

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Institut für Baustatik und Konstruktion
Dr. Thomas Jäger

Stahlbeton III

Inhalt

1. Einleitung	1
2. Grundlagen Plastizitätstheorie	2 - 10
3. Scheiben	11 - 50
4. Platten	51 - 118
5. Vorspannung	119 - 153
6. Anwendungsbeispiel	154 - 164

Zürich, Oktober 2009

1. Einleitung

Die Vorlesung "Stahlbeton III" befasst sich mit der Vertiefung der Bemessungsmethoden für Stahlbetontragwerke. Auf der Grundlage der Plastizitätstheorie werden die für den Nachweis der Tragsicherheit zur Verfügung stehenden statischen und kinematischen Verfahren eingehend diskutiert. Im Vordergrund steht dabei die Behandlung von Scheiben und Platten, wobei aber auch dem Verformungsverhalten sowie der konstruktiven Durchbildung der Bewehrung die erforderliche Beachtung geschenkt wird. Abschliessend werden die Bemessungsmethoden von schlaff bewehrten Tragelementen auf vorgespannte Bauteile erweitert. Im weiteren soll das vermittelte theoretische Grundlagenwissen einen Bezug zu den Normvorschriften der Norm SIA 262 (Betonbau) ermöglichen.

Lernziele:

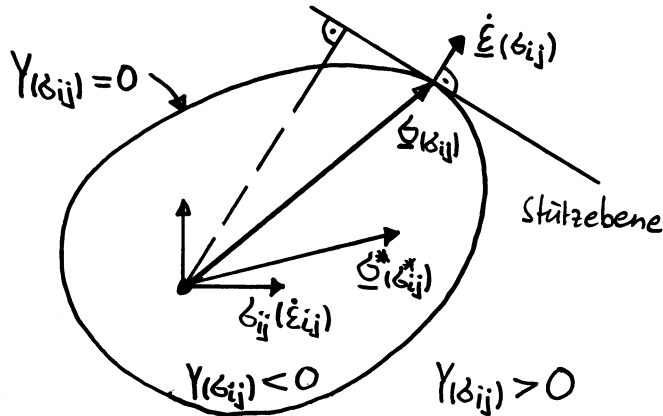
- Tragverhalten von Stahlbetontragwerken verstehen
- Sichere Anwendung der verschiedenen Berechnungsverfahren
- Zugang zur Fachliteratur eröffnen

Literatur:

- Tragwerkshormen SIA 260/261/262 (2003)
- Marti, P., et al., "Tragverhalten von Stahlbeton", IBK Publikation SP-008, 1999
- Muttoni, A., Schwartz, J., und Thürlimann, B., "Bemessung von Betontragwerken mit Spannungsfeldern", Birkhäuser Verlag, 1997

2. Grundlagen Plastizitätstheorie

2.1. Theorie des plastischen Potentials



$\dot{\epsilon}_{ij}$ = plastisches Verzerrungszinkrement

$\underline{\sigma}_{ij}$ = zugehöriger Spannungszustand

$\underline{\sigma}_{ij}^*$ = beliebiger Spannungszustand
an oder unter der Fließfläche

Fließfunktion $Y(G_{ij})$

Fließfläche $Y(G_{ij}) = 0$

Beliebige Spannungszustände G_{ij} , welche ohne plastische Verformungen erreicht werden können, bilden den aplastischen Bereich $Y(G_{ij}) < 0$. Dieser Bereich wird durch die Fließfläche begrenzt, welche durch die Fließbedingung $Y(G_{ij}) = 0$ bestimmt ist.

Die Theorie des plastischen Potentials folgt aus dem Postulat vom Prinzip der maximalen Dissipationsarbeit. Danach stellt sich der tatsächliche Spannungszustand G_{ij} bei einem vorgegebenen plastischen Verzerrungszinkrement $\dot{\epsilon}_{ij}$ so ein, dass die elementare Dissipationsarbeit

$$dD = \underline{\sigma}_{ij}^* \cdot \dot{\epsilon}_{ij} \quad [J/m^3 = N/m^2 = Pa]$$

maximal wird, wobei die Fließbedingung $Y(G_{ij}^*) = 0$ eine Nebenbedingung darstellt. Nach der Lagrangeschen Multiplikatorenmethode (Extremwert mit Nebenbedingung) erhält man

$$\delta \delta_{ij}^* (\sigma_{ke}^* \cdot \dot{\epsilon}_{ke} - \lambda Y(\sigma_{ke}^*)) = 0$$

wobei $\lambda \geq 0$.

Das zugeordnete Fließgesetz ergibt sich zu

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial Y(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{bez.} \quad \underline{\dot{\epsilon}} = \lambda \text{ grad } Y(\sigma_{ij}), \quad \lambda \geq 0$$

Die Fließfläche ist demnach konvex und die plastischen Verzerrungszinkremente stehen orthogonal auf der Fließfläche.

Setzt man im Gegensatz die Konvexität der Fließfläche und die Orthogonalität der plastischen Verzerrungszinkremente als Postulat voraus, so ergibt sich das Prinzip der maximalen Dissipationsarbeit

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \cdot \dot{\epsilon}_{ij} \geq 0 \quad \text{bez.} \quad (\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^*) \cdot \underline{\dot{\epsilon}} \geq 0$$

als Folgerung.

2.2. Grenzwertsätze

Für die Untersuchung von gesamten Systemen kann die Theorie des plastischen Potentials durch Integration der lokalen Größen zu sogenannten verallgemeinerten Spannungen und Verformungen erweitert werden.

Nach dem Prinzip der virtuellen Arbeiten gilt für die zu Vektoren zusammengefassten verallgemeinerten Größen

$$\underline{E} \cdot \underline{\dot{u}} - \underline{\sigma} \cdot \underline{\dot{\epsilon}} = 0$$

Statisch zulässiger Spannungszustand mit verallgemeinerten Lasten \underline{E} und verallgemeinerten Spannungen $\underline{\sigma}$.

Kinematisch zulässiger Verschiebungszustand mit verallgemeinerten Verschiebungen $\underline{\dot{u}}$ und verallgemeinerten Verformungen $\underline{\dot{\epsilon}}$.

Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeiten und der Theorie des plastischen Potentials führt zu den Grenzwertsätzen.

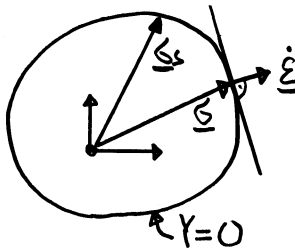
2.2.1. Statischer Grenzwertsatz (unterer Grenzwert)

Jede Belastung F_s , zu welcher ein stabiler statisch zulässiger Spannungszustand angegeben werden kann, liegt nicht höher als die Traglast F_u .

Beweis: wirklicher Verschiebungszustand $(\dot{u}, \dot{\epsilon})$

wirklicher Spannungszustand $(F_u E, \underline{\sigma})$

beliebiger, statisch zulässiger Spannungszustand $(F_s E, \underline{\sigma}_s)$



$$F_u E \cdot \dot{u} - \underline{\sigma} \cdot \dot{\epsilon} = 0$$

$$F_s E \cdot \dot{u} - \underline{\sigma}_s \cdot \dot{\epsilon} = 0$$

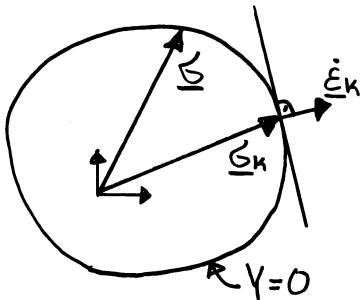
$$\rightarrow (F_u - F_s) \underbrace{E \cdot \dot{u}}_{>0} = \underbrace{(\underline{\sigma} - \underline{\sigma}_s) \cdot \dot{\epsilon}}_{\geq 0} \Rightarrow \underline{\underline{F_s \leq F_u}}$$

2.2.2. Kinematischer Grenzwertsatz (oberer Grenzwert)

Jede Belastung F_k , zu welcher ein instabiler kinematisch zulässiger Verschiebungszustand angegeben werden kann, liegt nicht tiefer als die Traglast F_u .

Beweis: kinematisch zulässiger Verschiebungszustand $(\dot{u}_k, \dot{\epsilon}_k)$

wirklicher Spannungszustand $(F_u E, \underline{\sigma})$



$$F_u E \cdot \dot{u}_k - \underline{\sigma} \cdot \dot{\epsilon}_k = 0$$

$$\underline{\sigma} \cdot \dot{\epsilon}_k \leq \underline{\sigma}_k \cdot \dot{\epsilon}_k = D(\dot{\epsilon}_k) = F_k E \cdot \dot{u}_k$$

wobei $F_k E \cdot \dot{u}_k$ der Arbeit der äußeren Kräfte beim betrachteten kinematisch

zulässigen Verformungszustand entspricht.

$$\rightarrow (F_k - F_u) \underbrace{E \cdot \dot{u}_k}_{>0} = \underbrace{(\underline{\sigma}_k - \underline{\sigma}) \cdot \dot{\epsilon}_k}_{\geq 0} \Rightarrow \underline{\underline{F_k \geq F_u}}$$

2.2.3. Verträglichkeitssatz

Jeder statisch zulässige Spannungszustand, welcher mit einem instabilen kinematisch zulässigen Verschiebungszustand verträglich ist, ist stabil. Die zugehörige Belastung entspricht der exakten Traglast F_u .

2.2.4. Statische und kinematische Methoden

Bei praktischen Problemstellungen ist es nicht immer möglich, dass eine vollständige Lösung, $F_s = F_k = F_u$, angegeben werden kann. Die Traglastverfahren beruhen auf der Einschränkung $F_s \leq F_u \leq F_k$ der Traglast.

a) Statische Methoden

Untersuchung verschiedener möglicher Gleichgewichtszustände, unabhängig von kinematischen Betrachtungen.

↳ Eignet sich für die Bemessung, da an jeder Stelle des Tragwerks eine Aussage über erforderliche Tragwiderstände gemacht werden kann.

↳ Erlaubt eine konsequente Verfolgung des Kraftflusses und ermöglicht somit eine konstruktive Durchbildung der Bauteile.

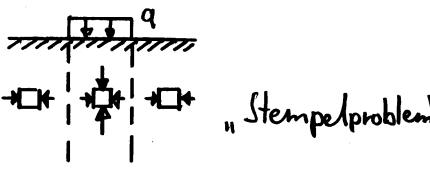
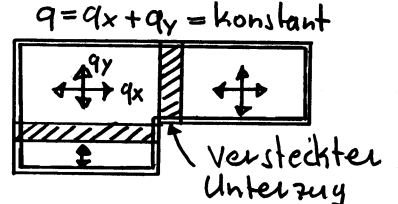
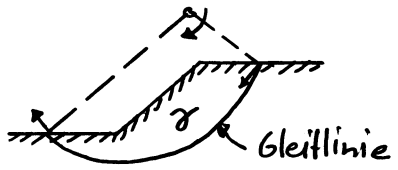
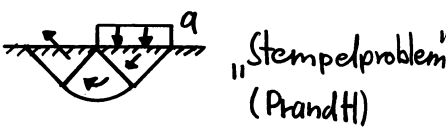
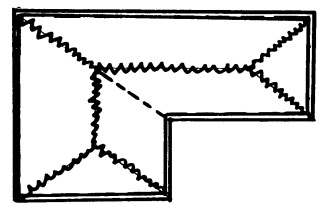
b) Kinematische Methoden

Untersuchung verschiedener möglicher Bruchmechanismen, unabhängig von Betrachtungen des Kraftflusses.

↳ Eignet sich für die Überprüfung bestehender Tragwerke.

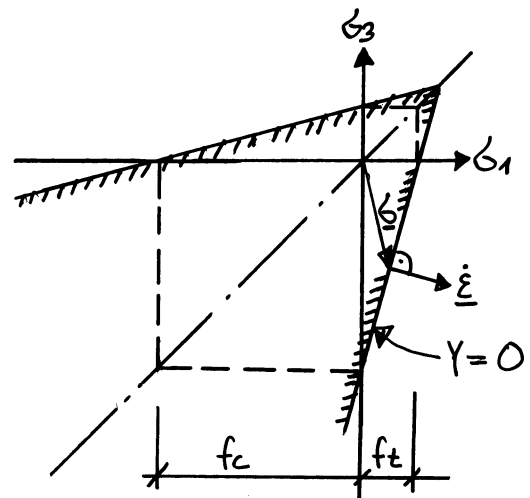
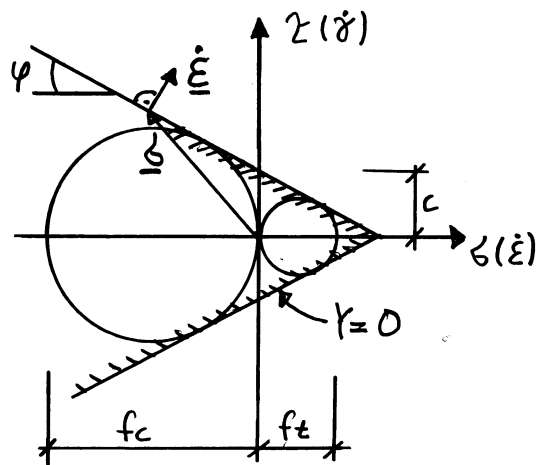
- ↳ Tragwiderstände werden nur an Stellen mit plastischen Verformungen berücksichtigt.
- ↳ Spannungszustände in starren Bereichen ist nicht eindeutig bestimmt.
- ↳ Hinsichtlich Bemessung geringere Aussagekraft als statische Methode.
- ↳ Im Allgemeinen geringerer Aufwand als bei Anwendung der statischen Methode.

c) Anwendung

Methode der Plastizitätstheorie	Scheiben	Platten
statisch	<ul style="list-style-type: none"> • diskontinuierliche Spannungsfelder (Fachwerkmodelle)  <p>„Stempelproblem“</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Ansatzfunktionen für Momente • Streifenmethode $q = q_x + q_y = \text{konstant}$  <p>Versteckter Unterzug</p>
kinematisch	<ul style="list-style-type: none"> • Gleitlinienverfahren  <p>Gleitlinie</p>  <p>„Stempelproblem“ (Prandtl)</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Fließgelenklinienmethode 

2.3. Fließbedingungen

2.3.1. Fließbedingung von Coulomb



Fließbedingung: $Y=0 = |\Sigma| + \sigma \cdot \tan \varphi - c$

$$Y=0 = \sigma_1(1 + \sin \varphi) - \sigma_3(1 - \sin \varphi) - 2c \cdot \cos \varphi \quad (\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3)$$

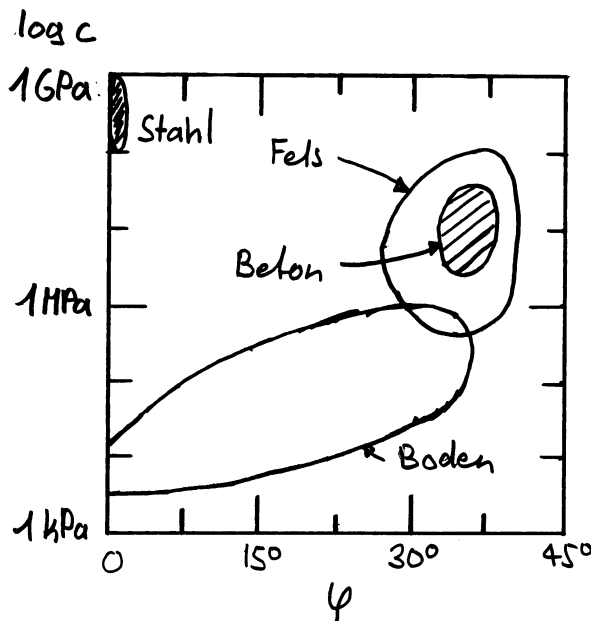
Die mittlere Hauptspannung σ_2 hat keinen Einfluss auf das Fließen. Für den Grenzfall $\varphi = 0$ tritt unter hydrostatischen Spannungszuständen $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ kein Fließen auf, während für $0 < \varphi \leq \pi/2$ auch hydrostatische Spannungszustände die Fließbedingung erfüllen.

Fließgrenzen unter einachsialer Beanspruchung:

$$f_c = \frac{2c \cdot \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}, \quad f_t = \frac{2c \cdot \cos \varphi}{1 + \sin \varphi}$$

Die Werte f_c und φ werden mittels Versuchen bestimmt. Für beliebige Betonorten zeigt sich, dass der Winkel der inneren Reibung einen nahezu konstanten Wert bei $\tan \varphi = 3/4$ aufweist und damit die Kohäsion $c = f_c/4$ resultiert.

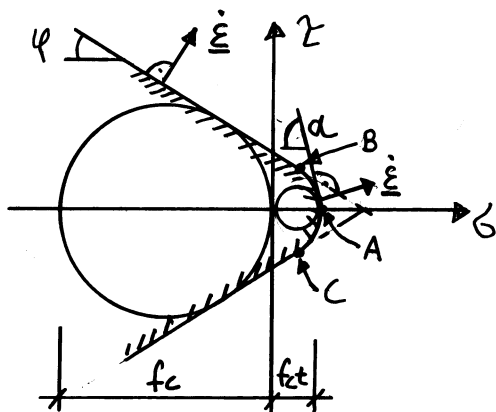
Stahl kann als ein Coulomb-Material mit verschwindendem Winkel der inneren Reibung $\varphi = 0$ und einer Kohäsion $c = f_c/2 = f_t/2$ aufgefasst werden. Der Grenzfall $\varphi = 0$ entspricht der Fließbedingung von Tresca.



Mit der Fließbedingung von Coulomb können verschiedene Materialien beschrieben werden.

2.3.2. Modifizierte Fließbedingung von Coulomb

Während die Fließbedingung von Coulomb bei druckbeanspruchtem Beton zuverlässige Aussagen liefert, führt die konsequente Anwendung zu einer Überschätzung der Betonzugfestigkeit. Mit der zusätzlichen Bedingung $\sigma \leq f_{ct}$ für die Zugfestigkeit des Betons resultiert die modifizierte Fließbedingung von Coulomb.



Die Modifikation führt zu einem abschliessenden Kreis BAC mit Durchmesser $f_{ct} - 2 \sin \varphi f_{ct} / (1 - \sin \varphi)$. Den entsprechenden Spannungspunkten auf der Fließfläche lassen sich Coulombsche Fließbedingungen

mit fiktiven Winkeln α der inneren Reibung und fiktiver Kohäsion $c(\alpha)$ zuordnen, wobei $\pi/2 \geq \alpha \geq \varphi$. Man spricht in diesem Fall auch von Mohrschen Hüllkurven, das heißt jedem Punkt auf der Fließfläche (Hüllkurve) lässt sich eine umschriebene Fließbedingung von Coulomb zuordnen.

Falls die Fließfläche sowohl einen hydrostatischen Zugspannungszustand als auch einen hydrostatischen Druckspannungszustand enthält, kann der fiktive innere Reibungswinkel die Werte $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$ annehmen. Mit dem fiktiven Reibungswinkel α und der fiktiven Kohäsion $c(\alpha)$ kann die Fließbedingung im Hauptspannungsraum mit der Beziehung

$$Y=0 = \sigma_1(1+\sin\alpha) - \sigma_3(1-\sin\alpha) - 2c(\alpha)\cos\alpha \quad (\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3)$$

ausgedrückt werden. Mit dem zugeordneten Fließgesetz folgt

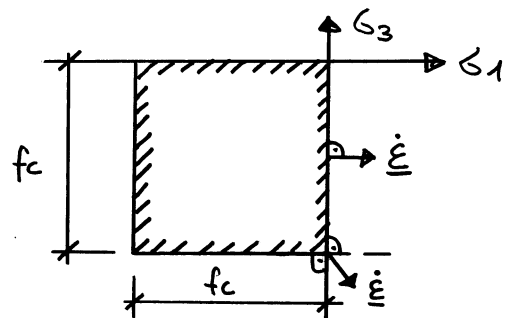
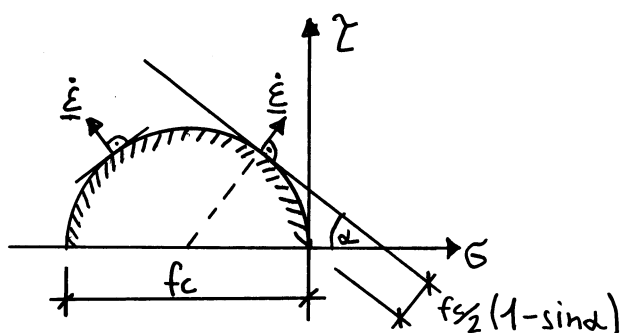
$$\dot{\epsilon}_1 = \lambda(1+\sin\alpha), \quad \dot{\epsilon}_3 = -\lambda(1-\sin\alpha), \quad \dot{\epsilon}_2 = 0$$

Für Spannungspunkte, welche die Fließbedingung erfüllen, herrscht ein ebener Fließzustand. Die elementare Dissipationsarbeit beträgt

$$dD = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \lambda [\sigma_1(1+\sin\alpha) - \sigma_3(1-\sin\alpha)]$$

2.3.3. Quadratische Fließbedingung

Im ebenen Spannungszustand und unter Vernachlässigung der effektiven Zugfestigkeit f_{ct} resultiert die quadratische Fließbedingung $-f_c \leq \sigma \leq 0$.



Jedem Spannungspunkt auf der Fließfläche lässt sich eine Fließbedingung von Coulomb mit fiktivem Reibungswinkel α und fiktiver Kohäsion $c(\alpha)$ zuordnen. Mit den massgebenden Hauptspannungen $\sigma_1 = 0$ und $\sigma_3 = -f_c$ folgt die spezifische Dissipationsarbeit

$$dD = \lambda f_c (1 - \sin\alpha)$$

2.4. Anwendungsbeispiele Traglastverfahren

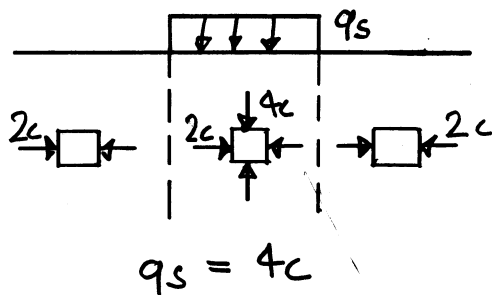
Mit den folgenden Beispielen soll die Anwendung des unteren und oberen Grenzwertsatzes beziehungsweise die Eingrenzung der Traglast aufgezeigt werden.

2.4.1. Stempelproblem (Prandtl)

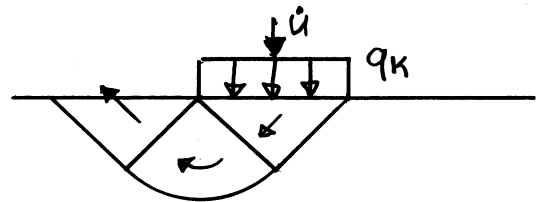
Voraussetzung: Rein kohäsives Material $\rightarrow f_c = 2c, \varphi = 0$

Unterer Grenzwert:

Oberer Grenzwert:



$$q_s = 4c$$



$$q_k = (2 + \pi)c = 5,14c$$

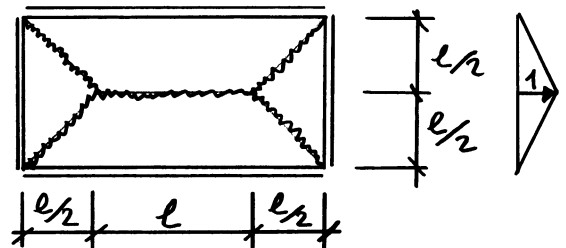
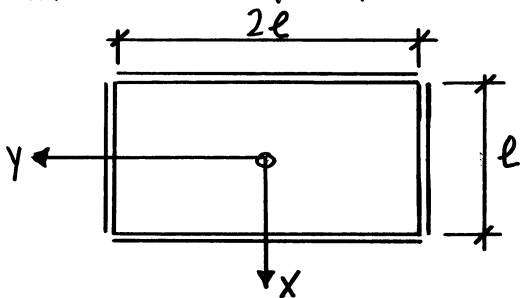
\rightarrow Traglast: $4c \leq q_u \leq 5,14c$

2.4.2. Frei aufgelegte Rechteckplatte unter verteilter Flächenlast

Voraussetzung: Orthotrope Biegesteifigkeiten $\rightarrow m_{xu} = 2m_{yu}$

Unterer Grenzwert:

Oberer Grenzwert:

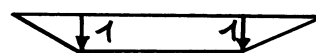


$$m_x = m_{xu} \left(1 - \frac{4x^2}{l^2}\right) \rightarrow q_x = \frac{8m_{xu}}{l^2}$$

$$m_y = m_{yu} \left(1 - \frac{y^2}{l^2}\right) \rightarrow q_y = \frac{m_{xu}}{l^2}$$

$$m_{xy} = 0 \rightarrow q_{xy} = 0$$

$$q_s = q = q_x + q_y + q_{xy} = \frac{9m_{xu}}{l^2}$$



$$\left. \begin{aligned} D &= 10 m_{xu} \\ W_d &= \frac{5}{6} q l^2 \end{aligned} \right\} W_d = D$$

$$q_k = \frac{12 m_{xu}}{l^2}$$

\rightarrow Traglast: $9m_{xu}/l^2 \leq q_u \leq 12m_{xu}/l^2$

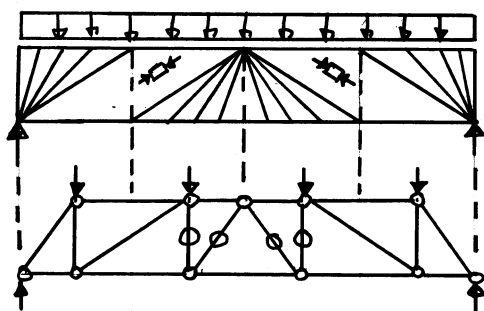
3. Scheiben

Scheiben nehmen in der Betonbauweise eine bedeutende Stellung ein. Neben der direkten Anwendung bei Wänden werden sowohl zusammengesetzte Querschnitte (Hohlkasten, offene Querschnitte) als auch Platten (Sandwichmodell) in Teilsysteme unterteilt, die als Scheiben betrachtet werden können.

3.1. Fachwerke und Spannungsfelder (Statische Methode)

Spannungsfelder und Fachwerkmodelle erlauben die konsequente Verfolgung des Kraftflusses. Jedem Spannungsfeld kann ein Fachwerkmodell zugeordnet werden; die Fachwerkstäbe entsprechen der Wirkungslinie der Spannungsergebnierenden des Spannungsfelds. Umgekehrt ist es nicht immer möglich, einem vorgegebenem Fachwerkmodell ein Spannungsfeld zuzuordnen.

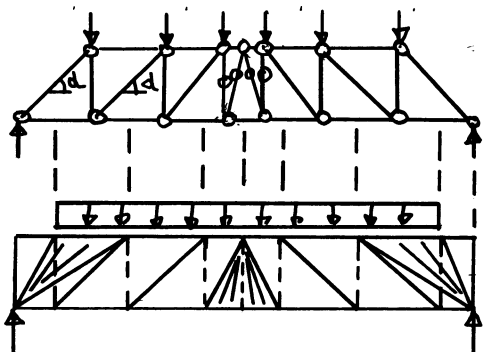
Beispiel: Einfacher Balken unter gleichmässig verteilter Linienlast



Spannungsfeld

Fachwerkmodell

Für das gewählte Spannungsfeld existiert genau ein Fachwerkmodell.



Fachwerkmodell

Spannungsfeld

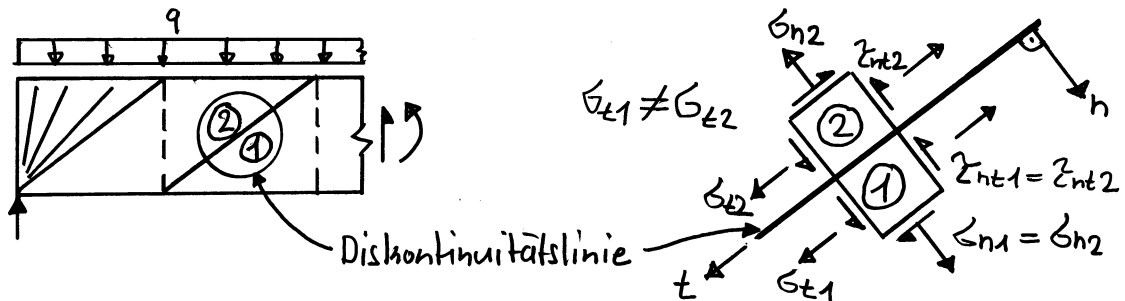
Dem gewählten Fachwerkmodell kann kein Spannungsfeld zugeordnet werden, das einem Balken entspricht.

unter gleichmässig verteilter Linienlast entspricht. Das Fachwerkmodell sollte in den Endbereichen mit einer Strebe ergänzt werden.

Für die Bemessung genügt in den meisten Fällen die Betrachtung von Fachwerkmodellen, wobei diese auf dem Hintergrund von Spannungsfeldern entwickelt werden sollten.

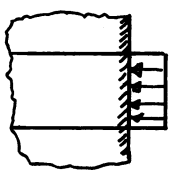
3.1.1. Spannungsdiskontinuitäten

Grundsätzlich können kontinuierliche und diskontinuierliche Spannungsfelder entwickelt werden. Für die praktische Anwendung eignen sich besonders diskontinuierliche Spannungsfelder.

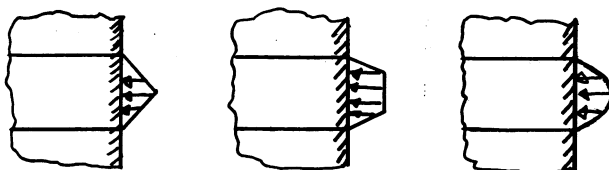


An der Diskontinuitätslinie kann nur die zur Diskontinuitätslinie parallele Spannungskomponente σ_t einen Sprung aufweisen, $\sigma_{t1} \neq \sigma_{t2}$. Aus Gleichgewichtsgründen müssen die Spannungskomponenten σ_n und τ_{nt} kontinuierlich verlaufen, das heißt $\sigma_{n1} = \sigma_{n2}$ beziehungsweise $\tau_{nt1} = \tau_{nt2}$. Die Annahme einer Diskontinuität ist nur unter der Annahme eines starr-ideal plastischen Materialgesetzes zulässig.

Lösungen ohne Spannungsdiskontinuität sind grundsätzlich auch möglich:



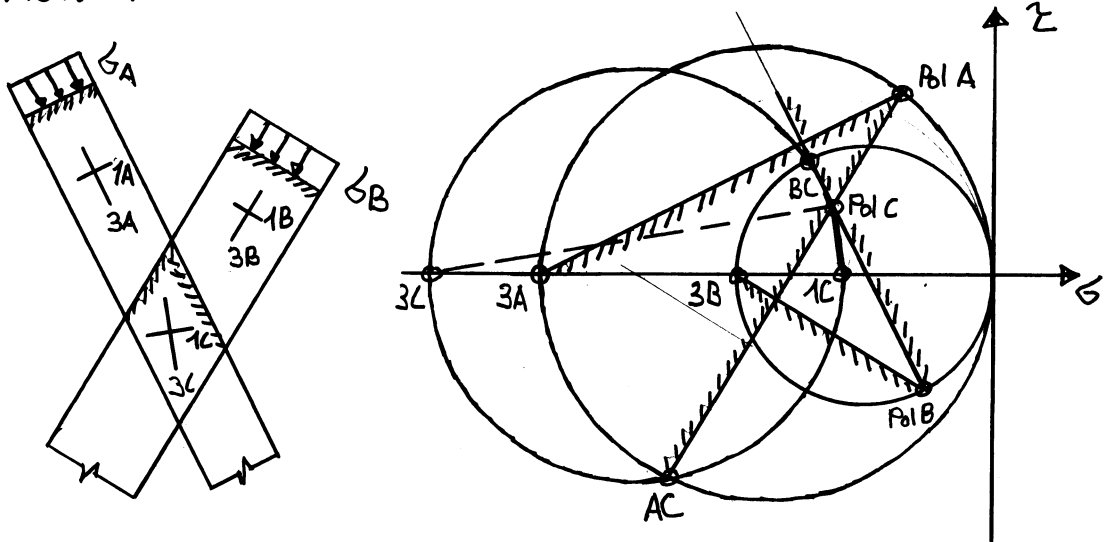
Diskontinuität



mögliche Lösungen ohne Diskontinuität

3.1.2. Knotenbereiche

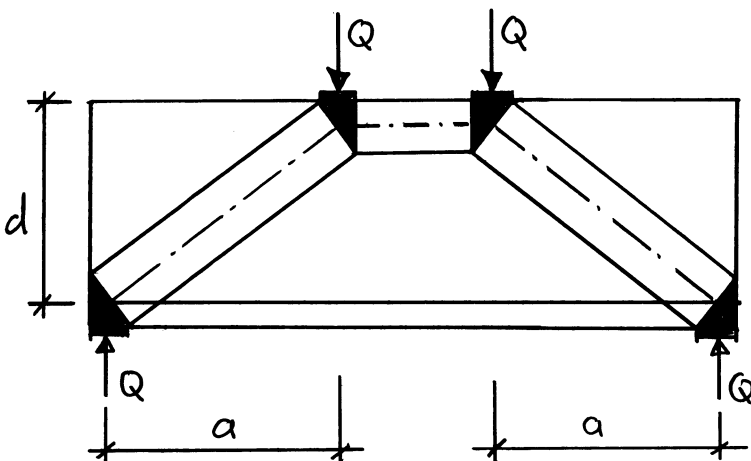
Der Spannungszustand in Knotenbereichen darf die Fließbedingung nicht verletzen.



Im Knoten C herrscht ein biaxialer Spannungszustand, der sich direkt aus den Mohrschen Spannungskreisen ergibt.

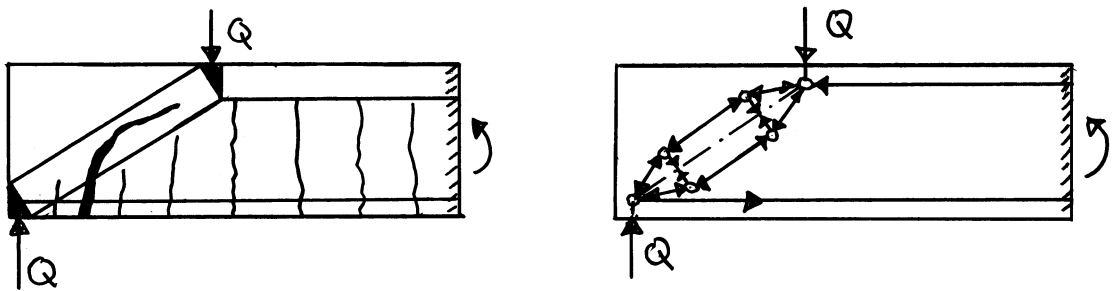
Die Wahl der effektiven Betondruckfestigkeit erfordert besondere Aufmerksamkeit, da diese aufgrund der in der Regel vorhandenen positiven Hauptdehnungen reduziert wird. Für Scheiben mit einem zu den Bewehrungsrichtungen geneigten Druckfeld beträgt der Reduktionsbeiwert in der Norm SIA 262 (4.2.1) $k_c = 0,6$.

3.1.3. Streben



Die Abmessungen der Druckstreben und Knoten ergeben sich aus der Annahme von der effektiven Betondruckfestigkeit. Die restlichen Bereiche der Scheibe sind spannungsfrei.

