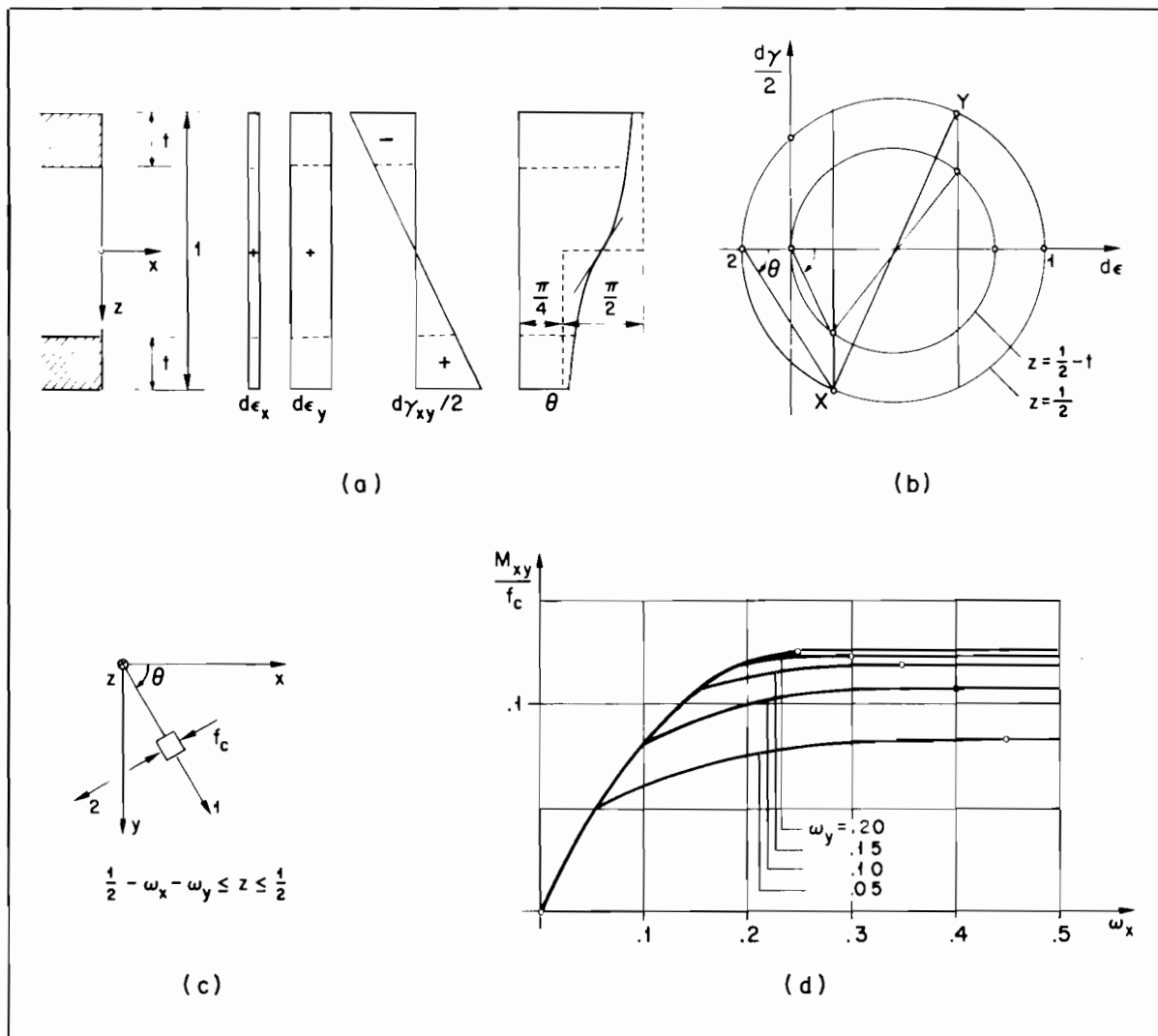


Bild 9.8 : Reine Drillung — $\omega_x \geq \omega_y$

Für die Dicke t der einachsigen Betondruckfelder mit variablem θ liefert (9.11)

$$t = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{d}}{k} \quad (9.56)$$

Aus den ersten beiden Gleichungen (9.2) folgt mit $N_x = N_y = 0$ unter Berücksichtigung von (9.56)

$$\omega_x = \frac{t}{2} \pm \frac{d-1}{4 \cdot k} \cdot \ln \left[\frac{(1 + \sqrt{(d-1)^2/k^2 + 1}) \cdot k}{2 \cdot \sqrt{d} + d + 1} \right] \quad (9.57)$$

Aus (9.57) erhält man durch Summenbildung

$$\omega_x + \omega_y = t \quad (9.58)$$

Für die Differenz

$$\omega_x - \omega_y = r \quad (9.59)$$

liefert (9.57) unter Berücksichtigung der aus (9.56) folgenden Beziehung

$$d = k^2 \cdot \left(\frac{1}{2} - t\right)^2 \quad (9.60)$$

die Gleichung

$$e \cdot \left[\frac{2 \cdot k \cdot r}{k^2 \cdot \left(\frac{1}{2} - t\right)^2 - 1} \right] \cdot \left\{ 1 - 2 \cdot t + \frac{1}{k} \cdot [1 + k^2 \cdot \left(\frac{1}{2} - t\right)^2] \right\} - \left\{ 1 + \sqrt{1 + [k \cdot \left(\frac{1}{2} - t\right)^2 - \frac{1}{k}]^2} \right\} = 0, \quad (9.61)$$

aus der k durch Probieren bestimmt werden kann. Mit $k(\omega_x, \omega_y)$ ist nach (9.60) auch d bekannt. Damit ist der aus der dritten Gleichung (9.3) folgende Wert

$$M_{xy} = \frac{f_c}{2} \cdot \left\{ \frac{1}{4} \cdot \sqrt{(d-1)^2 / k^2 + 1} - \frac{\sqrt{d}}{2 \cdot k^2} \cdot (d+1) - \frac{r}{2 \cdot k} \cdot (d-1) \right\} \quad (9.62)$$

der Traglast bestimmt. Es sei noch bemerkt, dass die dritte Gleichung (9.2) und die ersten beiden Gleichungen (9.3) zu $N_{xy} = M_x = M_y = 0$ führen, wie vorausgesetzt.

In Bild 9.8 (d) ist (9.62) für verschiedene Werte ω_y dargestellt. Für grosse Bewehrungsgehalte mit $\omega_x + \omega_y \geq \frac{1}{2}$ bleibt die Bewehrung starr, da gemäss (9.58) der Beton voll ausgenutzt ist.

Setzt man nach der statischen Methode eine über die Dicke t konstante Richtung der Betondruckfelder voraus, so erhält man gemäss (7.11) mit $\tan \theta = \sqrt{\omega_x / \omega_y}$ sofort den unteren Grenzwert

$$M_{xy} = f_c \cdot \sqrt{\omega_x \cdot \omega_y} \cdot (1 - \omega_x - \omega_y) \quad \left[\omega_x \leq \frac{1 - \omega_y}{3} \right], \quad (9.63)$$

der von NIELSEN (1964) angegeben wurde. Für $\omega_x > (1 - \omega_y)/3$ ist der für $\omega_x = (1 - \omega_y)/3$ angenommene Maximalwert von (9.63) massgebend. (9.63) ist ein sehr guter unterer Grenzwert für (9.62). Die Abweichung beträgt beispielsweise für $\omega_x = .3$ und $\omega_y = .1$ nur 2%. Für kleinere Bewehrungsgehalte ist die Übereinstimmung noch besser.

Von den bisherigen Betrachtungen am Plattenelement ausgehend wird anhand von Bild 9.9 ein statisch zulässiger Spannungszustand für Träger angegeben, die durch ein Torsionsmoment T beansprucht werden.

Gemäss Bild 9.9 (a) wird ein Träger mit quadratischem Voll- oder Hohlquerschnitt betrachtet. Die Betonüberdeckung wird vernachlässigt. Die Bügel werden als Stahlmembran an der Trägersoberfläche idealisiert. Der mechanische Bügelbewehrungsgehalt wird mit ω bezeichnet. Der Krümmungsradius der zylindrischen Stahlmembran bei den Trägerecken sei gerade gleich $2 \cdot \omega$.

Im Querschnitt Bild 9.9 (a) werden drei verschiedene Arten von Spannungsfeldern im Beton unterschieden. Der Spannungszustand in den Bereichen I an der Trägersoberfläche entspricht dem für die Betondruckzonen in Bild 9.7 angegebenen einachsigen Druckspannungszustand an der Fließsgrenze, vgl. Bild 9.9 (b) und (c). In den Bereichen II bei den Trägerecken herrscht der in Bild 9.9 (d) angegebene räumliche Spannungszustand. Aus der Umlenkung der Zugkraft der Stahlmembran resultieren konstante Radialspannungen $\sigma_r = \sigma_z = -f_c/2$ im Beton. Die zu den Achsen y und z parallelen Begrenzungsebenen zwischen den Bereichen I und II sind Unstetigkeitsflächen des Spannungsfeldes im Beton. An den zur y -Achse parallelen Begrenzungsebenen sind die Spannungen $|\tau_{xz}| = -\sigma_z = f_c/2$ stetig, und die Spannungen σ_y springen von null auf $-f_c/2$. Die Bedingungen an den zur z -Achse parallelen Begrenzungsebenen folgen durch Vertauschen der Indizes z und y . Wie man leicht nachprüft, erfüllt der Spannungszustand Bild 9.9 (d) die Gleichgewichtsbedingungen (7.81). Der Bereich III im Trägerinnern ist spannungsfrei.

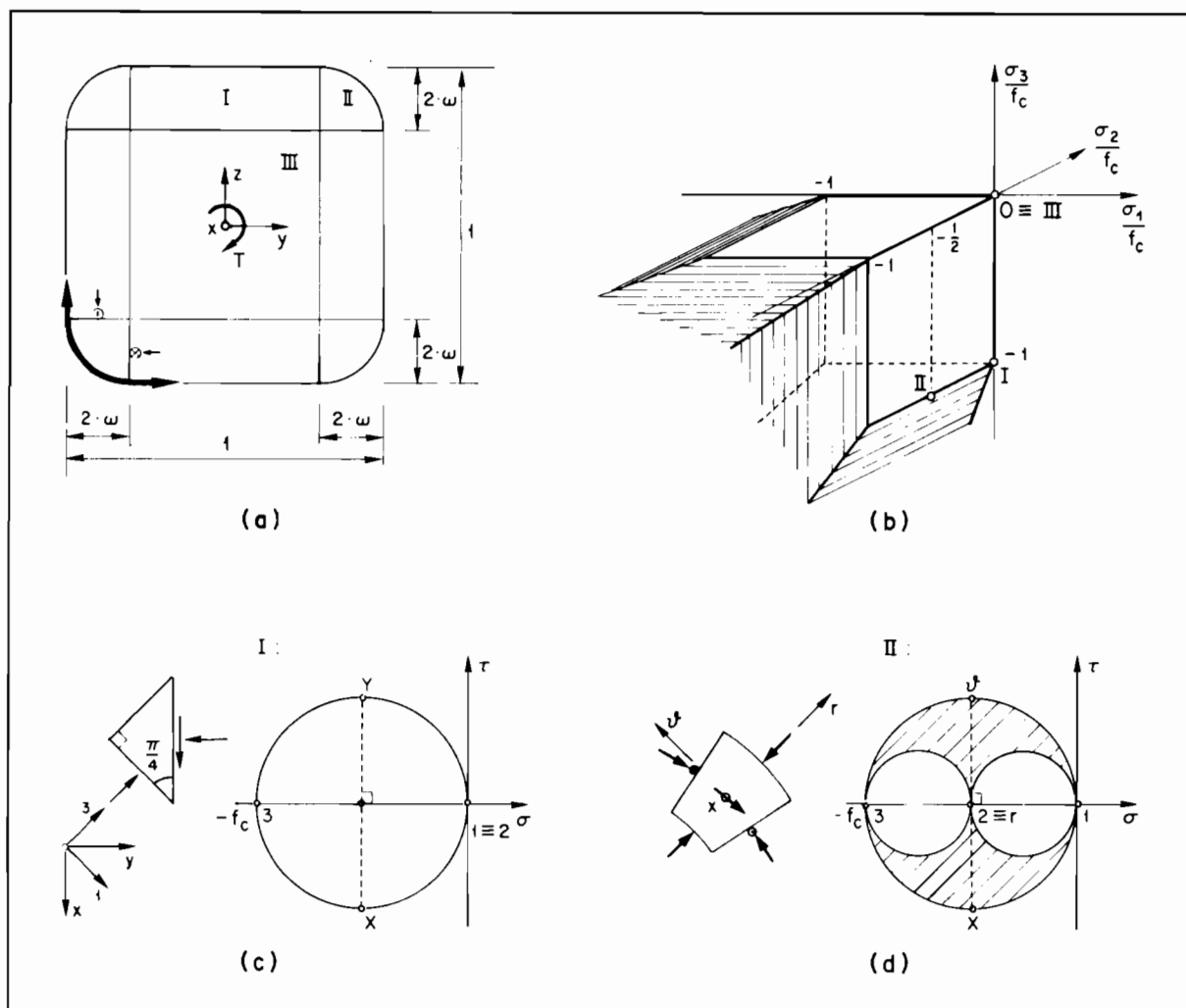


Bild 9.9: Träger unter Torsion – Statische Methode

Die Bildpunkte der drei verschiedenen Spannungszustände liegen auf der Oberfläche des in Bild 9.9 (b) dargestellten aplastischen Bereichs des Betons ohne Zugfestigkeit.

Es wird vorausgesetzt, dass die für das Gleichgewicht nötigen Spannungen $\sigma_x = -f_c/2$ in den Bereichen I und II an den Trägerenden eingeleitet werden können. Aus diesen Spannungen resultiert eine Längsdruckkraft vom Betrag $[4 \cdot \omega \cdot (1 - 4 \cdot \omega) + 2 \cdot \omega^2 \cdot \pi] \cdot f_c$, welche durch eine Trägerlängsbewehrung oder eine entsprechende Normalkraft aufzunehmen ist.

Als unteren Grenzwert für die Traglast findet man

$$\frac{T}{f_c} = 2 \cdot \omega \cdot (1 - 4 \cdot \omega) + \frac{8 \cdot \pi}{3} \cdot \omega^3. \quad (9.64)$$

Nimmt man gemäss Bild 9.10 (a) im Unterschied zu Bild 9.9 (a) an, die Bügel seien über die Dicken $2 \cdot \omega$ der Bereiche I kontinuierlich verteilt, derart, dass sie ihre Wirkung $\sigma_y = -f_c/2$ oder $\sigma_z = -f_c/2$ direkt auf den Beton übertragen, so verschwinden die Bereiche II. Anstelle von (9.64) erhält man den Ausdruck

$$\frac{T}{f_c} = 2 \cdot \omega \cdot (1 - 4 \cdot \omega) + \frac{32}{3} \cdot \omega^3. \quad (9.65)$$

Die Beziehung (9.65) ist in Bild 9.10 (f) als Kurve DAB dargestellt. Im Punkt B, für $\omega = 1/4$, erreicht T den Maximalwert $f_c/6$. Für $\omega \geq 1/4$, entlang BC, bleibt T konstant.

Zur Gewinnung eines mit dem angenommenen Spannungszustand verträglichen Verschiebungszustandes kann man sich den Träger durch zu seiner Achse x parallele Schnitte entlang den Querschnittsdiagonalen in vier gleiche Teile aufgetrennt denken und jeden dieser Teile als Stück eines mit Bild 9.7 untersuchten Plattenelementes auffassen. Alsdann erhält man für die den Bereich I an der Trägeroberseite begrenzenden Lamellen $z = 1/2$ und $z = 1/2 - 2 \cdot \omega$ die in Bild 9.10 (b) dargestellten Verzerrungskreise für die Verzerrungssinkremente in der Lamellenebene. Das Verzerrungssinkrement $de_z = de_2$ muss aus Kontinuitätsgründen entlang den Querschnittsdiagonalen gerade gleich gross sein, wie die in allen vier Bereichen I konstanten Inkremente de_y oder de_z der Bügeldehnungen. Mithin ist das Verhältnis der Hauptwerte der Verzerrungssinkremente für $z = 1/2$ gegeben durch

$$de_1 : de_2 : (-de_3) = (1 - 2 \cdot \omega) : \left(\frac{1}{2} - 2 \cdot \omega\right) : (2 \cdot \omega) \quad . \quad (9.66)$$

Der lineare Spannungszustand $\underline{\sigma} = (0, 0, -f_c)$ in den Bereichen I entspricht gemäss Bild 9.10 (c) und Bild 9.9 (b) einer Ecke des aplastischen Bereichs des Betons. Nach dem Fließgesetz (3.11) sind alle mit diesem Spannungszustand verträglichen Verzerrungssinkremente durch das Verhältnis

$$de_1 : de_2 : (-de_3) = (\lambda_1 + 4 \cdot \lambda_3) : (\lambda_2 + 4 \cdot \lambda_4) : (\lambda_3 + \lambda_4) \quad (9.67)$$

bestimmt, wobei λ_1 bis λ_4 nicht negative Faktoren bezeichnen.

Setzt man der Reihe nach einen um den andern dieser Faktoren gleich null, so verlangt Nichtnegativität der übrigen Faktoren gemäss (9.66) und (9.67)

$$\left. \begin{array}{ll} \frac{1}{10} \leq \omega \leq \frac{1}{8} & [\lambda_1 = 0] \quad , \\ \frac{1}{20} \leq \omega \leq \frac{1}{8} & [\lambda_2 = 0] \quad , \\ 0 \leq \omega \leq \frac{1}{20} & [\lambda_3 = 0] \quad , \\ 0 \leq \omega \leq \frac{1}{10} & [\lambda_4 = 0] \quad . \end{array} \right\} \quad (9.68)$$

Mithin ist Verträglichkeit nur für Bewehrungsgehalte $\omega \leq 1/8$ gesichert, d.h. für Punkte auf dem Bogen DA in Bild 9.10 (f) entsprechend $T/f_c \leq 7/48$.

Mit (9.66) wurden nur die Verhältnisse in der kritischen Lamelle $z = 1/2$ untersucht. Für abnehmende $z < 1/2$ nimmt auch das Verhältnis $(-de_3/de_1)$ ab und verschwindet für $z = 1/2 - 2 \cdot \omega$, vgl. Bild 9.10 (b). Im spannungsfreien Bereich III im Trägerinnern mit $z < 1/2 - 2 \cdot \omega$ sind alle Hauptwerte der Verzerrungssinkremente nicht negativ. Im Teil ACA'D in Bild 9.10 (d) sind die Verzerrungssinkremente $de_x = de_y > 0$ und $dv_{xy} = de_x \cdot 4 \cdot z / (1 - 4 \cdot \omega)$ und damit de_1 und de_3 eindeutig bestimmt. Der Hauptwert de_2 kann dagegen innerhalb der Grenzen $0 \leq de_2 \leq de_x$ frei gewählt werden. Setzt man insbesondere $de_2 = 0$, so führt man damit Diskontinuitäten CA'C' usw. im Trägerinnern ein. Durch Auftrennen der Teile ACA'D und A'C'A"D' entlang den Linien DC und D'C' und gegenseitiges Rotieren von A'CD und A'C'D' um A' kann man die Diskontinuität CA'C' gemäss Bild 9.10 (e) wieder zusammenfügen. Dadurch entstehen neue Diskontinuitäten ADA' und CDC' usw. Die Diskontinuitäten ADA' usw. entsprechen einem Ablösen der gedrückten Betonteile I an der Trägeroberfläche vom spannungsfreien inneren Bereich III.

Bisher wurde stillschweigend vorausgesetzt, die für das Gleichgewicht nötigen Spannungen $\sigma_x = -f_c/2$ in den Bereichen I können an den Trägerenden eingeleitet werden. Die resultierende Längsdruckkraft vom Betrag $4 \cdot \omega \cdot (1 - 2 \cdot \omega) \cdot f_c$ ist durch eine entsprechende Normalkraft oder durch eine Längsbewehrung aufzunehmen. Ist die Fließzugkraft der Längsbewehrung gerade gleich $4 \cdot \omega \cdot (1 - 2 \cdot \omega) \cdot f_c$, so ist der oben erörterte Verschiebungszustand mit $de_x > 0$ auch mit dem Spannungszustand in der Längsbewehrung verträglich, mithin für $\omega \leq 1/8$ die vollständige Lösung gefunden.

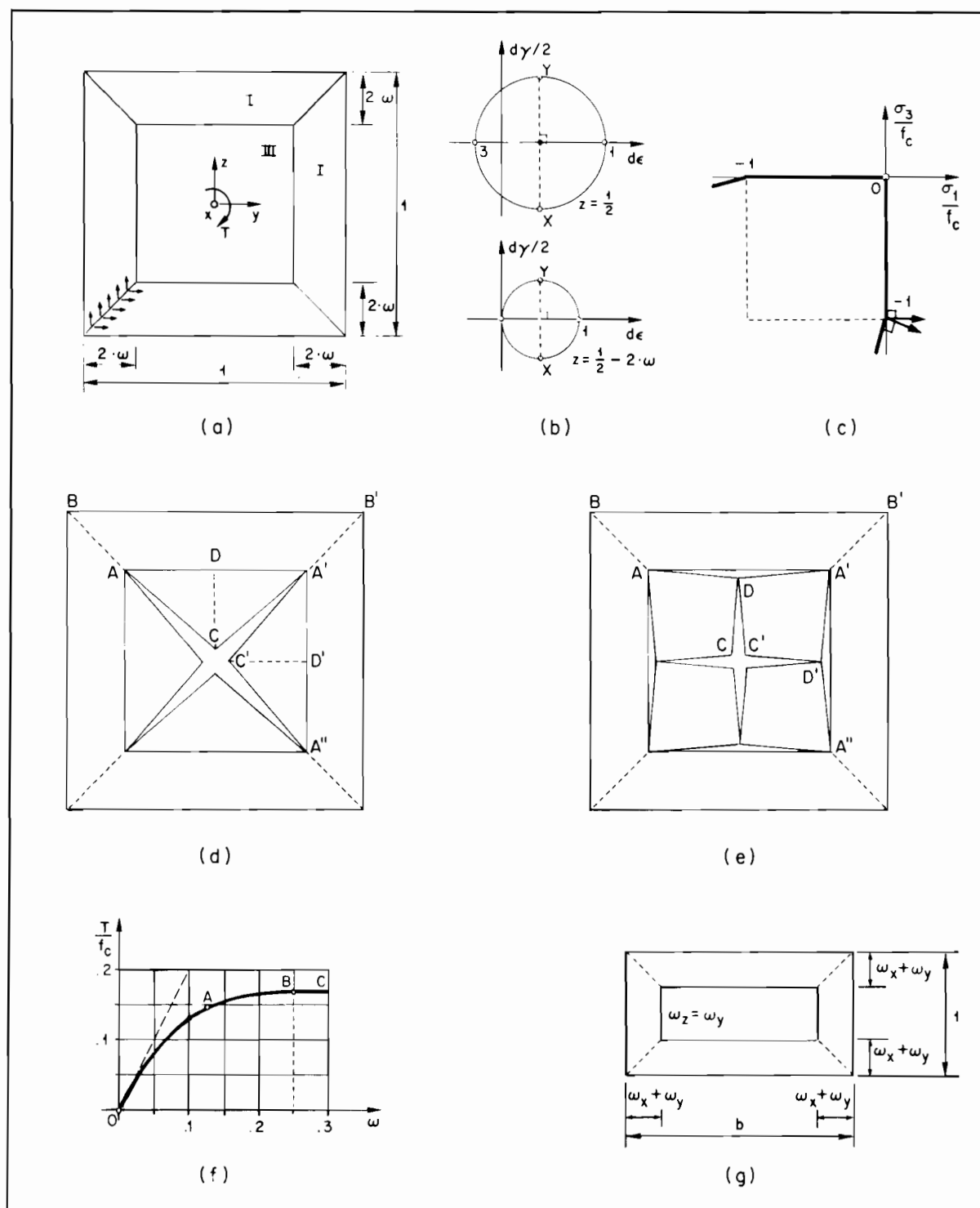


Bild 9.10: Torsion von Trägern mit Rechteckquerschnitt

Für rechteckige Querschnitte gemäss Bild 9.10 (g) mit konstanter Bügelbewehrung $\omega_y = \omega_z$ jedoch nicht wie für (9.65) vorausgesetzt gerade "passender" Längsbewehrung kann gemäss (9.63) sofort ein unterer Grenzwert

$$\frac{T}{f_c} = 2 \cdot \sqrt{\omega_x \cdot \omega_y} \cdot [b - (1+b) \cdot (\omega_x + \omega_y) + \frac{4}{3} \cdot (\omega_x + \omega_y)^2] \quad (9.69)$$

angegeben werden. Die aus den Spannungen $\sigma_x = -\omega_x \cdot f_c / (\omega_x + \omega_y)$ resultierende Druckkraft hat den Betrag

$$N = 2 \cdot \omega_x \cdot f_c \cdot (1 + b - 2 \cdot \omega_x - 2 \cdot \omega_y) \quad (9.70)$$

Bei gegebener Fliesszugkraft N der Längsbewehrung und bekannten Werten ω_y und b kann daraus ω_x bestimmt werden.

Die mit den Bildern 9.9 und 9.10 dargestellten Lösungen für torsionsbeanspruchte Träger wurden vom Verfasser erstmals 1979 vorgestellt, vgl. BRAESTRUP (1979, S. 211). Sie werden der im nächsten Abschnitt durchgeführten Diskussion der Bedingungen an Plattenrändern und Plattenecken zugrunde gelegt.

9.3 Plattenränder und Plattenecken

Nach der *Kirchhoffschen Theorie dünner elastischer Platten mit kleiner Durchbiegung* resultiert für die Durchbiegungsfläche eine inhomogene Bipotentialgleichung. Lösungen dieser Gleichung lassen sich nur zwei Randbedingungen anpassen. Wenn am Plattenrand Querkräfte, Biege- und Drillmomente eingeleitet werden, wären allerdings drei Randbedingungen zu erfüllen. Nach einem Vorschlag von THOMSON und TAIT (1883) werden deshalb gemäss den Bildern 9.11 (a) und (b) die Querkräfte V_n und die Ableitungen der Drillmomente M_{nt} zu resultierenden *Stützkräften* R_n zusammengefasst, indem die Drillmomente durch eine stetige Verteilung von Kräftepaaren ersetzt werden. Die Kräftepaare M_{nt} heben sich an der Grenze zwischen zwei Elementen der Länge dt in Bild 9.11 (b) jeweils gegenseitig bis auf den Zuwachs $(\partial M_{nt} / \partial t) \cdot dt$ auf. Mithin ist

$$R_n = V_n + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} \quad (9.71)$$

Durch den Ersatz der Drillmomente durch stetig verteilte Kräftepaare wird der Spannungszustand nach dem Prinzip von de Saint Venant nur in einem eng begrenzten Bereich am Plattenrand geändert. Thomson und Tait (1883, S. 192) drückten dies wie folgt aus: "A distribution of couple on the edge of a plate, round axes everywhere in the plane of the plate, and perpendicular to the edge, of any given amount per unit of length of the edge, may be removed and, instead, a distribution of force perpendicular to the plate, equal in amount per unit length of the edge, to the rate of variation per unit length of the amount of the couple, without altering the flexure of the plate as a whole, or producing any disturbance in its stress or strain except infinitely near the edge." Für einen kräftefreien Plattenrand werden damit die drei Bedingungen $M_n = M_{nt} = V_n = 0$ auf die beiden Randbedingungen $M_n = R_n = 0$ reduziert.