Das dargestellte Spannungsfeld ist gegenüber der Wirklichkeit stark idealisiert. Das Zugband wirkt wie eine Bewehrung ohne Verbund, das heißt die Zugkraft muss beim Trägerende voll verankert werden. Als Folge der Direktabstützung kann auf eine Querkraftbewehrung verzichtet werden. In Wirklichkeit führt die Verbundwirkung der Bewehrung zu einer Risssbildung, die mit zunehmender Belastung bis weit in die Druckstreben der Seitenbereiche vordringen. Die damit verbundene Ablenkung der Druckstreben führt bei Schubspannweitenverhältnissen $a/d \geq 1$ zu einer Reduktion der Traglast.



Weiter kann auch die Kraftausbreitung der Druckstrebe zu einer Risssbildung infolge der Spreizkräfte führen. Damit die Tragfähigkeit nicht durch Risse beeinträchtigt wird, sollte in jedem Fall eine ausreichende Mindestbewehrung von $\rho_{\min} = 0,1 \div 0,3\%$ angeordnet werden.

Für Balkenstege, welche einer schubbeanspruchten Scheibe entsprechen, schreibt die Norm SIA 262 (5.5.2.2.) einen minimalen Querkraftbewehrungsgehalt von $\rho_{\min} = 0,2\%$ vor.

Allgemeine Bemerkung zur Mindestbewehrung:

An die Mindestbewehrung werden die Anforderungen gestellt, dass ein Sprödbruch verhindert werden kann, ein ausreichendes

Verformungsvermögen sichergestellt ist und die Rissbreiten beschränkt werden. Damit ein Sprödbuch verhindert werden kann, darf die Bewehrung beim Erreichen der Risslast nicht reißen. Unter der Annahme einer mittleren Betonzugfestigkeit $f_{ct} \approx 3 \text{ N/mm}^2$ und einer Fließgrenze $f_{sy} = 500 \text{ N/mm}^2$ folgen Angaben zum Mindestbewehrungsgehalt für reinen Zug, Biegung und Querkraft.

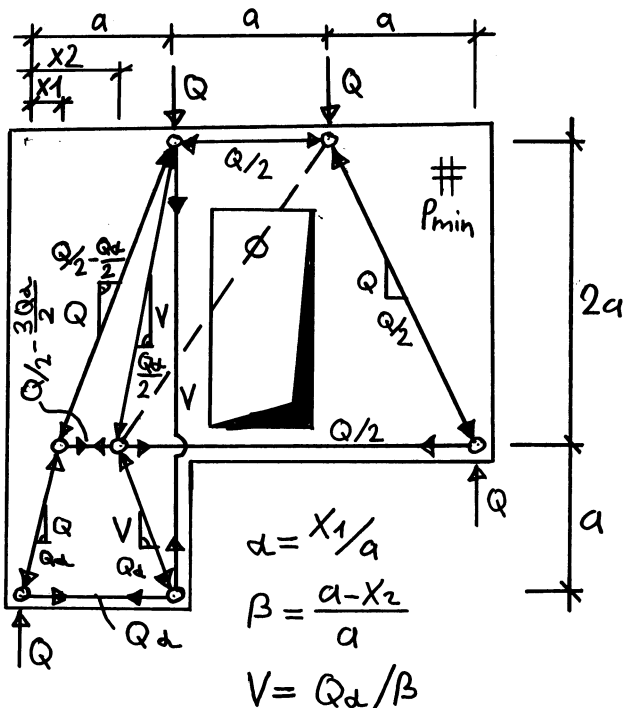
Reiner Zug: $p_{min} = f_{ct}/f_{sy} \approx 0,6\%$

Biegung: $p_{min} = 1/4 \cdot f_{ct}/f_{sy} \approx 0,15\%$

Querkraft: $p_{min} = 1/3 \cdot f_{ct}/f_{sy} \approx 0,2\%$

Betrachtet man einen Rechteckquerschnitt, so beträgt bei linear elastischem Materialverhalten und reiner Biegung die resultierende Zugkraft der Biegezugzone einem Viertel der Zugkraft bei reinem Zug. Aus Versuchen an Balken ohne Querkraftbewehrung ist bekannt, dass bis zu einer nominellen Schubspannung $\tau_c \approx f_{ct}/3$ keine Querkraftbewehrung erforderlich ist.

Beispiel: Scheibe mit Aussparung



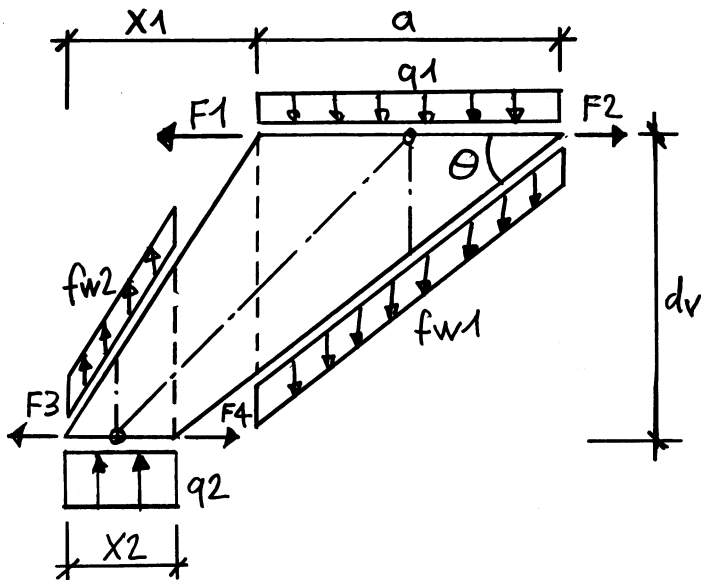
Mit der Variation von x_1 und x_2 kann die Aufhängebewehrung optimiert werden. Werte für $d > 0$ führen zu besseren Platzverhältnissen hinsichtlich der Verankerung der Zugstahlbewehrung.

$\alpha = 1/4, x_1 = x_2 \rightarrow \beta = 3/4$

$\hookrightarrow V = Q/3$

3.1.4. Fächer und parallele Druckfelder

Die Verfeinerung der Strebenmodelle führt zu Spannungsfeldern mit Fächern und parallelen Druckfeldern.

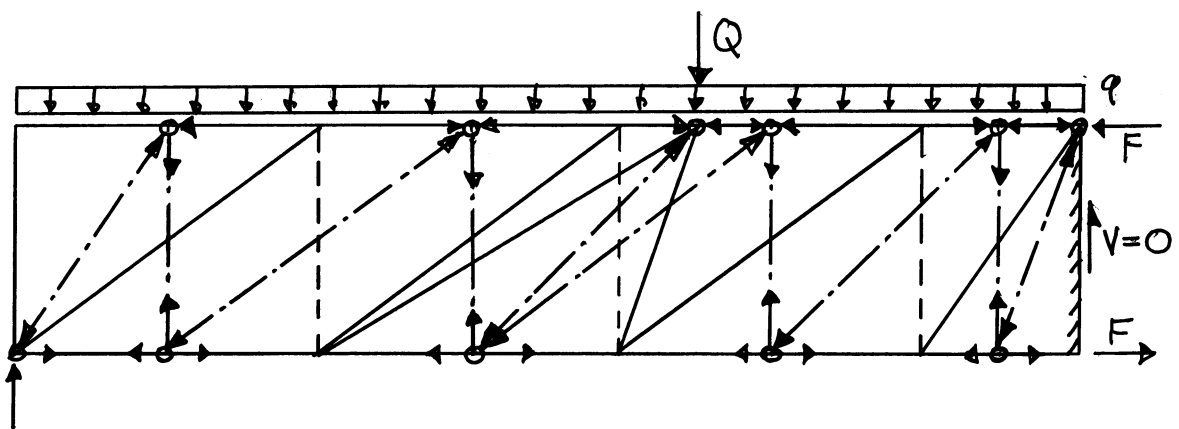


f_{w1} und f_{w2} entsprechen den Bügelkräften; q_1 und q_2 den äusseren Lasten; F_1 bis F_4 den Gurtkräften.

Spezialfälle:

- $X_2 = 0$: Konzentrierter Fächer
- $X_2 = a$: Paralleles Druckfeld

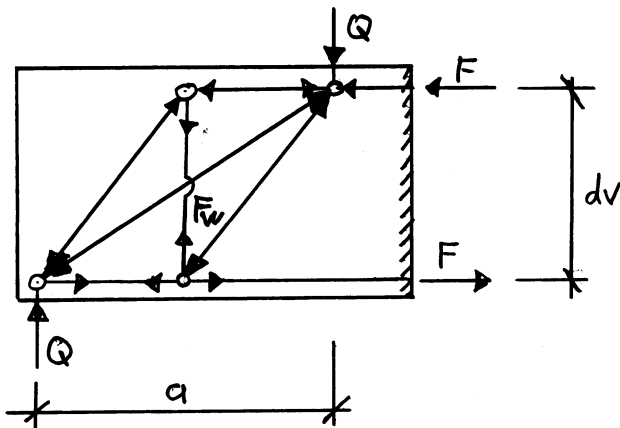
Mit konzentrierten Fächern können Einzelkräfte eingeleitet werden. Betrachtet man zum Beispiel einen Träger mit einer verteilten Linienlast und Einzelkräften, so können die konzentrierten Fächer der Einzelkräfteinleitungen den parallelen Druckfeldern überlagert werden.



Die den Spannungsfeldern zugeordneten Fachwerke sind nicht immer stabil; damit ein stabiles Fachwerkmodell resultiert, können Nullstäbe eingeführt werden.

3.1.5. Kombinierte Streben und Fächerwirkung

Bei konzentrierten Krafteinleitungen im Auflagerbereich und Schubspannweiten $dv/2 \leq a \leq 2dv$ kann mit einer kombinierten Streben und Fächerwirkung die erforderliche Bügelbewehrung bestimmt werden.



$$F_w = \frac{2a/dv - 1}{3} Q$$

$$a = dv/2 \rightarrow F_w = 0$$

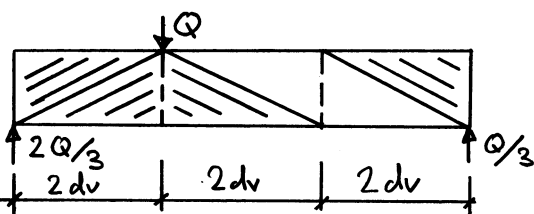
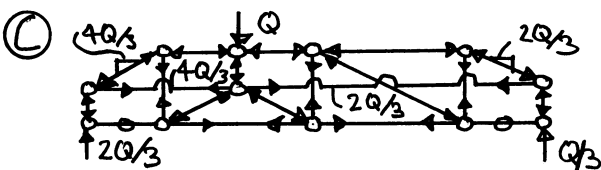
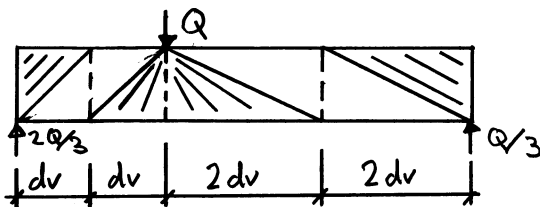
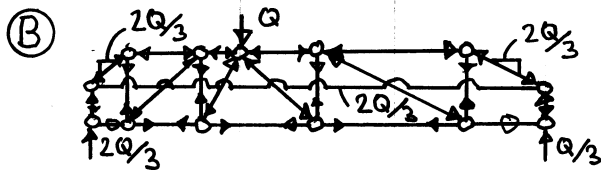
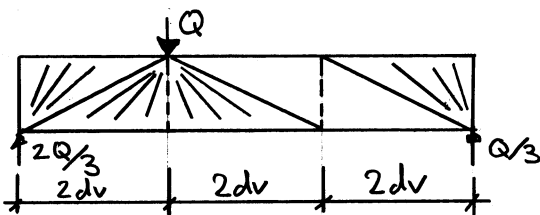
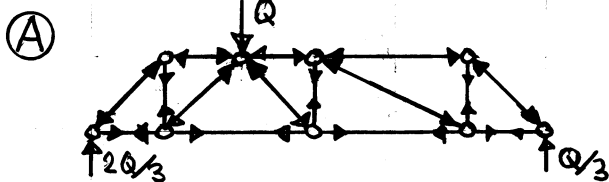
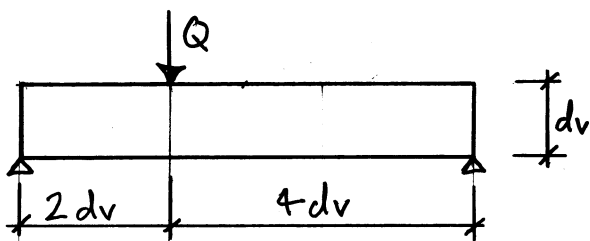
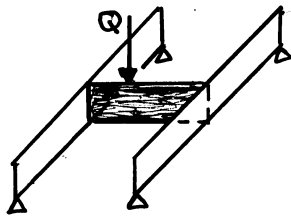
$$a = 2dv \rightarrow F_w = Q$$

3.1.6. Entwicklung von Spannungsfeldern und Fachwerken

In der Regel wird die Bewehrung orthogonal angeordnet; entsprechend wird versucht, Spannungsfelder und Fachwerke so zu entwickeln, dass Zug Elemente parallel zu den Bewehrungsrichtungen verlaufen.

Die von den Spannungsfeldern abgeleiteten Fachwerke müssen auf ihre Stabilität untersucht werden. Die Verwendung von parallelen Druckfeldern bei Trägerenden führt zu Fachwerken, denen besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden sollte. Im Allgemeinen stellt die Entwicklung der Spannungsfelder und Fachwerke einen Optimierungsprozess dar. Mit dem Beispiel der Scheibe auf Seite 15 kann dieser Optimierungsprozess studiert werden.

Im Folgenden werden für eine indirekt gelagerte Scherbe verschiedene Lösungen diskutiert.



Die Lösung Ⓐ sieht einen konzentrischen Fächer im Endbereich vor; das Fachwerk ist stabil. Nachteil dieser Lösung ist, dass für die Einleitung der Auflagerkräfte in die Längsträger eine konzentrische Aufhängebewehrung erforderlich ist.

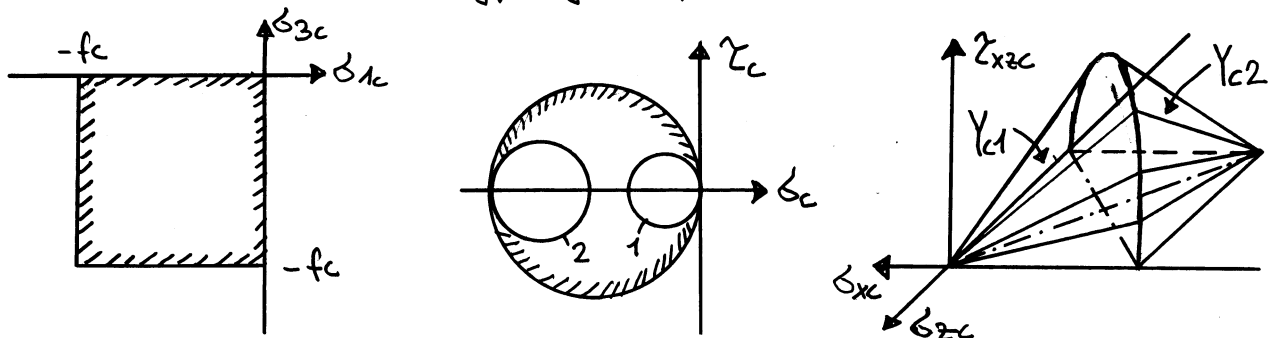
Die Lösungen Ⓑ und Ⓒ leiten die Auflagerkräfte kontinuierlich in die Längsträger ein. Die parallelen Druckfelder führen zu einer Längskraft im Trägersteg; dem entsprechenden Kraftfluss ist besondere Aufmerksamkeit zu schenken, da die dargestellten Fachwerke streng genommen instabil sind. Lösung Ⓑ ergibt eine konstante Längzugkraft über die Trägerlänge, während diese bei Lösung Ⓒ einen Sprung aufweist.

3.2. Fließbedingungen für Scheibenelemente

- Annahmen:
- Beton homogen, isotrop, starr-ideal plastisch
 - Bewehrungsstahl starr-ideal plastisch
 - starrer Verbund

3.2.1. Orthogonale Bewehrung

Für den Beton wird die quadratische Fließbedingung $-f_c \leq \sigma_c \leq 0$ mit verschwindender Zugfestigkeit $f_{ct} = 0$ verwendet.



Fließbedingungen: Fließfunktion 1 $\rightarrow \sigma_{xc} = 0, 0 \geq \sigma_{zc} \geq -f_c$

$$\sigma_{xc} = \frac{\sigma_{xc} + \sigma_{zc}}{2} + \frac{\sqrt{(\sigma_{xc} - \sigma_{zc})^2 + 4\tau_{xzc}^2}}{2} = 0$$

$$Y_{1c} = 0 = \tau_{xzc}^2 - \sigma_{xc} \sigma_{zc}$$

Fließfunktion 2 $\rightarrow 0 \geq \sigma_{xc} \geq -f_c, \sigma_{zc} = -f_c$

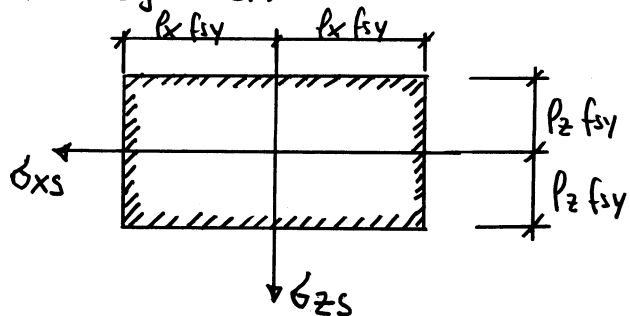
$$\sigma_{zc} = \frac{\sigma_{xc} + \sigma_{zc}}{2} - \frac{\sqrt{(\sigma_{xc} - \sigma_{zc})^2 + 4\tau_{xzc}^2}}{2} = -f_c$$

$$Y_{2c} = 0 = \tau_{xzc}^2 - (f_c + \sigma_{xc})(f_c + \sigma_{zc})$$

Die Fließbedingung für den Beton entspricht zwei elliptischen Kegeln. Dabei bezeichnet f_c die effektive Druckfestigkeit des Betons, welche vom Verzerrungszustand abhängt und bei der Bemessung entsprechend berücksichtigt werden sollte. Basierend auf Auswertungen von Schubversuchen

resultiert eine mittlere effektive Druckfestigkeit $f_c = 1,6 f_{cc}^{2/3}$, wobei f_{cc} der Zylinderdruckfestigkeit in N/mm^2 entspricht. Eine untere Grenze kann mit $f_c = 1,25 f_{cc}^{2/3}$ angegeben werden.

Für den einachsigen Spannungszustand werden die Fließbedingungen $- \rho_x f_{sy} \leq \sigma_{xs} \leq \rho_x f_{sy}$ und $- \rho_z f_{sy} \leq \sigma_{zs} \leq \rho_z f_{sy}$ vorausgesetzt.



Die Fließbedingung für den Bewehrungsstahl entspricht einer rechteckigen Fließfigur.

Die Linearkombination der einzelnen Fließfunktionen des Bewehrungsstahls und des Betons ergeben die Fließbedingungen des bewehrten Scheibenelements:

$$Y_1 = 0 = \chi_{xz}^2 - (\rho_x f_{sy} - \sigma_x)(\rho_z f_{sy} - \sigma_z)$$

$$Y_2 = 0 = \chi_{xz}^2 - (f_c - \rho_z f_{sy} + \sigma_z)(\rho_z f_{sy} - \sigma_z)$$

$$Y_3 = 0 = \chi_{xz}^2 - (\rho_x f_{sy} - \sigma_x)(f_c - \rho_x f_{sy} + \sigma_x)$$

$$Y_4 = 0 = \chi_{xz}^2 - f_c^2/4$$

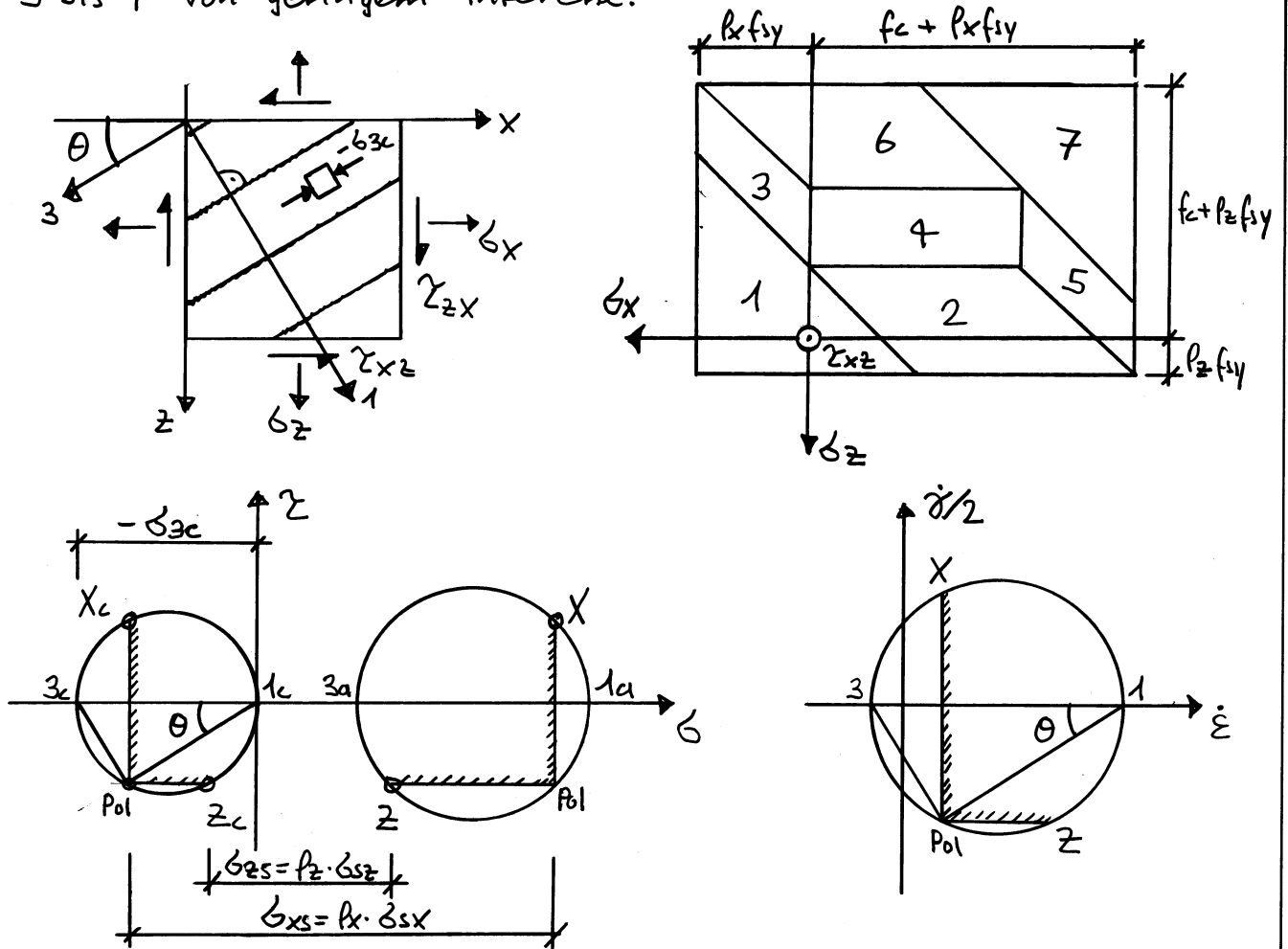
$$Y_5 = 0 = \chi_{xz}^2 + (\rho_x f_{sy} + \sigma_x)(f_c + \rho_x f_{sy} + \sigma_x)$$

$$Y_6 = 0 = \chi_{xz}^2 + (f_c + \rho_z f_{sy} + \sigma_z)(\rho_z f_{sy} + \sigma_z)$$

$$Y_7 = 0 = \chi_{xz}^2 - (f_c + \rho_x f_{sy} + \sigma_x)(f_c + \rho_z f_{sy} + \sigma_z)$$

Im Regime 1 fließen beide Bewehrungen, während der Beton die Druckfestigkeit nicht erreicht, $\sigma_{zc} > -f_c$. Bei den Regimes 2 und 3 bleibt jeweils eine Bewehrung elastisch, während die andere auf Zug fließt und der Beton bricht. Im Regime 4 bleiben beide Bewehrungen elastisch, während der Beton bricht.

Die Regimes 5 und 6 sind die zu den Regimes 2 und 3 entsprechenden Regimes, bei welcher jeweils eine Bewehrung auf Druck fließt. Im Regime 7 fließen beide Bewehrungen auf Druck. Für die praktische Anwendung sind die Regimes 5 bis 7 von geringem Interesse.



Die aufgebrachten Spannungen setzen sich aus Beton- und Stahlspannungskomponenten (Stahlbeton = Stahl + Beton) zusammen:

$$\sigma_x = \sigma_{xs} + \sigma_{xc}$$

$$\sigma_z = \sigma_{zs} + \sigma_{zc}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xzs} + \tau_{xzc} \rightarrow \tau_{xzs} = 0$$

Bei orthogonal bewehrten Scheiben wird die aufgebrachte Schubspannung nur vom Beton aufgenommen. Die maximale Schubspannung ist somit auf $\tau_{xz, \max} = f_c/2$ begrenzt.

Mit dem zugeordneten Fließgesetz folgen die plastischen Verzerrungszinkremente $\dot{\epsilon}_x = \lambda \frac{\partial Y}{\partial \sigma_x}$, $\dot{\epsilon}_z = \lambda \frac{\partial Y}{\partial \sigma_z}$ und $\dot{\gamma}_{xz} = 2 \dot{\epsilon}_{xz} = \lambda \frac{\partial Y}{\partial \tau_{xz}}$. Aufgrund der Transformationsbeziehungen resultiert die Bestimmungsgleichung

$$\cot \theta = \frac{\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_x}{\dot{\gamma}_{xz}} + \sqrt{\left(\frac{\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_x}{\dot{\gamma}_{xz}}\right)^2 + 1}$$

für die Neigung θ der Hauptdruckspannungsrichtung (Aufgrund der Annahme von homogenem und isotropem Materialverhalten des Betons, fallen die Hauptspannungsrichtungen des Betons mit den Hauptrichtungen der plastischen Verzerrungsrichtungen des Scheibenelements zusammen).

$$Y_1 = 0: \cot^2 \theta = (\rho_x f_{sy} - \sigma_x) / (\rho_z f_{sy} - \sigma_z)$$

$$Y_2 = 0: \cot^2 \theta = (f_c - \rho_z f_{sy} + \sigma_z) / (\rho_z f_{sy} - \sigma_z)$$

$$Y_3 = 0: \cot^2 \theta = (\rho_x f_{sy} - \sigma_x) / (f_c - \rho_x f_{sy} + \sigma_x)$$

$$Y_4 = 0: \cot^2 \theta = 1$$

$$Y_5 = 0: \cot^2 \theta = -(\rho_x f_{sy} + \sigma_x) / (f_c + \rho_x f_{sy} + \sigma_x)$$

$$Y_6 = 0: \cot^2 \theta = -(f_c + \rho_z f_{sy} + \sigma_z) / (\rho_z f_{sy} + \sigma_z)$$

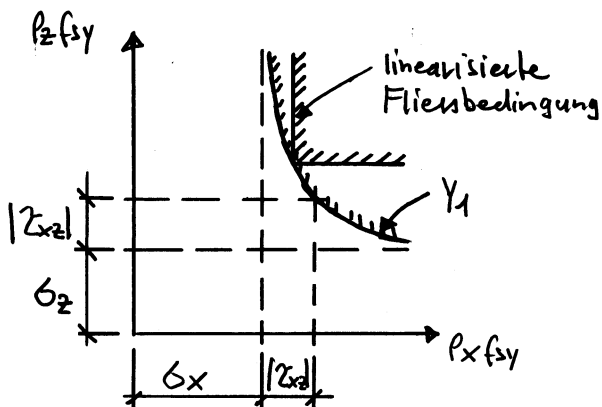
$$Y_7 = 0: \cot^2 \theta = (f_c + \rho_x f_{sy} + \sigma_x) / (f_c + \rho_z f_{sy} + \sigma_z)$$

Im Falle von positiven Schubspannungen, $\tau_{xz} > 0$, stellt sich die Neigung der Hauptdruckspannungsrichtung im Bereich $0 < \theta < \pi/2$ ein, während diese bei negativen Schubspannungen, $\tau_{xz} < 0$, im Bereich $-\pi/2 < \theta < 0$ liegt.

Für die praktische Anwendung ist vor allem das Regime 1 von grosser Bedeutung, da beide Bewehrungen fließen und somit

ein duktiler Bruchverhalten vorliegt. Für die Bemessung kann die Fließbedingung linearisiert werden:

$$\left. \begin{aligned} p_x f_{sy} &\geq \sigma_x + k |\tau_{xz}| \\ p_z f_{sy} &\geq \sigma_z + \frac{1}{k} |\tau_{xz}| \end{aligned} \right\} k = \cot \Theta$$



Der Wert k wird bei den gängigen Tragwerksnormen auf $0,5 \leq k \leq 2$ begrenzt. Damit auch ein Verhalten im Regime 1 erreicht werden kann, muss die Bedingung $f_c \geq p_x f_{sy} + p_z f_{sy} - (\sigma_x + \sigma_z)$

eingehalten werden, da sonst die Regimes 2 bis 4 massgebend werden.

$$\left. \begin{aligned} \text{Anwendung Regime 1: } \sigma_x &= p_x f_{sy} + \sigma_{xc} \\ \sigma_z &= p_z f_{sy} + \sigma_{zc} \\ \tau_{xz} &= \tau_{xzc} \end{aligned} \right\} 0 = \tau_{xzc}^2 - \sigma_{xc} \sigma_{zc}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \lambda (p_z f_{sy} - \sigma_z) \\ \dot{\epsilon}_z &= \lambda (p_x f_{sy} - \sigma_x) \\ \dot{\gamma}_{xz} &= \lambda \cdot 2 \tau_{xz} \end{aligned} \right\} \left(\frac{\dot{\gamma}_{xz}}{2} \right)^2 = \lambda^2 \tau_{xz}^2 = \lambda^2 (p_x f_{sy} - \sigma_x)(p_z f_{sy} - \sigma_z) = \dot{\epsilon}_x \dot{\epsilon}_z$$

$$\dot{\epsilon}_{1,3} = \frac{\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_z}{2} \pm \frac{\sqrt{(\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_z)^2 + \dot{\gamma}_{xz}^2}}{2} \left\{ \begin{aligned} \dot{\epsilon}_1 &= \dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_z \\ \dot{\epsilon}_3 &= 0 \end{aligned} \right.$$

Kontrolle der Annahmen: $\dot{\epsilon}_x \neq 0$, $\dot{\epsilon}_z \neq 0 \rightarrow$ Bewehrung fließt.

$$\dot{\epsilon}_3 = 0 \rightarrow \sigma_{zc} > -f_c$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Anwendung Regime 2: } \sigma_{zc} = -f_c = \sigma_{xc} + \sigma_{zc} \\ \sigma_z = \rho_z f_{sy} + \sigma_{zc} \\ \tau_{xz} = \tau_{xzc} \end{aligned} \right\} 0 = \tau_{xzc}^2 - \sigma_{xc} \sigma_{zc}$$

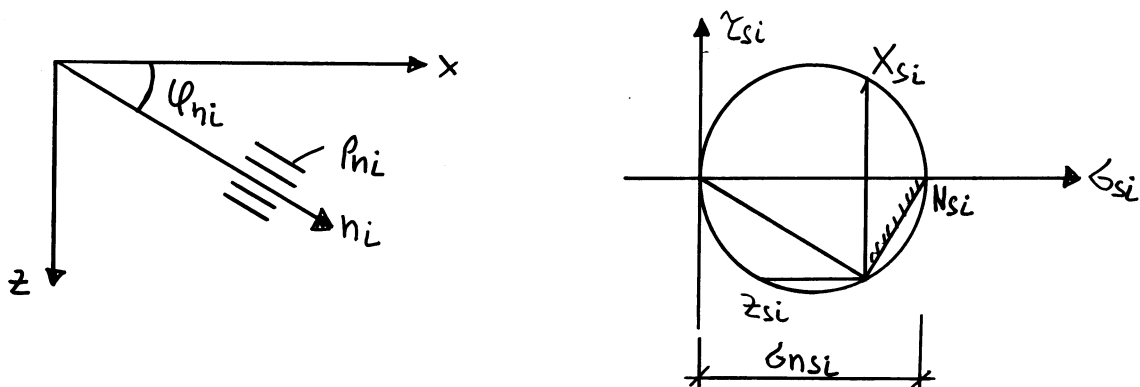
$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= 0 \\ \dot{\epsilon}_z &= \lambda (f_c + 2\sigma_z - 2\rho_z f_{sy}) \\ \dot{\gamma}_{xz} &= 2\tau_{xz} \end{aligned} \right\} \dot{\epsilon}_1 > 0, \quad \dot{\epsilon}_3 < 0$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Anwendung Regime 4: } \sigma_{zc} = -f_c = \sigma_{xc} + \sigma_{zc} \\ \tau_{xz}^2 = \tau_{xzc}^2 = \sigma_{xc} \sigma_{zc} \end{aligned} \right\} \tau_{xz, \max} = f_c/2$$

Für die Betonnormalspannungen gilt $\sigma_{xc} > \sigma_x - \rho_x f_{sy}$ und $\sigma_{zc} > \sigma_z - \rho_z f_{sy}$.

3.2.2. Schiefe Bewehrung

Die Überlegungen an orthogonal bewehrten Scheiben lassen sich auf schiefe Bewehrungslagen verallgemeinern. Wir betrachten eine Bewehrungsrichtung n_i , welche eine Neigung φ_{ni} gegenüber der x-Achse aufweist.



Bezüglich den globalen Koordinatenachsen folgen äquivalente Spannungen

$$\sigma_{xsi} = \sigma_{nsi} \cdot \cos^2 \varphi_{ni} = \rho_{ni} \cdot \sigma_{nsi} \cdot \cos^2 \varphi_{ni}$$

$$\sigma_{zsi} = \sigma_{nsi} \cdot \sin^2 \varphi_{ni} = \rho_{ni} \cdot \sigma_{nsi} \cdot \sin^2 \varphi_{ni}$$

$$\tau_{xzsi} = \sigma_{nsi} \cdot \sin \varphi_{ni} \cdot \cos \varphi_{ni} = \rho_{ni} \cdot \sigma_{nsi} \cdot \sin \varphi_{ni} \cdot \cos \varphi_{ni}$$

infolge der Bewehrung in der Richtung n_i . Durch Linearkombination der einzelnen Bewehrungslegen erhält man die fiktiven Stahlspannungen

$$\sigma_{xs} = \sum_{i=1}^n \sigma_{xs_i}$$

$$\sigma_{zs} = \sum_{i=1}^n \sigma_{zs_i}$$

$$\tau_{xzs} = \sum_{i=1}^n \tau_{xzs_i}$$

Welche analog zu orthogonal bewehrten Scheiben mit den Spannungsanteilen des Betons superponiert werden können.

Betrachtet man das Regime 1, bei welchem die Bewehrungen in allen Richtungen auf Zug fließen, $\sigma_{ns_i} = \rho_{n_i} \cdot f_{sy}$, so folgt die Fließbedingung

$$Y_1 = 0 = \left(f_{sy} \sum_{i=1}^n \rho_{n_i} \sin \varphi_{n_i} \cos \varphi_{n_i} - \tau_{xz} \right)^2 - \left(f_{sy} \sum_{i=1}^n \rho_{n_i} \cos^2 \varphi_{n_i} - \sigma_x \right) \cdot \left(f_{sy} \sum_{i=1}^n \rho_{n_i} \sin^2 \varphi_{n_i} - \sigma_z \right)$$

Die vollständige Fließfigur erhält man unter Berücksichtigung der einzelnen Regimes.

Beispiel: Schiefbewehrte Scheibe; Annahme dass beide Bewehrungen fließen (Regime 1); Fließgrenze $f_{sy} = 500 \text{ N/mm}^2$.

$$n_1: \rho_{n_1} = 2\%, \varphi_{n_1} = 0^\circ \rightarrow \sigma_{xs_1} = 10 \text{ N/mm}^2, \sigma_{zs_1} = \tau_{xzs_1} = 0$$

$$n_2: \rho_{n_2} = 1\%, \varphi_{n_2} = 60^\circ \rightarrow \sigma_{xs_2} = 1,25 \text{ N/mm}^2, \sigma_{zs_2} = 3,75 \text{ N/mm}^2, \tau_{xzs_2} = 2,17 \text{ N/mm}^2$$

$$Y_1 = 0 = (2,17 \text{ N/mm}^2 - \tau_{xz})^2 - (11,25 \text{ N/mm}^2 - \sigma_x) (3,75 \text{ N/mm}^2 - \sigma_z)$$

$$\sigma_x = \sigma_z = 0 \rightarrow \tau_{xz} = 2,17 \pm \sqrt{11,25 \cdot 3,75} \quad (\text{in N/mm}^2)$$

$$\tau_{xz} = 8,66 \text{ N/mm}^2, \theta = 30,0^\circ, \tau_{xzc} = 6,49 \text{ N/mm}^2 \left. \vphantom{\tau_{xz}} \right\} \sigma_{xc} = -11,25 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{xz} = -4,32 \text{ N/mm}^2, \theta = -30,0^\circ, \tau_{xzc} = -6,49 \text{ N/mm}^2 \left. \vphantom{\tau_{xz}} \right\} \sigma_{zc} = -3,75 \text{ N/mm}^2$$

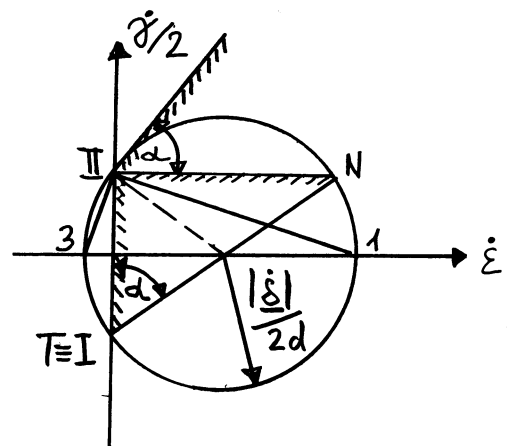
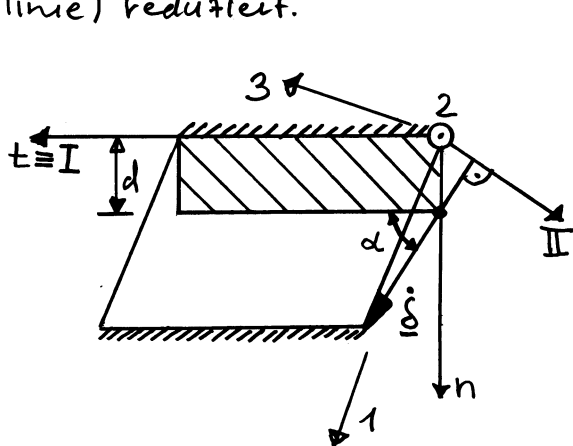
$$\rightarrow \sigma_{3c} = \sigma_{xc} + \sigma_{zc} = -15 \text{ N/mm}^2 \geq -f_c \quad (\text{Kontrolle Betonfestigkeit})$$

3.3. Bruchmechanismen (Kinematische Methode)

Spannungsfelder und Fachwerkmodellen stellen im Rahmen der Plastizitätstheorie einen unteren beziehungsweise statischen Grenzwert der Traglast dar. Sie eignen sich daher besonders für die Bemessung. Bei der Beurteilung des Tragwiderstands bestehender Tragwerke ist es oft schwierig, passende Spannungsfelder beziehungsweise Fachwerkmodelle zu entwickeln. Mit der Betrachtung von Bruchmechanismen können obere beziehungsweise kinematische Grenzwerte der Traglast gefunden werden. Dabei ermöglichen Bruchmechanismen mit geringem Rechenaufwand die Überprüfung von Abmessungen wichtiger Tragwerksteile, zum Beispiel bei der Vorbemessung der Betonabmessungen.

3.3.1. Kinematische Diskontinuität

Oft stellen sich diskrete Bruchflächen ein, welche sich im ebenen Fall zu einer Gleitlinie oder Bruchlinie (kinematische Diskontinuitätslinie) reduziert.



Wir betrachten eine Diskontinuitätslinie mit einer Schichtdicke d , in der sich der Verschiebungszustand stetig ändert; die angrenzenden Bereiche verhalten sich während des Bruchprozesses als starr Körper.

Der Verschiebungsvektor $\underline{\dot{\delta}}$ schließt mit der parallel zur Diskontinuitätslinie liegenden t -Achse den Winkel α ein. Innerhalb der Diskontinuität wird eine lineare Variation der Verschiebungen vorausgesetzt. Mit den Verschiebungskomponenten

$$\dot{u}_n = \frac{|\underline{\dot{\delta}}| n \cdot \sin \alpha}{d}, \quad \dot{u}_t = \frac{|\underline{\dot{\delta}}| n \cdot \cos \alpha}{d}$$

folgen die plastischen Verzerrungszinkremente

$$\dot{\epsilon}_n = \partial \dot{u}_n / \partial n = |\underline{\dot{\delta}}| \cdot \sin \alpha \cdot 1/d$$

$$\dot{\epsilon}_t = \partial \dot{u}_t / \partial t = 0$$

$$\dot{\gamma}_{nt} = \partial \dot{u}_n / \partial t + \partial \dot{u}_t / \partial n = |\underline{\dot{\delta}}| \cdot \cos \alpha \cdot 1/d$$

mit den entsprechenden Hauptverzerrungszinkrementen

$$\dot{\epsilon}_1 = \frac{|\underline{\dot{\delta}}|}{2d} (1 + \sin \alpha) \quad \text{und} \quad \dot{\epsilon}_3 = -\frac{|\underline{\dot{\delta}}|}{2d} (1 - \sin \alpha)$$

Für den Grenzfall einer verschwindenden Schichtdicke $d=0$ nehmen die Hauptverzerrungszinkremente $\dot{\epsilon}_1$ und $\dot{\epsilon}_3$ unendlich grosse Werte an, während $\dot{\epsilon}_2$ endlich bleibt beziehungsweise gegenüber $\dot{\epsilon}_1$ und $\dot{\epsilon}_3$ verschwindet. Die Richtungen I und II werden als charakteristische Richtungen bezeichnet, in denen ein Zustand reiner Schiebungen herrscht, und entsprechen möglichen Gleitlinien. Der Verschiebungsvektor steht orthogonal zur charakteristischen Richtung II. Weiter halbieren die Hauptrichtungen 1 und 3 die Winkel zwischen den charakteristischen Richtungen I und II. Bezüglich der Richtung der Gleitlinie muss das Dehnungszinkrement verschwinden, $\dot{\epsilon}_t = 0$.

Vergleicht man die Verzerrungszinkremente $\dot{\epsilon}_1$ und $\dot{\epsilon}_3$ mit den Hauptverzerrungszinkrementen der Fließbedingung von Coulomb

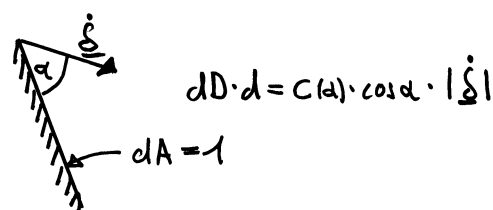
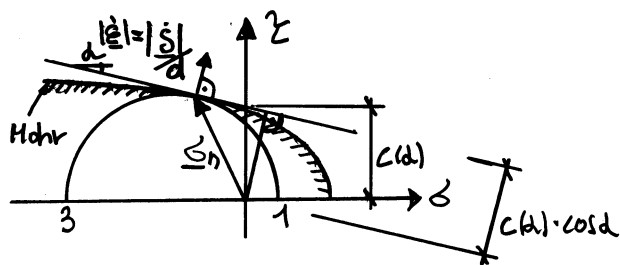
mit einem fiktiven Winkel α der inneren Reibung, so stellt man bis auf den Faktor λ eine Übereinstimmung fest (Kapitel 2.3). Demnach erfüllt eine modifizierte Fließbedingung von Coulomb die kinematischen Bedingungen. Die elementare Dissipationsarbeit beträgt

$$dD = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{|\dot{\underline{\sigma}}|}{2d} [\sigma_1(1+\sin\alpha) - \sigma_3(1-\sin\alpha)]$$

wobei $\lambda = \frac{|\dot{\underline{\sigma}}|}{2d}$. Integration über die Schichtdicke d sowie Berücksichtigung der Beziehung $[\sigma_1(1+\sin\alpha) - \sigma_3(1-\sin\alpha)] = 2c(\alpha)\cos\alpha$ liefert den Ausdruck

$$dD \cdot d = \frac{|\dot{\underline{\sigma}}|}{2} [\sigma_1(1+\sin\alpha) - \sigma_3(1-\sin\alpha)] = |\dot{\underline{\sigma}}| c(\alpha) \cdot \cos\alpha$$

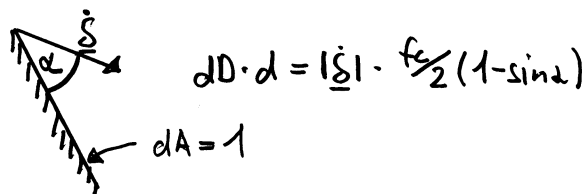
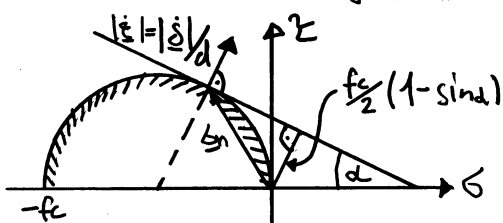
für die auf die Einheitsfläche bezogene spezifische Dissipationsarbeit.



Setzt man eine Fließbedingung von Coulomb mit innerem Reibungswinkel φ voraus, so sind nur Mechanismen verträglich, für die gilt $\alpha = \varphi$. Die Bedingung $\alpha = \varphi$ ist besonders für die Bodenmechanik interessant. Für den Beton kann im ebenen Spannungszustand die quadratische Fließbedingung verwendet werden. Mit $\sigma_1 = 0$ und $\sigma_3 = -f_c$ folgt die spezifische Dissipationsarbeit

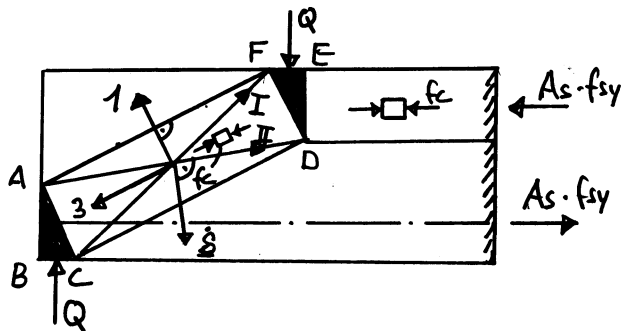
$$dD \cdot d = |\dot{\underline{\sigma}}| \cdot f_c/2 (1 - \sin\alpha)$$

Beim Spezialfall $\alpha = \pi/2$ wird keine Dissipationsarbeit geleistet, weshalb man auch den Begriff "Kollapstriss" verwendet.

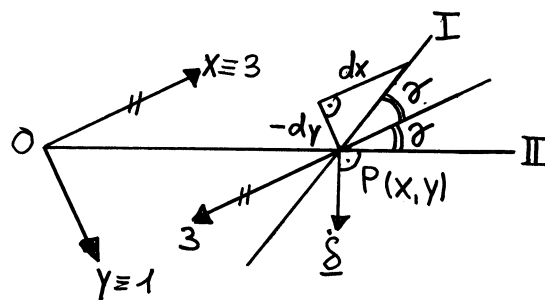
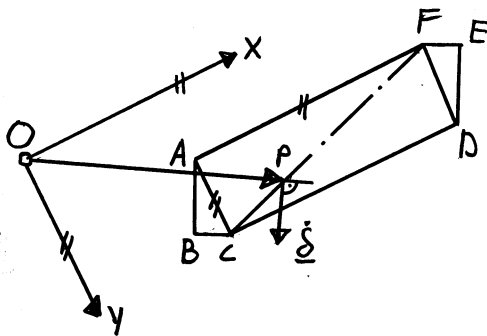


3.3.2. Druckstrebe

Anhand einer Druckstrebe werden allgemeinst mögliche Bruchmechanismen diskutiert. Die Hauptrichtungen der Druckstrebe sind bekannt; weiter entsprechen diese den Winkelhalbierenden des Winkel zwischen den beiden charakteristischen Richtungen.



Verträgliches Mechanismus ist durch die Gleitlinie CF charakterisiert, wobei der Sprungvektor $\underline{\delta}$ orthogonal zu AD steht.



Betrachtet man einen Rotationsmechanismus mit Rotationszentrum O sowie ein lokales Koordinatensystem, dessen Achsen zu den Hauptrichtungen 1 und 3 parallel verlaufen und der Ursprung in O liegt, so folgt die Differentialgleichung

$$dy = -\frac{y}{x} dx \quad \text{beziehungsweise} \quad \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$$

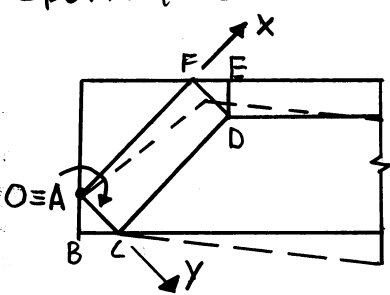
für den Verlauf der Diskontinuitätslinie. Integration ergibt die Lösung $\ln x + \ln y = \ln(x \cdot y) = \ln k = \text{konstant}$, wobei k der Integrationskonstante entspricht. Die Gleitlinie entspricht einer Hyperbel im x - y -Koordinatensystem:

$$x \cdot y = k$$

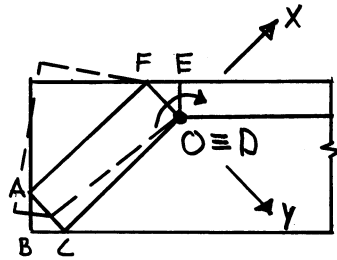
Mit den Punkten C und F als feste Punkte der Gleitfläche folgt $x_C \cdot y_C = x_F \cdot y_F$. Benützt man die Identitäten $x_A = x_C$, $x_D = x_F$, $y_A = y_F$ und $y_C = y_D$, so resultiert die Bedingung $x_A \cdot y_D = x_D \cdot y_A$ beziehungsweise $x_A/y_A = x_D/y_D$.

Der allgemeine Mechanismus ist durch eine hyperbel förmige Gleitlinie $x \cdot y = \text{konstant}$ durch die Punkte C und F derart charakterisiert, so dass der Ursprung O des Koordinatensystems beziehungsweise das Rotationszentrum O auf AD liegt, wobei die Richtungen x und y parallel zu den Hauptrichtungen 1 und 3 sind.

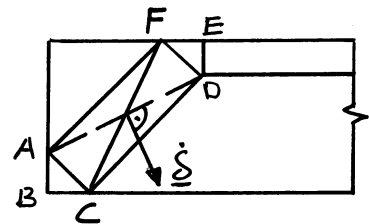
Spezialfälle:



$O \equiv A$
 Kollapsriss AF
 Stauchen AC



$O \equiv D$
 Kollapsriss CD
 Stauchen DF

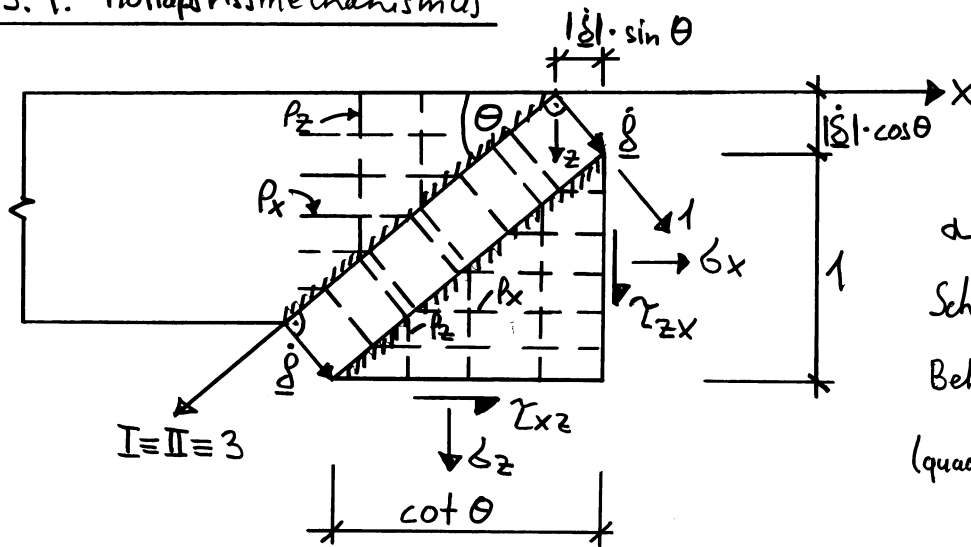


$O \rightarrow \infty$
 Reine Translation entlang
 CF senkrecht zu AD.

Entlang der hyperbel förmigen Gleitlinie variiert der Winkel α zwischen dem Sprungvektor und der Gleitfläche. Demzufolge sind modifizierte Fließbedingungen mit fiktivem Reibungswinkel und fiktiver Kohäsion (Mohrsche Hüllkurven) sowie die quadratische Fließbedingung mit den diskutierten Bruchmechanismen verträglich.

Die Bruchmechanismen sind mit dem Strebenmodell (statische Methode) verträglich, folglich liegt eine vollständige Lösung vor.

3.3.4. Kollaptrismechanismus



$$\alpha = \pi/2$$

Scheibendicke b_w Beton: $0 \geq \sigma_c \geq -f_c$

(quadratische Fließbedingung)

Äussere Arbeit: $W_a = |\dot{\delta}| \cdot b_w \cdot [(\sigma_x + \tau_{xz} \cdot \cot \theta) \cdot \sin \theta + (\sigma_z \cdot \cot \theta + \tau_{zx}) \cos \theta]$

Dissipationsarbeit: $D = |\dot{\delta}| \cdot b_w \cdot [p_x f_{sy} \cdot \sin \theta + p_z f_{sy} \cdot \cos \theta]$

Der Beton liefert keinen Anteil an die Dissipationsarbeit $\rightarrow \alpha = \pi/2$

Gleichsetzen der äusseren Arbeit mit der Dissipationsarbeit liefert

$$\tau_{xz} = \frac{1}{2} (p_x f_{sy} - \sigma_x) \tan \theta + \frac{1}{2} (p_z f_{sy} - \sigma_z) \cot \theta$$

Für τ_{xz} wird ein Minimum bei

$$\cot^2 \theta = (p_x f_{sy} - \sigma_x) / (p_z f_{sy} - \sigma_z)$$

gefunden; dabei wurde der Winkel θ variiert, $\partial \tau_{xz} / \partial \theta = 0$. Der

Winkel θ entspricht gerade der Neigung der Haupttrichlung 3

gegenüber der x-Achse. Für τ_{xz} erhält man schliesslich einen oberen Grenzwert:

$$\tau_{xz}^2 = (p_x f_{sy} - \sigma_x) (p_z f_{sy} - \sigma_z)$$

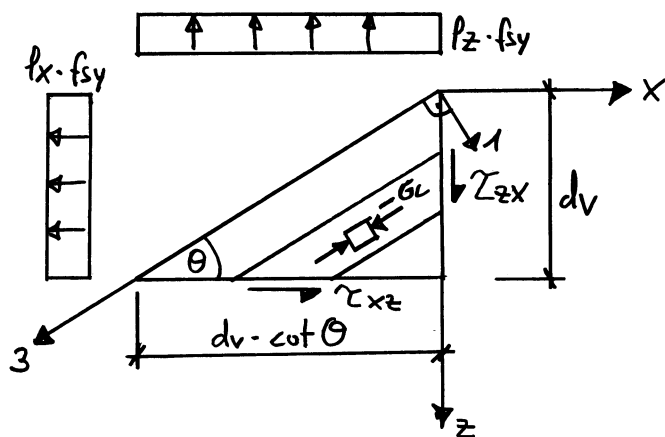
Die erhaltenen Beziehungen sind äquivalent mit den Beziehungen für Regime 1 (Kapitel 3.2.1.), somit liegt eine vollständige Lösung vor.

Kontrolle: $f_c \geq p_x f_{sy} + p_z f_{sy} - (\sigma_x + \sigma_z)$, wobei eine mittlere effektive Druckfestigkeit $f_c = 1,6 f_{cc}^{2/3}$ angenommen werden kann.

Genauere Überlegungen zur effektiven Druckfestigkeit werden im Kapitel 3.4.3. diskutiert.

Nebenbemerkung:

Die Querkraftbemessung von Bauteilen mit Querkraftbewehrung gemäss der Norm SIA 262 (4.3.3.3.) basiert auf dem Regime 1, das heisst die Druckfeldneigung Θ und der Querkraftbewehrungsgehalt ρ_z werden gewählt. Unter der Voraussetzung, dass die



Bewehrung in z-Richtung fließt, resultiert der Querkraftwiderstand $V_R = \rho_z \cdot f_{sy} \cdot \cot \Theta \cdot b_w \cdot d_v$, wobei $V = \tau_{xz} \cdot b_w \cdot d_v$ gilt und b_w der Stegbreite beziehungsweise d_v dem

Hebelarm der inneren Kräfte entspricht. Mit der Beziehung $\cot^2 \Theta = \rho_x / \rho_z$ folgt die erforderliche Längszugkraft

$F_{LVR} = \rho_x \cdot f_{sy} \cdot b_w \cdot d_v = \rho_z \cdot f_{sy} \cdot b_w \cdot d_v \cdot \cot^2 \Theta = V_R \cdot \cot \Theta$; im Gegensatz zu Scheiben, bei welchen eine verteilte Bewehrung in x-Richtung

eingelegt wird, wird die Längszugkraft je zur Hälfte vom

Druck- beziehungsweise Zugzug aufgenommen. Damit ein spröder Betonbruch gemäss Regime 2 ausgeschlossen werden, wird der

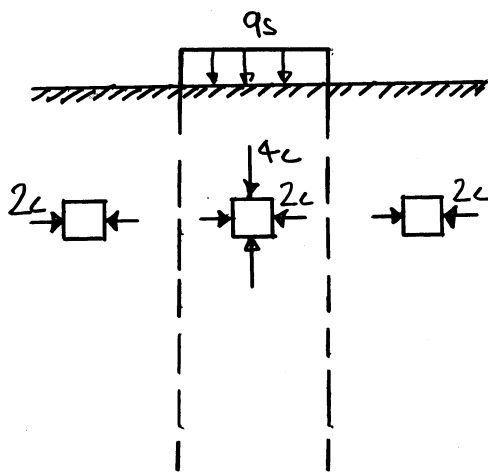
Querkraftwiderstand auf $V_{Rc} = f_c \cdot \sin \Theta \cdot \cos \Theta \cdot b_w \cdot d_v$ begrenzt;

die entsprechende Beziehung erhält man unter Berücksichtigung der Beziehungen $\tau_{xz}^2 = (f_c - \rho_z f_y) \cdot (\rho_z f_y)$ und $\cot^2 \Theta = (f_c - \rho_z f_y) / (\rho_z f_y)$ des Regimes 2.

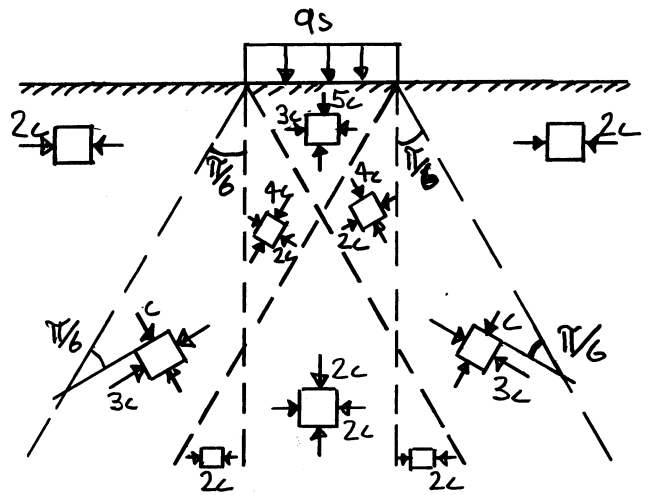
3.3.5. Stempelproblem (Prandtl)

Wir betrachten das Beispiel von Kapitel 2.4.1., wobei wir ein rein kohäsives Material (zum Beispiel Stahl oder ein undrainierter Ton) voraussetzen, das mit einer Fließbedingung von Coulomb beschrieben wird $\rightarrow f_c = 2c, \varphi = 0$.

Untere Grenzwerte:



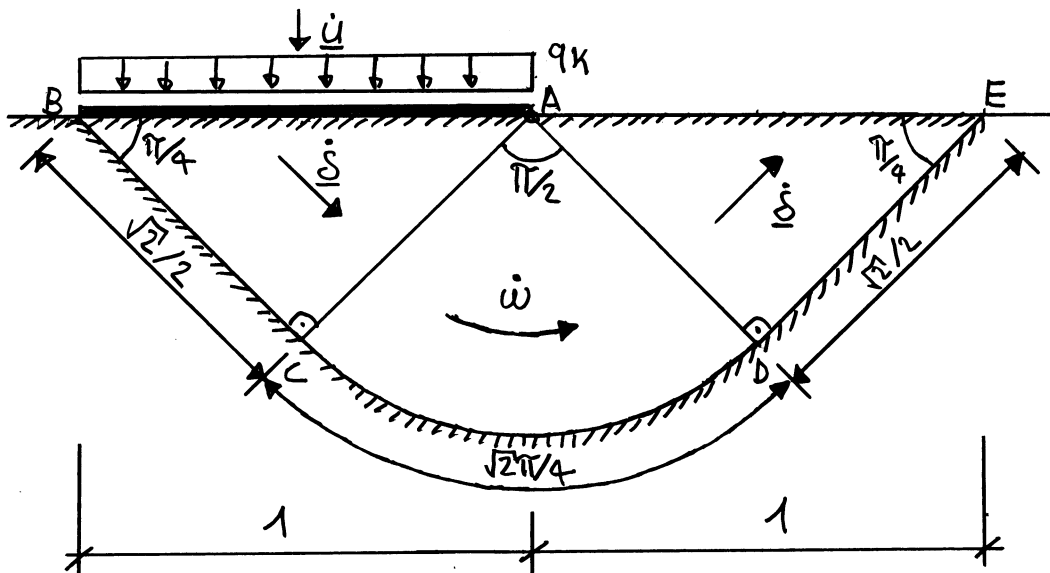
$q_s = 4c$



$q_s = 5c$

Mit einfachen Spannungsfeldern kann ein unterer Grenzwert $q_s = 5c \leq q_u$ der Traglast gefunden werden.

Oberer Grenzwert:



$|\dot{u}| = 1, |\dot{\delta}| = \sqrt{2}, \dot{\omega} = 2$

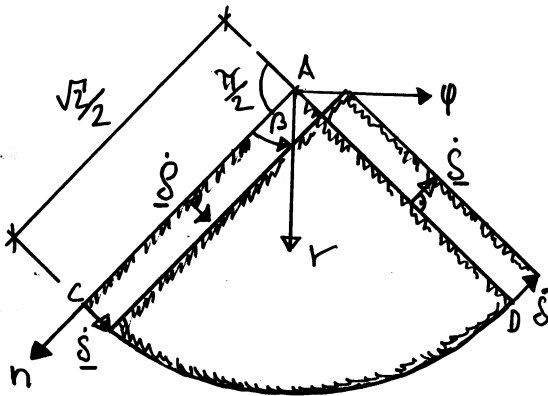
Äussere Arbeit: $W_a = |\underline{\dot{u}}| \cdot q_n = q_n$

Die Dissipationsarbeit setzt sich aus Anteilen in der Gleitfläche BCDE und dem Sektor ACD zusammen. Die Sektoren ABC und ADE bleiben während des Verschiebungsprozesses starr; Dissipationsarbeit entsteht nur in den Gleitflächen BC und DE. Im Kreis Sektor ACD resultiert neben der Dissipationsarbeit in der Gleitfläche CD auch eine Dissipationsarbeit infolge des Verzerrungszustands im Bereich ACD.

Die Dissipationsarbeit entlang der Gleitfläche BCDE beträgt

$$D_{BCDE} = c(\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}\pi/4 + \sqrt{2}/2) \cdot |\underline{\dot{\delta}}| = c(2 + \pi/2)$$

Der Verschiebungszustand im Kreis Sektor ACD kann in Polarkoordinaten mit den Beziehungen $\dot{u}_r = 0$, $\dot{u}_\varphi = |\underline{\dot{\delta}}|$ beschrieben werden.



$$\dot{\epsilon}_r = \frac{\dot{u}_r}{r}$$

$$\dot{\epsilon}_\varphi = \frac{\dot{u}_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \dot{u}_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\dot{\gamma}_{r\varphi} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \dot{u}_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial \dot{u}_\varphi}{\partial r} - \frac{\dot{u}_\varphi}{r}$$

Mit den kinematischen Relationen erhält man für die Verzerrungsinkremente $\dot{\epsilon}_r = \dot{\epsilon}_\varphi = 0$ und $\dot{\gamma}_{r\varphi} = -\sqrt{2}/r$. Die Dissipationsarbeit beträgt

$$D_{ACD} = \int_A \tau_{r\varphi} \cdot |\dot{\gamma}_{r\varphi}| dA = \int_A c \cdot |\dot{\gamma}_{r\varphi}| \cdot dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{2}/2} c \cdot \frac{\sqrt{2}}{r} \cdot r \cdot d\varphi \cdot dr = c \frac{\pi}{2}$$

Die gesamte Dissipationsarbeit beträgt $D = c(2 + \pi)$. Der Anteil der Dissipationsarbeit infolge des Verzerrungszustands im Sektor ACD
Nebenbemerkung: $dD = \delta_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = 2c \cos \varphi = c \cdot \cos \varphi (\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3) = c \cdot \cos \varphi \cdot \dot{\gamma}_{max}$

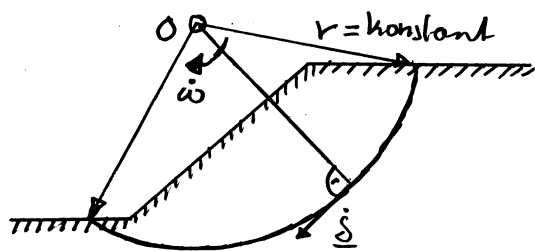
ist gleich gross wie die Dissipationsarbeit in der Gleitfläche CD. Gleichsetzen der äusseren Arbeit mit der Dissipationsarbeit liefert einen oberen Grenzwert für q :

$$q_k = c(2 + \pi) = 5,14c \geq q_u$$

Die Traglast kann somit auf $5c \leq q_u \leq 5,14c$ eingegrenzt werden. Es kann gezeigt werden, dass der obere Grenzwert $q_k = c(2 + \pi)$ mit einem Spannungsfeld verträglich ist; der Wert $q_k = c(2 + \pi)$ stellt somit die Traglast q_u dar.

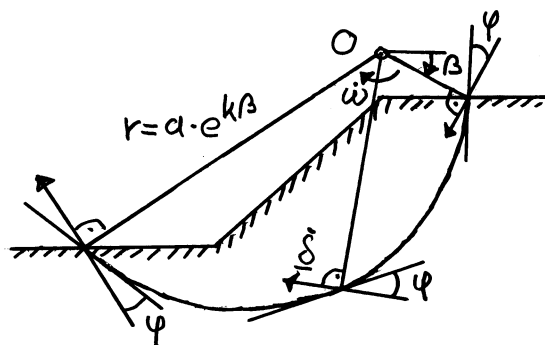
Nebenbemerkung:

Der Sprungvektor $\underline{\dot{s}}$ schliesst mit der Gleitlinie den Winkel φ ein, der dem Winkel der inneren Reibung entspricht. Bei rein kohäsiven Materialien ($\varphi = 0$) sind bei Rotationsmechanismen Gleitkreise verträglich, während bei Materialien mit innerer Reibung ($\varphi \neq 0$) logarithmische Spiralen verträgliche Gleitlinien darstellen.



"Gleitkreis"

$$c \neq 0, \varphi = 0$$



"logarithmische Spirale"

$$c \neq 0, \varphi \neq 0$$

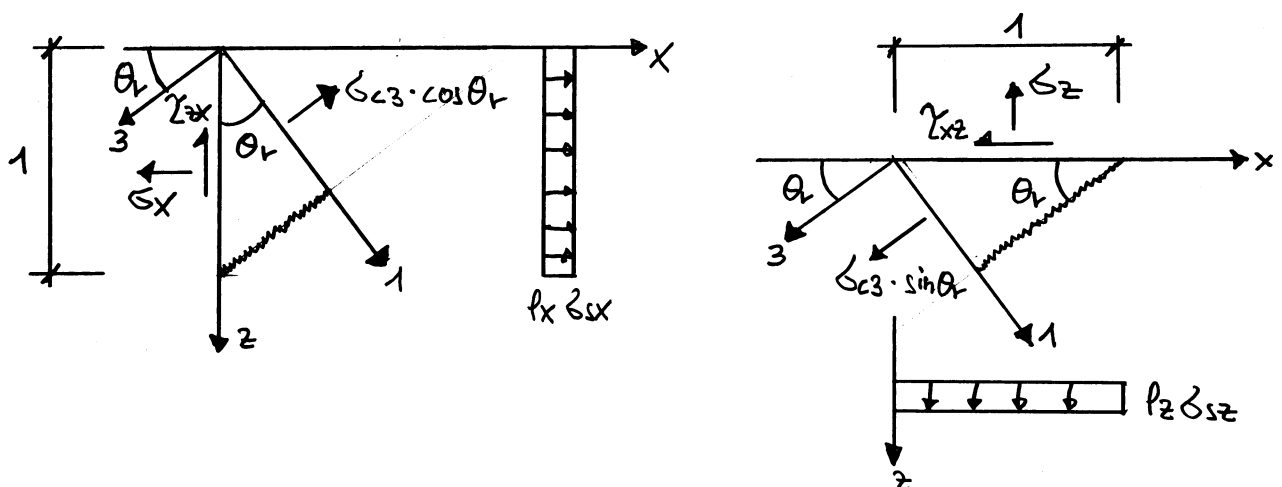
Die Gleitlinien können mit der Funktion $r = a \cdot e^{k\beta}$ beschrieben werden, wobei $\tan \varphi = k$; für $k = 0$ reduziert sich die logarithmische Spirale auf einen Kreis.

3.4. Last-Verformungsverhalten von Scheibenelementen

Die Traglastverfahren erlauben keine Aussagen über Verformungen, Rissabstände und Rissbreiten. Mit den Druckfeldmodellen kann hingegen das Last-Verformungsverhalten von Stahlbetonscheiben abgeschätzt werden, welche neben Gleichgewicht auch Verträglichkeitsbeziehungen erfüllen.