In der Plattenecke Bild 9.11 (b) heben sich die Kräfte M_{nt} nicht gegenseitig auf, sondern sie addieren sich zu der *Eckkraft*

$$R_E = 2 \cdot M_{nt} \quad (9.72)$$

Wird eine rechteckige Platte an ihren Ecken durch senkrecht zur Plattenebene wirkende, betragsmässig gleich grosse, jedoch abwechselungsweise entgegengesetzt gerichtete Kräfte belastet, so entsteht ein Zustand reiner Drillung. Zu den Plattenrändern parallele Schnitte senkrecht zur Plattenebene können als Querschnitte von breiten Rechteckträgern gemäss Bild 9.10 (g) mit $b \gg 1$ aufgefasst werden. Zuzufolge der Kontinuität des Schubflusses bei den Querschnittsecken resultieren über eine schmale Zone am Plattenrand senkrecht zur Plattenebene gerichtete Querkkräfte V_t , deren Betrag gleich demjenigen des Drillmomentes in der Platte ist. Wie man leicht nachprüft, ist dies auch der Fall, wenn das Spannungsfeld von Bild 9.9 angenommen wird. Mithin werden die an den Ecken eingetragenen Kräfte $2 \cdot M_{nt}$ als Querkkräfte V_t vom Betrag M_{nt} entlang den Plattenrändern in die benachbarten Ecken übertragen.

Die Existenz von senkrecht zur Plattenebene gerichteten Querkkräften V_t in einer schmalen Zone am Plattenrand folgt aus Gleichgewichtsgründen ganz allgemein, unabhängig von der angenommenen Spannungsverteilung. Ihr Betrag ist gleich dem Drillmoment M_{nt} bezüglich den zum Rand normalen und tangentialen Richtungen n und t , wenn die Spannungen σ_t in der Randzone beim Fortschreiten in t -Richtung nicht verändert werden, d.h. $\partial \sigma_t / \partial t = 0$ ist. Zum Beweis wird irgend eine Lamelle der Dicke dz_1 im Abstand z_1 von der Plattenmittelebene betrachtet, in der die Schubspannung τ_{nt} wirke. Der elementare Schubfluss $\tau_{nt} \cdot dz_1$ verursacht den Beitrag $\tau_{nt} \cdot dz_1 \cdot z_1$ zum Drillmoment M_{nt} . Da $\partial \sigma_t / \partial t$ in der Randzone verschwindet, kann der betrachteten Lamelle eine zweite Lamelle der Dicke dz_2 im Abstand $-z_2$ von der Plattenmittelebene zugeordnet werden, die den Schubfluss $\tau_{nt} \cdot dz_1$ in entgegengesetzter Richtung aufnimmt und einen Beitrag $\tau_{nt} \cdot dz_1 \cdot z_2$ zum Drillmoment M_{nt} liefert. Die Schubflüsse $\tau_{nt} \cdot dz_1$ in den Ebenen $z = z_1$ und $z = -z_2$ werden über die Randzone bis zum Plattenrand auf null abgebaut. Dadurch entsteht in der Randzone ein über die Höhe $(z_1 + z_2)$ wirk-samer elementarer Schubfluss mit Betrag $\tau_{nt} \cdot dz_1$ und damit eine elementare Querkraft $\tau_{nt} \cdot dz_1 \cdot (z_1 + z_2)$, welche der Summe der Beiträge der beiden betrachteten Lamellen zu M_{nt} entspricht. Integration über alle Lamellen bringt $V_t = M_{nt}$.

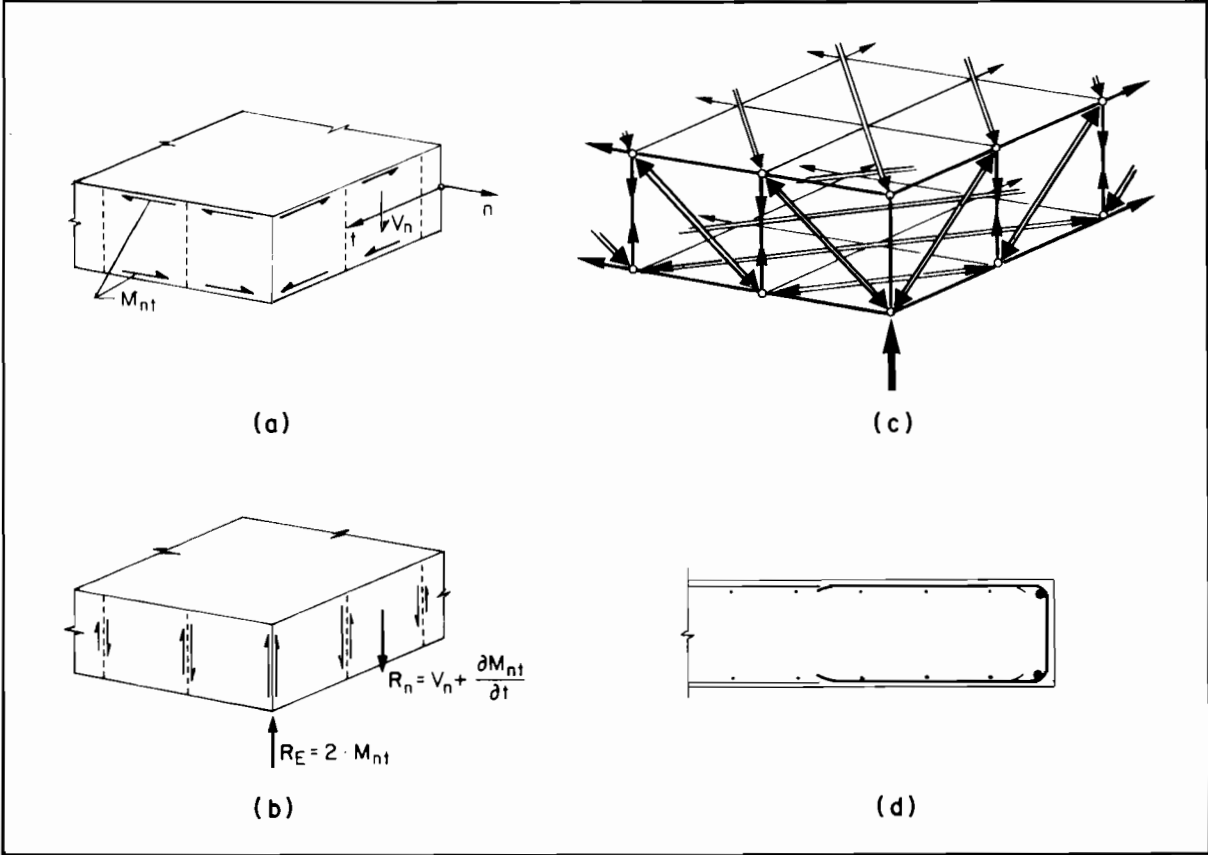


Bild 9.11: Plattenränder und -ecken

Ein formaler Beweis dieses Ergebnisses wurde von CLYDE (1979) gegeben. Zusammenfassend stellte er (S. 163) fest: "This vertical shear force in the edge strip is a physical reality which transcends mere statical equivalence. Because it is a force and not a stress it is invariant under change of angle of the cutting section relative to the edge. Thus for any but the normal section it is not related to the twisting moment on the internal face and it is quite possible to have zero twisting moment in a skew face but to have an edge shear force."

Das Ergebnis $V_t = M_{nt}$ beruht auf der Annahme $\partial \sigma_t / \partial t = 0$ für die Randzone. Aufgrund dieser Annahme ist der Schubfluss von der Plattenunterseite über die Randzone zur Plattenoberseite konstant, d.h. es ist reine Umlauftorsion vorhanden. Insbesondere wird der Fall von zum Plattenrand parallelen Bewehrungsstäben mit veränderlicher Zugkraft ausgeschlossen, welche im Sinne einer Wölb-torsionswirkung Schubflussdifferenzen verursachen.

Die Breite der die Querkraft V_t aufnehmenden Randzone bleibt beim oben durchgeführten Nachweis der Existenz von V_t unbestimmt. Nach der statischen Methode verlangt man natürlich eine minimale Dicke, damit die Hebelarme der Kräftepaare V_t und die Traglast möglichst gross werden, vgl. Bilder 9.9 und 9.10.

Aus der Existenz der Querkräfte $V_t = M_{nt}$ folgen die Beziehung (9.72) und der zweite Summand rechterhand in (9.71).

Bild 9.11 (c) zeigt ein Fachwerkmodell für eine Ecke einer durch reine Drillung beanspruchten Stahlbetonplatte. An der Plattenoberseite und an der Plattenunterseite bilden sich zueinander senkrechte, unter $\pi/4$ zu den Plattenrändern geneigte Betondruckstreben aus. Die Komponenten der Druckstrebenkräfte in Richtung der Randnormalen werden durch zur Plattenebene parallele Bewehrungen aufgenommen. Die Komponenten parallel zu den Plattenrändern werden durch Druckstreben in den vertikalen Randebenen aufgenommen. Die Vertikalkomponenten der Strebenkräfte in den Randebenen entsprechen der Querkraft $V_t = M_{nt}$. Sie werden durch eine zur Plattenebene orthogonale Bewehrung aufgenommen, z.B. durch Steckbügel, wie in Bild 9.11 (d) angedeutet oder durch \sqcap -förmige Enden der in Richtung der Randnormalen verlegten Bewehrungsstäbe.

Im folgenden werden die bisherigen Überlegungen auf die theoretisch einfach überblickbaren Fälle der randgestützten und der eckgestützten Quadratplatte unter gleichmässig verteilter Belastung übertragen. Als Vorbereitung für die Betrachtung der randgestützten Quadratplatte wird zunächst mit Bild 9.12 der Fall der randgestützten Kreisplatte unter gleichmässig verteilter Belastung untersucht.

Gemäss Bild 9.12 (a) wird der Beton als unendlich druckfestes Material mit verschwindender Zugfestigkeit idealisiert. Die Platte sei an ihrer Unterseite $z = 1/2$ isotrop bewehrt. Das dem als konstant vorausgesetzten mechanischen Bewehrungsgehalt $\omega \rightarrow 0$ entsprechende endliche Fliessmoment $\omega \cdot f_c$ (Plattendicke = 1!) wird mit M_0 bezeichnet. Die gleichmässig verteilte Belastung p wird durch ein im Meridianschnitt fächerförmiges Druckspannungsfeld zu der Auflagerung abgetragen. In einem Plattensektor OPQ mit Öffnungswinkel $d\theta$ resultiert entlang $\overline{PQ} = R \cdot d\theta$ aus dem Druckspannungsfeld die Horizontalkraft $p \cdot R^3 \cdot d\theta / 6$, welche durch den Widerstand $M_0 \cdot R \cdot d\theta$ der Bewehrung aufgenommen wird. Mithin ist

$$p \cdot R^2 = 6 \cdot M_0 \quad . \quad (9.73)$$

In der Ebene $z = -1/2$ werden die Horizontalkomponenten aus dem fächerförmigen Druckspannungsfeld durch die Ablenkkräfte aus azimuthal wirkenden Druckkräften in der unendlich dünnen Betondruckzone aufgenommen. Der Verlauf dieser Kräfte über r ist parabolisch, entsprechend der in Bild 9.12 (a) aufgetragenen Funktion $r \cdot (R-r) \cdot 6 \cdot M_0 / R^2$. Für $r = R/2$ nimmt diese Funktion den Maximalwert $(3/2) \cdot M_0$ an, und ihr Mittelwert über R ist M_0 .

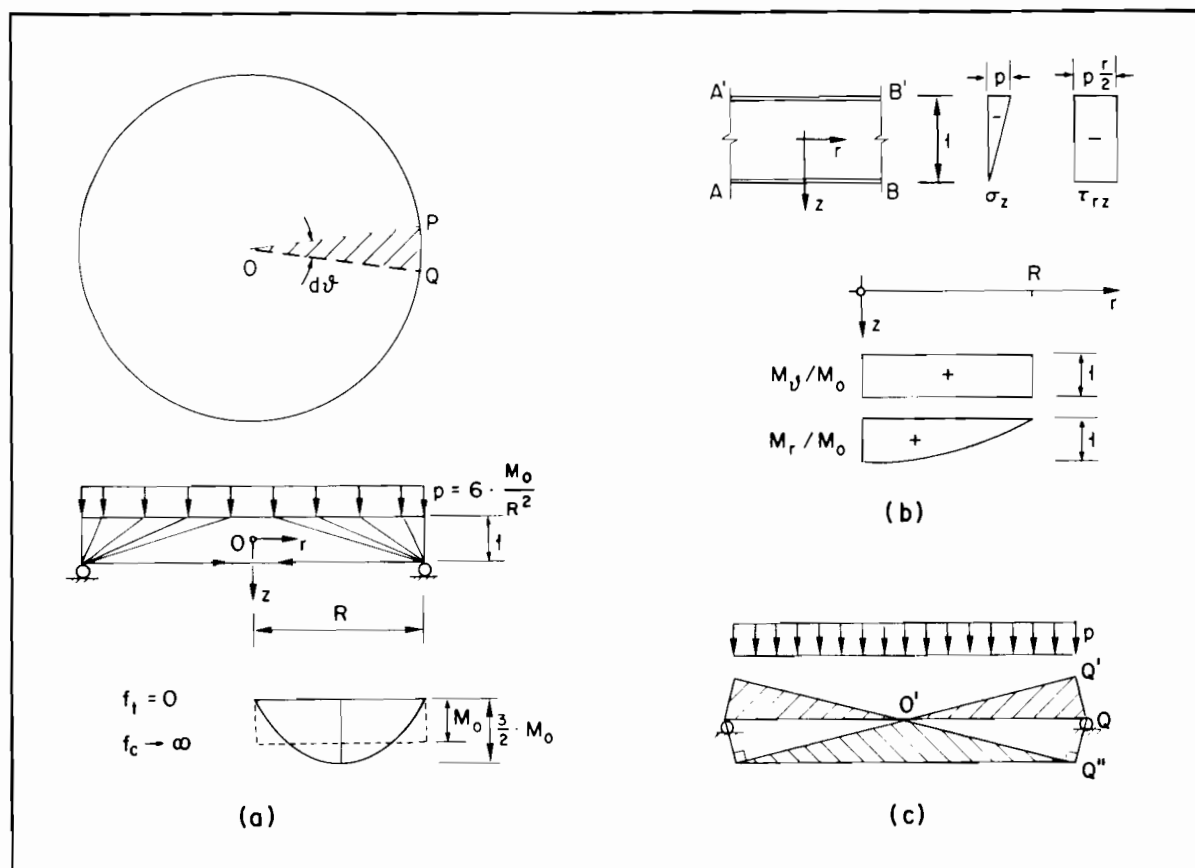


Bild 9.12: Randgestützte Kreisplatte

Bild 9.12 (c) zeigt einen mit dem beschriebenen Spannungszustand verträglichen Verschiebungszustand. Da $f_c \rightarrow \infty$ vorausgesetzt wurde, kann der Beton nicht gestaucht werden. Der spannungsfreie Kegel mit Erzeugenden $O'Q''$ erfährt eine reine vertikale Starrkörperverschiebung. Die pyramidenförmigen Elemente $O'Q'Q''P'P$ rotieren um $Q'P'$. Dadurch öffnet sich ein Kollapsriss $QO'Q''$, und die Bewehrung fließt bei $Q''Q$ wegen der nach aussen gerichteten Horizontalverschiebung von Q . Die einzelnen pyramidenförmigen Elemente rotieren gegenseitig um die Achsen DQ in der Ebene $z = -1/2$.