3.4.1. Klassisches linear elastisches Druckfeldmodell

Beim klassischen Druckfeldmodell werden fiktive, drehbare Risse mit verschwindend kleinem Rissabstand vorausgesetzt, die spannungsfrei sind, parallel zur Hauptdruckspannungsrichtung des Betons verlaufen und sich senkrecht zu ihrer Richtung öffnen. Variationen der Beton- und Stahlspannungen, die auf das Verbundverhalten von Beton und Bewehrung zurückzuführen sind, werden vernachlässigt, so dass ein ein gleichmässiger einachsiger Druckspannungszustand im Beton herrscht. Die Hauptdruckrichtung passt sich der Beanspruchung an, wobei sich diese mit zunehmender Belastung im allgemeinen drehen.



Betrachtet man ein gleichförmig beanspruchtes, orthogonal bewehrtes Scheibenelement mit einer Schaar von Rissen, die mit der

x-Achse den Winkel Θ_r einschließen, so erhält man unter Berücksichtigung der Beziehungen $\sigma_{cx} = \sigma_{xc} = \sigma_{c3} \cos^2 \Theta_r$, $\sigma_{cz} = \sigma_{zc} = \sigma_{c3} \sin^2 \Theta_r$ und $\tau_{cxz} = \tau_{zcx} = -\sigma_{c3} \sin \Theta_r \cdot \cos \Theta_r$, wobei $\sigma_{c3} = \sigma_{z3}$ sowie $\sigma_x = \sigma_{cx} + p_x \cdot \sigma_{sx}$, $\sigma_z = \sigma_{cz} + p_z \cdot \sigma_{sz}$ und $\tau_{xz} = \tau_{cxz}$, wobei $\sigma_{xs} = p_x \cdot \sigma_{sx}$ und $\sigma_{zs} = p_z \cdot \sigma_{sz}$, die Gleichgewichtsbedingungen

$$\sigma_x = p_x \sigma_{sx} + \sigma_{c3} \cdot \cos^2 \Theta_r$$

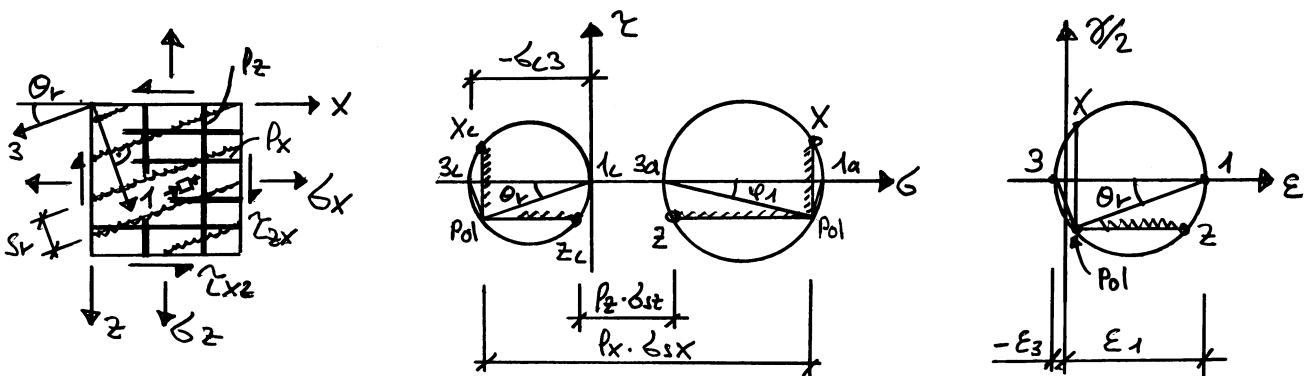
$$\sigma_z = p_z \sigma_{sz} + \sigma_{c3} \cdot \sin^2 \Theta_r$$

$$\tau_{xz} = -\sigma_{c3} \cdot \sin \Theta_r \cdot \cos \Theta_r = -\sigma_{c3} / (\cot \Theta_r + \tan \Theta_r)$$

Für linear elastisches Materialverhalten, $\sigma_{sx} = \epsilon_x E_s$, $\sigma_{sz} = \epsilon_z E_s$ und $\sigma_{c3} = \epsilon_3 E_s$, folgt mit den Gleichgewichtsbedingungen und der Verträglichkeitsbedingung $\cot^2 \Theta_r = (\epsilon_z - \epsilon_3) / (\epsilon_x - \epsilon_3)$ die Beziehung

$$\tan^2 \Theta_r p_x (1 + n p_z) + \tan \Theta_r p_x \frac{\sigma_z}{\tau_{xz}} = \cot^2 \Theta_r p_z (1 + n p_x) + \cot \Theta_r p_z \frac{\sigma_x}{\tau_{xz}}$$

für die Betonhauptdruckspannungs- und Hauptverzerrungsrichtung Θ_r , wobei $n = E_s / E_c$ dem Verhältnis der Elastizitätsmoduln des Stahls und des Betons entspricht.



Risrichtungen bei positiven Schubspannungen, $\tau_{zx} > 0$, liegen im Bereich $0 < \Theta_r < \pi/2$, während diese bei negativen Schubspannungen, $\tau_{xz} < 0$, im Bereich $-\pi/2 < \Theta_r < 0$ liegen. Die Betonhauptdruckspannungs- und Hauptverzerrungsrichtung Θ_r ist nicht identisch mit der Hauptrichtung der aufgetragenen Spannungen, welche mit φ_1 bezeichnet ist.

3.4.2. Rissabstände und Rissbreiten

Die Rissbreite w_r kann näherungsweise mit der Beziehung $w_r = \epsilon_1 \cdot s_r$ abgeschätzt werden, wobei $\epsilon_1 = \epsilon_x + \epsilon_z - \epsilon_3$ der Hauptverzerrung und s_r dem diagonalen Rissabstand entspricht. Einen Näherungswert für den maximalen theoretischen liefert die Beziehung

$$s_{r0} = \left(\frac{\sin \theta_r}{s_{rx0}} + \frac{\cos \theta_r}{s_{rz0}} \right)^{-1}$$

Der Bereich des Rissabstands wird mit der Bedingung $s_{r0}/2 \leq s_r \leq s_{r0}$ eingegrenzt. Die maximalen Rissabstände bezüglich den Bewehrungsrichtungen betragen gemäss Zugzustmodell $s_{rx0} = \sigma_x (1 - \rho_x) / (4 \rho_x)$ und $s_{rz0} = \sigma_z (1 - \rho_z) / (4 \rho_z)$, wobei σ_x und σ_z die Stabdurchmesser bezeichnen.

Aufgrund der Vernachlässigung der versteifenden Wirkung des Betons zwischen den Rissen werden die Verformungen mit dem klassischen Druckfeldmodell überschätzt.

3.4.3. Effektive Betondruckfestigkeit

Eine durch Druck- und Querkzugspannungen beanspruchte Betonscheibe weist eine geringere Druckfestigkeit auf als bei einaxialer Druckbeanspruchung. Die Querkzugspannungen beziehungsweise die dazugehörigen positiven Querdehnungen verursachen eine Reduktion der Druckfestigkeit.

In Stahlbetonscheiben werden die Querkzugspannungen nach dem Reißen von der Bewehrung aufgenommen. Durch die im Verbund wirkende Bewehrung werden dem Beton grosse Querdehnungen

aufgezwungen, die zu einem starken Abfall der Druckfestigkeit führen. Unabhängig von der Querdehnung nimmt bei Betonen mit höherer Zylinderdruckfestigkeit die Druckfestigkeit weniger als proportional mit der Zylinderdruckfestigkeit zu. Basierend auf experimentellen Untersuchungen liefert die Beziehung

$$f_c = \frac{f_{cc}^{2/3}}{0,4 + 30 \epsilon_1} \leq f_{cc} \quad \text{in N/mm}^2$$

für orthogonal bewehrte Scheibenelemente gute Resultate für die effektive Betonfestigkeit, wobei f_{cc} der Zylinderdruckfestigkeit entspricht.

Für die praktische Anwendung genügt in der Regel eine vorsichtige Schätzung der effektiven Betonfestigkeit. Gestützt auf Auswertungen von Versuchen kann diese mit der Formel

$$f_c = 1,6 f_{cc}^{2/3} \leq 0,6 f_{cc} \quad \text{in N/mm}^2$$

berechnet werden, wobei der Wert

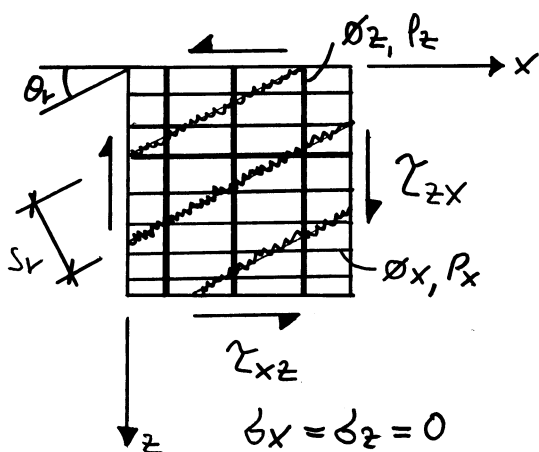
$$f_c = 1,25 f_{cc}^{2/3} \quad \text{in N/mm}^2$$

eine untere Grenze der effektiven Druckfestigkeit darstellt.

3.4.4. Tragverhalten von Stahlbetonscheiben

Wir betrachten eine orthogonal bewehrte Stahlbetonscheibe, die eine reine Schubbeanspruchung aufweist ($\sigma_x = \sigma_z = 0$). Es wird vorausgesetzt, dass die Scheibe ein duktileres Tragverhalten aufweist, das heißt die Traglast wird erreicht, wenn beide Bewehrungsrichtungen einen Fließzustand aufweisen, während der Beton die Druckfestigkeit noch nicht erreicht hat (Regime 1). Weiter wird angenommen, dass sich der Beton

linear elastisch und die Bewehrung linear elastisch-ideal plastisch verhält.



$$\rho_x = 2\% , \phi_x = 20 \text{ mm}$$

$$\rho_z = 0,8\% , \phi_z = 14 \text{ mm}$$

$$f_{cc} = 40 \text{ N/mm}^2 \text{ (Zylinderdruckfestigkeit)}$$

$$f_{ct} = 3 \text{ N/mm}^2 \text{ (Betonzugfestigkeit)}$$

$$f_{sy} = 500 \text{ N/mm}^2 \text{ (Fließgrenze Bewehrung)}$$

$$E_s = 205 \text{ kN/mm}^2$$

$$n = E_s / E_c = 6$$

Die maximalen theoretischen Rissabstände bezüglich den Bewehrungsrichtungen betragen $s_{rx0} = \phi_x(1-\rho_x)/(4\rho_x) = 245 \text{ mm}$ und $s_{rz0} = \phi_z(1-\rho_z)/(4\rho_z) = 434 \text{ mm}$.

In den folgenden Betrachtungen werden die aufgebrachten Schubspannungen τ_{xz} sukzessiv bis zur Traglast gesteigert, wobei die drei Laststufen "Risslast", "Fließbeginn" und "Traglast" eingehend diskutiert werden.

Risslast $\tau_{xz,r}$:

Einem reinen Schubspannungszustand entspricht eine Hauptzug- und Hauptdruckspannung mit gleichem Betrag wie die Schubspannung; somit beträgt die Risslast $\tau_{xz,r}$ gerade der Betonzugfestigkeit f_{ct} . Die Hauptdruckrichtung weist im ungerissenen Zustand eine Neigung von 45° gegenüber der x-Achse auf. Beim Erreichen der Risslast $\tau_{xz,r} = 3,0 \text{ N/mm}^2$ bildet sich ein Rissbild aus, das vom Bewehrungsgehalt bezüglich den

beiden Bewehrungsrichtungen abhängt. Mit den Beziehungen für das linear elastische Druckfeldmodell folgen die Rissrichtung θ_r , die Stahlspannungen σ_{sx} und σ_{sz} , die Betonhauptdruckspannung σ_{c3} , der maximale theoretische Rissabstand s_{r0} sowie die dazugehörige maximale Rissbreite w_{r0} .

$$\sigma_x = \sigma_z = 0 \rightarrow \cot^4 \theta_{r,v} = \frac{p_x (1 + n p_z)}{p_z (1 + n p_x)} \Rightarrow \theta_{r,v} = 38,96^\circ$$

$$s_{r0,v} = (\sin \theta_{r,v} / s_{rx0} + \cos \theta_{r,v} / s_{rz0})^{-1} = 229 \text{ mm}$$

$$\sigma_{sx,v} = \Sigma_{xz,v} \cdot \cot \theta_{r,v} / p_x = 185,5 \text{ N/mm}^2 \rightarrow \epsilon_{x,v} = \sigma_{sx,v} / E_s = 0,905\%$$

$$\sigma_{sz,v} = \Sigma_{xz,v} \cdot \tan \theta_{r,v} / p_z = 303,2 \text{ N/mm}^2 \rightarrow \epsilon_{z,v} = \sigma_{sz,v} / E_s = 1,479\%$$

$$\sigma_{c3,v} = -\Sigma_{xz,v} (\tan \theta_{r,v} + \cot \theta_{r,v}) = -6,1 \text{ N/mm}^2 \rightarrow \epsilon_{3,v} = \sigma_{c3,v} / E_s = -0,180\%$$

$$\epsilon_{1,v} = \epsilon_{x,v} + \epsilon_{z,v} - \epsilon_{3,v} = 2,564\%$$

$$w_{r0,v} = s_{r0,v} \cdot \epsilon_{1,v} = 0,59 \text{ mm}$$

Unmittelbar nach dem Reißen stellt sich ein Rissbild ein, deren Risse eine Neigung von $38,96^\circ$ gegenüber der x-Achse aufweisen; während dem Reißen rotieren die Risse, bis sich ein Gleichgewichtszustand einstellt.

Fließlast $\Sigma_{xz,y}$:

Nach dem Reißen kann die Schubbeanspruchung bei konstanter Rissneigung $\theta_{r,v}$ solange gesteigert werden, bis die schwächere Bewehrung in z-Richtung zu fließen beginnt, $\sigma_{sz,y} = f_{sy}$. Die Beziehungen des linear elastischen Druckfeldmodells können nach wie vor verwendet werden.

$$\sigma_{sz,y} = f_{sy} = 500 \text{ N/mm}^2 \rightarrow \epsilon_{z,y} = f_{sy} / E_s = 2,439\%$$

$$\sigma_{sx,y} = \sigma_{sz,y} \cdot \cot^2 \theta_{r,v} \cdot p_z / p_x = 305,9 \text{ N/mm}^2 \rightarrow \epsilon_{x,y} = \sigma_{sx,y} / E_s = 1,492\%$$

$$\sigma_{z3} = -p_z \cdot \sigma_{sz,y} / \sin^2 \theta_{r,v} = -10,1 \text{ N/mm}^2 \quad \rightarrow \quad \epsilon_{z,y} = \sigma_{z,y} \cdot h / E_s = -0,296\%$$

$$\sigma_{xz,y} = p_z \cdot \sigma_{sz,y} \cdot \cot \theta_{r,v} = 4,9 \text{ N/mm}^2$$

$$\epsilon_{1,y} = \epsilon_{x,y} + \epsilon_{z,y} - \epsilon_{z,y} = 4,227\%$$

$$w_{r0,y} = s_{r0,v} \cdot \epsilon_{1,y} = 0,97 \text{ mm}$$

Während der Laststeigerung von der Risslast $\sigma_{xz,v} = 3,0 \text{ N/mm}^2$ bis zur Fließlast $\sigma_{xz,y} = 4,9 \text{ N/mm}^2$ wachsen die Rissbreiten von 0,59 mm auf 0,97 mm an.

Traglast $\sigma_{xz,u}$:

Nachdem die schwächere Bewehrung die Fließgrenze erreicht hat, kann die Schubbeanspruchung weiter gesteigert werden; dabei rotieren die Rissrichtungen, während die Stahlspannung der schwächeren Bewehrung der Fließgrenze entspricht. Beim Erreichen der Traglast kommt ebenfalls die stärkere Bewehrung ins Fließen, $\sigma_{sx,u} = f_{sy}$; die Rissrichtung folgt mit der Beziehung des Regimes 1 (Kapitel 3.2.1.).

$$\cot^2 \theta_{r,u} = \frac{p_x}{p_z} \quad \Rightarrow \quad \theta_{r,u} = 32,31^\circ$$

Die Gleichgewichtsbedingungen, der maximale theoretische Rissabstand sowie die entsprechende maximale Rissbreite können mit den zum klassischen Druckfeldmodell analogen Beziehungen formuliert werden. Die Stahldehnung der schwachen Bewehrung kann nicht direkt aus den Materialbeziehungen gewonnen werden; betrachtet man den Mohrschen Kreis der Verzerrungen, so kann die positive Hauptverzerrung ϵ_1 mit der Beziehung $\epsilon_1 = \epsilon_x + (\epsilon_x - \epsilon_z) \cdot \cot^2 \theta_v$ ausgedrückt werden.

$$\sigma_{sx,u} = f_{sy} = 500 \text{ N/mm}^2$$

$$\rightarrow \epsilon_{x,u} = f_{sy} / E_s = 2,439\%$$

$$\sigma_{sz,u} = f_{sy} = 500 \text{ N/mm}^2$$

$$\rightarrow \epsilon_{z,u} = \epsilon_{1,u} + \epsilon_{3,u} - \epsilon_{x,u} = 6,712\%$$

$$\sigma_{cz,u} = -p_x \cdot \sigma_{sx,u} / \cos^2 \theta_{r,u} = -p_z \cdot \sigma_{sz,u} / \sin^2 \theta_{r,u} = -14,0 \text{ N/mm}^2$$

$$\epsilon_{cz,u} = \sigma_{cz,u} \cdot \eta / E_s = -0,410\%$$

$$\tau_{xz,u} = p_x \cdot \sigma_{sx,u} \cdot \tan \theta_{r,u} = p_z \cdot \sigma_{sz,u} \cdot \cot \theta_{r,u} = 6,3 \text{ N/mm}^2$$

$$\epsilon_{1,u} = \epsilon_{x,u} + (\epsilon_{x,u} - \epsilon_{z,u}) \cdot \cot^2 \theta_{r,u} = 9,561\%$$

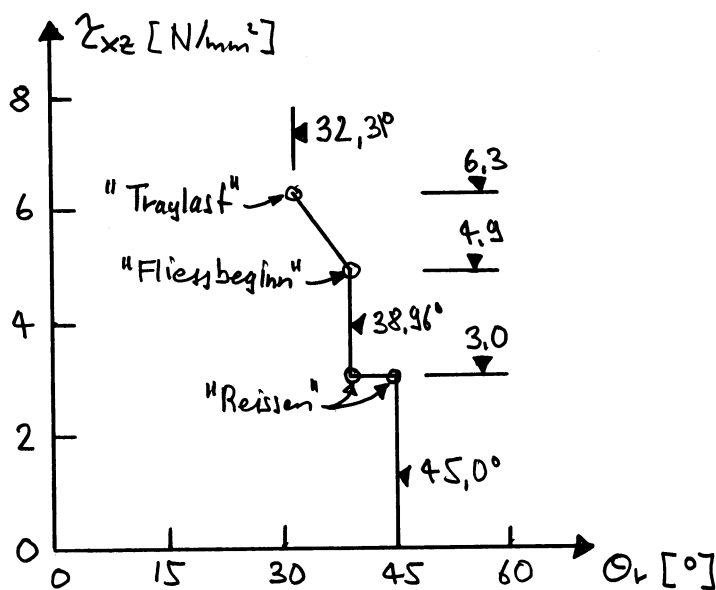
$$s_{r0,u} = (\sin \theta_{r,u} / s_{rx0} + \cos \theta_{r,u} / s_{rz0})^{-1} = 242 \text{ mm}$$

$$w_{r0,u} = s_{r0,u} \cdot \epsilon_{1,u} = 2,3 \text{ mm}$$

Die Traglast beträgt $\tau_{xz,u} = 6,3 \text{ N/mm}^2$; der Mechanismus bildet sich bei einer maximalen theoretischen Rissbreite von 2,3 mm aus. Die Kontrolle der Beton druckfestigkeit kann unter Berücksichtigung der positiven Hauptverzerrung durchgeführt werden.

$$f_c = \frac{f_{cc}^{2/3}}{0,4 + 30 \epsilon_{1,u}} = 17,0 \text{ N/mm}^2 > -\sigma_{cz,u} = 14,0 \text{ N/mm}^2$$

Die getroffene Annahme, dass die Scheibe ein duktileres Tragverhalten aufweist, ist somit erfüllt.



Die berechneten Rissbreiten stellen obere Grenzwerte dar, da die zugversteifende Wirkung des Betons vernachlässigt wurde.

Nebenbemerkung:

Für den Ermüdungsnachweis der Querkraftbewehrung gemäss der Norm SIA 262 (4.3.8.1) ist der Neigungswinkel des Druckfelds durch die Beziehung $\tan \Theta_{fat} = \sqrt{\tan \Theta} \leq 1$ definiert. Dabei bezeichnet Θ_{fat} den massgebenden Neigungswinkel für den Ermüdungsnachweis dar, während Θ dem normalerweise gewählten Neigungswinkel für die Bemessung gemäss Regime 1 (Kapitel 3.2.1.) entspricht. Betrachtet man eine Scheibe unter reiner Schubbeanspruchung ($\sigma_x = \sigma_z = 0$), so folgen gemäss linear elastischem Druckfeldmodell

$$\cot^4 \Theta_{elastisch} = \frac{p_x (1 + \eta p_z)}{p_z (1 + \eta p_x)} \approx \frac{p_x}{p_z}$$

beziehungsweise gemäss der Fließbedingung im Regime 1

$$\cot^2 \Theta_{plastisch} = \frac{p_x f_{sy}}{p_z f_{sy}} = \frac{p_x}{p_z}$$

die Beziehungen für die Bestimmung der Druckfeldneigungen im elastischen und plastischen Zustand; man erhält somit

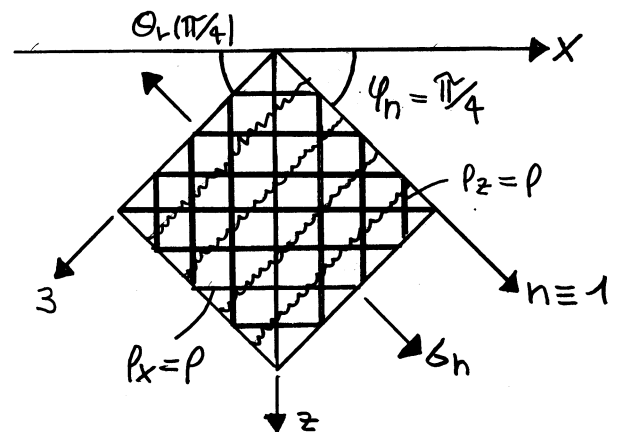
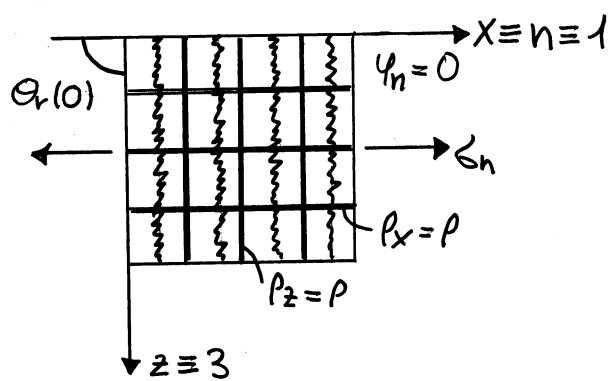
$$\tan \Theta_{elastisch} = \sqrt{\tan \Theta_{plastisch}}$$

Für den Ermüdungsnachweis sind die Einwirkungen auf Kennwertniveau massgebend, das heisst das Tragwerk sollte sich im Gebrauchszustand elastisch verhalten. Der Tragsicherheitsnachweis erfolgt hingegen auf Bruchniveau beziehungsweise sind bis zum Erreichen der Traglast Schnittgrössenumlagerungen infolge der Bildung von plastischen Bereichen zulässig. Im Gegensatz zu den Bewehrungen werden beim Ermüdungsnachweis des Betons aufgrund der Mikrorissbildung die Druckspannungen auf $\sigma_{c,fat} > f_{cc}/3$.

3.4.5. Verformungsverhalten von Stahlbetonscheiben

Das Verformungsverhalten von Stahlbetonscheiben kann mit Druckfeldmodellen beschrieben werden. Mit dem klassischen linear elastischen Druckfeldmodell werden die Verformungen überschätzt, da die versteifende Wirkung des Betons zwischen den Rissen vernachlässigt wird; es ermöglicht aber mit geringem Aufwand gute Abschätzungen.

Zur Illustration der Scheibensteifigkeit betrachten wir eine (quasi) isotrope Stahlbetonscheibe, $p_x = p_z = p$, welche durch eine Normalspannung σ_n beansprucht ist; die Beanspruchungsrichtung weist einen Winkel φ_n gegenüber der x-Achse auf. Die folgende Diskussion beschränkt sich dabei auf die Beanspruchungswinkel $\varphi_n = 0$ und $\varphi_n = \pi/4$.



Mit den Spannungstransformationen $\sigma_x = \sigma_n \cdot \cos^2 \varphi_n$, $\sigma_z = \sigma_n \cdot \sin^2 \varphi_n$ und $\tau_{xz} = \sigma_n \cdot \sin \varphi_n \cdot \cos \varphi_n$ sowie unter Berücksichtigung von $p_x = p_z = p$ erhält man mit der Beziehung für die Bestimmung der Hauptverzerrungsrichtung die Werte $\theta_r(0) = \pi/2$ für $\varphi_n = 0$ beziehungsweise $\theta_r(\pi/4) = \pi/4$ für $\varphi_n = \pi/4$. Für die beiden betrachteten Beanspruchungen fällt somit die Hauptbeanspruchungsrichtung n

mit der Hauptverzerrungsrichtung 1 zusammen. Schließlich erhält man mit dem Ausdruck

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_x + \tau_{xz} \cdot \cot \theta_r}{\rho_x E_s} + \frac{\sigma_z + \tau_{xz} \cdot \tan \theta_r}{\rho_z E_s} + \frac{\tau_{xz} (\tan \theta_r + \cot \theta_r) \cdot \eta}{E_s}$$

für die positive Hauptverzerrung ϵ_1 die entsprechenden Verzerrungen der beiden Beanspruchungen

$$\epsilon_1(0) = \frac{\sigma_n}{\rho E_s} \quad \text{beziehungsweise} \quad \epsilon_1(\pi/4) = \frac{\sigma_n}{E_s} \left(\frac{2}{\rho} + \frac{\eta}{2} \right)$$

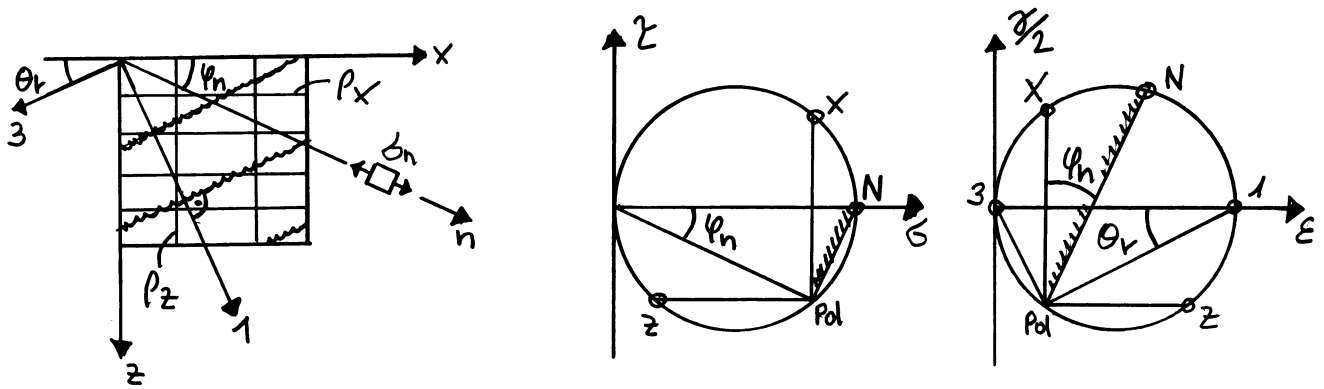
Eine Abweichung der Hauptbeanspruchungsrichtung von $\varphi_n = 45^\circ$ gegenüber der Bewehrungsrichtung führt zu einer signifikanten Reduktion der Scheibensteifigkeit; die globalen Verformungen werden mehr als verdoppelt, $\epsilon_1(\pi/4)/\epsilon_1(0) > 2$. Während beim Fall $\varphi_n = 0$ nur eine Bewehrung in der Belastungsrichtung erforderlich ist, wird beim Fall $\varphi_n = \pi/4$ eine orthogonale Bewehrungsanordnung benötigt; beim Fall $\varphi_n = \pi/4$ ist doppelt soviel statische Bewehrung nötig als beim Fall $\varphi_n = 0$.

Der Anteil der Betonstauchung an der Gesamtverformung ist in der Regel gering. Vernachlässigt man die Betonstauchungen, das heißt $E_c \rightarrow \infty$ beziehungsweise $\eta = E_s/E_c \rightarrow 0$. Die Beziehung für die Ermittlung der Hauptverzerrungsrichtung θ_r vereinfacht sich somit zu

$$\tan^2 \theta_r \rho_x + \tan \theta_r \rho_x \frac{\sigma_z}{\tau_{xz}} = \cot^2 \theta_r \rho_z + \cot \theta_r \frac{\sigma_x}{\tau_{xz}}$$

Betrachten wir erneut einen einachsigen Normalspannungszustand σ_n mit einer Beanspruchungsrichtung, die einen Winkel φ_n

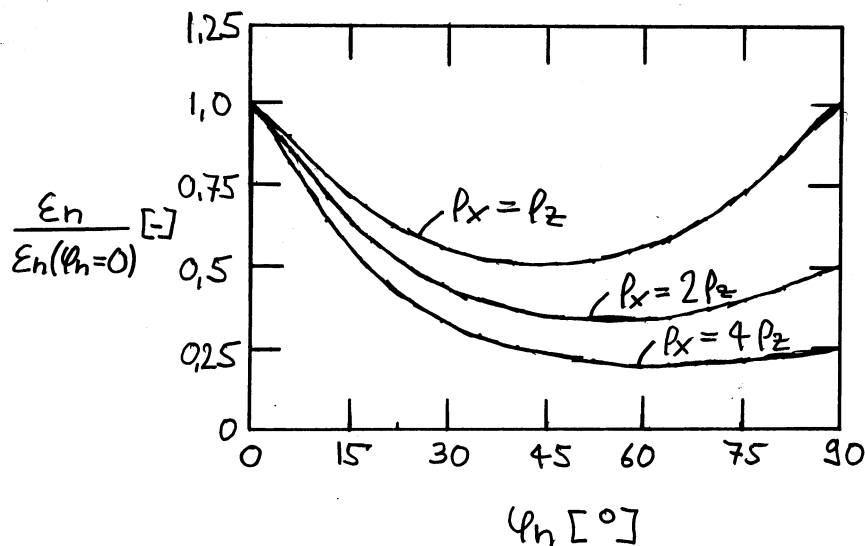
gegenüber der x-Achse aufweist.



Die Hauptverformungsrichtungen 1 und 3 fallen im Allgemeinen nicht mit der Hauptbeanspruchungsrichtung n zusammen. Mit $\epsilon_3 = 0$ erhält man die Beziehung

$$\epsilon_n = \frac{\sigma_n}{E_s} \left[\left(\frac{\cos^4 \varphi_n}{p_x} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{\sin^4 \varphi_n}{p_z} \right)^{\frac{1}{3}} \right]^3$$

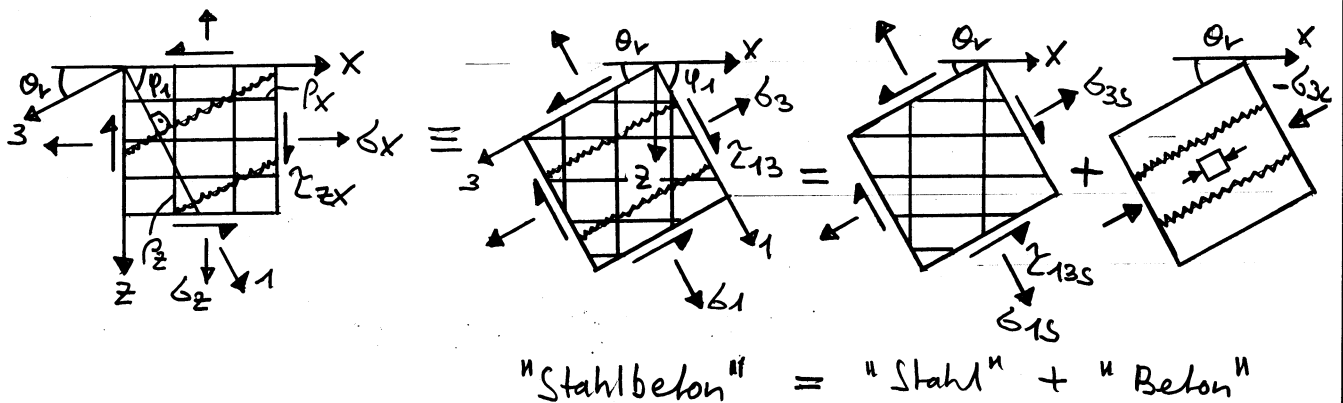
für die Stüfigkeit bezüglich der Beanspruchungsrichtung.



Eine Abweichung der Hauptbeanspruchungsrichtungen von den Bewehrungsrichtungen führt zu einem weicheren Tragverhalten; bei grossen Abweichungen nehmen neben den globalen Verformungen auch die Rissbreiten stark zu.

Nebenbemerkung:

Der Querkraftwiderstand von Bauwerken ohne Querkraftbewehrung steht in direktem Zusammenhang mit der Rissverzahnung, welche wiederum durch die Rissbreiten limitiert wird. Bei Stahlbetonplatten führt eine Abweichung der Hauptmomentenrichtungen von den Bewehrungsrichtungen zu einem weicherem Biegeverhalten und somit auch zu grösseren Rissbreiten, die eine entsprechende Verminderung des Querkraftwiderstands bewirken. In der Norm SIA 262 (4.3.3.2) ist der richtungsabhängige Querkraftwiderstand von Platten ohne Querkraftbewehrung proportional zu $(\sin^4 \varphi_0 + \cos^4 \varphi_0)$, wobei durch den Winkel φ_0 die Hauptquerkrafttrichtung definiert ist. Dieser Reduktionsbeiwert ist mit der klassischen linear elastischen Druckfeldtheorie für Stahlbetonscheiben begründet.



Wir betrachten ein orthogonal bewehrtes Scheibenelement, das mit Normalspannungen σ_x und σ_z sowie Schubspannungen τ_{xz} beansprucht ist. Transformiert man die aufgebrachten Spannungen bezüglich der Hauptdruckspannungs- beziehungsweise Hauptverzerungsrichtungen, welche aufgrund der Annahme von spannungsfreien Rissen auch der Rissrichtung entspricht, so folgt dass die

aufgebrachte Normalspannung σ_1 bezüglich der Hauptverzerrungsrichtung gerade der fiktiven Stahlspannung σ_{1s} entspricht. Unter Berücksichtigung von $\varphi_1 = \pi/2 - \theta_r$ erhält man

$$\sigma_1 = \sigma_{1s} = p_x \cdot \sigma_{sx} \cdot \cos^2 \varphi_1 + p_z \cdot \sigma_{sz} \cdot \sin^2 \varphi_1$$

Vernachlässigt man die Betonverzerrungen, $\epsilon_3 = 0$, so resultiert mit den Beziehungen $\sigma_{sx} = \epsilon_x \cdot E_s = \epsilon_1 \cdot \cos^2 \varphi_1 \cdot E_s$ und $\sigma_{sz} = \epsilon_z \cdot E_s = \epsilon_1 \cdot \sin^2 \varphi_1 \cdot E_s$ der Ausdruck

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{p_1 \cdot E_s} = \frac{\sigma_1}{E_s} \cdot \frac{1}{(p_x \cos^4 \varphi_1 + p_z \sin^4 \varphi_1)}$$

zwischen der aufgebrachten Spannung σ_1 und der entsprechenden Hauptverzerrung ϵ_1 in Rissnormalenrichtung, mit welchem implizit die Rissbreiten erfasst werden. Dabei bezeichnet $p_1 = (p_x \cos^4 \varphi_1 + p_z \sin^4 \varphi_1)$ den fiktiven Bewehrungsgehalt.