Aus der Betrachtung von Bild 9.12 (c) ist unmittelbar einzusehen, dass bei Vernachlässigung der Betonzugfestigkeit theoretisch die gesamte Plattenbewehrung ohne Abstufung über die Auflager zu führen und dort zu verankern ist. Dieses Ergebnis entspricht den Ueberlegungen in Abschnitt 8.2 für Scheiben ohne Schubbewehrung.

Betrachtet man die Platte hingegen als Sandwichplatte gemäss Bild 9.12 (b), deren "Füllung" zwischen der Bewehrungsebene AB und der Druckzonenebene $A'B'$ in der Meridianebene eine gewisse Zugfestigkeit besitzt, so erhält man mit den Momentenfeldern

$$M_\theta(r) = M_0, \quad M_r(r) = M_0 \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (9.74)$$

die Möglichkeit, die Radialbewehrung bis zum Plattenrand auf null abzustufen. Die "Füllung" $A B B' A'$ muss die Spannungskomponenten $\sigma_z = p \cdot (z - 1/2)$ und $\tau_{rz} = -p \cdot r/2$ aufnehmen. Im Gegensatz zum Verschiebungszustand Bild 9.12 (c) ist der gewöhnliche Fließgelenklinienmechanismus mit radialen Fließgelenklinien DQ gemäss Bild 9.12 (a) immer noch mit dem Spannungszustand in der Sandwichplatte verträglich, wenn die Zugfestigkeit der "Füllung" in azimuthaler Richtung vernachlässigt wird. Bei diesem Mechanismus wird die Bewehrung an der Plattenunterseite in azimuthaler Richtung gedehnt und bleibt in radialer Richtung starr, insbesondere bei den Auflagern.

Bei der praktischen Bemessung sind die Werte τ_{rz} meist derart klein, dass man ohne Bedenken gemäss Bild 9.12 (b) vorgehen und insbesondere eine Abstufung der Plattenbewehrung vornehmen darf, indem man eine gewisse Zugbeanspruchung des Betons toleriert. Für grosse Werte τ_{rz} , d.h. solche, die mit einem vorsichtig angesetzten Bemessungswert für die Betonzugfestigkeit vergleichbar sind, wird man indessen zur Sicherstellung einer direkten Abstützung im Sinne von Bild 9.12 (a) in der Regel die gesamte Bewehrung über die Auflager führen und verankern.

Für die Untersuchung der randgestützten Quadratplatte unter gleichmässig verteilter Belastung gemäss Bild 9.13 wird der Beton wieder als unendlich druckfestes Material ohne Zugfestigkeit idealisiert. Der isotropen und konstanten Bewehrung an der Plattenunterseite entspricht das Fliessmoment M_0 . Gemäss Bild 9.13 (a) und (b) wird die Belastung p wie bei der Kreisplatte Bild 9.12 (a) durch fächerförmige Druckspannungsfelder zu den Auflagern abgetragen. Für ein im Grundriss Bild 9.13 (a) dreieckiges Element mit der Basis dx am Rand AB ($y = a/2$) resultiert in der Ebene $z = 1/2$ die Horizontalkraft $p \cdot a^2 \cdot dx / 24$ in y -Richtung, welche durch den Widerstand $M_0 \cdot dx$ der Bewehrung aufgenommen wird. Mithin ist

$$p \cdot a^2 = 24 \cdot M_0 \quad (9.75)$$

Mit den Kräften $p \cdot a^2 \cdot dx / 24$ in y -Richtung sind entsprechende Kräfte $p \cdot a \cdot x \cdot dx / 12$ in x -Richtung verbunden, welche an den Plattenrand $y = a/2$ abgegeben werden, vgl. Bild 9.13 (d). Im Plattenrand wirkt die Querkraft $V_t = p \cdot a \cdot x / 12 = M_0 \cdot x / (a/2)$, welche in A' durch $R_E / 2 = M_0$ aufgenommen wird und einer gleichmässig verteilten Reaktion $R_n = M_0 / (a/2)$ entlang AB entspricht. Für die Querkraft V_t ist eine entsprechende Randbewehrung erforderlich. An der Plattenoberseite $z = -1/2$ können die der Querkraft V_t entsprechenden Schubspannungen entlang $A'B'$ durch unter $\pi/4$ zu den Achsen x und y geneigte Druckspannungsfelder zwischen aneinanderstossenden Plattenrändern gemäss Bild 9.13 (f) oben aufgenommen werden. Die aus diesen Druckspannungsfeldern sich ergebenden Normalspannungskomponenten senkrecht zum Plattenrand sind gemäss Bild 9.13 (d) durch Bewehrungen aufzunehmen, deren Widerstand von null in den Randmitten bis auf den Wert M_0 an den Plattenecken linear zunimmt.

Um die Diskussion des Spannungszustandes zu vervollständigen, sind noch die an der Plattenoberseite zur Aufnahme der Horizontalkräfte aus der direkten Abstützung erforderlichen Kräfte zu verfolgen. Dazu wird wie bisher nur der dreieckige Plattenteil zwischen der y -Achse und der Geraden OA in Bild 9.13 (a) betrachtet. Gemäss den beiden Bildern 9.13 (f) unten können die Komponenten der Horizontalkräfte in x - und y -Richtung getrennt zu resultierenden Druckspannungsfeldern aufsummiert werden. Aus der Kombination aller solcher Druckspannungsfelder mit den in Bild 9.13 (f) oben angedeuteten, unter $\pi/4$ geneigten Feldern erhält man einen statisch zulässigen Spannungszustand in der unendlich dünnen Druckzone $z = -1/2$.

Der Verschiebungszustand Bild 9.13 (e) entspricht dem anhand von Bild 9.12 (c) diskutierten Verschiebungszustand der Kreisplatte. Die Pyramide $O'ABCO$ erfährt eine reine vertikale Starrkörperverschiebung. Die Pyramide $O'A'A'B'B$ rotiert um $A'B'$. Dadurch öffnet sich eine Kollapsrissfläche $O'AB$, und die Bewehrung in der Ebene $z = 1/2$ fliesst entlang AB. Die einzelnen Pyramiden $O'A'A'B'B$ usw. rotieren gegenseitig um die Achsen $O'A'$, $O'B'$ usw..

Betrachtet man die randgestützte Quadratplatte als Sandwichplatte, so kann man die Bewehrung in x - und y -Richtung beispielsweise nach der Streifenmethode für die Momente

$$M_x = M_0 \cdot \left(1 - \frac{4 \cdot x^2}{a^2}\right), \quad M_y = M_0 \cdot \left(1 - \frac{4 \cdot y^2}{a^2}\right), \quad M_{xy} = 0 \quad (9.76)$$

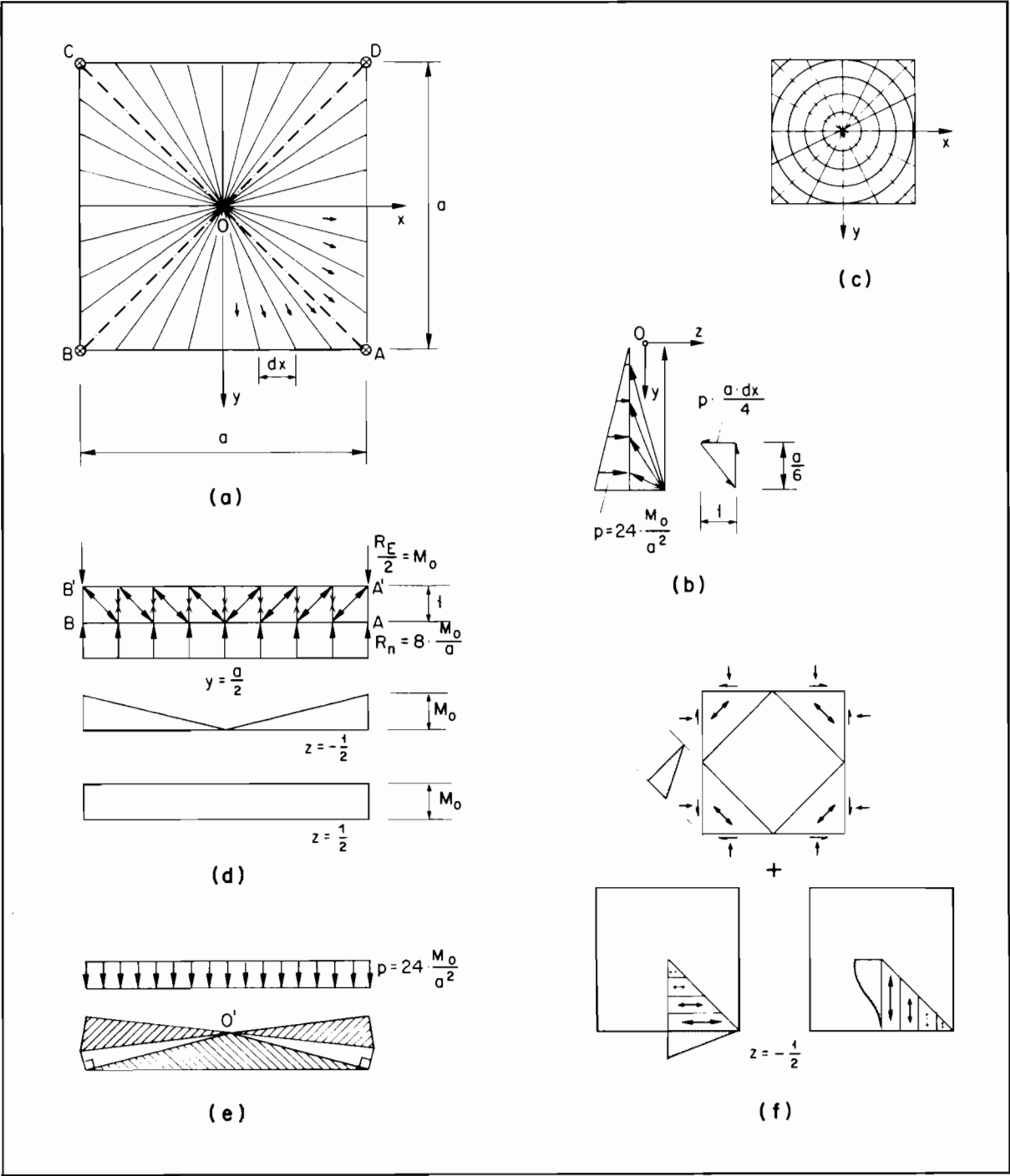


Bild 9.13: Randgestützte Quadratplatte – $f_t = 0$, $f_c \rightarrow \infty$

bemessen und insbesondere bis zu den Auflagern auf null abstufen. Für die Traglast einer derart bemessenen Platte resultiert ein unterer Grenzwert $p \cdot a^2 = 16 \cdot M_0$. Demgegenüber würde der Verschiebungszustand Bild 9.13 (e) $p = 0$ liefern, was drastisch zeigt, dass man beim Abstufen der Bewehrung mit der Betonzugfestigkeit rechnet.

Ersetzt man die dritte Gleichung (9.76) durch $M_{xy} = -4 \cdot x \cdot y / a^2$, d.h. rechnet man mit den Momenten

$$M_x = M_0 \cdot \left(1 - \frac{4 \cdot x^2}{a^2}\right), \quad M_y = M_0 \cdot \left(1 - \frac{4 \cdot y^2}{a^2}\right), \quad M_{xy} = -\frac{4 \cdot x \cdot y}{a^2} \cdot M_0, \quad (9.77)$$

so resultiert (9.75) als unterer Grenzwert für die Traglast. Mit einem verträglichen Fließgelenklinienmechanismus mit Fließgelenklinien entlang den Plattendiagonalen AC und BD in Bild 9.13 (a) bestätigt man diesen Wert als exakten Wert der Traglast. Die Hauptmomententrajektorien der Verteilung (9.77) sind in Bild 9.13 (c) angegeben. Mit $R = a/2$ sind die Hauptmomente durch (9.74) gegeben.

Mit der Bemessung der Plattenbewehrung stellt man die Stabilität der zugrundegelegten Momentenverteilung in der Platte sicher. Für die Verteilung (9.77) kann dies beispielsweise durch Anordnen einer konstanten orthogonalen Bewehrung für M_0 an der Plattenunterseite erfolgen. An der Plattenoberseite ist nur eine Bewehrung in den Spickeln zwischen dem Plattenrand und dem ihm eingeschriebenen Kreis nötig. Für die Bewehrung des Plattenrandes selbst können mit der üblichen Theorie keine Angaben gemacht werden.