Im Fall einer isotropen Bewehrung $p_x = p_z = p$ kann die Beziehung

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{p \cdot E_s} \cdot \frac{1}{(\cos^4 \varphi_1 + \sin^4 \varphi_1)}$$

angegeben werden, welche die Grundlage für den Artikel SIA 262 / 4.3.3.2.6 darstellt.

Nebenbemerkung:

Die Annahme von drehbaren Rissen setzt voraus, dass die Rissoberflächen eine gewisse Rauigkeit aufweisen beziehungsweise die initialen Risse, welche nach der Rotation der fiktiven Risse Normal- und Schubspannungen übertragen müssten, eine ausreichende Rissverzahnung (aggregate interlock) haben. Vorsicht ist bei hochfesten Betonen geboten, welche in der Regel sehr glatte Rissoberflächen aufweisen.

4. Platten

Stahlbetonplatten gehören zu den wichtigsten und am häufigsten verwendeten Tragelementen bei der Betonbauweise. In den nachfolgenden Ausführungen werden die statischen und kinematischen Beziehungen sowie die Fließbedingungen von Platten-elementen behandelt, bevor statische und kinematische Methoden für die Bemessung von Stahlbetonplatten vorgestellt werden. Abschliessend wird das Verformungsvermögen sowie die damit verbundene konstruktive Durchbildung der Bewehrung diskutiert.

4.1. Grundlagen

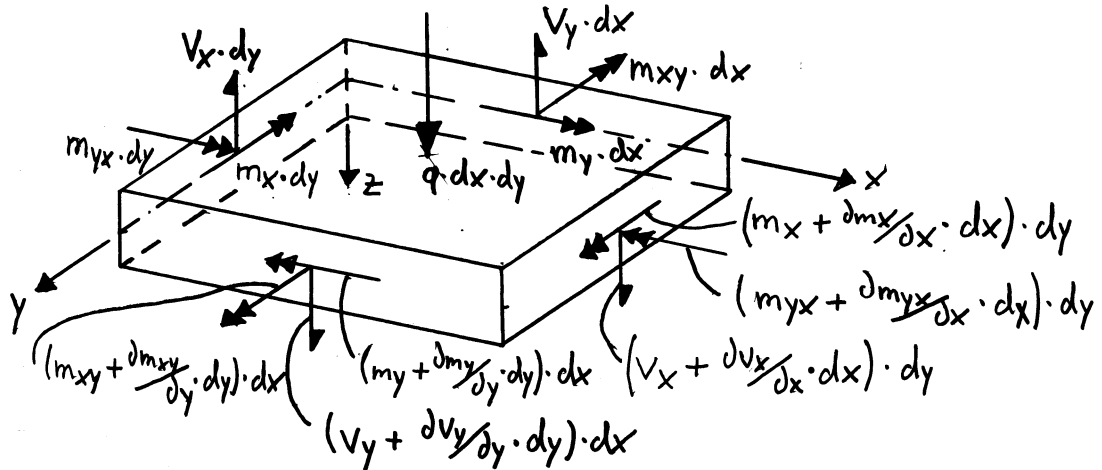
Analog zur Annahme über das Eben- und Senkrechtbleiben der Stabquerschnitte bei Stabtragwerken trifft man bei dünnen Platten die Annahme, dass Normalen zur unverformten Bezugsebene ($z=0$) während der Verformung gerade bleiben und senkrecht auf der verformten Bezugsfläche stehen. Da die Annahme einer Schubsteifen Theorie entspricht, können die Querkräfte als verallgemeinerte Spannungsgrössen betrachtet werden, die zur Erfüllung des Gleichgewichts erforderlich sind. Der Einfluss der Querkräfte auf die Plattenverformungen kann jedoch mit einem Sandwichmodell erfasst werden.

4.1.1. Gleichgewichtsbedingungen

Wir betrachten ein Plattenelement, welches durch Biegemomente m_x und m_y , Drillmomente $m_{xy} = m_{yx}$ sowie Querkräfte v_x und v_y beansprucht ist; Membrankräfte n_x , n_y und $n_{xy} = n_{yx}$ werden nicht berücksichtigt. Formuliert man Gleichgewicht

am differentiellen Plattenelement, so folgen für die Querkräfte die Beziehungen

$$V_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \quad \text{und} \quad V_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x}$$



und mit $q + \partial V_x / \partial x + \partial V_y / \partial y$ erhält man die Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + q = 0$$

wobei q die äussere Flächenlast bezeichnet. Die Tragwirkung einer Platte kann somit in zwei Biegeanteile $q_x = -\partial^2 m_x / \partial x^2$ und $q_y = -\partial^2 m_y / \partial y^2$ sowie einen Drillanteil $q_{xy} = -2 \partial^2 m_{xy} / (\partial x \cdot \partial y)$ aufgeteilt werden.

4.1.2. Spannungstransformationen

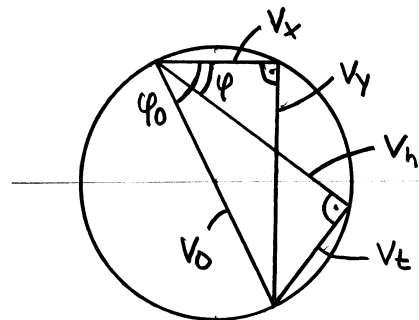
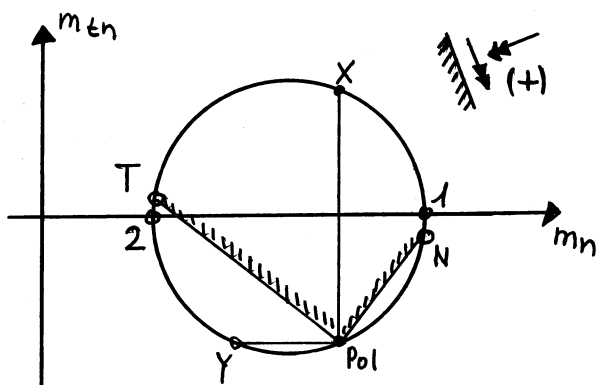
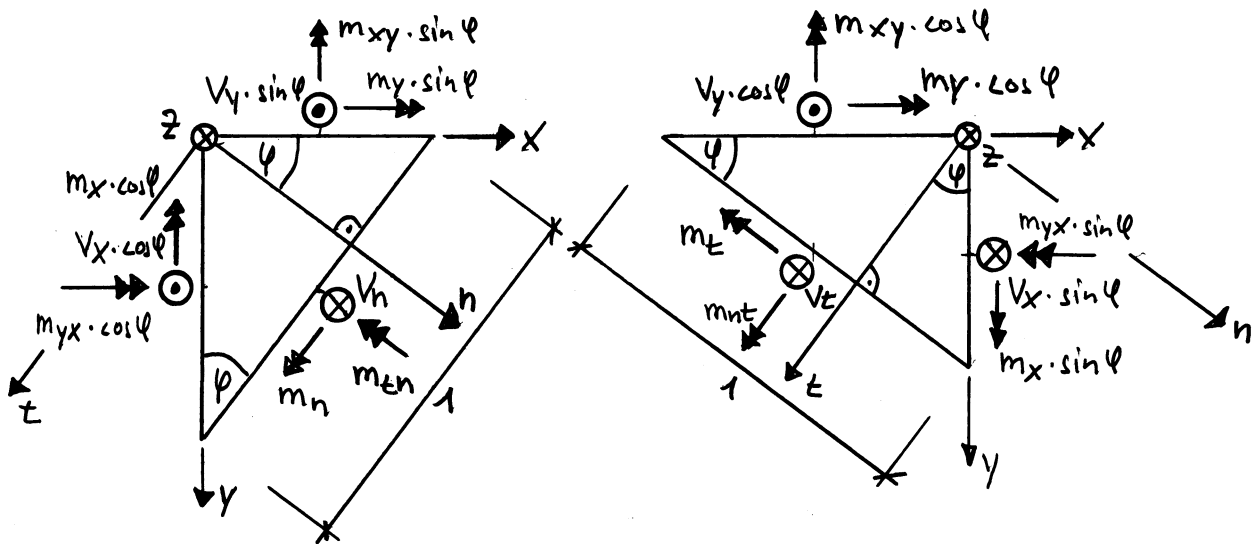
Für eine um den Winkel φ um die z -Achse gedrehte Basis folgen die Transformationsformeln

$$m_n = m_x \cos^2 \varphi + m_y \sin^2 \varphi + 2 m_{xy} \sin \varphi \cos \varphi$$

$$m_t = m_x \sin^2 \varphi + m_y \cos^2 \varphi - 2 m_{xy} \sin \varphi \cos \varphi$$

$$m_{tn} = (m_y - m_x) \sin \varphi \cos \varphi + m_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$$

für die Biege- und Drillmomente im gedrehten $n-t-z$ -Koordinatensystem, welche direkt aufgrund des Momentengleichgewichts bestimmt werden können.



Analog zu den Momententransformationen liefert die Formulierung des Gleichgewichts die Transformationsformeln

$$V_n = V_x \cdot \cos \varphi + V_y \cdot \sin \varphi$$

$$V_t = -V_x \cdot \sin \varphi + V_y \cdot \cos \varphi$$

für die Querkräfte in n - und t -Richtung. Den Querkraftkomponenten V_x und V_y beziehungsweise V_n und V_t kommt keine physikalische Bedeutung zu. Der Kraftfluss wird an jeder Stelle der Platte mit der Hauptquerkraft

$$V_0 = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{V_n^2 + V_t^2}$$

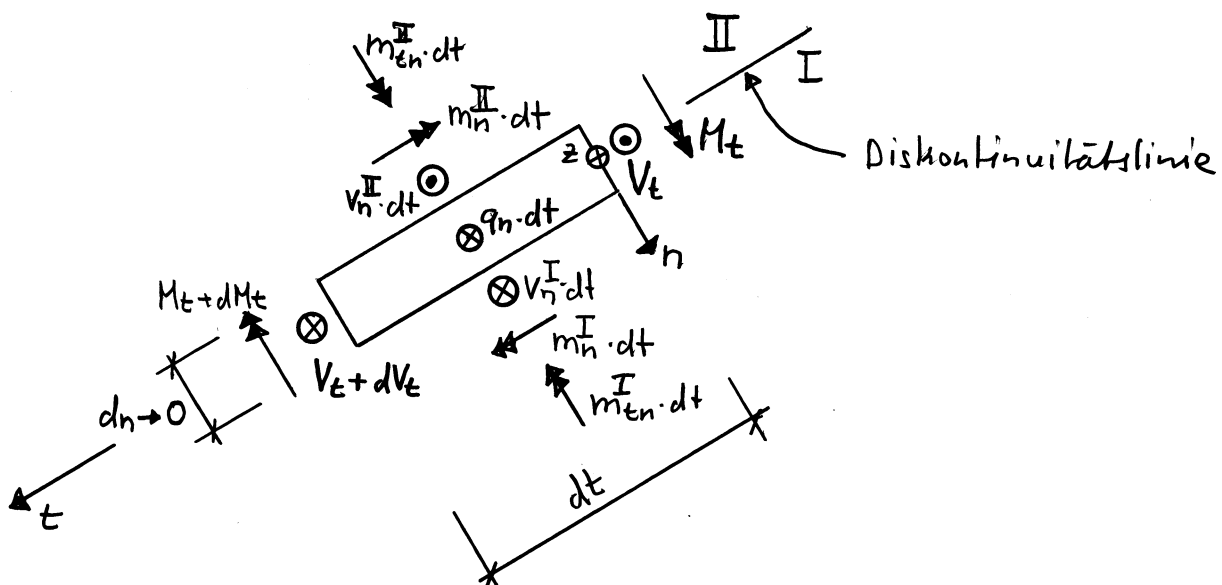
und der dazugehörigen Übertragungsrichtung beschrieben, wobei die Orientierung der Hauptquerkrafttrichtung gegenüber der x -Achse mit der Beziehung

$$\tan \varphi_0 = \frac{V_y}{V_x} \quad (dv_n/d\varphi = 0)$$

bestimmt ist. Senkrecht zu dieser Hauptquerkrafttrichtung wird keine Querkraft abgetragen, $V_{\perp 0} = 0$. Die Querkrafttransformationen können mit einem Thales-Kreis gedeutet werden.

4.1.3. Statische Diskontinuitäten und Randbedingungen

Eine statische Diskontinuitätslinie im Platteninneren kann als Balken mit einer verschwindenden Breite aufgefasst werden.



Aus Gleichgewichtsgründen folgt unter allgemein möglicher Beanspruchung, dass die Plattenmomente senkrecht zur Diskontinuitätslinie stetig verlaufen müssen

$$m_n^I = m_n^II$$

während die Drillmomente und die Querkräfte in der Platte eine Unstetigkeit aufweisen dürfen. Bezeichnet M_t das Biegemoment,

V_t die Querkraft und q_n die kontinuierliche Streckenlast der Diskontinuitätslinie, so folgen die Beziehungen

$$V_t = m_{\pm n}^I - m_{\pm n}^{II} + \frac{dM_t}{dt}$$

und

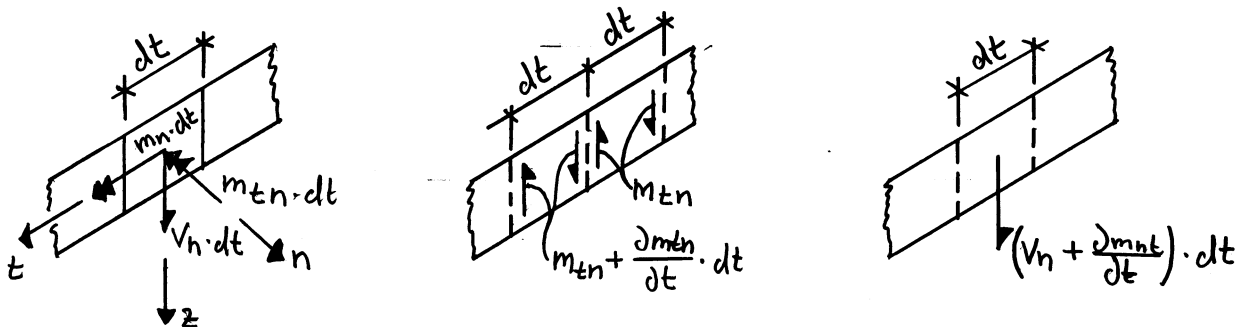
$$q_n = -V_n^I + V_n^{II} - \frac{dV_t}{dt} = -\left(\frac{dm_n^I}{dn} + 2\frac{dm_{nt}^I}{dt}\right) + \left(\frac{dm_n^{II}}{dn} + 2\frac{dm_{nt}^{II}}{dt}\right) - \frac{d^2M_t}{dt^2}$$

Eine Unstetigkeit der Drillmomente und Querkräfte führt zu einer konzentrierten Querkraftabtragung beziehungsweise zu einer linienförmigen Belastung, der sogenannten Stützkraft, entlang der Diskontinuitätslinie, wobei zur Aufnahme der Querkraft V_t eine entsprechende Bewehrung erforderlich ist. Die allgemeine Formulierung der Diskontinuitätslinie erlaubt die Betrachtung von versteckten Unterzügen ("strong bands"), die aufgrund des Moments M_t zu einer konzentrierten Anordnung der Biegebewehrung führen.

Verschwenden im Plattenbereich I die Schnittgrößen, $m_n^I = m_t^I = m_{\pm n}^I = V_n^I = 0$, und setzt man die Biegebeanspruchung der Diskontinuitätslinie als konstant voraus, $M_t = \text{konstant}$, so entspricht die Diskontinuitätslinie den Randbedingungen eines Plattenrands. Je nach Lagerungsart spricht man von einem eingespannten, einem einfach gelagerten oder einem freien Rand.

Rand	m_n	$m_{\pm n}$	V_n	
frei	0	$V_n + dm_{\pm n}/dt = 0$	—	
aufgelegt	0	beliebig	—	\triangle
eingespannt		beliebig	—	\parallel

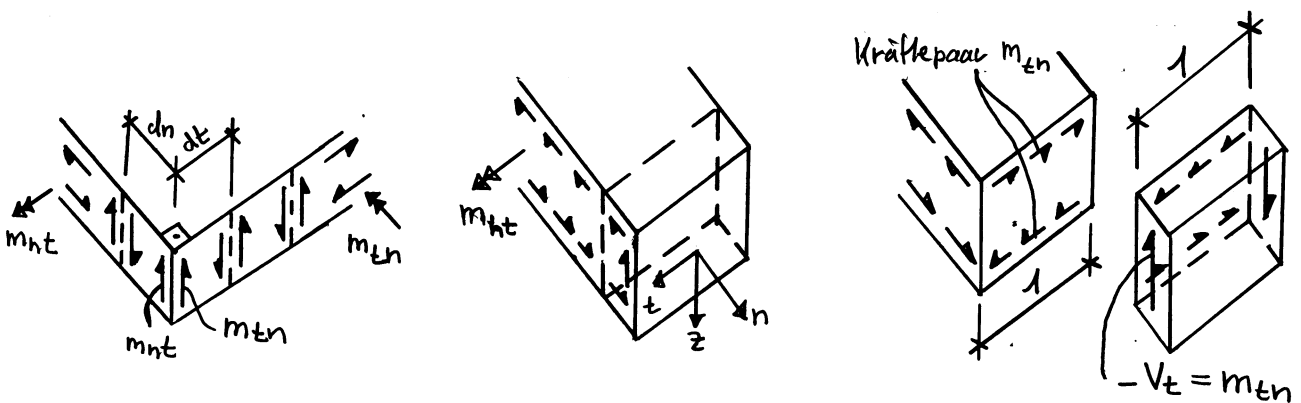
Am Plattenrand greifen allgemein drei Schnittgrößen m_n , m_{tn} und v_n an; die inhomogene partielle Differentialgleichung 2. Ordnung für die Biege- und Drillmomente erlaubt die Anpassung von nur zwei Randbedingungen. Bei der Behandlung von Plattenrändern werden daher die Drillmomente durch eine stetige Verteilung von vertikalen Kräftepaaren ersetzt.



Der Zuwachs $\frac{dm_{tn}}{dt}$ wird zur Querkraft v_n addiert; es resultiert die sogenannte Stützkraft

$$q_n = v_n + \frac{dm_{tn}}{dt} = \frac{dm_n}{dn} + 2 \frac{dm_{tn}}{dt}$$

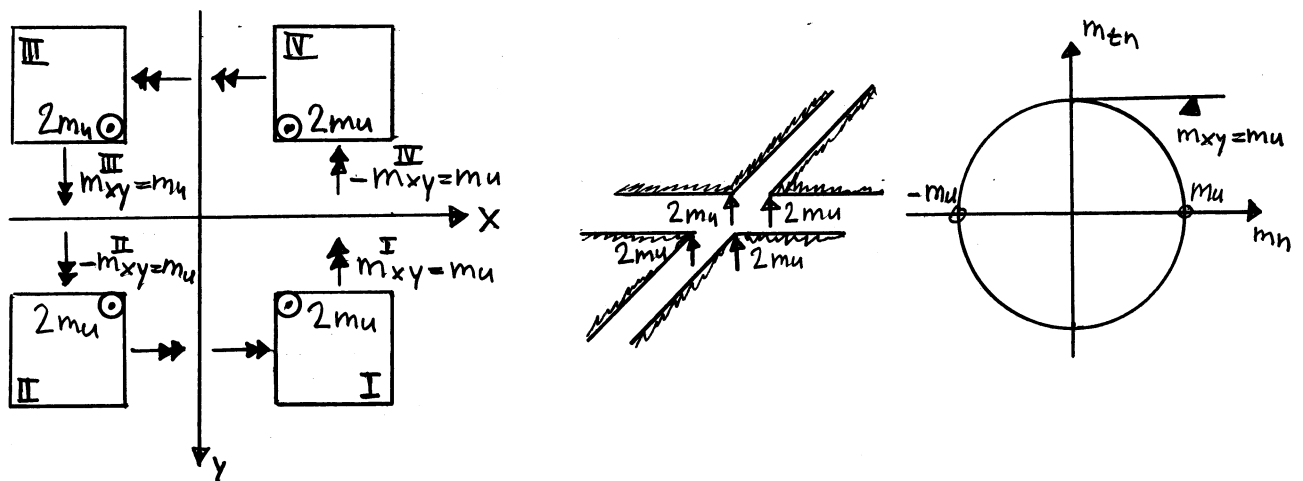
wobei q_n positiv in Richtung der z -Achse orientiert ist. An einer Plattenecke heben sich die Drillmomente m_{tn} nicht gegenseitig auf, sondern addieren sich bei einer rechtwinkligen Ecke zu einer resultierenden Eckkraft $2 m_{tn}$.



Aus Gleichgewichtsgründen wird am Plattenrand eine Querkraft $V_t = -m_{tn}$ entlang des Plattenrandes abgetragen; ein Drillmoment

am Plattenrand entspricht somit einer längs des Plattenrandes übertragenen Querkraft. Die entsprechenden Beziehungen folgen auch direkt aus der Betrachtung der allgemeinen Diskontinuitätslinie.

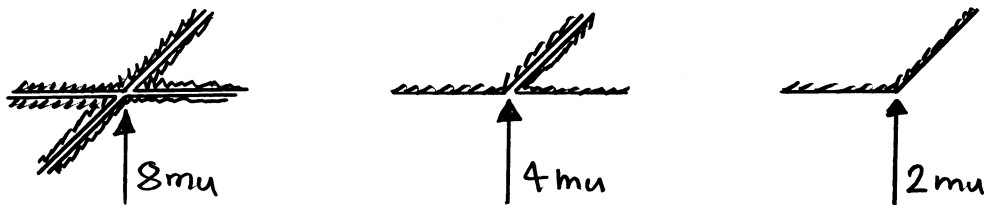
Die Einleitung einer konzentrierten Kraft erfordert die Existenz von diskontinuierlichen Drillmomentenfeldern. Wir betrachten vier rechtwinklige Plattensegmente, welche im Ursprung des x - y -Koordinatensystems zusammengefügt werden; die Drillmomente weisen dabei im Ursprung eine Diskontinuität auf.



Eine Drillbeanspruchung ($m_x = m_y = 0$) entspricht Hauptmomenten $m_1 = -m_2 = m_{xy}$; bei einer isotropen Platte kann der Betrag des Drillmoments nicht grösser sein als derjenige des isotropen Biege widerstands m_u . Mit den Drillmomentenansätzen in den vier Plattensegmenten $m_{xy}^I = -m_{xy}^{II} = m_{xy}^{III} = -m_{xy}^{IV} = m_u$ resultiert eine Einzelkraft von $8m_u$ im Ursprung des globalen Koordinatensystems. Die x - und y -Achse entsprechen dabei statischen Diskontinuitätslinien.

Nebenbemerkung:

Bei der Ermittlung des Durchstanzwiderstands gemäss der Norm SIA 262 (4.3.6.4) wird ein Vergleichsmoment im Stützeskeifen m_0 eingeführt. Für Innensützen beträgt dieses $m_0 = V/8$, für Randstützen $m_0 = V/4$ und für Eckstützen $m_0 = V/2$, wobei V der Stützenkraft entspricht. Die entsprechenden Werte folgen direkt aus der Betrachtung der Zusammenfügung einzelner Plattensegmente mit diskontinuierlichen Drillmomentenfeldern.



4.1.4. Anwendungsbeispiele

Mit den folgenden Beispielen soll der Kraftfluss in Platten aufgezeigt werden.

4.1.4.1. Quadratplatte

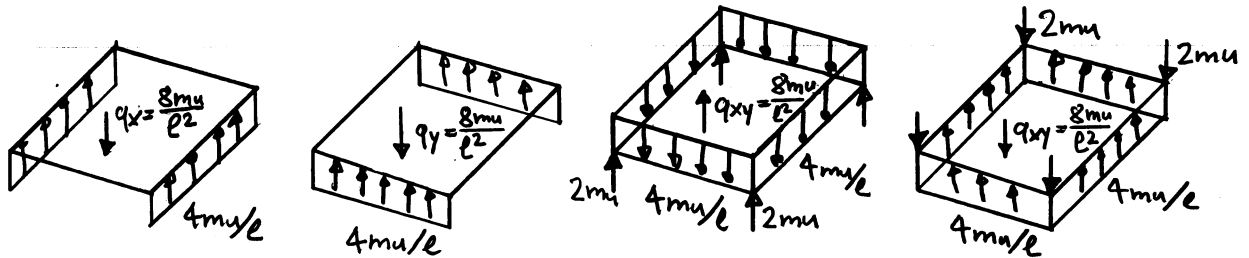
Wir betrachten eine Quadratplatte mit Seitenlänge l , wobei der Ursprung des Koordinatensystems im Plattenmittelpunkt liegt.

Ansatzfunktionen für m_x , m_y und m_{xy} :

$m_x = \mu(1 - 4x^2/l^2)$
 $m_y = \mu(1 - 4y^2/l^2)$
 $m_{xy} = \mu(4xy/l^2)$
 $m_{xy} = \mu(-4xy/l^2)$

Unter Berücksichtigung der Gleichgewichtsbedingungen sowie der statischen Randbedingungen erhält man für verschiedenen

Ansatzfunktionen die entsprechende Flächenbelastungen und Auflagerreaktionen.



$$m_x = m_u(1 - 4x^2/e^2) \quad m_y = m_u(1 - 4y^2/e^2) \quad m_{xy} = m_u(4xy/e^2) \quad m_{xy} = m_u(-4xy/e^2)$$

Fall 1: $m_x = m_u(1 - 4x^2/e^2)$, $m_y = m_u(1 - 4y^2/e^2)$ und $m_{xy} = m_u(4xy/e^2)$

$$q + \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \underline{q = 8mu/e^2}$$

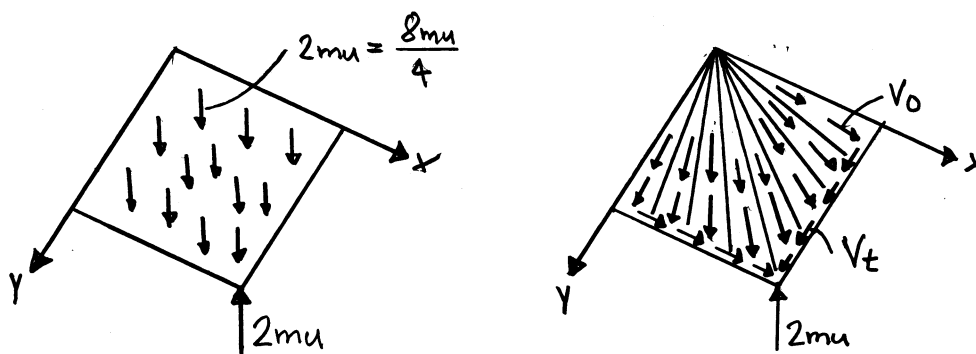
$$V_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = -4mu \cdot x/e^2$$

$$V_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = -4mu \cdot y/e^2$$

$$\left. \begin{aligned} q_x = V_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ q_y = V_y + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Stützkräfte}$$

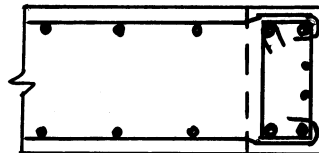
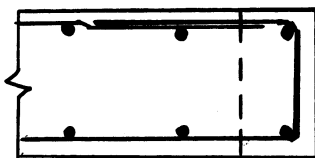
$$V_0 = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 4mu \sqrt{x^2 + y^2}/e^2$$

$$\tan \varphi_0 = V_y/V_x = y/x$$



Der Ansatz entspricht einer in den Ecken gestützten Platte. Die Hauptquerkraft wird strahlenförmig vom Plattenmittelpunkt zu den Plattenrändern abgetragen; vom Plattenrand werden die anfallenden Querkräfte mit einer konzentrierten Randquerkraft längs des Plattenrands zu den Plattenecken übertragen. In den

Plattenecken weist die Hauptquerkraft ein Maximum auf und die dazugehörige Hauptquerkrafttrichtung verläuft unter einem Winkel von 45° gegenüber dem Plattenrand. Bei einer orthogonalen Biegebewehrungsführung parallel zu den Plattenrändern ist beim Querkraftwiderstand von Platten ohne Querkraftbewehrung die Abweichung der Hauptquerkrafttrichtung von den Bewehrungsrichtungen zu berücksichtigen. Im weiteren erfordert die konzentrierte Querkraftabtragung entlang des Plattenrands eine entsprechende Verbügelung des Rands.



Fall 2: $m_x = m_u (1 - 4x^2/l^2)$, $m_y = m_u (1 - 4y^2/l^2)$ und $m_{xy} = m_u (-4xy/l^2)$

$$q + \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \underline{q = 24 m_u / l^2}$$

$$V_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} = -12 m_u \cdot x / l^2$$

$$V_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_x}{\partial x} = -12 m_u \cdot y / l^2$$

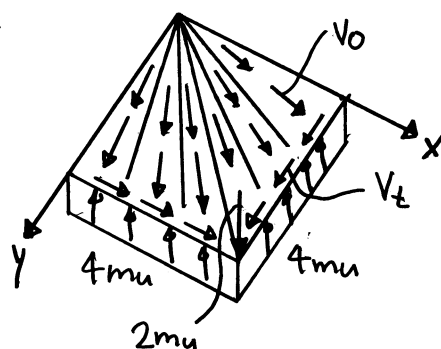
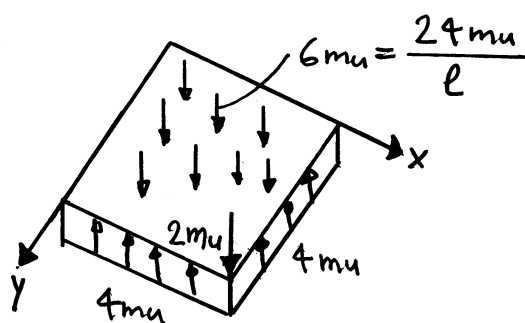
$$q_x = V_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = -16 m_u \cdot x / l^2$$

$$q_y = V_y + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = -16 m_u \cdot y / l^2$$

$$\left. \begin{matrix} q_x = V_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = -16 m_u \cdot x / l^2 \\ q_y = V_y + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = -16 m_u \cdot y / l^2 \end{matrix} \right\} \text{Stützkräfte} \begin{cases} x = \frac{l}{2}: q_x = -8 m_u / l \\ y = \frac{l}{2}: q_y = -8 m_u / l \end{cases}$$

$$V_0 = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 12 m_u \sqrt{x^2 + y^2} / l^2$$

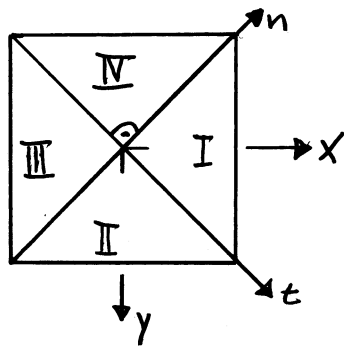
$$\tan \varphi_0 = V_y / V_x = y / x$$



Der Ansatz entspricht einer frei aufgelegten Platte mit zurückgehaltenen Ecken unter einer gleichmässig verteilten Flächenlast. Die Abtragung der Hauptquerkräfte zum Plattenrand ist analog zu Fall 1; entlang des Plattenrands wird ebenfalls eine konzentrierte Querkraft abgetragen.

4.1.4.2. Quadratplatte mit statischer Diskontinuität

Wir betrachten eine Quadratplatte mit Ursprung des Koordinatensystems im Plattenmittelpunkt; die Diagonalen teilen die Platte in vier Segmente.

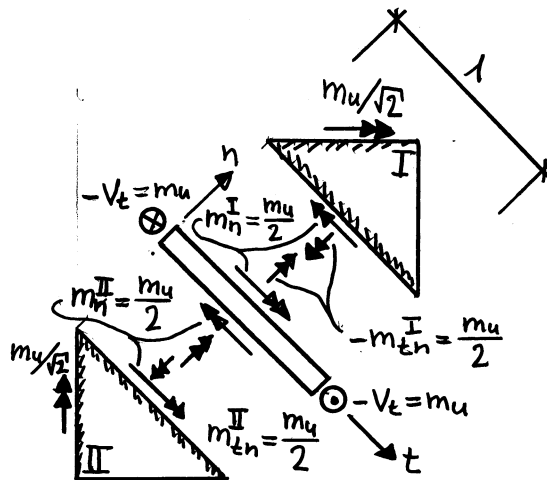
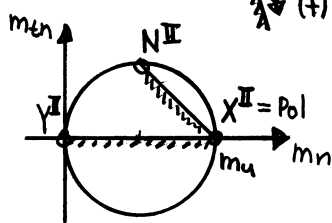
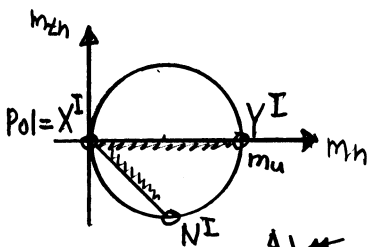


Ansatzfunktionen für m_x, m_y und m_{xy} :

$$m_x^I = m_x^{III} = 0, \quad m_y^I = m_y^{III} = m_u$$

$$m_x^{II} = m_x^{IV} = m_u, \quad m_y^{II} = m_y^{IV} = 0$$

$$m_{xy}^I = m_{xy}^{II} = m_{xy}^{III} = m_{xy}^{IV} = 0$$



$$M_t = 0$$

$$V_n^I = V_n^{II} = 0$$

$$m_n^I = m_n^{II} = m_u/2$$

$$m_{tn}^I = -m_{tn}^{II} = -m_u/2$$

$$V_t = -m_u$$

$$q_n = 0$$

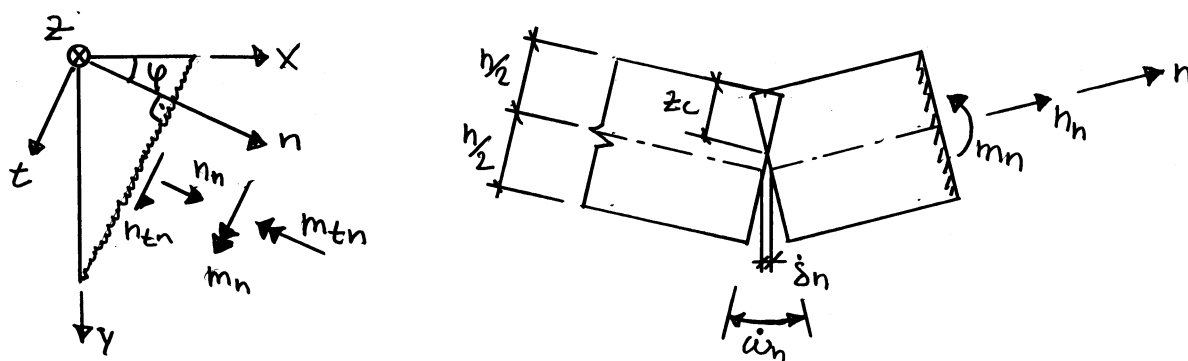
Der Ansatz entspricht einer in den Ecken gestützten Platte, welche im Plattenmittelpunkt durch eine Einzelkraft $Q = 4m_u$ beansprucht ist. Die Diagonalen entsprechen einer Diskontinuitätslinie, die je eine konzentrierte Querkraft von $Q/4 = m_u$ zu den Plattenecken abtragen; in den Segmenten I, II, III und IV verschwinden die Querkräfte.

4.2. Fließbedingungen für Plattenelemente

Grundsätzlich können die Fließbedingungen für Plattenelemente in verallgemeinerten Spannungsgrößen sowohl mit der statischen als auch mit der kinematischen Methode der Plastizitätstheorie hergeleitet werden; je nachdem welche Methode verwendet wird, können untere oder obere Grenzwerte der Traglast resultieren.

4.2.1. Normalmomenten - Fließbedingung

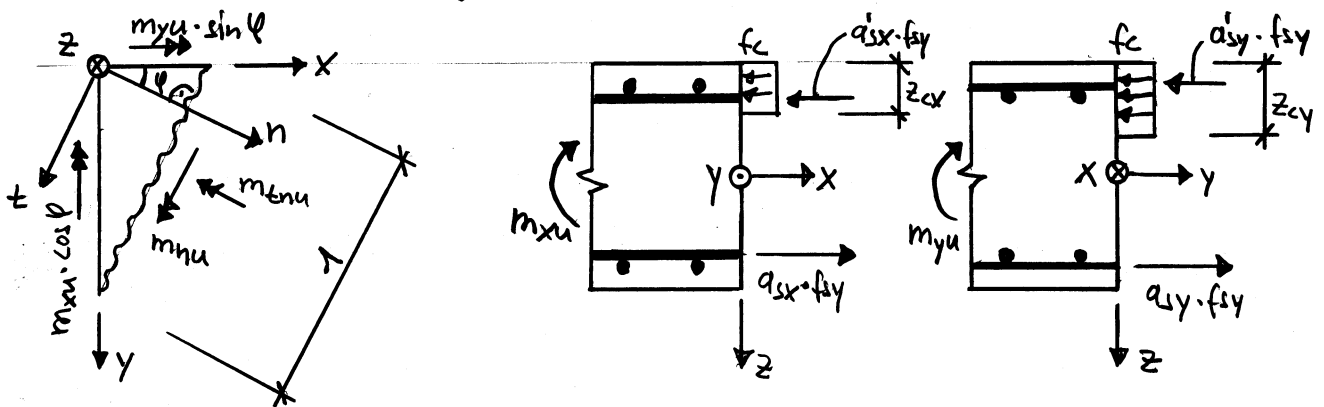
Die Normalmomentenfließbedingung basiert auf der kinematischen Methode. Bei der Herleitung betrachten wir eine orthogonal bewehrte Platte (Bewehrungsrichtungen fallen mit globalen Koordinatenachsen zusammen) mit einer beliebigen, in t -Richtung orientierter Fließgelenklinie.



Die Dissipationsarbeit in der Fließgelenklinie beträgt $dD = m_n \cdot \dot{\omega}_n + n_n \cdot \dot{\delta}_n$, wobei m_n das Biegemoment und n_n eine allenfalls vorkommende Normalkraft sowie $\dot{\omega}_n$ und $\dot{\delta}_n$ die inkrementelle Gelenkrotation beziehungsweise Verschiebung auf Höhe der Plattenmittelebene bezeichnet. Das Drillmoment m_{tn} sowie eine allenfalls vorkommende Schubkraft n_{tn} liefern keinen Beitrag zur Dissipation. Für eine konstante Normalkraft n_n , insbesondere für eine verschwindende Normalkraft

$n_n = 0$, erhält man unter Berücksichtigung der Gleichgewichtsbedingung in n -Richtung die Druckzonendicke $z_c = \frac{1}{2} - \frac{\sigma_n}{\omega n}$, und es resultiert der Wert für das plastische Moment m_{nu} .

Betrachtet man positive Biege widerstände m_{xu} und m_{yu} in den beiden Bewehrungsrichtungen, so erhält man an der Fließgelenklinie beziehungsweise in n -Richtung einen statisch zulässigen Spannungszustand.



Mit $n_n = n_{tn} = 0$ folgen die Spannungsergebnisse der Widerstände

$$m_{nu} = m_{xu} \cdot \cos^2 \varphi + m_{yu} \cdot \sin^2 \varphi$$

$$m_{tnu} = (m_{yu} - m_{xu}) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi$$

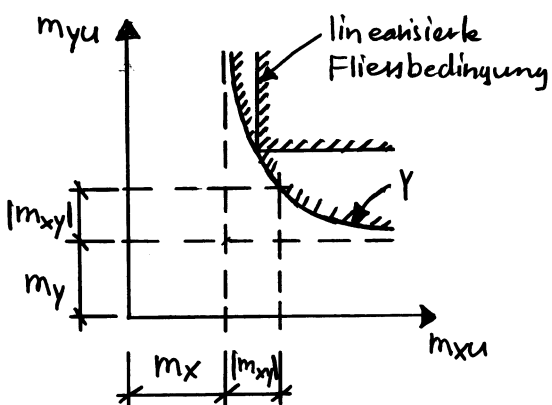
Da im allgemeinen die Druckzonenhöhen in den beiden Bewehrungsrichtungen ungleich sind, $z_{cx} \neq z_{cy}$, und somit zum betrachteten Spannungszustand kein verträglicher Fließgelenklinienmechanismus zugeordnet werden kann, entspricht der Biege widerstand einem unteren Grenzwert $m_{nu} \geq m_{xu} \cdot \cos^2 \varphi + m_{yu} \cdot \sin^2 \varphi$. Die Unterschiede der Druckzonenhöhe sind normalerweise jedoch gering, so dass die Beziehungen

$m_{nu} = m_{xu} \cdot \cos^2 \varphi + m_{yu} \cdot \sin^2 \varphi$ und $m'_{nu} = m'_{xu} \cdot \cos^2 \varphi + m'_{yu} \cdot \sin^2 \varphi$
für positive beziehungsweise negative Biege widerstände im allgemeinen

Drillmomenten, $m_{xy} > 0$, korrelieren und negative Funktionswerte ($-\frac{\pi}{2} < \varphi_u < 0$) mit negativen Drillmomenten, $m_{xy} < 0$. Im Fall einer (quasi)isotropen Platte, $m_{xu} = m_{yu} = m_u$ und $m'_{xu} = m'_{yu} = m'_u$, fällt die Richtung der Fließgelenklinie mit einer Haupttrichtung zusammen, $\varphi_u = \varphi_1$, während dies bei einer orthotropen Platte nicht zutrifft. Betrachtet man einen beliebigen Plattenpunkt mit den entsprechenden Spannungsergebnissen m_x , m_y und m_{xy} , so ist der Winkel zwischen einer positiven und einer negativen Fließgelenklinie mit den beiden Richtungswinkeln φ_u und φ'_u eindeutig bestimmt.

Die Fließbedingungen $Y=0$ und $Y'=0$ entsprechen zwei elliptischen Kegeln. Mit dem zugeordneten Fließgesetz (Kapitel 2.1.) folgen die plastischen Krümmungszinkremente $\dot{\chi}_x = \lambda \frac{\partial Y}{\partial m_x} = \lambda (m_{yu} - m_y)$, $\dot{\chi}_y = \lambda \frac{\partial Y}{\partial m_y} = \lambda (m_{xu} - m_x)$ und $2\dot{\chi}_{xy} = \lambda \frac{\partial Y}{\partial m_{xy}} = 2m_{xy}$. Unter Berücksichtigung von $Y=0 = m_{xy}^2 - (m_{xu} - m_x)(m_{yu} - m_y) = \dot{\chi}_x \cdot \dot{\chi}_y - \dot{\chi}_{xy}^2$ verschwindet ein Hauptkrümmungszinkrement, $\dot{\chi}_1 \cdot \dot{\chi}_2 = 0$; als verträgliche Mechanismen ergeben sich abwickelbare Flächen.

Analog zur Fließbedingung des Regimes 1 für orthogonal bewehrte Scheibenelemente kann die Fließbedingung linearisiert werden:



$$m_{xu} \geq m_x + k |m_{xy}|$$

$$m_{yu} \geq m_y + \frac{1}{k} |m_{xy}|$$

$$m'_{xu} \geq -m_x + k |m_{xy}|$$

$$m'_{yu} \geq -m_y + \frac{1}{k} |m_{xy}|$$

Die linearisierten Beziehungen eignen sich für die Bemessung, da die Biege Widerstände m_{xu} und m_{yu} unabhängig voneinander ermittelt werden können.

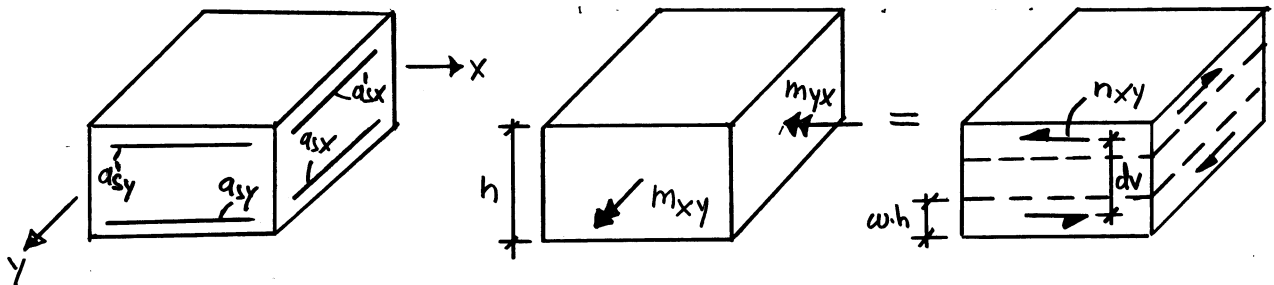
Mit der Normalmomenten - Fließbedingung wird insbesondere bei grossen Biegebewehrungsgehalten und einer Abweichung der Hauptmomentenrichtung von den Bewehrungsrichtungen der Tragwiderstand überschätzt. Dieser Schwachpunkt sollte besonders bei Plattenbereichen mit beachtlicher Drillmomentenbeanspruchung bezüglich der Bewehrungsrichtungen berücksichtigt werden. Im Kapitel 4.2.2. folgt eine ausführliche Diskussion.

4.2.2. Fließbedingung nach statischer Methode

Untere Grenzwerte für die Fließbedingungen können mit der Betrachtung eines Sandwichelements ermittelt werden; dabei werden die Momente dem oberen und unteren Sandwichdeckel zugewiesen, während die Querkräfte im Plattenkern übertragen werden. Das Sandwichmodell entspricht der statischen Methode beziehungsweise stellt dieses eine Gleichgewichtslösung dar. Im Kapitel 4.5. wird das Sandwichmodell im Zusammenhang mit dem Querkraftwiderstand und dem Verformungsvermögen von Stahlbetonplatten eingehend behandelt.

An dieser Stelle wird zur Illustration das Beispiel einer in x- und y-Richtung orthogonal bewehrten Platte unter einer reinen Drillbeanspruchung ($m_x = m_y = 0$) diskutiert. Es wird für alle vier Bewehrungslagen eine statische Höhe von $d = d_x = d_y = d'_x = d'_y = 0,9h$

angenommen. Das Drillmoment m_{xy} wird mit äquivalenten Scheibenkräften $n_{xy} = m_{xy}/dv$ im unteren und oberen Sandwichdeckel der Dicke $w \cdot h$ ersetzt.



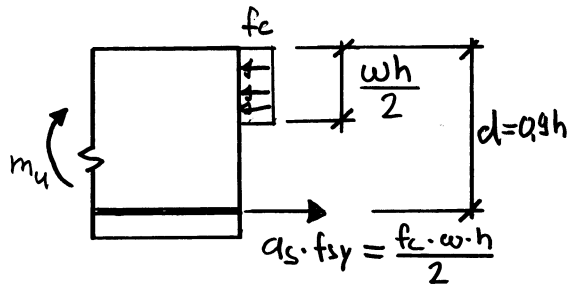
Die Scheibenkräfte n_{xy} entspricht Schubspannungen $\tau_{xy} = n_{xy}/(w \cdot h)$ in den Sandwichdeckeln. Unter Berücksichtigung der Fließbedingungen für Scheibenelemente (Kapitel 3.2.1.) kann eine maximale Schubspannung $\tau_{xy, \max} = f_c/2$ aufgenommen werden; die entsprechende Fließbedingung entspricht dem Regime 4. Setzen wir also $\tau_{xy} = f_c/2$ voraus, so folgt mit $dv = h(1-w)$ ein unterer Grenzwert des Drillmoments

$$m_{xy} = \tau_{xy} \cdot w \cdot h \cdot dv = \frac{f_c}{2} h^2 w (1-w) \leq m_{xyu}$$

in Funktion der Deckeldicke $w \cdot h$. Die Hauptdruckrichtung im Regime 4 ist durch den Ausdruck $\cot^2 \theta = 1$ definiert, so dass mit $\sigma_x = \sigma_y = 0$ und den Beziehungen $\tau_{xy} \cdot \cot \theta = p_x \cdot f_{sy}$ sowie $\tau_{xy} \cdot \tan \theta = p_y \cdot f_{sy}$ die erforderlichen geometrischen Bewehrungsgehalte $p_x = p_y = \tau_{xy}/f_{sy} = \frac{f_c}{2f_{sy}}$ resultieren; dabei beziehen sich die Bewehrungsgehalte auf die Scheibendicke $w \cdot h$, das heißt $p_x = p_y = a_{sx}/(w \cdot h) = a_{sy}/(w \cdot h)$. Demzufolge muss die Platte (quasi) isotrop bewehrt werden.

Betrachtet man die Normalmomenten-Fließbedingung, so vereinfacht sich die Fließbedingung im Fall $m_{xu} = m_{yu} = m_u$ und $m_x = m_y = 0$ zu

$Y=0 = m_{xy}^2 - m_u^2$. Der Biege widerstand in x- und y- Richtung wird unter der Annahme ermittelt, dass die eingelegte Bewehrung gerade der erforderlichen Bewehrung für ein vorgegebenes Drillmoment $m_{xy} = \frac{1}{2} f_c h^2 w(1-w)$ entspricht. Vernachlässigt man



die Druckbewehrung, so folgt mit der geometrischen Annahme $d = 0.9h$ der Biege widerstand $m_u = \frac{f_c}{2} h^2 w \left(\frac{9}{10} - \frac{w}{4} \right)$. Gemäss Normalmomenten - Fließbedingung

beträgt somit der Drillmomenten widerstand

$$m_{xyu} = m_u = \frac{f_c}{2} h^2 w \left(\frac{9}{10} - \frac{w}{4} \right)$$

Ein Vergleich des vorgegebenen Drillmoments mit dem Drillmomenten - widerstand anhand der Normalmomenten - Fließbedingung bestätigt die Aussage, dass bei grossen Bewehrungsgehalten und beachtlichen Drillmomentenbeanspruchungen, der Tragwiderstand mit der Normalmomenten - Fließbedingung überschätzt wird.

w	$\rho_{\text{Biegung}} \cdot \frac{f_{sy}}{f_c}$	ρ_{Biegung}	$\beta = \frac{m_{xyu}}{m_{xy}}$
0,1	0,055	0,33%	0,972
0,2	0,111	0,67%	1,063
0,3	0,167	1,00%	1,179
0,4	0,222	1,33%	1,333
0,5	0,278	1,67%	1,550

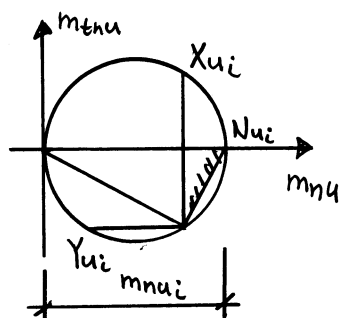
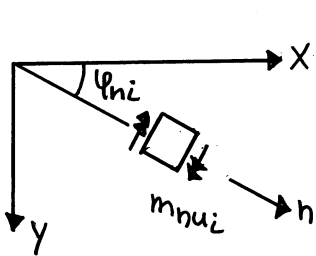
$f_c = 30 \text{ N/mm}^2, f_{sy} = 500 \text{ N/mm}^2$

Dabei bezieht sich der geometrische Biegebewehrungsgehalt ρ_{Biegung} auf die statische Höhe d, $\rho_{\text{Biegung}} = a_s/d = (f_c w h) / (2 f_{sy} \cdot d)$. Der Faktor $\beta = (0.9 - 0.25w) / (1-w)$ entspricht dem Verhältnis Drillmomenten-

widerstand gemäss Normalmomenten-Fließbedingung zu effektivem Drillwiderstand m_{xy} ; $\beta > 1$ bedeutet, dass der Traywiderstand überschätzt wird. Betrachtet man eine Platte aus Beton mit einer Druckfestigkeit $f_c = 30 \text{ N/mm}^2$ und Bewehrungsstahl mit einer Fließgrenze $f_{sy} = 500 \text{ N/mm}^2$, so führt unter den getroffenen Annahmen ($d = 0,9h$) ein Biegebewehrungsgehalt $\rho_{\text{Biegung}} = 1,67\%$ bei einer Bemessung anhand der Normalmomenten-Fließbedingung zu einer Überschätzung des Drillmomentenwiderstands von 55%.

4.2.3. Schiefe Bewehrung

Analog zu schiefen Bewehrungslagen bei Scheibenelementen (Kapitel 3.2.2.) lässt sich der Biege- und Drillwiderstand m_{nu} einer beliebigen Bewehrungsrichtung n_i , welche gegenüber der x -Achse um den Winkel φ_i geneigt ist, durch fiktive Biege- und Drillwiderstände m_{xu} und m_{yu} beziehungsweise m_{xyu} bezüglich dem charakteristischen x - y -Koordinatensystem ausdrücken.



$$m_{xu} = m_{nu} \cdot \cos^2 \varphi_i$$

$$m_{yu} = m_{nu} \cdot \sin^2 \varphi_i$$

$$m_{xyu} = m_{nu} \cdot \sin \varphi_i \cdot \cos \varphi_i$$

Durch Linearkombination der einzelnen Bewehrungslagen erhält man die fiktiven Biege- und Drillwiderstände

$$m_{xu} = \sum_{i=1}^n m_{xu_i} = \sum_{i=1}^n m_{nu_i} \cdot \cos^2 \varphi_i$$

$$m_{yu} = \sum_{i=1}^n m_{yu_i} = \sum_{i=1}^n m_{nu_i} \cdot \sin^2 \varphi_i$$

$$m_{xyu} = \sum_{i=1}^n m_{xyu_i} = \sum_{i=1}^n m_{nu_i} \cdot \sin \varphi_i \cdot \cos \varphi_i$$

Betrachtet man eine beliebige Fließgelenklinie, die in t -Richtung

orientiert ist, so beträgt der fiktive Biege Widerstand in der Fließgelenklinie beziehungsweise in der mit dem Winkel φ gegenüber der x -Achse geneigten n -Achse

$$m_{nu} = m_{xu} \cdot \cos^2 \varphi + m_{yu} \cdot \sin^2 \varphi + 2 m_{xyu} \sin \varphi \cos \varphi$$

welcher dem aufgetragenen Biegemoment

$$m_n = m_x \cdot \cos^2 \varphi + m_y \cdot \sin^2 \varphi + 2 m_{xy} \sin \varphi \cos \varphi$$

mit der Bedingung $m_{nu} \geq m_n$ gegenüber gestellt wird. Unter Berücksichtigung der Transformationsvorschriften $m_{nu} = \{n\}^T \cdot [M_u] \cdot \{n\}$ und $m_n = \{n\}^T \cdot [M] \cdot \{n\}$, wobei $\{n\}$ den Richtungsvektor und $[M_u]$ sowie $[M]$ die Momententensoren bezeichnen, welche in Matrixschreibweise in der Form

$$\{n\} = \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{Bmatrix}, [M_u] = \begin{bmatrix} m_{xu} & m_{xyu} \\ m_{xyu} & m_{yu} \end{bmatrix} \text{ und } [M] = \begin{bmatrix} m_x & m_{xy} \\ m_{xy} & m_y \end{bmatrix}$$

ausgedrückt werden, folgt mit der Bedingung $\{n\}^T \cdot [M_u - M] \cdot \{n\} = 0$ beziehungsweise $\det [M_u - M] = 0$ die Fließbedingung

$$Y = 0 = (m_{xyu} - m_{xy})^2 - (m_{xu} - m_x)(m_{yu} - m_y)$$

für die positiven Biege widerstände, wobei $m_{xu} - m_x \geq 0$ und $m_{yu} - m_y \geq 0$. Analog erhält man die Fließbedingung für negative Biege widerstände

$$Y' = 0 = (m'_{xyu} + m_{xy})^2 - (m'_{xu} + m_x)(m'_{yu} + m_y)$$

wobei $m'_{xu} + m_x \geq 0$ und $m'_{yu} + m_y \geq 0$.

Die Richtungen φ_u beziehungsweise φ'_u , für welche die Fließbedingung $Y = 0$ ($m_{nu} = m_n$) und $Y' = 0$ ($m'_{nu} = m_n$) erfüllt sind, folgen mit den Formeln

$$\tan \varphi_u = \pm \sqrt{\frac{m_{xu} - m_x}{m_{yu} - m_y}} \quad \text{und} \quad \tan \varphi'_u = \pm \sqrt{\frac{m'_{xu} + m_x}{m'_{yu} + m_y}}$$

4.3. Statische Methoden

Gleichgewichtslösungen beschreiben statisch zulässige Spannungszustände, welche die Gleichgewichtsbedingungen im Inneren der Platte sowie die statischen Randbedingungen erfüllen. Werden die Fließbedingungen an keiner Stelle der Platte verletzt, so resultiert nach dem unteren Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie ein unteres Grenzwert der Traglast. Eine entsprechende Bemessung von Platten ermöglicht eine detaillierte Verfolgung des Kraftflusses, was zu einer sauberen konstruktiven Durchbildung der Biege- und Querkraftbewehrung führt; ein vorzeitiges Versagen aufgrund eines spröden Querkraftbruchs beziehungsweise eines beschränkten Verformungsvermögens ist zu vermeiden, da dadurch die Schnittgrössenumlagerungen verunmöglicht werden.

Gleichgewichtslösungen basieren im allgemeinen auf linear elastischen Lösungen oder auf Ansatzfunktionen für die Momente. Linear elastische Lösungen stellen einen Gleichgewichtszustand dar, welche mit den entsprechenden kinematischen Randbedingungen der linearen Elastizitätstheorie verträglich sind; sie repräsentieren einen möglichen, statisch zulässigen Spannungszustand. Für die praktische Bemessung kommen zum Beispiel die Finite Elemente Methode (FEM) oder Tabellenwerke zur Anwendung. Bei Lösungen mit Ansatzfunktionen für die Momente ist insbesondere die Streifenmethode von grossem Interesse, da sich diese im Gegensatz zu linear elastischen Lösungen auch für Handrechnungen eignet.

4.3.1. Momentenfelder

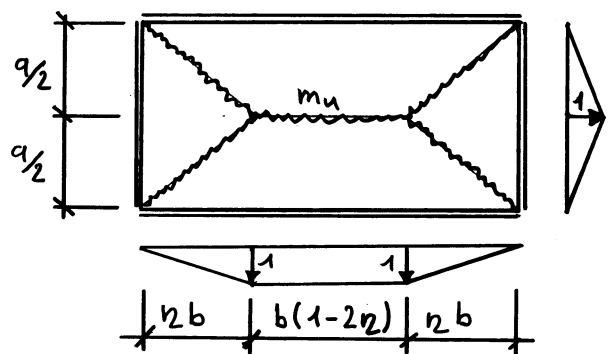
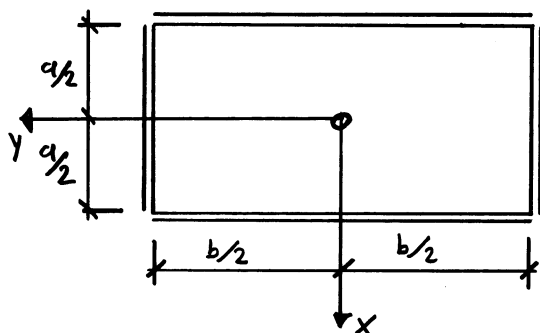
Aus der Gleichgewichtsbedingung (Kapitel 4.1.1.) kann die Tragwirkung einer Platte in drei Anteile q_x , q_y und q_{xy} aufgeteilt werden. Mit der Wahl geeigneter Ansatzfunktionen für die Biegemomente m_x und m_y sowie das Driftmoment m_{xy} können für einfache Lagerungs- und Belastungsfälle Gleichgewichtslösungen formuliert werden; vollständige Lösungen können nur für wenige spezielle Fälle angegeben werden.

Wir betrachten eine frei aufgelegte Rechteckplatte mit den Seitenlängen a und b , wobei der Ursprung des Koordinatensystems im Plattenmittelpunkt liegt. Mit den Ansatzfunktionen

$$m_x = m_u \left(1 - \frac{4x^2}{a^2} \right), \quad m_y = m_u \left(1 - \frac{4y^2}{b^2} \right) \quad \text{und} \quad m_{xy} = m_u \left(-\frac{4xy}{ab} \right)$$

resultiert ein uneres Grenzwert für die gleichmässig verteilte Flächenlast

$$q_u \geq 8m_u \left(\frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 b^2} \right)$$



Mit den Bedingungen für die Stützkräfte und die Eckkräfte erhält man die statischen Randbedingungen, welche eine konzentrierte Rückhüllekraft $2m_u$ in den Plattenecken und konstante Rand-

stützkraft $4m_u(a+b)/(ab)$ erfordern. Kontrolliert man die Fließbedingungen (Kapitel 4.2.1.) unter Voraussetzung einer orthogonal verlegten Bewehrung mit (quasi) isotropen Biege widerständen $m_{xu} = m_{yu} = m_u$ und $m'_{xu} = m'_{yu} = m_u$, so wird für die positiven Biege widerstände die Fließbedingung an jeder Stelle der Platte gerade erfüllt; eine Abstufung der unteren Bewehrung ist unzulässig. Die Fließbedingung für die negativen Biege widerstände wird nur in den Plattenecken erfüllt; eine obere Bewehrung ist nur in den Eckspitzen, die durch den Plattenrand und die einbeschriebene Ellipse mit der Funktion $[1 = 4(x^2/a^2 + y^2/b^2)]$ definiert sind, erforderlich. Dieser Einspanneffekt der Plattenecken ist bei der Betrachtung der Hauptmomente und der entsprechenden Hauptmomentenrichtungen gut ersichtlich.

Untersucht man die Platte mit einem Pyramidenmechanismus, so ergeben sich obere Grenzwerte, die nur geringfügig über dem unteren Grenzwert liegen.

b/a	η	$q_s [m_u/a^2]$	$q_n [m_u/a^2]$
1,0	0,500	24,00	24,00
1,5	0,396	16,89	16,97
2,0	0,326	14,00	14,14
2,5	0,276	12,48	12,65
3,0	0,238	11,56	11,73

Für den Fall $b/a = 1,0$, das heißt für die Quadratplatte, liegt eine vollständige Lösung vor.

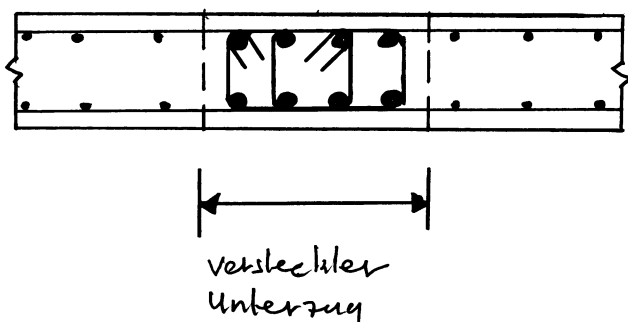
4.3.2. Einfache Streifenmethode

Bei der einfachen Streifenmethode werden die Drillmomente vernachlässigt, $m_{xy} = 0$. Im Rahmen der Plastizitätstheorie stellt dieses Verfahren eine statische Methode dar, die einen unteren Grenzwert der Traglast liefert. Die Gleichgewichtsbedingung reduziert sich auf die Beziehung

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -q = -(q_x + q_y)$$

wobei die gesamte Belastung q durch eine Balkentragungswirkung in der x - und y -Richtung abgetragen wird.

Neben der direkten Lastabtragung von jedem Streifen zu den Auflagern, können mit der Einführung von versteckten Unterzügen (strong bands) einzelne Streifen auch indirekt gelagert werden. Die versteckten Unterzüge werden dabei als fiktive Lager behandelt, welche einer statischen Diskontinuität beziehungsweise einem fiktiven Balken entsprechen; in der Regel weisen diese eine bedeutende Querkraft- und Momentenbeanspruchung auf. Zur Aufnahme der Querkraft ist eine entsprechende Querkraftbewehrung in den versteckten Unterzügen erforderlich beziehungsweise sollte diese konsequent eingelegt werden.



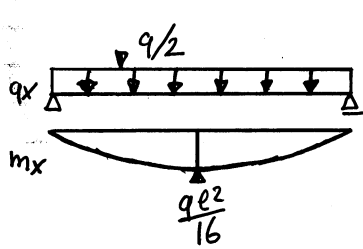
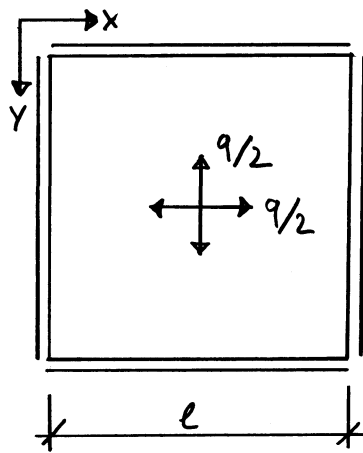
Nebenbemerkung:

Gemäss Norm SIA 262 (5.5.2) ist in Balken stets eine minimale Querkraftbewehrung von $f_{min} = 0,2\%$ anzuordnen.

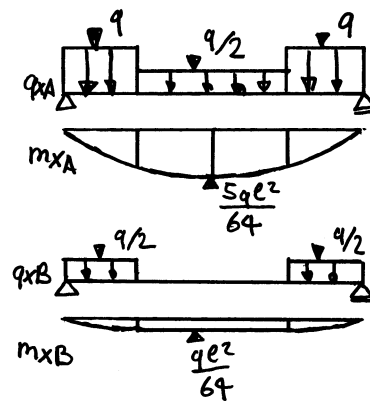
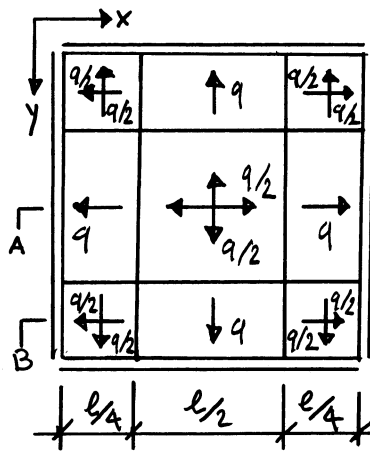
4.3.2.1. Beispiel 1 - frei aufgelegte Quadratplatte

Wir betrachten drei verschiedene Lösungen für die Lastabtragung einer gleichmässig verteilten Flächenbelastung; die Quadratplatte ist auf allen vier Seiten einfach gelagert.

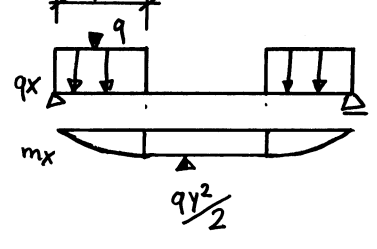
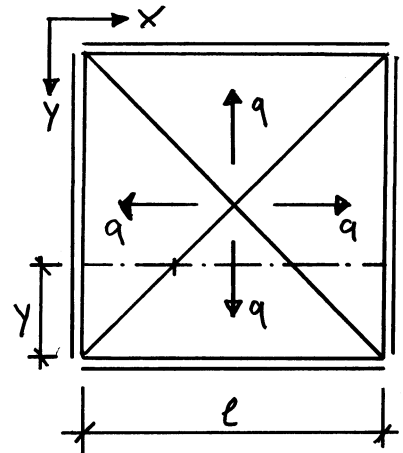
Lösung 1



Lösung 2



Lösung 3



Bewehrungsaufwand pro Richtung mit Bewehrungsabstufung:

$$\tilde{m} = 0,0417 qe^2$$

$$\tilde{m} = 0,0339 qe^2$$

$$\tilde{m} = 0,0313 qe^2$$

Bewehrungsaufwand pro Richtung ohne Bewehrungsabstufung:

$$\tilde{m} = 0,0625 qe^2$$

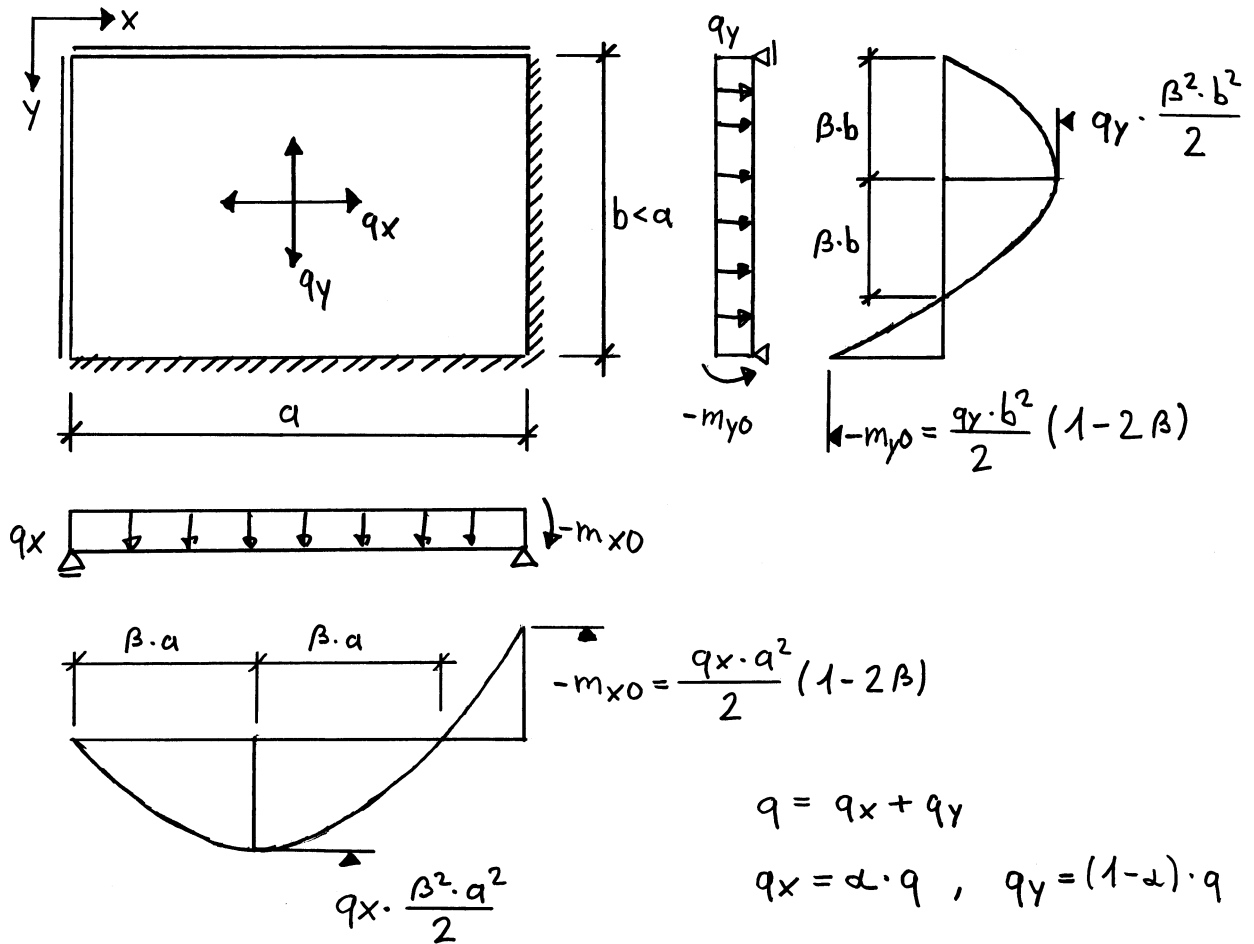
$$\tilde{m} = 0,0469 qe^2$$

$$\tilde{m} = 0,0417 qe^2$$

Lösung 2 ergibt einen geringeren Bewehrungsaufwand und ein vernünftigeres Bewehrungslayout als Lösung 1; eine Bewehrungsanordnung gemäss Lösung 3 ist unpraktisch, da die Bewehrungsquerschnitte stetig ändern.