Mit den in diesem Abschnitt angestellten Überlegungen wird eine Ergänzung der üblichen Theorie in zweierlei Hinsicht angestrebt. Erstens wird die Existenz von Querkräften $V_t = M_{nt}$ in einer schmalen Zone am Plattenrand nachgewiesen. Bei Stahlbetonplatten ist dafür eine entsprechende Randbewehrung erforderlich. Zweitens wird auf Unterschiede aufmerksam gemacht, die sich bei der Bemessung von Stahlbetonplatten ergeben, wenn entweder wie üblich eine Idealisierung als Sandwichplatte zugrunde gelegt wird oder wenn die Betonzugfestigkeit konsequent vernachlässigt wird, was für die Abtragung der zur Platte senkrechten Lasten nur noch die Möglichkeit einer direkten Abstützung auf die Auflager oder allenfalls zu bewehrten freien Plattenrändern offen lässt.

Bei der eckgestützten Quadratplatte mit $f_t = 0$ und $f_c \rightarrow \infty$ kann sich gemäss den Bildern 9.14 (a) und (b) eine Lastabstützung auf die freien Plattenränder ausbilden. Gemäss Bild 9.14 (c) werden die ankommenden Lasten in der Randebene zu den Stützungen in den Plattenecken übertragen. Die Querkräfte in den Plattenrändern nehmen von den Randmitten bis zu den Ecken entsprechend den Parabeln JE und JF in Bild 9.14 (c) von null auf $R_E/2 = M_0$ zu. Die Traglast ist gegeben durch

$$p \cdot a^2 = 8 \cdot M_0. \quad (9.78)$$

Die Zugkraft in der Bewehrung an der Plattenunterseite setzt sich aus den für die Lastabstützung und aus den für die Weiterleitung der Schubflüsse aus den Plattenrändern in die Plattenunterseite nötigen Anteilen zusammen. Die Summe dieser Anteile ist konstant gleich M_0 . In Bild 9.14 (c) entsprechen die beiden Anteile für $x > 0$ den Flächen IEJ und JGE. Die Weiterleitung der Schubflüsse an der Plattenunterseite ist mit den Betondruckspannungsfeldern in Bild 9.14 (f) angedeutet. An der Plattenoberseite können die Schubflüsse aus den Plattenrändern mit den in Bild 9.14 (d) links angedeuteten Betondruckspannungsfeldern weitergeleitet werden. Zur Aufnahme der zu den Plattenrändern normalen Spannungskomponenten ist eine entsprechende Bewehrung anzuordnen. Schliesslich sind noch die gemäss Bild 9.14 (b) aus der Lastabstützung resultierenden Druckkräfte zu berücksichtigen, wie mit Bild 9.14 (d) rechts angedeutet.

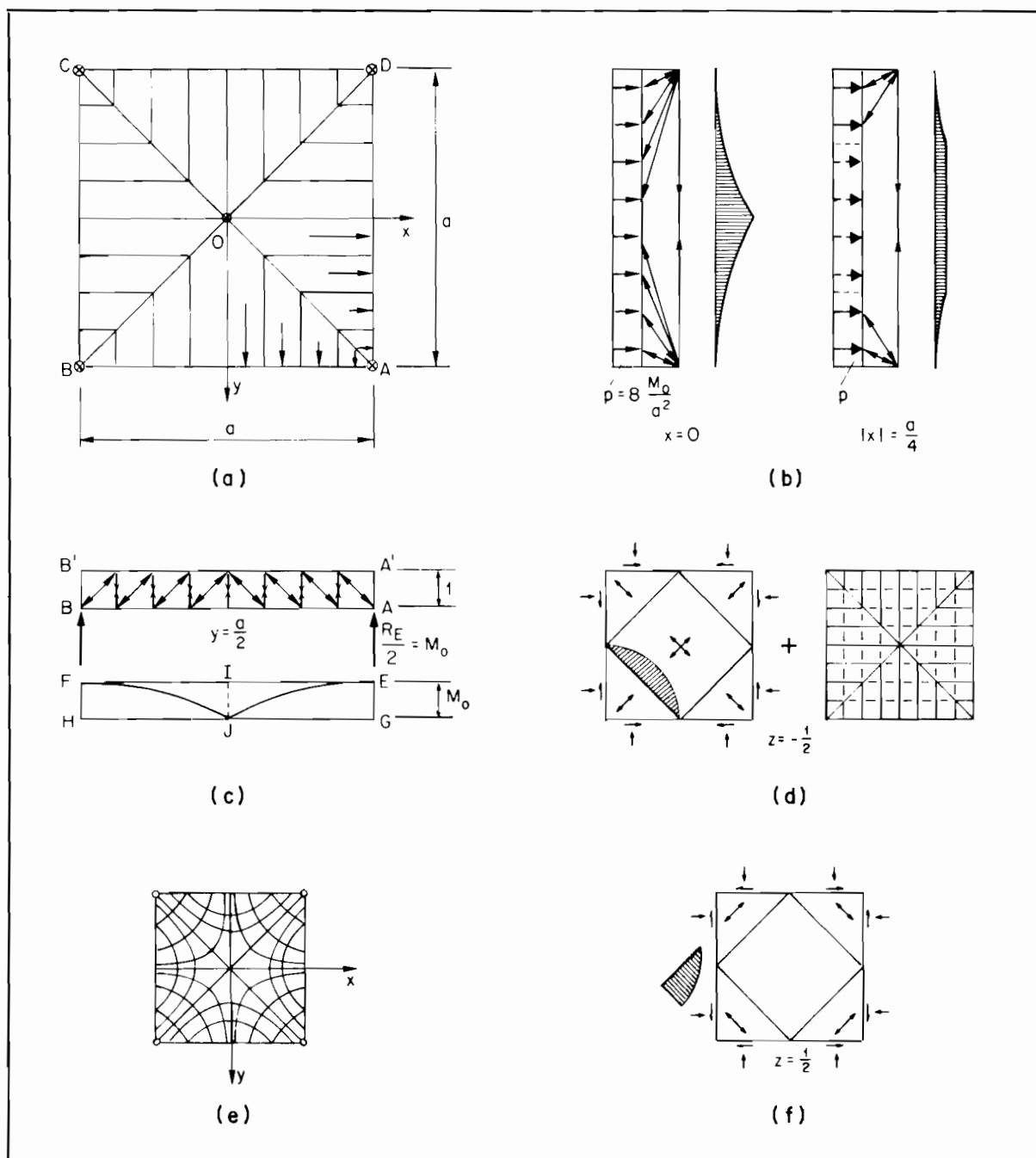


Bild 9.14: Eckgestützte Quadratplatte — $f_t = 0$, $f_c \rightarrow \infty$

Als mit dem diskutierten Spannungszustand verträglicher Verschiebungszustand kann ein Flie遝gelenklinienmechanismus angegeben werden, mit einer Flie遝gelenklinie entlang einer der beiden Achsen x und y in Bild 9.14 (a).

Mit Bild 9.14 (e) sind noch die Hauptmomententrajektorien angegeben, die für die zu (9.77) analoge Momentenverteilung

$$M_x = M_0 \cdot \left(1 - \frac{4 \cdot x^2}{a^2}\right), \quad M_y = M_0 \cdot \left(1 - \frac{4 \cdot y^2}{a^2}\right), \quad M_{xy} = + \frac{4 \cdot x \cdot y}{a^2} \cdot M_0 \quad (9.79)$$

resultieren. Auf einen Vergleich mit der oben erörterten Lösung wird verzichtet.

9.4 Durchstanzen

Im folgenden wird das Problem des achsialsymmetrischen Durchstanzens einer Platte ohne Zugfestigkeit mit der kinematischen und mit der statischen Methode untersucht.

Betrachtet wird mit Bild 9.15 (a) der Meridianschnitt einer Platte der Dicke 1, die an ihrer Oberseite entlang FE durch die Vertikalkraft V belastet wird. Die Reaktion V an der Plattenunterseite wird entlang BC übertragen, z.B. von einer Stütze mit dem auf die Plattendicke bezogenen Radius r_c .

Um zunächst einen oberen Grenzwert für die Traglast V zu bestimmen wird ein Verschiebungsfeld betrachtet, bei dem sich entlang einer Unstetigkeitsfläche mit dem Meridianschnitt CF ein Sprung $[du]$ in z -Richtung ergibt, die beiden dadurch rein translatorisch voneinander getrennten Plattenteile DBCF und EFC aber starr bleiben.

Die in einem Punkt auf der Linie CF eingetragenen Richtungen I, II, 1 und 2 entsprechen jenen in den Bildern 5.3 (a) und (b). Die Azimutalrichtung ϑ ist die dritte Hauptrichtung, und der zugehörige Hauptwert $de_\vartheta = de_3$ verschwindet nach den Überlegungen in Abschnitt 5.4. Für die im Abschnitt 6.1 angenommene Flie遝bedingung für Beton sind Spannungszustände entsprechend Regime G von Bild 6.1 (b) mit dem vorausgesetzten Verschiebungszustand verträglich. Diese Verhältnisse entsprechen genau dem mit Bild 5.4 (c) untersuchten Fall einer stark konvexen Berandung des aplastischen Bereichs mit einer Singularität im Punkt P. Die Hauptspannung $\sigma_\vartheta = \sigma_3$ kann innerhalb der Schranken f_t und $4 \cdot f_t - f_c$ jeden Wert annehmen und auch entlang der Unstetigkeitsfläche des Verschiebungsfeldes unstetig sein. Insbesondere kann σ_ϑ mit der kleinsten Hauptspannung σ_2 zusammenfallen, d.h. gemäss (7.86) durch $\epsilon = +1$ bestimmt sein. Damit kann die Linie CF als Charakteristik $\eta = \text{konst.}$ gemäss Abschnitt 7.3 aufgefasst und mit (7.89) bestimmt werden, wenn φ durch α ersetzt wird.

Für jeden Punkt auf CF ist

$$\pi - \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \quad (9.80)$$

und entlang CF ist

$$\frac{3}{4} \leq \tan \alpha = \frac{dr}{dz} = r' \quad (9.81)$$

Die Ungleichung in (9.81) folgt aus der Annahme (6.1). Aus (9.80) und (9.81) erhält man

$$-2 \cdot d\theta = d\alpha = \frac{r''}{1 + (r')^2} \cdot dz \quad (9.82)$$

Einsetzen dieser Beziehungen in (7.89) liefert unter Beachtung von $d\xi = dz/\cos \alpha$ die

Differentialgleichung

$$r \cdot r'' - (r')^2 = 1 \quad (9.83)$$

mit der Lösung

$$r = a \cdot \cosh\left(\frac{z}{a} + k\right) \quad (9.84)$$

Die Konstanten a und k sind aus den Randbedingungen bei C und F zu bestimmen:

$$r_C = a \cdot \cosh(k), \quad r_F = a \cdot \cosh\left(\frac{1}{a} + k\right) \quad (9.85)$$

Aus der Restriktion (9.81) ergibt sich die Beschränkung $\sinh(k) \geq 3/4$.

Für die Traglast V findet man aus der Bedingung $dA_a \geq dA$ gemäss (5.1) bei Vernachlässigung der Betonzugfestigkeit mit (6.7) die obere Eingrenzung

$$V \leq \int_0^1 \frac{f_c}{2} \cdot (1 - \sin \alpha) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{dz}{\cos \alpha} \quad (9.86)$$

Beachtet man (9.84) und (9.85), so folgt das bereits von BRAESTRUP et al. (1976) angegebene Ergebnis

$$V \leq \pi \cdot f_c \cdot \int_0^1 [\sqrt{1+(r')^2} - r'] \cdot r \cdot dz = \pi \cdot \frac{f_c}{2} \cdot \{a + r_C^2 \cdot [1 - \sqrt{1 - (\frac{a}{r_C})^2}] - r_F^2 \cdot [1 - \sqrt{1 - (\frac{a}{r_F})^2}]\} \quad (9.87)$$

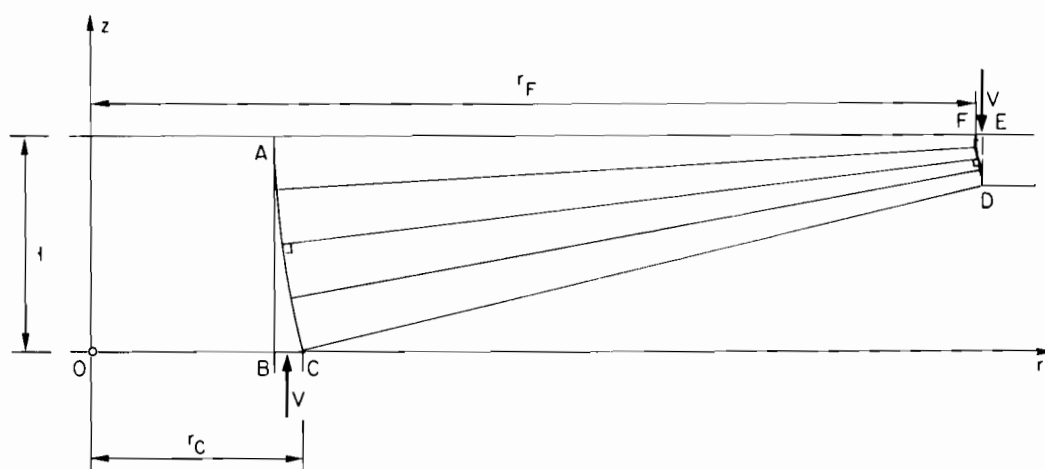
In Bild 9.15 (b) ist die Gleichung (9.87) für die Werte $r = .5, 1., 1.5$ und $2.$ ausgewertet. Für einen angenommenen Wert k folgt aus der ersten Gleichung (9.85) die Grösse von a und damit aus der zweiten Gleichung (9.85) der zugehörige, in Bild 9.15 (b) auf der Abszisse aufgetragene Wert r_F . Mit (9.87) ist dann der auf der Ordinate in Bild 9.15 (b) aufgetragene Wert τ_{nom}/f_c bestimmt. τ_{nom} steht für die in der Durchstanzliteratur gebräuchliche nominelle Schubspannung an einem ideellen Zylindermantel der Höhe 1 im Abstand $1/2$ vom Rand der Stützung bei C :

$$\tau_{nom} = \frac{V}{\pi \cdot (1 + 2 \cdot r_C)} \quad (9.88)$$

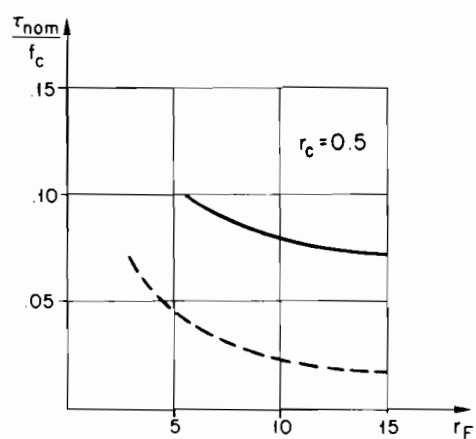
Die Enden der vier im Bild 9.15 (b) dargestellten Kurven an der linken Seite entsprechen jeweils der aus der Restriktion (9.81) folgenden Grenze $\sinh(k) = 3/4$. Für den im Bild 9.15 (a) dargestellten und im Diagramm Bild 9.15 (b) eingetragenen Fall ist

$$k = 1., \quad r_C = 1.; \quad a = .6481, \quad r_F = 4.1467; \quad \tau_{nom} \leq .1125 \cdot f_c \quad .$$