4.3.2.2. Beispiel 2 - Rechteckplatte unter verteilter Flächenlast

Wir betrachten eine Rechteckplatte mit den Seitenlängen a und b wobei je eine kurze und lange Seite eingespannt beziehungsweise frei aufgelegt ist.

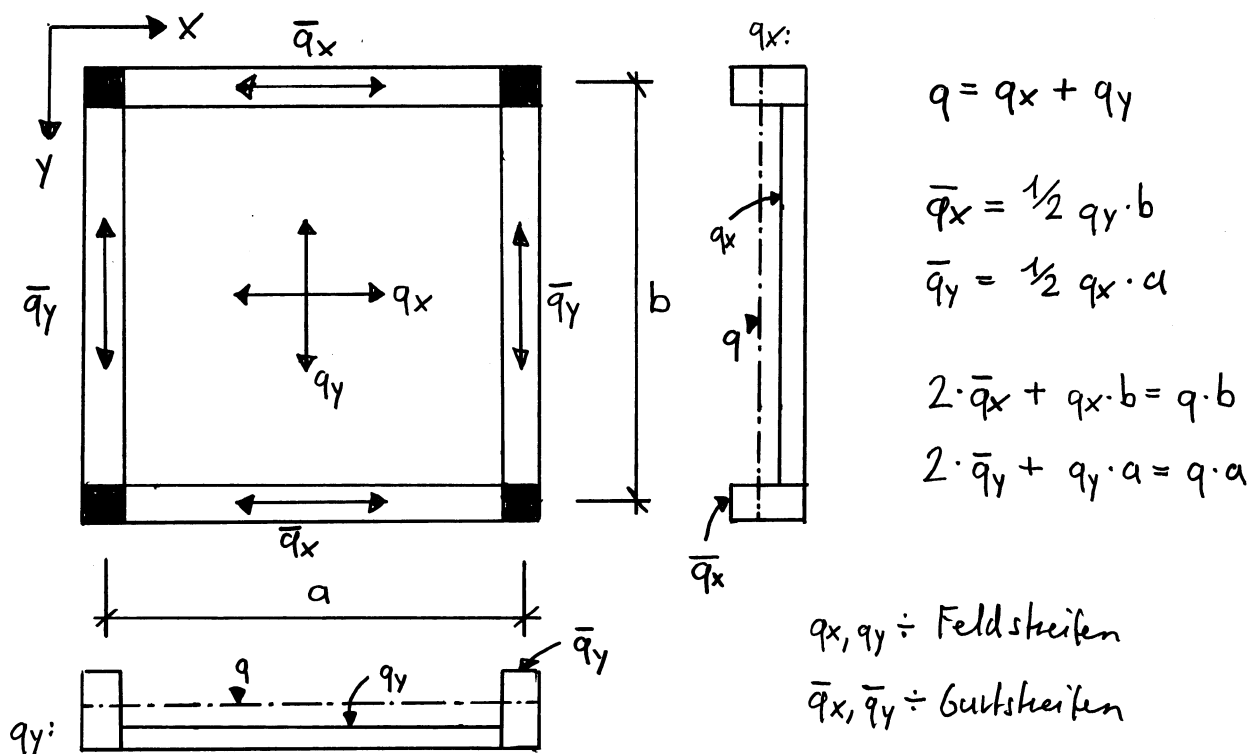


Damit im Gebrauchszustand ein günstiges Verhalten hinsichtlich Rissbildung und Durchbiegungen gewährleistet ist, sollten die Einspannmomente betragsmässig ungefähr 1,5 bis 2,5 mal so gross wie die Feldmomente gewählt werden, das heisst $\beta = 0,35 \div 0,39$. Die Lastaufteilung in x - und y -Richtung ist von dem Spannweitenverhältnis a/b abhängig; damit im Gebrauchszustand ein befriedigendes Rissverhalten erreicht werden kann, sollte das Verhältnis zwischen dem grösseren und kleineren positiven Feldmoment nicht grösser als $1/12 = 5,0$ gewählt werden. Bei kleinen Spannweiten ist es oft

sinnvoll, dass die erforderliche Mindestbewehrung im Feldbereich ausgenützt wird. In der Plattenecke, bei welcher die beiden eingespannten Plattenränder zusammentreffen, wird die Hauptquerkraft maximal; die Abweichung der Hauptquerkrafttrichtung von den zu den Plattenrändern in der Regel parallelen Bewehrungsrichtungen ist bei der Bemessung zu berücksichtigen.

4.3.2.3. Beispiel 3 - Flachdecken

Flachdecken können mit einem Trägernetz in Stützenachse modelliert werden; dabei wird die Flächenbelastung mit den Feldstreifen auf die Gurtstreifen abgetragen, die als statische Diskontinuität beziehungsweise als versteckter Unterzug den Kraftfluss zu den Stützen sicherstellen.

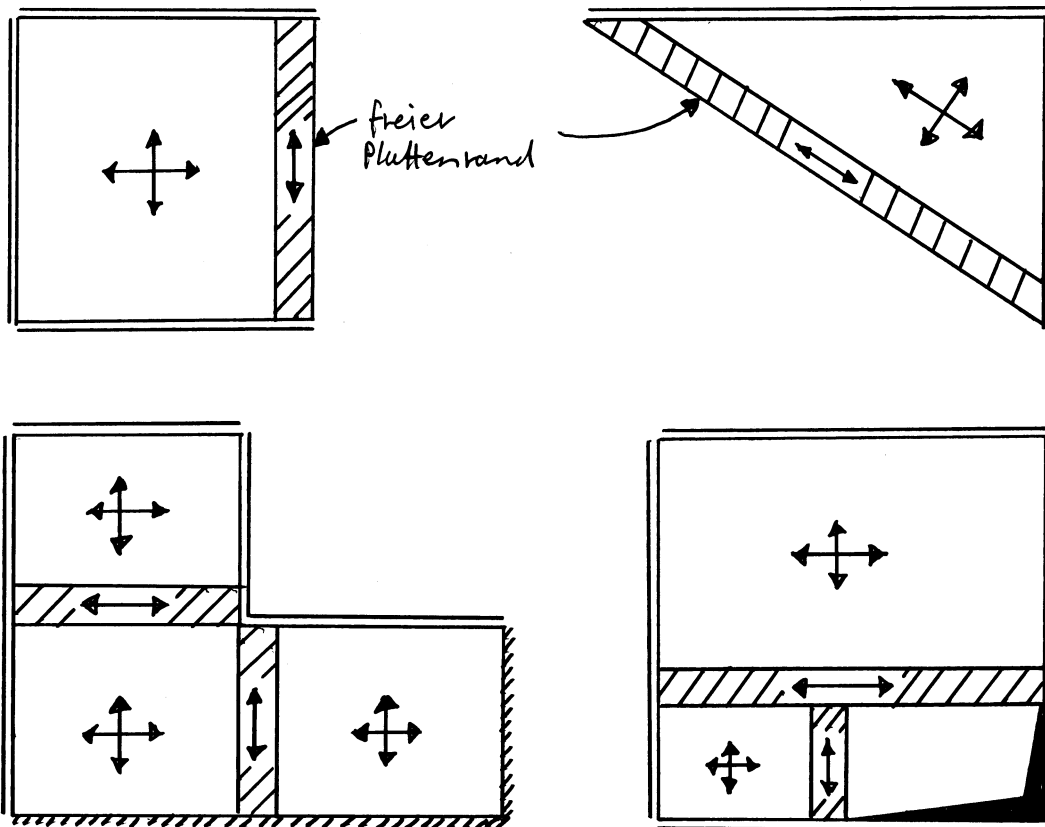


Bei Flachdecken wird sowohl in der x- als auch in der y-Richtung die volle Belastung abgetragen. Aufgrund der konzentrierten Querkraft- und Biegemomentenbeanspruchung der Gurtstreifen sowie

Zur Sicherstellung eines ausreichenden wird in den Gurtstreifen die konsequente Anordnung einer Querkraftbewehrung empfohlen. Dem Kraftfluss im Stützenbereich ist dabei besondere Beachtung zu schenken.

4.3.2.4. Beispiel 4 - Versteckte Unterzüge (strong bands)

Mit versteckten Unterzügen können fiktive Lager eingeführt oder linienförmige Belastungen abgetragen werden. Im Rahmen der Pladizitätstheorie kann die Breite frei gewählt werden, der Kraftfluss ist jedoch konsequent zu verfolgen (Gurtstreifenbreite grösser als Stützenabmessung). Da Versteckte Unterzüge als Balken bemessen werden, sollte in jedem Fall eine minimale Querkraftbewehrung angeordnet werden.



Nebenbemerkung:

Mit der Streifenmethode kann der Kraftfluss detailliert verfolgt werden; die Bewehrung kann entsprechend abgestuft werden.

Bei Platten ohne Querkraftbewehrung ist gemäss der Norm S/A 262 (5.5.3) in der Regel mindestens die Hälfte der an den Stellen maximaler Biegebeanspruchung erforderlichen Biegebewehrung bis über die Auflager zu führen und zu verankern. Unter Berücksichtigung der Beziehungen $M = d_v \cdot T$, wobei M das Biegemoment, d_v den Hebelarm der inneren Kräfte und T die Gurtkraft bezeichnet, sowie $dM/dx = V = d_v' \cdot T + d_v \cdot T'$, kann die Querkraftabtragung in eine Bogenwirkung $d_v' \cdot T$ und eine Verbundwirkung $d_v \cdot T'$ aufgeteilt werden. Mit der Bedingung, dass mindestens die Hälfte der Biegebewehrung bis zum Auflager geführt werden soll, wird indirekt die Bogentragwirkung zur Abtragung der Querkraft V sichergestellt.

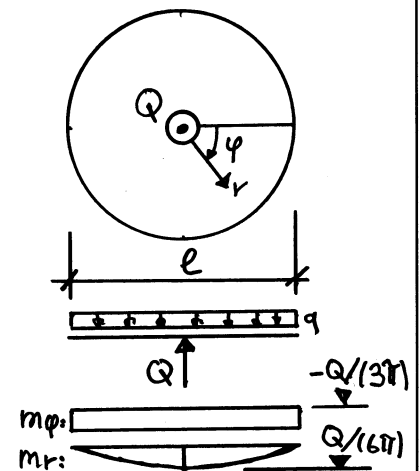
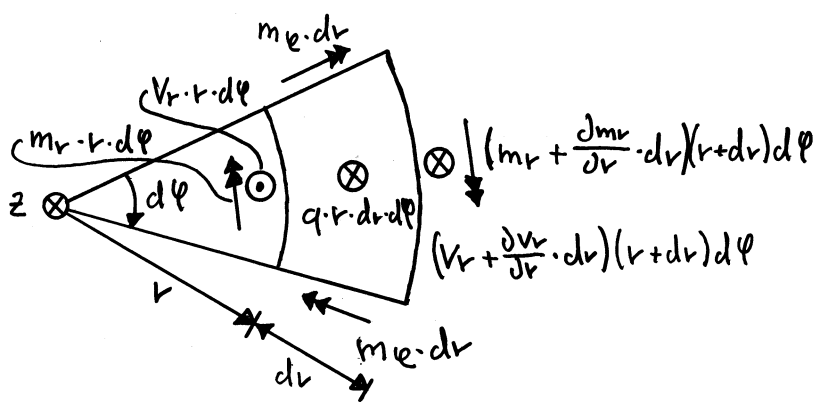
Bei kleinen Platten lohnt sich eine Bewehrungsabstufung infolge der erforderlichen Verankerungslängen der Bewehrungsstäbe in der Regel nicht; eine Abstufung der Bewehrung bis zur Hälfte der maximal erforderlichen Biege widerstände führt bei grossen Platten zu wirtschaftlichen Lösungen. Im weiteren kann dadurch die Traglast eingegrenzt werden, das heisst es resultieren kleinere obere Grenzwerte für die Traglast, während die unteren Grenzwerte unverändert bleiben.

4.3.3. Erweiterte Streifenmethode

Mit der erweiterten Streifenmethode können Punktlasten und konzentrierte Belastungen berücksichtigt werden. Wir betrachten zunächst eine Gleichgewichtslösung für eine im Plattenzentrum punktförmig gestützte Kreisplatte mit Durchmesser l unter einer gleichmäßig verteilten Flächenbelastung. Für rotationsymmetrische Probleme reduzieren sich die Gleichgewichtsbedingungen in Polarkoordinaten zu den Beziehungen

$$r \cdot V_r + \int q \cdot r \cdot dr + C_1 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d(m_r \cdot r)}{dr} - m_\varphi - r \cdot V_r = 0$$

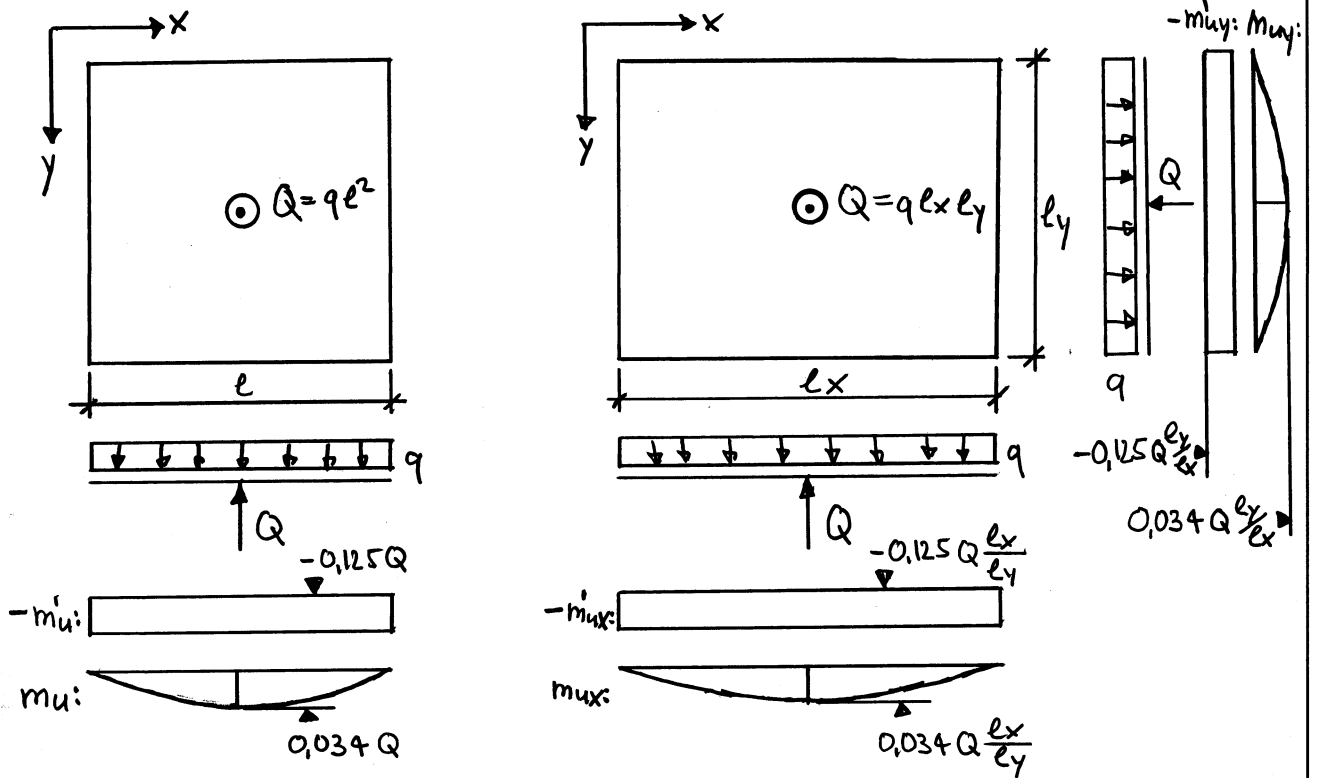
wobei m_r und m_φ das radiale und tangential Biegemoment sowie V_r die radiale Querkraft bezeichnet, $m_{r\varphi} = V_\varphi = 0$.



Unter der Annahme $m_\varphi = -m_u$ für die tangentialen Momente folgt mit der Stützenreaktion $Q = q\pi l^2/4$ die Beziehung für die radialen Momente $d(r \cdot m_r)/dr = Q/(2\pi) - qr^2/2 - m_u$; Integration über den Radius r liefert $m_r = Q/(2\pi) - qr^2/6 - m_u + C_1/r$. Mit den Bedingungen, dass im Plattenzentrum $r=0$ endliche radiale Momente m_r gefordert werden sowie mit $m_r = 0$ am Plattenrand $r = l/2$, erhält man

$$m_u = \frac{Q}{3\pi}, \quad m_\varphi = -\frac{Q}{3\pi} = \text{konstant} \quad \text{und} \quad m_r = \frac{Q}{6\pi} - \frac{qr^2}{6}$$

Somit ist ein (quasi) isotroper oberer Biege widerstand $m'_u = Q/(32\pi)$ und ein (quasi) isotroper unterer Biege widerstand $m_u = Q/(64\pi)$ im Plattenzentrum erforderlich; im Plattenzentrum resultiert die Bedingung $(m_u + m'_u) \geq Q/(22\pi)$.



Für eine im Plattenzentrum punktgestützte Quadratplatte mit Seitenlänge l unter gleichmässig verteilter Flächenbelastung folgen in Anlehnung an die Bedingung $(m'_u + m_u) = Q/(22\pi)$ der Kreisplatte die Beziehungen

$$m'_u \geq \frac{Q}{8} = 0,125 Q \quad \text{und} \quad m_u \geq \left(\frac{1}{2\pi} - \frac{1}{8} \right) Q = 0,034 Q$$

für die erforderlichen (quasi) isotropen oberen und unteren Biege widerstände. Der negative Biege widerstand $m'_u = 0,125 Q$, welcher dem Mittelwert des Biege widerstands in Stützenachse entspricht, erhält man bei Behaltung eines Fließgelenklinienmechanismus, während der positive Biege widerstand parabolisch

abgestuft werden kann. Streng genommen entspricht diese Lösung einem oberen Grenzwert der Traglast; da die Stützenabmessungen in Wirklichkeit immer endlich sind, liefern die Beziehungen $m_{ux} \geq 0,125 Q$ und $m_{uy} \geq 0,034 Q$ sinnvolle Widerstände für die praktische Bemessung.

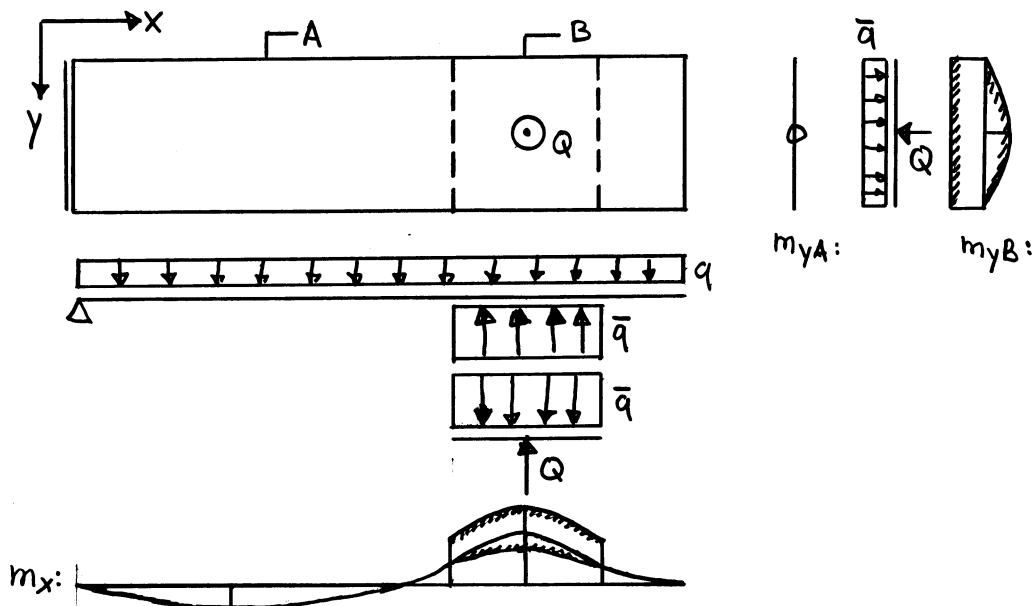
Für eine im Plattenzentrum punktgestützte Rechteckplatte mit den Seitenlängen l_x und l_y unter gleichmäßig verteilter Belastung erhält man die analogen Beziehungen

$$m'_{ux} \geq 0,125 Q \frac{l_x}{l_y}, \quad m'_{uy} \geq 0,125 Q \frac{l_y}{l_x}, \quad m_{ux} \geq 0,034 Q \frac{l_x}{l_y} \quad \text{und} \quad m_{uy} \geq 0,034 Q \frac{l_y}{l_x}$$

für die erforderlichen Biege widerstände in x- und y-Richtung.

In Kombination mit der einfachen Streifenmethode werden die für die Verteilung einer Punktlast erforderlichen Biege widerstände mit den erforderlichen Biege widerständen der einzelnen Streifen superponiert.

Beispiel: Punktförmig gelagerter Plattenstreifen mit Auskragung.

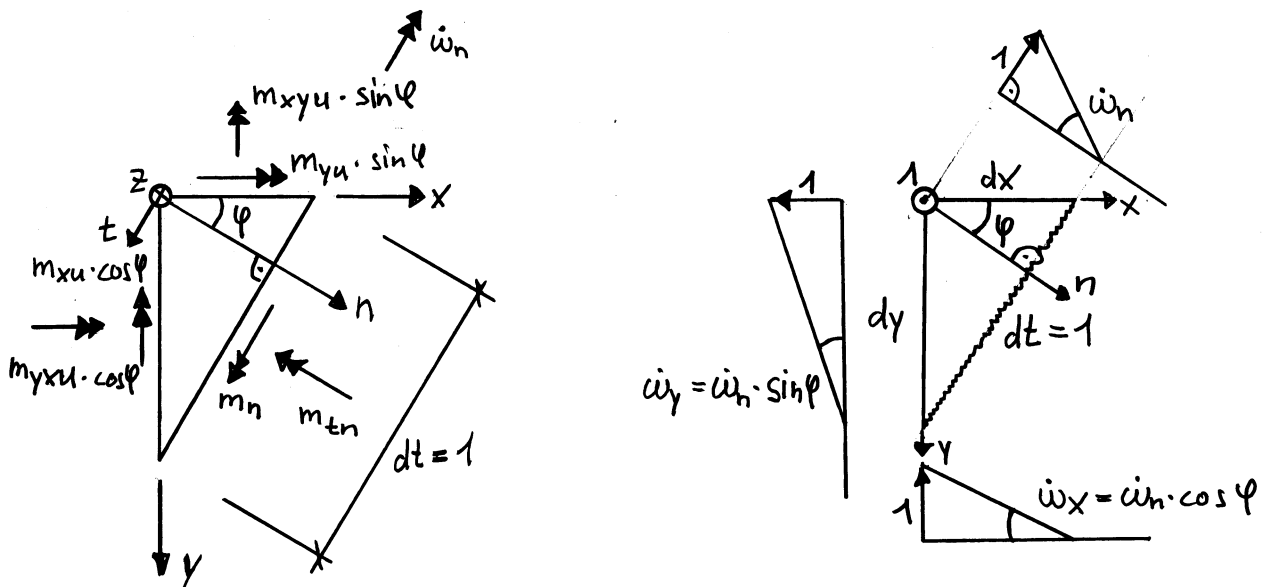


4.4. Kinematische Methoden

Die Betrachtung von Bruchmechanismen mit Fließgelenklinien basiert auf der Grundlage des oberen Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie. Die Anwendung der Fließgelenklinienmethode ist relativ einfach und erlaubt gerade bei der Vorbemessung beziehungsweise Überprüfung schnelle Aussagen bezüglich der Traglast, wobei es sich aber um obere Grenzwerte handelt; vollständige Lösungen existieren nur für wenige Spezialfälle.

4.4.1. Diskrete Fließgelenklinie

Wir betrachten eine Platte mit fiktiven Biege- und Drillmomentenwiderständen m_{xu} , m_{yu} und m_{xyu} (Kapitel 4.2.3.), die eine beliebige, in t -Richtung orientierte Fließgelenklinie aufweist.



Die Dissipationsarbeit in der Fließgelenklinie mit der Elementlänge dt beträgt $dD = m_n \cdot \dot{\omega}_n \cdot dt$, wobei m_n das Biegemoment und $\dot{\omega}_n$ die inkrementelle Gelenkrotation bezeichnet. Unter Anwendung der Beziehungen $m_{nu} = m_{xu} \cdot \cos^2 \varphi + m_{yu} \cdot \sin^2 \varphi + 2m_{xyu} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi$ für den Biege widerstand in n -Richtung und $\dot{\omega}_x = \dot{\omega}_n \cdot \cos \varphi$

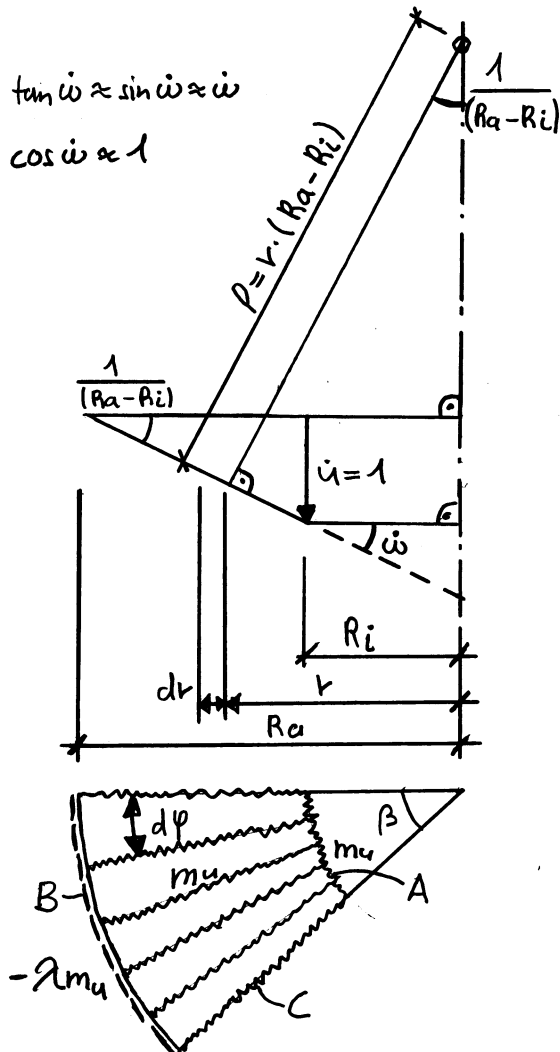
beziehungsweise $\dot{w}_y = \dot{w}_n \cdot \sin \varphi$ für die projizierten Gelenkrotationen um die x-beziehungsweise y-Achse erhält man mit $dx = dt \cdot \sin \varphi$ und $dy = dt \cdot \cos \varphi$ den Ausdruck

$$dD = m_{nu} \cdot \dot{w}_n \cdot dt = (m_{xu} \cdot dy + m_{xyu} \cdot dx) \cdot \dot{w}_x + (m_{yu} \cdot dx + m_{xyu} \cdot dy) \cdot \dot{w}_y$$

für die Dissipationsarbeit pro Längeneinheit.

4.4.2. Fächermechanismen

Wir betrachten einen Fächermechanismus einer (quasi)isotrop bewehrten Platte, $m_{xu} = m_y = m_u$ und $m'_{xu} = m'_{yu} = \lambda m_u$; dabei soll die Dissipationsarbeit in einem Kreisring mit Öffnungswinkel β sowie innerem Besandungsradius R_i beziehungsweise äusserem Besandungsradius R_a bestimmt werden.



Der Hauptkrümmungsradius im Kegel-element beträgt $\rho = r(R_a - R_i)$ bei einer inkrementellen Verschiebung $\dot{u} = 1$ des inneren Kreisringrands; der Krümmungsradius kann als Radius der dem Kegel eingeschriebenen Kugel aufgefasst werden. Die Dissipationsarbeit im Kreisring wird in drei Teile aufgeteilt:

$D_A \div$ Dissipationsarbeit entlang innerer Besandung.

$D_B \div$ Dissipationsarbeit entlang äusserer Besandung.

$D_C \div$ Dissipationsarbeit im Fächer.

Im Fächer (Bereich C) beträgt die Dissipationsarbeit pro Flächenelement $dD_C = m_u \cdot \dot{\omega}_\varphi \cdot dr = m_u \cdot \frac{1}{\rho} \cdot r \cdot d\varphi \cdot dr$, wobei $\dot{\omega}_\varphi$ der inkrementellen Rotation entlang der Länge $r \cdot d\varphi$ in tangentialer Richtung entspricht.

Die Dissipationsarbeit des Kreisringfächers mit Öffnungswinkel β beträgt

$$D = \underbrace{\left(\beta \cdot m_u \cdot \frac{R_i}{R_a - R_i} \right)}_{D_A} + \underbrace{\left(\beta \cdot \lambda m_u \cdot \frac{R_a}{R_a - R_i} \right)}_{D_B} + \underbrace{\left(\int_{R_i}^{R_a} \int_0^\beta m_u \cdot dr \cdot \frac{1}{\rho} \cdot r \cdot d\varphi \right)}_{D_C}$$

beziehungsweise

$$D = \beta \cdot m_u \cdot \frac{R_i}{R_a - R_i} + \beta \cdot \lambda m_u \cdot \frac{R_a}{R_a - R_i} + \beta \cdot m_u$$

Für $R_i = 0$ und $R_a = R$ folgt somit die Dissipationsarbeit

$$D = \beta m_u (1 + \lambda)$$

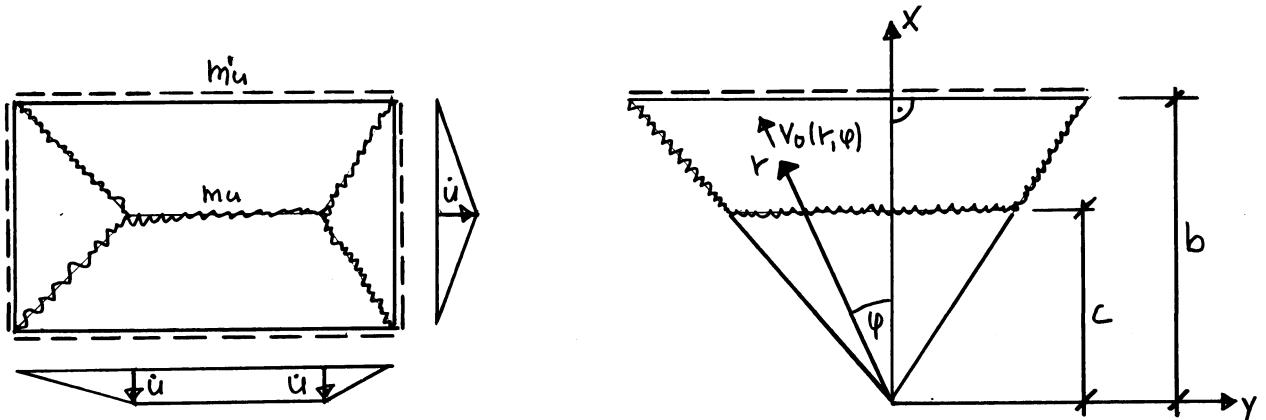
eines Kreisfächers mit Öffnungswinkel β .

4.4.3. Abschätzung der Hauptquerkraft.

Die Fliessgelenklinienmethode ermöglicht mit relativ geringem Rechenaufwand Aussagen über die Traglast. Während in den Fliessgelenklinien die Momentenbeanspruchung aufgrund der Biege widerstände ermittelt werden kann, ist der Kraftfluss in den starren Teilen des Bruchmechanismus unbekannt.

Die Bemessung von Schutzbauteilen basiert auf einfachen Bruchmechanismen; damit ein spröder Querkraftbruch ausgeschlossen werden kann, ist somit die Kenntnis der Querkraftbeanspruchung von zentralem Interesse. Basierend auf einer Arbeit von Monotti (2004)

wird eine Beziehung für die Hauptquerkraft vorgestellt, die eine Beurteilung des Querkrafttragverhaltens ermöglicht. Wir betrachten einen Bruchmechanismus mit trapez- und dreieckförmigen Segmenten einer Rechteckplatte.



Mit der Fließgelenkliniemethode wird aufgrund des gewählten Mechanismus ein oberer Grenzwert für die Traglast $q_k \geq q_u$ ermittelt. Im Rahmen einer Kapazitätsbemessung soll die Querkrafttraglast q_v grösser als die Biegetraglast sein, $q_v \geq q_k \geq q_u$. Die Hauptquerkraft kann jetzt mit der Beziehung

$$V_0(r, \varphi) = \frac{q_k}{2} \left(r - \frac{c^2}{r \cdot \cos^2 \varphi} \right)$$

annähernd erfasst werden; entlang des Plattenrands resultiert eine Hauptquerkraft

$$V_0(x=b, \varphi) = \frac{q_k \cdot b}{2 \cdot \cos \varphi} \left(1 - \frac{c^2}{b^2} \right)$$

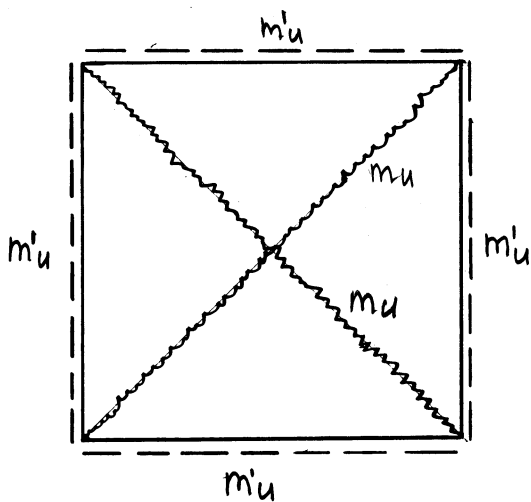
wobei die Hauptquerkraftrichtung durch den Winkel φ definiert ist. Damit sich der vorausgesetzte Bruchmechanismus einstellen kann, ist ein genügendes Verformungsvermögen sicherzustellen. Dieses kann zum Beispiel mit der Anordnung einer Querkraftbewehrung erreicht werden.