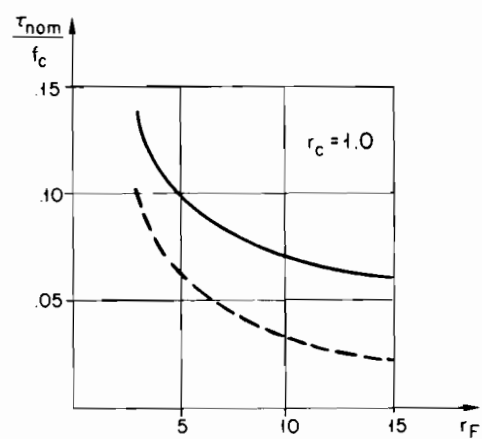
Mit Bild 9.16 wird ein unterer Grenzwert für die Traglast V bestimmt und der oberen Eingrenzung (9.87) gegenübergestellt. Im fächerförmigen Bereich ACDF des in Bild 9.16 (a) dargestellten Spannungsfeldes herrscht ein einachsiger Druckspannungszustand. Die einzelnen Elemente des Fächers können als Meridianschnitte von Kegelschalen aufgefasst werden, deren Dicke mit zunehmendem Radius r linear abnimmt. Entlang AC und DF erreicht die Druckspannung im Fächer gerade die Fließgrenze $-f_c$. Im Innern des Fächerbereichs ACDF wird diese Grenze nicht erreicht. In den Bereichen ABC und DEF herrscht ein hydrostatischer Druckspannungszustand mit $\sigma_H = -f_c$. Die Grenzen BC und EF dieser Bereiche entsprechen Kreisringflächen, über welche die Kraft V auf die Platte übertragen wird. Die Pressung $\sigma_r = -f_c$ entlang AB ist im Gleichgewicht mit dem ebenen Spannungszustand $\{\sigma_1 = \sigma_2 = -f_c, \sigma_z = \sigma_3 = 0\}$ im zentralen Plattenteil $0 \leq r \leq r_B$. Die Pressung $\sigma_r = -f_c$ entlang DE kann beispielsweise von einer Bewehrung aufgenommen, oder auf anschliessende Plattenteile übertragen werden.



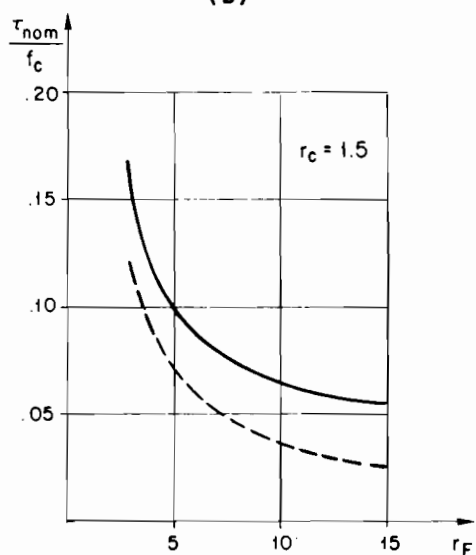
(a)



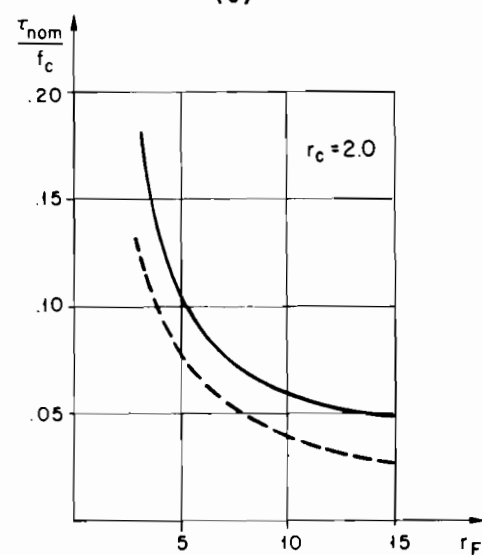
(b)



(c)



(d)



(e)

Bild 9.16 : Achsialsymmetrisches Durchstanzen – Statische Methode

In den Bildern 9.16 (b), (c), (d) und (e) sind die resultierenden unteren Grenzwerte für die Verhältnisse τ_{nom}/f_c mit gestrichenen Kurven eingetragen. Die ausgezogenen Kurven entsprechen den oberen Grenzwerten gemäss Bild 9.15. Wie man sieht, wird die Uebereinstimmung zwischen unteren und oberen Grenzwerten für zunehmende Radien r_c (Stützenradius) und abnehmende Radien r_F (Lastabstand) besser. Für den in Bild 9.16 (a) dargestellten Fall mit $r_c = 1.$ und $r_F = 4.1467$, welcher jenen von Bild 9.15 (a) entspricht, ergibt sich beispielsweise $\tau_{\text{nom}} \geq 0.759 \cdot f_c$, d.h. ein unterer Grenzwert von 67.5% des oberen Grenzwertes $.1125 \cdot f_c$.

Für die Bestimmung der unteren Grenzwerte für τ_{nom} wurde ein Computerprogramm verwendet, mit dem ausgehend von angenommenen Werten für r_A und r_F der Verlauf der Linien AC und FD durch numerische Integration der Beziehungen

$$dx_2 = dx_1 \cdot \frac{r_A + y_1}{r_F + y_2}, \quad dy_2 = dy_1 \cdot \frac{r_A + y_1}{r_F + y_2}, \quad dy_1 = dx_1 \cdot \frac{x_1 - x_2}{r_F + y_2 - r_A - y_1} \quad (9.89)$$

ermittelt werden konnte. $\{x_1, y_1\}$ und $\{x_2, y_2\}$ bezeichnen die Koordinaten zweier zusammengehöriger Punkte P_1 und P_2 auf den Fächerberandungen AC und FD in kartesischen Koordinatensystemen mit Ursprung in A bzw. F und

$$x_1 = 1-z, \quad y_1 = r-r_A; \quad x_2 = 1-z, \quad y_2 = r-r_F. \quad (9.90)$$

Mit den Beziehungen (9.89) wird zum Ausdruck gebracht, dass die Linien AC und FD in P_1 und P_2 zur Verbindungsgeraden $P_1 P_2$ orthogonal sind, und dass die Normalspannungen auf AC und FD in P_1 und P_2 gleich gross (nämlich gleich $-f_c$) sind. Für die auf vier Stellen genaue Bestimmung von τ_{nom}/f_c erwies sich eine Integrationsschrittweite von $dx_1 = 0.001$ als ausreichend.

IV. ZUSAMMENFASSUNG

Gewiss herrscht vielfach die Ansicht, es solle die Berechnung eindeutig und endgültig die Abmessungen bestimmen. Indes kann angesichts der Unmöglichkeit der Berücksichtigung aller Nebenumstände jede Berechnung nur eine Grundlage für den Konstrukteur bilden, der sich darauf mit den Nebenumständen auseinandersetzen hat... . Eine ganz einfache Berechnungsweise ist also einzig möglich und genügend.

ROBERT MAILLART (1938)

Mit der vorliegenden Arbeit wird versucht, zu einer vermehrten Verwendung der Plastizitätstheorie für die Bemessung von Stahlbeton beizutragen. Zu diesem Zweck werden in Teil II die theoretischen Grundlagen verhältnismässig eingehend dargestellt, und in Teil III wird die Theorie starr-plastischer Körper auf Stahlbeton angewendet.

Beiläufig ergeben sich in Teil II einige Präzisierungen und Ergänzungen bekannter Ergebnisse der Plastizitätstheorie. Namentlich wird diskutiert, unter welchen Voraussetzungen sich eine beliebige Fließbedingung für isotropes Material im ebenen Fließzustand auf eine Bedingung vom Typ der Mohrschen Hüllkurve zurückführen lässt. Ferner wird eine einfache Form des Beweises dafür angegeben, dass die Theorie des plastischen Potentials auch für die Darstellung in verallgemeinerten Lasten und Verschiebungen anwendbar ist, wenn sie für alle Elemente des betrachteten Körpers als richtig vorausgesetzt wird. Schliesslich werden der Begriff der Verträglichkeit für räumlich unstetige Felder und kompressible isotrope Materialien verallgemeinert und die Beziehungen erörtert, welche zwischen dem Spannungsfeld und Unstetigkeiten des Verschiebungsfeldes und umgekehrt bestehen.

Im Unterschied zu den meisten bekannten plastizitätstheoretischen Arbeiten, die sich mit Stahlbeton befassen, geht die vorliegende Arbeit in Teil III konsequent von der Beschreibung des Verhaltens des Betons aus. Bekannte Ergebnisse werden in verschiedener Hinsicht ergänzt und verallgemeinert. Es zeigt sich, dass sich die Plastizitätstheorie nicht nur auf Bauteile anwenden lässt, deren Widerstand massgebend von demjenigen der Bewehrung abhängt. Erfolgreiche Anwendungsmöglichkeiten ergeben sich auch für die in der Praxis nicht selten auftretenden Fälle, bei denen der Widerstand des Betons von ausschlaggebender Bedeutung ist. Insgesamt ermöglicht die Anwendung der Plastizitätstheorie eine sichere, einfache und dennoch ausreichend genaue Bemessung von Stahlbeton nach einheitlichen Prinzipien.

Nach einer Diskussion von Fließbedingungen für Scheibenelemente werden in Kapitel 7 die unter der Voraussetzung eines ebenen Spannungszustandes möglichen Spannungs- und Verformungsfelder allgemein untersucht. Das Problem wird auf die Untersuchung des ebenen Fließzustandes in einem Material zurückgeführt, das einer Fließbedingung vom Typ der Mohrschen Hüllkurve und dem zugeordneten Fließgesetz folgt. Die im ebenen Spannungszustand für die angenommene Fließbedingung für Beton geltenden Beziehungen folgen als Sonderfall. Die Wirkung der Bewehrung wird mit Volumenkräften und statischen Randbedingungen berücksichtigt. Anschliessend werden die Überlegungen auf die Untersuchung achsialsymmetrischer Fließzustände übertragen.

In Kapitel 8 werden die in Kapitel 7 erarbeiteten Grundlagen auf scheibenförmige und aus Scheiben zusammengesetzte Bauteile angewendet. Das Schwergewicht liegt bei der Entwicklung vollständiger Lösungen und von Lösungen nach der statischen Methode. Für Träger und Scheiben mit Rechteckquerschnitt werden verschiedene mögliche Tragwirkungen wie Strebenwirkung, Bogenwirkung und Fächerwirkung einander gegenübergestellt. Ferner wird die Kombination von Strebenwirkung und Fächerwirkung untersucht. Für die praktische Bemessung

von aus einzelnen Scheiben zusammengesetzten Trägern unter kombinierter Beanspruchung wird eine einfache Methode angegeben. Schliesslich wird die Tragfähigkeit von Fugen unter der Voraussetzung eines isotropen, ideal plastischen Fugenmaterials untersucht, das dem Prinzip der maximalen Dissipationsarbeit folgt.

In Kapitel 9 werden zunächst die Grundlagen zur Ermittlung von Fliessbedingungen für Plattenelemente dargestellt, die durch kombiniert wirkende Biegemomente und Membrankräfte beansprucht werden. Darauf gestützt wird der Widerstand von durch Schub und Querbiegung beanspruchten Plattenelementen untersucht. Die erhaltene vollständige Lösung kann zur Bestimmung der Spannungsergebnisse entlang verallgemeinerten Fliessgelenklinien verwendet werden. Eine Lösung nach der statischen Methode wird entwickelt und auf den Fall eines Schubwandelementes mit massgebender Längsbewehrung ausgedehnt. Anschliessend wird das Problem der Beanspruchung von Stahlbetonplatten durch reine Drillung untersucht. Daraus ergeben sich einerseits neue Ergebnisse für Träger mit Rechteckquerschnitt unter Torsionsbeanspruchung. Andererseits ermöglichen diese Überlegungen die Klärung einiger Aspekte der Tragwirkung bei Plattenrändern und Plattenecken. Schliesslich wird das Problem des achsialsymmetrischen Durchstanzens von Platten ohne Zugfestigkeit nach der statischen und nach der kinematischen Methode untersucht.

S U M M A R Y

The aim of this thesis is to contribute to an increased application of the theory of plasticity in reinforced concrete design. In part II the theoretical basis is given in detail and in part III the theory of rigid-plastic bodies is applied to reinforced concrete.

In part II some amendments and supplements to well-known results of the theory of plasticity are presented. It is shown under which conditions the yield condition for isotropic material in plane strain may be replaced by a yield condition of the Mohr-envelope type. Furthermore it is proved in a simple form that the theory of the plastic potential is applicable in terms of generalized forces and displacements if it is assumed to be valid for all elements of the body under consideration. Finally, the definition of plastic compatibility is generalized for a compressible isotropic material and three-dimensional discontinuous stress and displacement fields. The relations between one field and the discontinuities of the other are discussed.

Deviating from most theoretical studies applying the theory of plasticity to reinforced concrete the considerations in part III of this thesis are based on a description of the behaviour of concrete. On this basis different well-known results are supplemented and generalized. It turns out that the theory of plasticity may not only be applied to under-reinforced members their strength being essentially determined by the reinforcement. It may also successfully be applied to the frequently occurring cases of over-reinforced members the strength of which is mainly influenced by the concrete. Altogether the application of the theory of plasticity allows a safe, simple and sufficiently accurate design of reinforced concrete on a unified theoretical basis.

Chapter 7 contains a discussion of yield conditions for reinforced concrete wall elements and a general investigation of the possible stress and strain fields under plane stress conditions. This investigation is based on a discussion of the plane strain state in a material which is governed by a yield condition of the Mohr-envelope type and the associated flow rule. For the assumed yield condition for concrete the relevant conditions in plane stress are obtained by specialization. The action of the reinforcement is taken into consideration with equivalent volume forces and statical boundary conditions. Finally, axially symmetric states of deformation are treated with the same method.

In chapter 8 the theoretical results of chapter 7 are applied to wall-like members and members made up by different walls. Emphasis is given to the development of complete solutions and of lower-bound solutions. For beams and walls with a rectangular cross-section different types of load transfer such as strut action, arch action and fan action are compared. The combination of strut action and fan action is investigated. A simple method is given for the practical design of girders which are subjected to combined actions. Finally, the strength of joints is considered assuming that the joint material is an isotropic, ideally plastic material which follows the theory of the plastic potential.

In chapter 9 the basis is outlined for the development of yield conditions for slab elements which are subjected to the combined action of bending moments and membrane forces. Special consideration is given to the case of shear and transverse bending in slab elements. The corresponding complete solution may be used for the determination of the stress resultants along generalized yield lines. A lower-bound solution is also given and extended to the case of a shear wall element with yielding longitudinal reinforcement. Subsequently the problem of pure torsion in a reinforced concrete slab is treated. From this investigation some new results are obtained for beams subjected to torsion and a better insight into some aspects of the load transfer action at slab edges and corners is given. Finally, the problem of the axisymmetric punching of slabs is treated with the lower-bound as well as with the upper-bound method.

R E S U M E

Cette thèse a pour but de contribuer à l'application de la théorie de la plasticité pour le dimensionnement du béton armé. Elle est divisée en trois parties: dans la première, on donne un aperçu général situant le problème, dans la deuxième on présente d'une manière détaillée les bases de la théorie de la plasticité et dans la troisième on applique au béton armé la théorie des corps rigides-parfaitement plastiques.

Dans la deuxième partie, on présente des résultats bien connus de la théorie de la plasticité en y apportant cependant quelques précisions et suppléments. On discute notamment dans quelles conditions un critère de plasticité quelconque pour un matériau isotrope en déformation plane peut être ramené à un critère du type courbe intrinsèque de Mohr. On donne aussi une preuve simple que la théorie du potentiel plastique est applicable en termes de forces et de déplacements généralisés si on suppose que tous les éléments du corps obéissent à cette théorie. Finalement la notion de compatibilité plastique est généralisée pour des champs discontinus de contraintes et de déformations dans l'espace. Les relations qui existent entre un champ de contraintes et les discontinuités d'un champ de déformations ou réciproquement sont discutées.

Contrairement à la plupart des travaux connus qui traitent de l'application de la théorie de la plasticité au béton armé, les applications traitées dans la troisième partie de cette thèse sont basées systématiquement sur la description du comportement du béton. Cette méthode a permis de compléter et de généraliser des résultats connus. Il apparaît ainsi que l'application de la théorie de la plasticité n'est pas uniquement limitée aux structures qui sont faiblement armées et dont la résistance est essentiellement déterminée par l'armature. La théorie de la plasticité peut donc aussi être appliquée avec succès aux cas pratiques où la résistance du béton est déterminante. En fait, la théorie de la plasticité permet de faire un dimensionnement des structures en béton armé qui est sûr, simple, suffisamment exact et qui a l'avantage d'être basé sur des principes unifiés.

Le chapitre 7 contient une discussion des critères de plasticité pour des éléments de paroi en béton armé. Les champs de contraintes et de déformations compatibles avec un état plan de contraintes sont étudiés en détail. Le problème est ramené à celui de l'écoulement libre en déformation plane d'un matériau isotrope qui obéit à un critère de plasticité du type courbe intrinsèque de Mohr et à la loi de comportement associée. Le cas particulier des relations régissant l'état plan de contraintes pour le béton est également traité. On a pris en considération l'armature en assimilant ses effets à ceux de forces volumétriques ayant des conditions limites équivalentes. Des considérations similaires sont faites pour des problèmes d'écoulement libre en symétrie axiale.

Dans le chapitre 8, les bases théoriques du chapitre 7 sont appliquées aux parois en béton armé et aux structures qui sont composées de plusieurs parois. L'accent principal a été porté sur la recherche de solutions exactes et de solutions statiques. Pour des poutres et des parois de section rectangulaire, on a analysé et comparé différents comportements possibles qui peuvent être engendré soit par une action de bielle comprimée, soit par une action d'arc ou soit par une action d'éventail. La combinaison des actions d'éventail et de bielles comprimées est également traitée. On présente une méthode simple pour le dimensionnement pratique de poutres en béton armé composées d'éléments de paroi et sollicitées par des actions combinées. Finalement on présente des considérations sur la résistance de joints en matériau isotrope parfaitement plastique et obéissant au principe du travail maximal.

Dans le chapitre 9 on traite d'abord de la dérivation des critères de plasticité pour

des éléments de dalle sollicités par des moments de flexion et des forces de membrane. Le cas d'une sollicitation de cisaillement dans le plan de la dalle combinée avec un moment de flexion transversal est étudié en détail. La solution exacte de ce problème peut être appliquée pour la détermination des résultantes des contraintes le long des lignes de rupture généralisées. Une solution statique est développée et appliquée au cas d'un élément de paroi dont l'armature longitudinale a atteint la limite d'écoulement. On a également étudié le cas d'une dalle soumise à un moment de torsion pure. Les résultats de cette étude ont apporté d'une part quelques connaissances nouvelles pour l'étude des poutres de section rectangulaire soumises à des sollicitations de torsion et d'autre part des renseignements sur le comportement des bords et des angles des dalles. Finalement, le problème du poinçonnement en symétrie axiale d'une dalle est traité avec la méthode statique et la méthode cinématique.

LITERATURVERZEICHNIS

- ANDERHEGGEN, E. (1966). "Optimale Bemessung von Stabtragwerken", Diss. ETH Zürich, Juris Zürich (1966), p. 113.
- ANDERHEGGEN, E. and THEILER, J. (1979). "Computer Aided Optimum Design of Concrete Slabs", IABSE-Colloquium "Plasticity in Reinforced Concrete", Copenhagen 1979, Final Report, IABSE Vol. 29, Zürich (1979), 189-195.
- v. BACH, C. (1907). "Versuche mit Eisenbetonbalken", Mitteilungen über Forschungsarbeiten, Hefte 45 bis 47, Berlin (1907).
- v. BACH, C. und GRAF, O. (1911, 1912, 1921). "Versuche mit Eisenbetonbalken zur Ermittlung der Widerstandsfähigkeit verschiedener Bewehrung gegen Schubkräfte", Deutscher Ausschuss für Eisenbeton, Berlin, Hefte 10 und 12 (1911), 20 (1912) und 48 (1921).
- BAUMANN, Th. (1972). "Tragwirkung orthogonaler Bewehrungsnetze beliebiger Richtung in Flächentragwerken aus Stahlbeton", Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 217, W. Ernst Berlin (1972).
- BLEICH, H. (1932). "Ueber die Bemessung statisch unbestimmter Stahltragwerke unter Berücksichtigung des elastisch-plastischen Verhaltens des Baustoffes", Bauingenieur 13 (1932), 261-267.
- BRAESTRUP, M.W. (1970). "Yield Lines in Discs, Plates and Shells", Structural Research Laboratory, Technical University of Denmark, Copenhagen, Report No R 14 (1970), p. 54.
- BRAESTRUP, M.W. (1974). "Plastic Analysis of Shear in Reinforced Concrete", Magazine of Concrete Research 26 (1974), 221-228.
- BRAESTRUP, M.W. (1979). Summary of Discussion-Session 3, IABSE-Colloquium "Plasticity in Reinforced Concrete", Copenhagen 1979, Final Report, IABSE Vol. 29, Zürich (1979), 211-212.
- BRAESTRUP, M.W., NIELSEN, M.P., JENSEN, B.C. and BACH, F. (1976). "Axisymmetric Punching of Plain and Reinforced Concrete", Structural Research Laboratory, Technical University of Denmark, Copenhagen, Report No R 75 (1976), p. 33.
- CEB-FIP (1978). "Code modèle pour les structures en béton", Système international de réglementation technique unifiée des structures, vol. II, Bulletin d'Information no 124/125, Paris (1978).
- CHEN, W.F. (1978). "Constitutive Equations for Concrete", IABSE-Colloquium "Plasticity in Reinforced Concrete", Copenhagen 1979, Introductory Report, IABSE Vol. 28, Zürich (1978), 11-34.
- CHEN, W.F. and DRUCKER, D.C. (1969). "Bearing Capacity of Concrete Blocks or Rock", J. Eng. Mech. Div., ASCE, 95 (1969), 955-978.
- CLARK, L.A. (1976). "The Provision of Tension- and Compression Reinforcement to Resist In-Plane Forces", Magazine of Concrete Research 28 (1976), 3-12.
- CLYDE, D.H. (1977). "A General Theory for Reinforced Concrete Elements", Australasian Conference on the Mechanics of Structures and Materials, Christchurch, New Zealand, (1977).
- CLYDE, D.H. (1979). "Nodal Forces as Real Forces", IABSE Colloquium "Plasticity in Reinforced Concrete", Copenhagen 1979, Final Report, IABSE Vol. 29, Zürich (1979), 159-166.
- COOKSDON, P.J. (1976). "Collapse of Concrete Box Girders involving Distortion of the Cross-Section", Thesis, University of Cambridge (1976), p. 227.
- COOKSDON, P.J. (1979). "A General Yield Criterion for Orthogonally Reinforced Concrete Slab Elements", IABSE-Colloquium "Plasticity in Reinforced Concrete", Copenhagen 1979, Final Report, IABSE Vol. 29, Zürich (1979), 43-50.
- COULOMB, C.A. (1773). "Essai sur une application des règles de Maximis et Minimis à quelques Problèmes de Statique, relatifs à l'Architecture", Acad. R. Sci. Mém. Math. Phys. par divers savants 7 (1773), 343-382.
- DRUCKER, D.C. (1950). "Some Implications of Work Hardening and Ideal Plasticity", Quart. Appl. Math. 7 (1950), 411-418.
- DRUCKER, D.C. (1952). "Limit Analysis of Two- and Three-Dimensional Soil Mechanics Problems", J. Mech. Phys. Solids 1 (1952), 217-226.
- DRUCKER, D.C. (1961). "On Structural Concrete and the Theorems of Limit Analysis", IVBH-Abhandlungen 21 (1961), 49-59.

- DRUCKER, D.C., GREENBERG, H.J. and PRAGER, W. (1951). "The Safety Factor of an Elastic-Plastic Body in Plane Strain", J. appl. Mech. 18 (1951), 371-378.
- DRUCKER, D.C., PRAGER, W. and GREENBERG, H.J. (1952). "Extended Limit Design Theorems for Continuous Media", Quart. appl. Math. 9 (1952), 381-389.
- DRUCKER, D.C. and PRAGER, W. (1952). "Soil Mechanics and Plastic Analysis or Limit Design", Quart. Appl. Math. 10 (1952), 157-165.
- EWALD, G. (1977). "Ueberlagerung von Scheiben- und Plattentragwirkung am Beispiel stark profiliertter Stahlbeton- und Spannbetonträger bei hoher Schub- und begrenzter Querbiegebeanspruchung", Dissertation, Technische Universität München (1977), p. 211.
- FEINBERG, S.M. (1948). "Das Prinzip der Grenzspannung" (russisch), Prikladnaia Mat. Mech. 12 (1948), 63-68.
- GEIRINGER, H. (1958). "The Ideal Plastic Body" in Handbuch der Physik Band VI, Elastizität und Plastizität, Springer Verlag Berlin (1958), 322-433.
- GREENBERG, H.J. (1949). "Complementary Minimum Principles for an Elastic-Plastic Material", Quart. appl. Math. 7 (1949), 85-95.
- GROB, J. (1975). "Traglast von Stäben mit dünnwandigen offenen Querschnitten", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Bericht Nr. 56, Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart (1975), p. 115.
- HAAR, A. und v. KÁRMÁN, Th. (1909). "Zur Theorie der Spannungszustände in plastischen und sandartigen Medien", Göttinger Nachr., Math.-phys. Kl. (1909), 204-218.
- HILL, R. (1948). "A Variational Principle of Maximum Plastic Work in Classical Plasticity", Quart. J. Mech. Appl. Math. 1 (1948), 18-28.
- HILL, R. (1951). "On the State of Stress in a Plastic-Rigid Body at the Yield Point", Phil. Mag. 42 (1951), 868-875.
- JENSEN, B.C. (1977). "Some Applications of Plastic Analysis to Plain and Reinforced Concrete", Technical University of Denmark, Institute of Building Design, No 123 (1977), p. 119.
- JENSEN, J.F. (1979). "Plastic Solutions for Reinforced Concrete Beams in Shear", IABSE-Colloquium "Plasticity in Reinforced Concrete", Copenhagen 1979, Final Report, IABSE Vol. 29, Zürich (1979), 71-78.
- v. KÁRMÁN, Th. (1911). "Festigkeitsversuche unter allseitigem Druck", Zeitschr. Ver. Dt. Ing. 55 (1911), 1749-1757.
- KAUFMANN, J. und MENN, C. (1976). "Versuche über Schub bei Querbiegung", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Bericht Nr. 7201-1, Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart (1976), p. 92.
- KOITER, W.T. (1953). "Stress-Strain Relations, Uniqueness and Variational Theorems for Elastic-Plastic Materials with a Singular Yield Surface", Quart. appl. Math. 11 (1953), 350-354.
- KUPFER, H. (1973). "Das Verhalten des Betons unter mehrachsiger Kurzzeitbelastung unter besonderer Berücksichtigung der zweiachsigen Beanspruchung", Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 229, W. Ernst Berlin (1973).
- KUPFER, H., HILSDORF, K.A. and RUESCH, H. (1969). "Behavior of Concrete under Biaxial Stresses", J. Am. Concrete Inst. 66 (1969), 656-666.
- LAMPERT, P. (1970). "Bruchwiderstand von Stahlbetonbalken unter Torsion und Biegung", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Bericht Nr. 26, Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart (1970), p. 189.
- LINK, J. (1976). "Eine Formulierung des zweiachsialen Verformungs- und Bruchverhaltens von Beton und deren Anwendung auf die wirklichkeitsnahe Berechnung von Stahlbetonplatten", Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 270, W. Ernst Berlin (1976), p. 119.
- LINK, J., MEHLHORN, G. und SCHAEFER, H. (1972). "Berechnung von dünnen Stahlbetonplatten bei Berücksichtigung eines wirklichkeitsnahen Werkstoffverhaltens", Forsch. ber. der Arbeitsgruppe Massivbau der Technischen Hochschule Darmstadt, Nr. 1 (1972).
- LINSE, D. (1978). "Lösung versuchstechnischer Fragen bei der Ermittlung des Festigkeits- und Verformungsverhaltens von Beton unter dreiachsiger Belastung", Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 292, W. Ernst Berlin (1978), p. 39.
- LUECHINGER, P. (1977). "Bruchwiderstand von Kastenträgern aus Stahlbeton unter Torsion, Biegung und Querkraft", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Bericht Nr. 69, Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart (1977), p. 107.

- MAIER, G. and DRUCKER, D.C. (1973). "Effects of Geometry Change on Essential Features of Inelastic Behavior", J. Eng. Mech. Div., ASCE, 99 (1973), 819-834.
- MAILLART, R. (1938). "Aktuelle Fragen des Eisenbetonbaues", Schweiz. Bauzeitg. 56 (1938), 1-5.
- MANDEL, J. (1942). "Equilibres par tranches planes des solides à la limite d'écoulement", Thèse, Louis Jean, Paris (1942).
- MARKOV, A.A. (1947). "Variationsprinzipien in der Plastizitätstheorie" (russisch), Prikladnaia Mat. Mech. 11 (1947), 339-350.
- MARTI, P. (1978 a). "Plastische Berechnungsmethoden", Vorlesungsautographie, Abt. für Bauingenieurwesen, ETH Zürich (1978), p. 89.
- MARTI, P. (1978 b). "Plastic Analysis of Reinforced Concrete Shear Walls", IABSE-Colloquium "Plasticity in Reinforced Concrete", Copenhagen 1979, Introductory Report, IABSE Vol. 28, Zürich (1978), 51-69.
- MARTI, P. und THUERLIMANN, B. (1977 a). "Fließbedingung für Stahlbeton mit Berücksichtigung der Betonzugfestigkeit", Beton- und Stahlbetonbau 72 (1977), 7-12.
- MARTI, P. und THUERLIMANN, B. (1977 b). "Shear Strength of Reinforced Concrete Walls with Transverse Bending", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich (1977), unveröffentlicht.
- MARTI, P., PRALONG, J. und THUERLIMANN, B. (1977). "Schubversuche an Stahlbeton-Platten", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Bericht Nr. 7305-2, Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart (1977), p. 123.
- MELAN, E. (1936). "Theorie statisch unbestimmter Systeme aus ideal-plastischem Baustoff", Sitz. ber. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa, 145 (1936), 195-218.
- MELAN, E. (1938 a). "Zur Plastizität des räumlichen Kontinuums", Ing.-Arch. 9 (1938), 116-126.
- MELAN, E. (1938 b). "Der Spannungszustand eines Mises-Henckyschen Kontinuums bei veränderlicher Belastung", Sitz. ber. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa, 147 (1938), 73-87.
- MENNE, B. (1977). "Zur Traglast der ausmittig gedrückten Stahlbetonstütze mit Umschnürrümpfbewehrung", Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 285, W. Ernst Berlin (1977), p. 56.
- v. MISES, R. (1913). "Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand", Göttinger Nachrichten, Math.-phys. Kl. (1913), 582-592.
- v. MISES, R. (1928). "Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen", Z. angew. Math. Mech. 8 (1928), 161-185.
- MOHR, O. (1882). "Ueber die Darstellung des Spannungszustandes und des Deformationszustandes eines Körperelementes und über die Anwendung derselben in der Festigkeitslehre", Civ. Ing. 28 (1882), 113-156.
- MOHR, O. (1900). "Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den Bruch eines Materials", Zeitschr. Ver. Dt. Ing. 44 (1900), 1524-1530 und 1572-1577; auch "Abhandlungen aus dem Gebiet der Technischen Mechanik" 1. Aufl. Berlin (1905), S. 187, und 2. Aufl. Berlin (1914), 192-235.
- MOOSECKER, W. (1979). "Zur Bemessung der Schubbewehrung von Stahlbetonbalken mit möglichst gleichmässiger Zuverlässigkeit", Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 307, W. Ernst Berlin (1979), p. 42.
- MORLEY, C.T. (1966). "On the Yield Criterion of an Orthogonally Reinforced Concrete Slab Element", J. Mech. Phys. Solids 14 (1966), 33-47.
- MOERSCH, E. "Der Eisenbetonbau - Seine Theorie und Anwendung", Verlag von Konrad Wittwer, Stuttgart, 3. Aufl. (1908), 4. Aufl. (1912), 5. Aufl. 1. Bd. 1. Hälfte (1920), 2. Hälfte (1922).
- MUELLER, P. (1976). "Failure Mechanisms for Reinforced Concrete Beams in Torsion and Bending", IVBH-Abhandlungen 36-II (1976), 147-163.
- MUELLER, P. (1978). "Plastische Berechnung von Stahlbetonscheiben und -balken", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Bericht Nr. 83, Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart (1978), p. 160.
- MUELLER, P. (1979). "Plastic Analysis of Torsion and Shear in Reinforced Concrete", IABSE-Colloquium "Plasticity in Reinforced Concrete", Copenhagen 1979, Final Report, IABSE Vol. 29, Zürich (1979), 103-110.
- NIELSEN, M.P. (1963). "Yield Conditions for Reinforced Concrete Shells in the Membrane State", Non-classical Shell Problems, Proc. IASS Symposium, Warsaw 1963. Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1030-1040.

- NIELSEN, M.P. (1964). "Limit Analysis of Reinforced Concrete Slabs", Acta Polytechnica Scandinavica, Civil Engineering and Building Construction Series No 26 (1964), p. 167.
- NIELSEN, M.P. (1971). "On the Strength of Reinforced Concrete Discs", Acta Polytechnica Scandinavica, Civil Engineering and Building Construction Series No 70 (1971), p. 261.
- NIELSEN, M.P. and BRAESTRUP, M.W. (1975). "Plastic Shear Strength of Reinforced Concrete Beams", Bygningstatiske Meddelelser 46 (1975), 61-99.
- NIELSEN, M.P., BRAESTRUP, M.W., JENSEN, B.C. and BACH, F. (1976). "Concrete Plasticity", Danish Society for Structural Science and Engineering. Special Publication. Preliminary manuscript; Structural Research Laboratory, Technical University of Denmark, Copenhagen (1976).
- NIELSEN, M.P., BRAESTRUP, M.W., JENSEN, B.C. and BACH, F. (1978). "Concrete Plasticity", Dansk Selskab for Bygningstatik, Specialpublikation (1978).
- PAULAY, T. (1969). "The Coupling of Shear Walls", Thesis, University of Canterbury, Christchurch, New Zealand (1969).
- PETER, J. (1964). "Zur Bewehrung von Scheiben und Schalen für Hauptspannungen schiefwinklig zur Bewehrungsrichtung", Dissertation, Technische Hochschule Stuttgart (1964).
- PRAGER, W. (1955). "Probleme der Plastizitätstheorie", Birkhäuser Basel und Stuttgart (1955).
- PRAGER, W. and SYMONDS, P.S. (1950). "Stress Analysis in Elastic-Plastic Structures", Proc. 3rd Symp. appl. Math. (Ann. Arbor, Mich., June 1949), Mc Graw Hill, New York (1950), 187-197.
- RADENKOVIĆ, D. (1961). "Théorèmes limites pour un matériau de Coulomb", C.R. Ac. Sc. Paris, 252 (1961), 4103-4104.
- RICHART, F.E., BRANDTZAEG, A. and BROWN, R.L. (1928). "A Study of the Failure of Concrete under Combined Compressive Stresses", Engineering Experiment Station, University of Illinois, Urbana, Bulletin No 185 (1928).
- RITTER, W. (1899). "Die Bauweise Hennebique", Schweiz. Bauzeitg. 17 (1899), 41-43, 49-52 und 59-61.
- ROSTAM, S. (1979). Summary of Discussion-Session 2, IABSE-Colloquium "Plasticity in Reinforced Concrete", Copenhagen 1979, Final Report, IABSE Vol. 29, Zürich (1979), 132-134.
- RZHANITZIN, A.R. (1949). "Probleme der Mechanik deformierbarer Systeme" (russisch), Moskau (1949); auch "Calcul à la rupture et plasticité des constructions", Eyrolles Paris (1959), Uebersetzung durch N.V. Sobarnitsky.
- SALENÇON, J. (1974). "Théorie de la plasticité pour les applications à la mécanique des sols", Editions Eyrolles, Paris (1974).
- SARGIN, M. (1971). "Stress-Strain Relationships for Concrete and the Analysis of Structural Concrete Sections", Solid Mech. Div., Univ. of Waterloo, Studies Series No 4 (1971).
- SAYIR, M. (1970). "Zur Fließbedingung der Plastizitätstheorie", Ing.-Arch. 39 (1970), 414-432.
- SAYIR, M. und ZIEGLER, H. (1969). "Der Verträglichkeitssatz der Plastizitätstheorie und seine Anwendung auf räumlich unstetige Felder", Z. angew. Math. Phys. 20 (1969), 78-93.
- SHIELD, R.T. (1955). "On Coulomb's Law of Failure in Soils", J. Mech. Phys. Solids 4 (1955), 10-16.
- SIA 162 (1968). "Norm für die Berechnung, Konstruktion und Ausführung von Bauwerken aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton", Schweiz. Ingenieur- und Architekten-Verein, Zürich (1968).
- SIA 162, Richtlinie 34 (1976). "Bruchwiderstand und Bemessung von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken", Schweiz. Ingenieur- und Architekten-Verein, Zürich (1976).
- SYMONDS, P.S. (1951). "Shake-Down in Continuous Media", J. appl. Mech. 18 (1951), 85-89.
- SCHAEFER, H., LINK J. und MEHLHORN, G. (1975). "Zur wirklichkeitsnahen Berechnung von Stahlbetonplatten mit der Finite-Element-Methode", Beton- und Stahlbetonbau 70 (1975), 265-273.
- SCHICKERT, G. und WINKLER, H. (1977). "Versuchsergebnisse zur Festigkeit und Verformung von Beton bei mehraxialer Druckbeanspruchung", Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 277, W. Ernst Berlin (1977).
- THOMSON, W. and TAIT, P.G. (1883). "Treatise on Natural Philosophy", Vol. 1, Part 2, Cambridge University Press (1883).

THUERLIMANN, B. (1977). "Schubbemessung bei Querbiegung", Schweiz. Bauzeitung 95 (1977), 478-481.

THUERLIMANN, B., GROB, J. und LUECHINGER, P. (1975). "Torsion, Biegung und Schub in Stahlbetonträgern", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Autographie zu Fortbildungskurs für Bauingenieure aus der Praxis (1975).

TRESCA, H. (1868). "Mémoire sur l'écoulement des corps solides", Mém. prés. p. div. Savants à l'Académie des Sciences, 18 (1868), 733-799.

WALRAVEN, J.C. (1978). "Mechanisms of Shear Transfer in Cracks in Concrete - A Survey of Literature", Stevin Laboratory Univ. of Technology, Delft, Report 5-78-12 (1978).

ZIEGLER, H. (1960 a). "Bemerkung zu einem Hauptachsenproblem in der Plastizitätstheorie", Z. angew. Math. Phys. 11 (1960), 157.

ZIEGLER, H. (1960 b). "Ueber den Zusammenhang zwischen der Fliessbedingung eines starrplastischen Körpers und seinem Fliessgesetz", Z. angew. Math. Phys. 11 (1960), 413-426.

ZIEGLER, H. (1961 a). "Ueber den Zusammenhang zwischen der Fliessbedingung eines elastischplastischen Körpers und seinem Fliessgesetz", Z. angew. Math. Phys. 12 (1961), 53-68.

ZIEGLER, H. (1961 b). "On the Theory of the Plastic Potential", Quart. Appl. Math. 19 (1961), 39-44.

ZIEGLER, H. (1969). "Zum plastischen Potential in der Bodenmechanik", Z. angew. Math. Phys. 20 (1969), 659-675.

ZIEGLER, H. (1970 a). "Plastizität ohne Thermodynamik", Z. angew. Math. Phys. 21 (1970), 798-805.

ZIEGLER, H. (1970 b). "Proof of an Orthogonality Principle in Irreversible Thermodynamics", Z. angew. Math. Phys. 21 (1970), 853-863.

ZIEGLER, H. (1972). "Thermomechanics", Quart. Appl. Math. 30 (1972), 91-107.

ZIEGLER, H., NAENNI, J. und WEHRLI, C. (1973). "Zur Konvexität der Fliessfläche", Z. angew. Math. Phys. 24 (1973), 140-144.

ZIEGLER, H. (1974). "Eine neue Begründung des Orthogonalitätsprinzips", Ing.-Archiv 43 (1974), 381-394.