4.4.4. Statisch verträgliche Bruchmechanismen

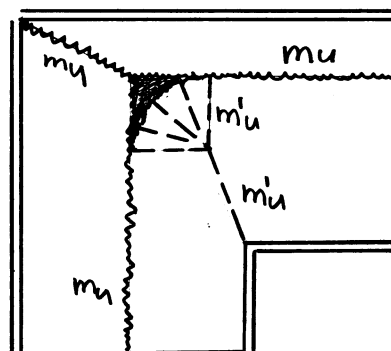
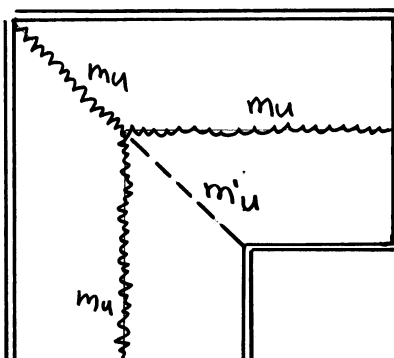
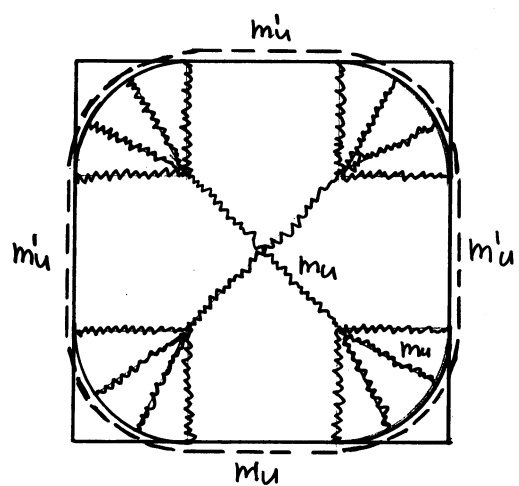
Bei gegebenen positiven und negativen Biege widerständen ist der Winkel zwischen einer positiven und negativen Fließgelenklinie in einem Schnittpunkt eindeutig definiert (Kapitel 4.2).

Zur Illustration betrachten wir orthogonal bewehrte Platten mit (quasi) isotropen positiven und negativen Biege widerständen, $m_{xu} = m_{yu} = m_u$ und $m'_{xu} = m'_{yu} = m'_u$. Betrachtet man die Richtungen der Fließgelenklinien in einem Punkt mit den Schnittgrößen m_x, m_y und m_{xy} , welche die Fließbedingung gerade erfüllen, so beträgt der Winkel zwischen der positiven und Fließgelenklinie $|\varphi_u - \varphi'_u| = \pi/2$.

Nicht verträglicher Mechanismus



Verträglicher Mechanismus

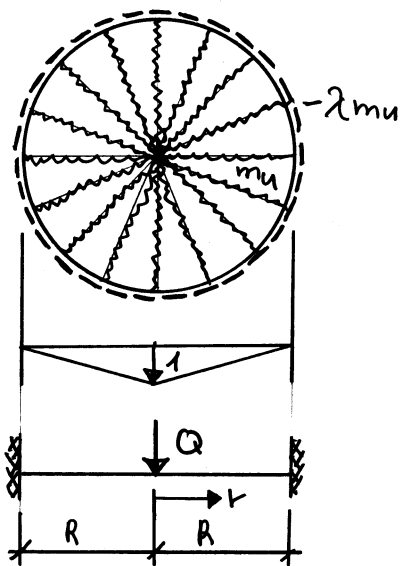


4.4.5. Anwendungsbeispiele

In den nachfolgenden Beispielen soll die Anwendung der Fliessgelenklinienmethode aufgezeigt werden, wobei für einige Beispiele die Traylast mit Hilfe der statischen Methoden (Kapitel 4.3.) eingegrenzt wird.

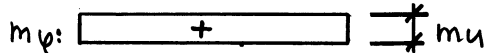
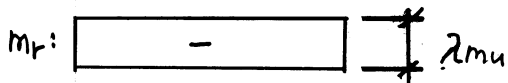
4.4.5.1. Kreisplatte

(Quasi) isotrope Kreisplatte mit positiven Biege widerständen $m_{xu} = m_{yu} = m_u$ und negativen Biege widerständen $m'_{xu} = m'_{yu} = \lambda m_u$.



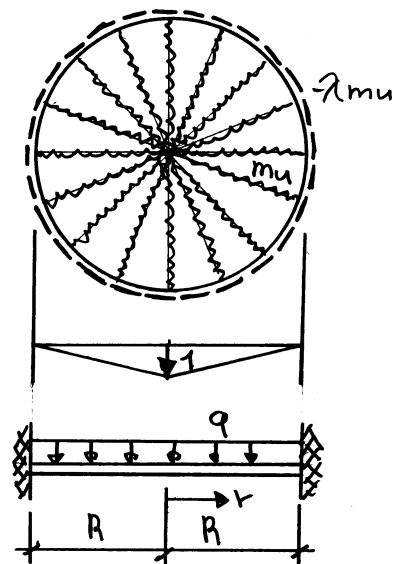
$$D = 2\pi m_u (1 + \lambda) = W_a = Q$$

$$\Rightarrow Q_u = 2\pi m_u (1 + \lambda)$$



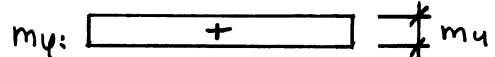
$$m_r = -\lambda m_u = \text{konstant}$$

$$m_\varphi = m_u = \text{konstant}$$



$$D = 2\pi m_u (1 + \lambda) = W_a = \frac{1}{3} q \pi R^2$$

$$\Rightarrow q_u = 6 m_u (1 + \lambda) / R^2$$



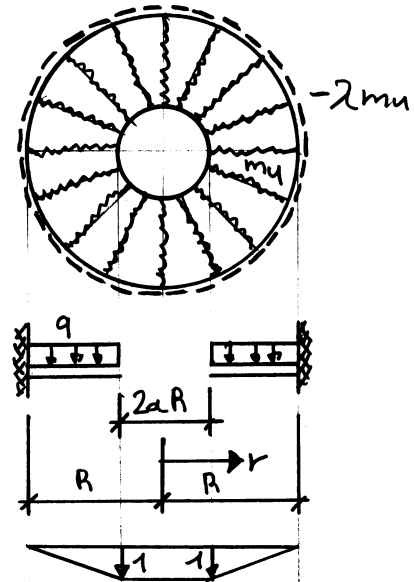
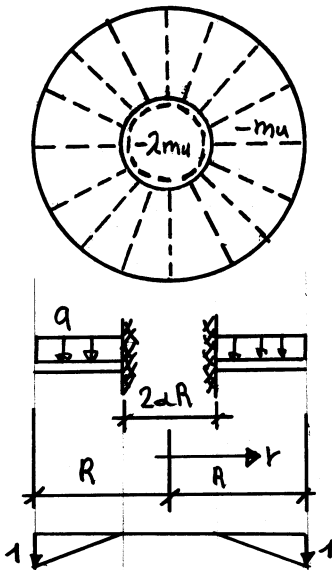
$$m_r = m_u \left[1 - (1 + \lambda) \frac{r^2}{R^2} \right]$$

$$m_\varphi = m_u = \text{konstant}$$

Für die eingespannte Kreisplatte unter zentrischer Einzellast beziehungsweise gleichmäßig verteilter Flächenbelastung liegt eine vollständige Lösung vor.

4.4.5.2. Kreistripplatte

Kreistripplatte mit positiven und negativen tangentialen Biege widerständen $m_\varphi = m'_\varphi = m_u$ sowie positiven und negativen radialen Biege widerständen $m_r = m'_r = \lambda m_u$.



$$D = 2\pi m_u + 2\pi \lambda m_u \cdot \frac{1}{2}(1-a)$$

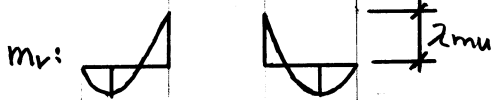
$$W_a = 2\pi R(2+a)/3 \cdot A(1-a)/2 \cdot q$$

$$\Rightarrow q_u = \frac{6m_u [1 + \lambda/(1-a)]}{R^2 (2-a-a^2)}$$

$$D = 2\pi m_u + 2\pi \lambda m_u \cdot \frac{1}{2}(1-a)$$

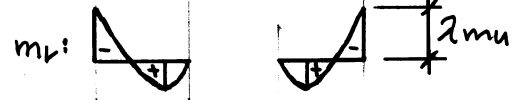
$$W_a = 2\pi R \cdot (2a+1)/3 \cdot A(1-a)/2 \cdot q$$

$$\Rightarrow q_u = \frac{6m_u [1 + \lambda/(1-a)]}{R^2 (1+a-2a^2)}$$



$$m_r = m_u \left(\frac{R}{r} - 1 \right) + q_u \left(\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{6} - \frac{R^3}{3r} \right)$$

$$m_\varphi = -m_u = \text{konstant}$$



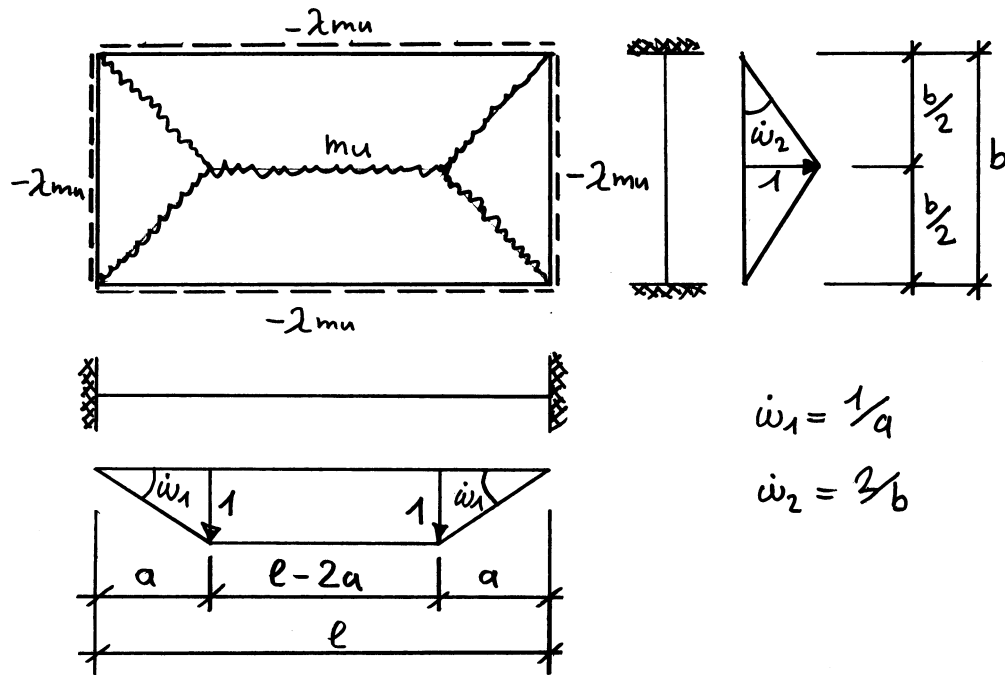
$$m_r = m_u \left(1 - \frac{2R}{r} \right) + q_u \left(\frac{(2R)^2}{2} - \frac{r^2}{6} - \frac{(2R)^3}{3r} \right)$$

$$m_\varphi = m_u = \text{konstant}$$

Für die am Innenrand beziehungsweise Außenrand eingespannte Kreistripplatte unter gleichmäßig verteilter Flächenbelastung liegen vollständige Lösungen vor. Die Tragfähigkeit ist auch bei verschwindender Einspannung nach wie vor vorhanden.

4.4.5.3. Rechteckplatte

Rechteckplatte unter gleichmäßig verteilter Flächenbelastung q mit positiven Biegemomenten $m_{ux} = m_{uy} = m_u$ und negativen Biegemomenten $m'_{ux} = m'_{uy} = \lambda m_u$.



$$\dot{w}_1 = 1/a$$

$$\dot{w}_2 = 2/b$$

$$D = 2m_u \left(\frac{2}{b} \cdot l + \frac{1}{a} \cdot b \right) + 2\lambda m_u \left(\frac{2}{b} \cdot l + \frac{1}{a} \cdot b \right) = 2m_u (1+\lambda) \left(2 \cdot \frac{l}{b} + \frac{b}{a} \right)$$

$$W_a = q \left(1 \cdot \frac{2ab}{3} + \frac{(l-2a) \cdot b}{2} \cdot 1 \right) = q \cdot b \left(\frac{l}{2} - \frac{a}{3} \right)$$

$$W_a = D \Rightarrow q_k = \frac{2m_u (1+\lambda)}{b} \cdot \frac{(2 \frac{l}{b} + \frac{b}{a})}{(\frac{l}{2} - \frac{a}{3})}$$

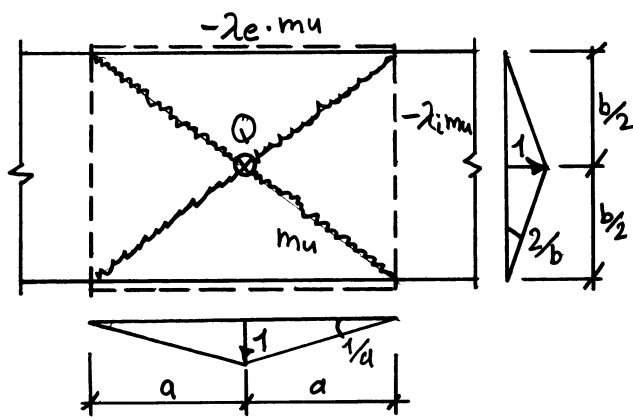
$$\frac{dq_k}{da} = 0 \Rightarrow q_{k, \min} = \frac{24m_u (1+\lambda)}{b \cdot l} \cdot \frac{l/b}{(\sqrt{3 + \frac{b^2}{l^2}} - b/l)^2}$$

$$a = \frac{b}{2} \left(\sqrt{3 + \frac{b^2}{l^2}} - \frac{b}{l} \right)$$

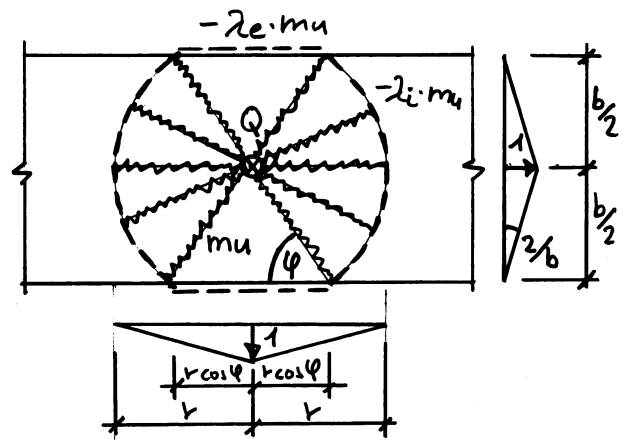
Quadratplatte: $l = b \rightarrow a = l/2$ und $q_k = 24m_u(1+\lambda)/l^2$

4.4.5.4. Plattenstreifen

Plattenstreifen unter Einzellast in Plattenmitte.



"Pyramidenmechanismus"



"Fächermechanismus"

- Pyramidenmechanismus:

$$W_a = Q_k \cdot 1 = D$$

$$D = 2m_u(2a \cdot \frac{2}{b} + b \cdot \frac{1}{a}) + 2\lambda_e m_u \cdot 2a \cdot \frac{2}{b} + 2\lambda_i m_u \cdot b \cdot \frac{1}{a} = Q_k$$

$$D = 2m_u \left[\left(\frac{4a}{b} + \frac{b}{a} \right) + 4\lambda_e \frac{a}{b} + \lambda_i \frac{b}{a} \right] = Q_k$$

$$\frac{dQ_k}{da} = 2m_u \left[\left(\frac{4}{b} - \frac{b}{a^2} \right) + \lambda_e \frac{4}{b} - \lambda_i \frac{b}{a^2} \right] = 0 \Rightarrow a = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{1+\lambda_i}{1+\lambda_e}}$$

$$\Rightarrow \underline{Q_k = 8m_u \sqrt{1+\lambda_i} \sqrt{1+\lambda_e}}$$

- Fächermechanismus:

$$W_a = Q_k \cdot 1 = D$$

$$D = 4m_u \cdot \varphi + 4\lambda_i m_u \cdot \varphi \cdot r \cdot \frac{1}{r} + 4\lambda_e m_u \cdot r \cdot \cos \varphi \cdot \frac{2}{b} + 4m_u \cdot r \cdot \cos \varphi \cdot \frac{2}{b} = Q_k$$

$$D = 4m_u \varphi (1+\lambda_i) + 4m_u \cdot \cot \varphi (1+\lambda_e) = Q_k$$

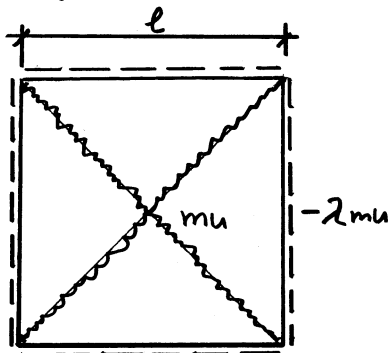
$$\frac{dQ_k}{d\varphi} = 4m_u(1+\lambda_i) - 4m_u(1+\lambda_e) \cdot \frac{1}{\sin^2 \varphi} = 0 \Rightarrow \sin \varphi = \sqrt{\frac{1+\lambda_e}{1+\lambda_i}}$$

Ein Vergleich der beiden Mechanismen zeigt, dass der Fächermechanismus massgebend wird.

		"Pyramide"	"Fächer"	
λ_e	λ_i	Q_k/m_u	Q_u/m_u	Lagerung und Bewehrung
0	0	8	6,28 (2 π)	aufgelagert, ohne obere Bewehrung
0	1	11,31	10,28	aufgelagert, mit oberer Bewehrung
1	1	16	12,56 (4 π)	eingespannt, mit oberer Bewehrung

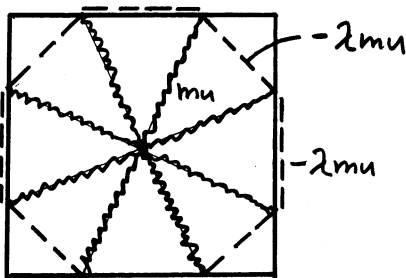
4.4.5.5. Quadratplatte

Eingespannte Quadratplatte unter gleichmässig verteilter Flächenbelastung q mit positiven Biegegewiderständen $m_{ux} = m_{uy} = m_u$ und negativen Biegegewiderständen $m_{ix} = m_{iy} = 2m_u$.



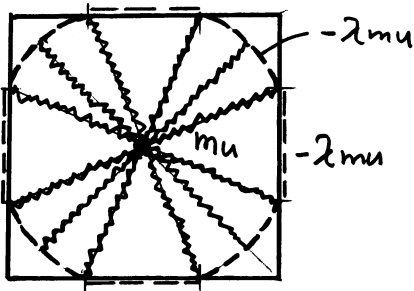
Mechanismus 1

$$q_u \leq \frac{24 m_u}{l^2} (1+2)$$



Mechanismus 2

$$q_u \leq \frac{24 m_u}{l^2} (1+2) \cdot 0,9168 = 22,00 \frac{m_u}{l^2} (1+2)$$



Mechanismus 3

$$q_u \leq \frac{24 m_u}{l^2} (1+2) \cdot 0,9056 = 21,75 \frac{m_u}{l^2} (1+2)$$

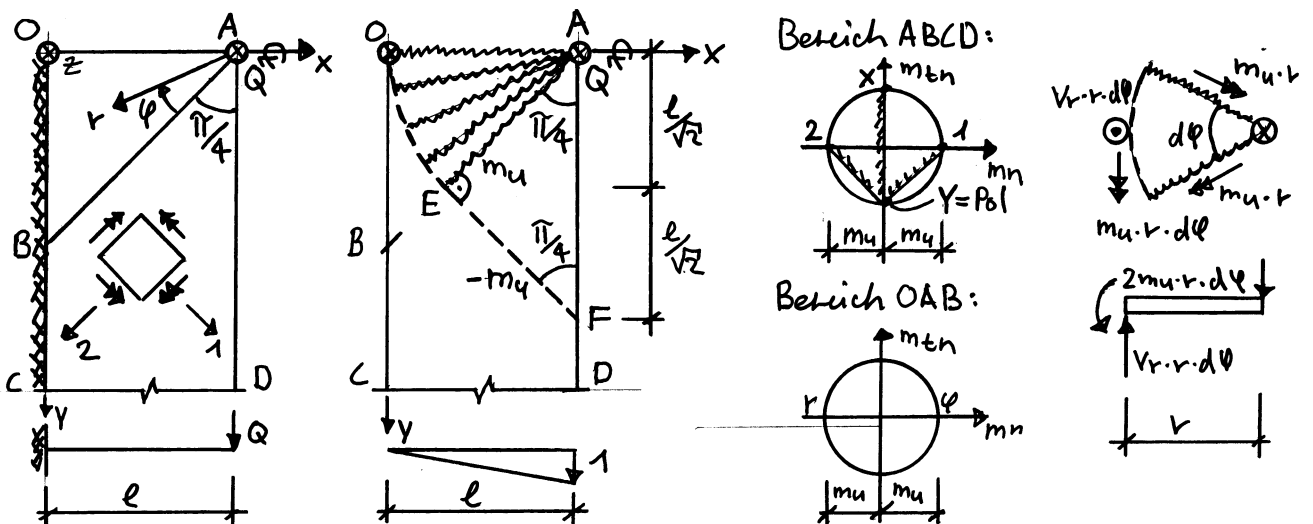
Die vollständige Lösung von Fox (1974) liefert die exakte Traglast $q_u = 24 m_u / l^2 (1+2) \cdot 0,8927 = 21,425 m_u / l^2 \cdot (1+2)$

Betrachtet man eine frei aufgelegte Quadratplatte, das heißt keine Randeinspannung beziehungsweise $\lambda = 0$, so liefert der Mechanismus 1 einen oberen Grenzwert für die Traglast $q_u \leq 24 m_u / l^2$, welcher dem unteren Grenzwert der Gleichgewichtslösung in Kapitel 4.1.4.1. (Fall 2) entspricht. Weist die Platte negative Biege widerstände $m'_{xu} = m'_{yu} \geq m_u$ auf und sind die Ecken zurückgehalten, so liegt eine vollständige Lösung mit einer Traglast von $q_u = 24 m_u / l^2$ vor.

Fehlt jedoch die obere Bewehrung, so liefert der Mechanismus 3 einen oberen Grenzwert $q_u \leq 21,75 m_u / l^2$; vernachlässigt man die Drillmomente bei der Gleichgewichtslösung in Kapitel 4.1.4.1. (Fall 2), so resultiert ein unterer Grenzwert $q_u \geq 16 m_u / l^2$. Die Traglast kann auf den Bereich $16 m_u / l^2 \leq q_u \leq 21,75 m_u / l^2$ eingegrenzt werden.

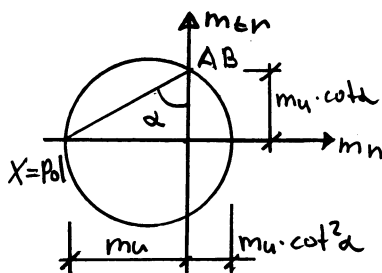
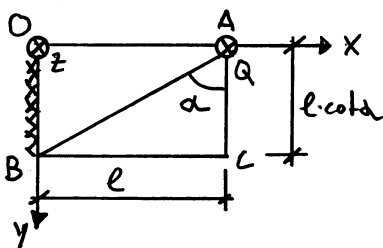
4.4.5.6. Kragplatte

Wir betrachten eine Kragplatte der Breite l , welche am freien Plattenrand mit einer Einzellast Q beansprucht wird. Die Platte ist orthogonal bewehrt und die entsprechenden (quasi) isotropen Biege widerstände betragen $m_{xu} = m_{yu} = m'_{xu} = m'_{yu} = m_u$.



Im Bereich ABCD wird $m_x = m_y = 0$ und $m_{xy} = m_u$ angenommen; es herrscht eine reine Drilling bezüglich der x- und y-Achse. Entlang des Plattenrandes AD wird eine konzentrierte Randquerkraft $V_E = m_u$ übertragen; der Plattenrand muss entsprechend verbügel werden. Im Bereich OAB wird $m_\alpha = -m_r = m_u$ angenommen; somit wird eine Querkraft $V_r = 2m_u/r$ übertragen, was in diesem Bereich einer gesamten übertragenen Kraft von $\pi m_u/2$ entspricht. Unter Berücksichtigung der Symmetrie resultiert ein unterer Grenzwert für die Traglast $Q_u \geq (2 + \pi)m_u$. Betrachtet man den Fließgelenklinienmechanismus, so erhält man einen oberen Grenzwert für die Traglast $Q_u \leq (2 + \pi)m_u$. Somit liegt eine vollständige Lösung für die Traglast $Q_u = (2 + \pi)m_u$ einer unendlich langen Kragplatte vor.

Für kurze Platten ($\alpha \geq \pi/4$) kann im Bereich OAB ein Momentenansatz $m_x = -m_u$, $m_y = m_u \cdot \cot^2 \alpha$ und $m_{xy} = 0$ angenommen werden.

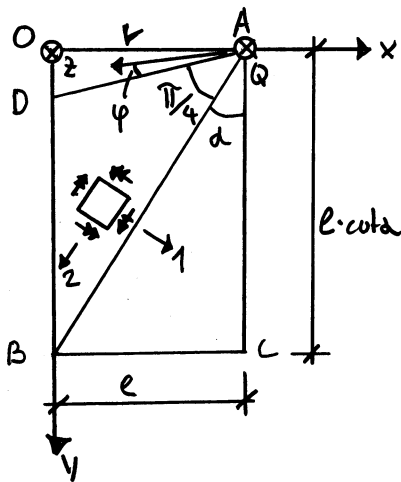


Der Bereich ABC ist spannungsfrei, das heißt $m_x = m_y = m_{xy} = 0$. AB entspricht einer statischen Diskontinuitätslinie; entlang dieser Linie wird eine konzentrierte Querkraft $V_E = m_u \cdot \cot \alpha$ übertragen, welche eine entsprechende Querkraftbewehrung erfordert. Unter Berücksichtigung der Symmetrie resultiert

ein unterer Grenzwert für die Traglast $Q_u \geq 2m_u \cdot \cot \alpha$. Untersucht man einen Fließgelenklinienmechanismus mit einer Fließgelenklinie

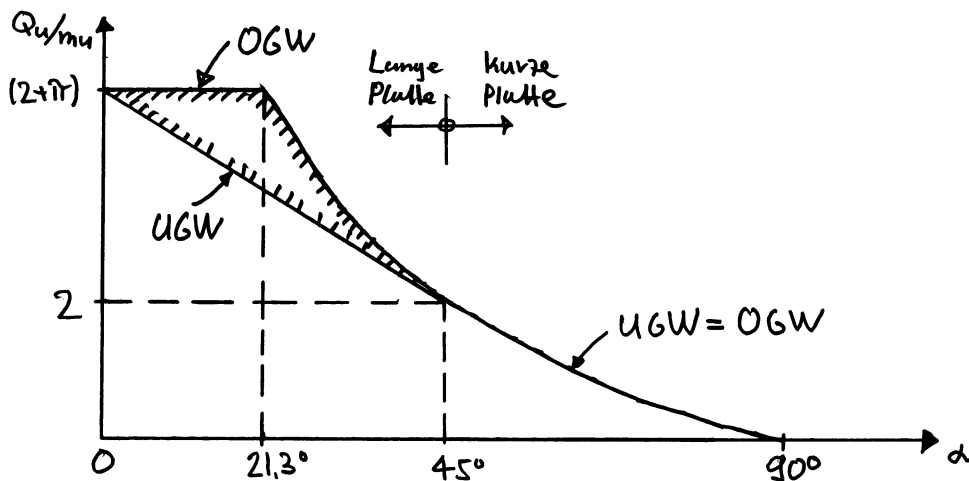
entlang der Einspannung OB, so erhält man einen oberen Grenzwert für die Traglast $Q_u \leq 2m_u \cot \alpha$. Für kurze Platten mit $d \geq \pi/4$ existiert eine vollständige Lösung mit der Traglast $Q_u = 2m_u \cdot \cot \alpha$.

Für lange Platten ($0 < d \leq \pi/4$) kann im Bereich ABD ein Zustand reiner Drilling $m_1 = -m_2 = m_u$ angenommen werden. AB entspricht einer statischen Diskontinuitätslinie, welche eine konstante Querkraft $V_E = m_u$ überträgt. Im Bereich OAB wird $m_\varphi = -m_\psi = m_u$

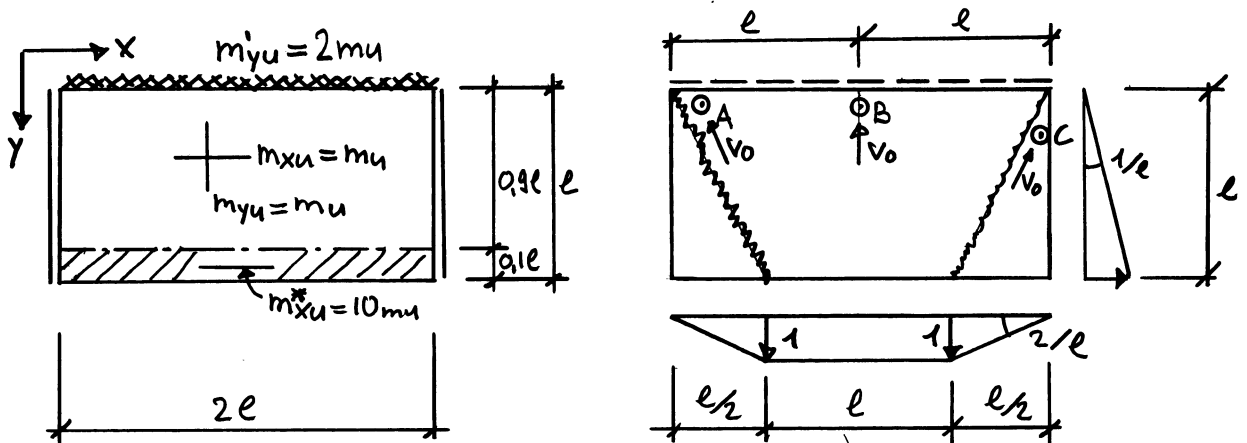


angenommen; in diesem Bereich wird eine gesamte Querkraft von $2m_u(\pi/4 - \alpha)$ übertragen. Der Bereich ABC ist spannungsfrei, das heißt $m_x = m_y = m_{xy} = 0$. Unter Berücksichtigung der Symmetrie erhält man einen unteren Grenzwert der Traglast $Q_u \geq (2 + \pi - 4\alpha)m_u$. Der Mechanismus

für kurze Platten liefert auch bei langen Platten einen oberen Grenzwert $Q_u \leq 2m_u \cdot \cot \alpha$ für die Traglast; einen weiteren oberen Grenzwert $Q_u \leq (2 + \pi)m_u$ folgt mit der Betrachtung des Mechanismus der unendlich langen Kreuzplatte.



4.4.5.7. Rechteckplatte mit verstecktem Unterzug



Dreiseitig gelagerte, orthogonal bewehrte Rechteckplatte mit freiem Plattenrand; die zwei kurzen Plattenränder sind einfach gelagert, während der eine lange Plattenrand eingespannt ist. Der versteckte Unterzug entlang des freien Plattenrandes weist eine konzentrische Bewehrungsanordnung auf; der Rand ist entsprechend zu verbügeln. Wir betrachten einen festgelegten Mechanismus, das heißt die Fließgelenklinienrichtung wird nicht variiert.

$$D = 2e \cdot m'_{yu} \cdot \frac{1}{e} + 2 \cdot \frac{e}{2} \cdot m_{yu} \cdot \frac{1}{e} + 2(0,9e m_{xu} + 0,1e m^*_{xu}) \cdot \frac{1}{e} = 8,8 m_u$$

$$W_a = (e^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{e^2}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3}) \cdot q = q e^2 \cdot \frac{5}{6}$$

$$W_a = D \Rightarrow \underline{q_k = 10,56 m_u / e^2}$$

Abschätzung der Querkraft gemäß der in Kapitel 4.4.3. vorgeschlagenen

Beziehung für die Hauptquerkraft am Rand $V_0 = \frac{q_k \cdot b}{2 \cdot \cos \varphi} (1 - c^2 / b^2)$.

• Punkt A und B: $c = e$ beziehungsweise $b = 2e \rightarrow V_0 = 7,92 \frac{m_u}{e} \cdot \frac{1}{\cos \varphi}$

$$\left. \begin{aligned} \rightarrow \cos \varphi_A = \frac{2}{\sqrt{5}} : V_{0A} &= 8,855 \frac{m_u}{e} \\ \rightarrow \cos \varphi_B = 1 : V_{0B} &= 7,920 \frac{m_u}{e} \end{aligned} \right\} V_{0A} / V_{0B} = 1,118$$

• Punkt C und D: $c = 0$ beziehungsweise $b = e/2 \rightarrow V_0 = 2,64 \frac{m_u}{e} \cdot \frac{1}{\cos \varphi}$

$$\rightarrow \cos \varphi_C = \frac{1}{\sqrt{5}} : V_{0C} = 5,903 \frac{m_u}{e}$$

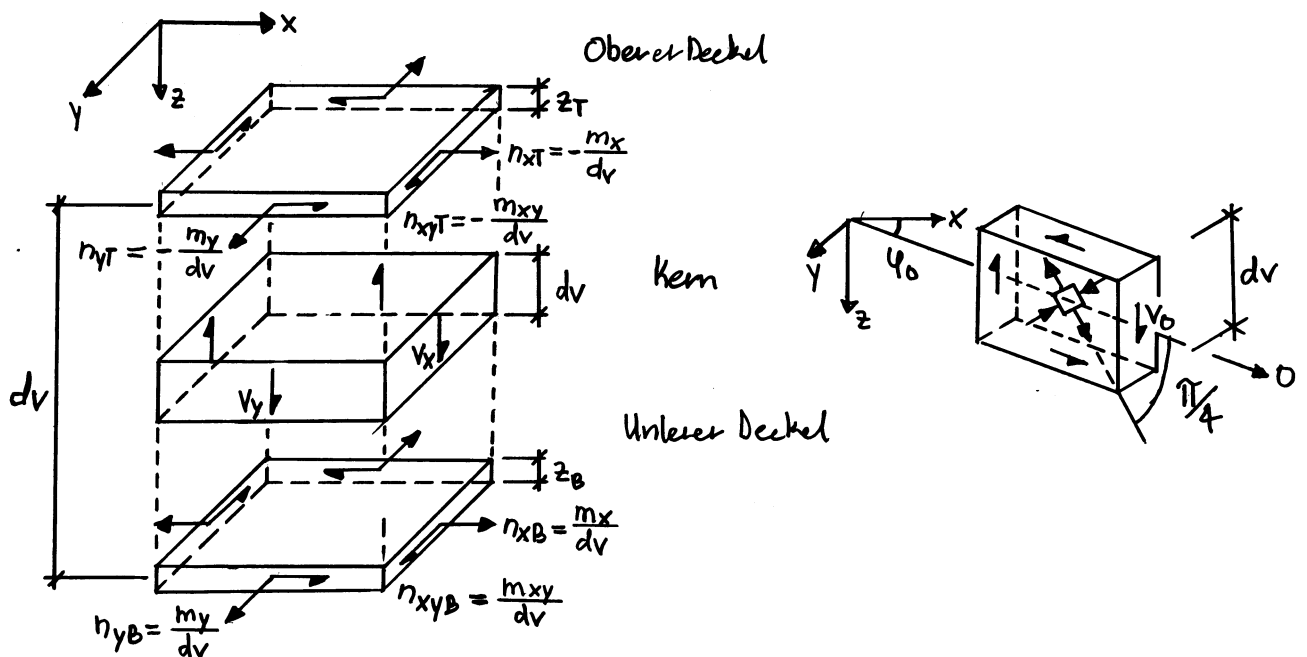
Die Querkraftgrößen dienen lediglich zur Abschätzung der erforderlichen Querkraftwiderstände zur Sicherstellung des Verformungsvermögens? Der versteckte Unterzug wird dabei als Balken mit entsprechender Verbügelung behandelt.

4.5. Querkraftwiderstand und Verformungsvermögen

Die in den vorangehenden Kapiteln betrachteten Bemessungsverfahren für Stahlbetonplatten erlauben nur eine bedingte Behandlung von Querkraften zu. Mit dem Sandwichmodell für Stahlbetonplatten steht ein Bemessungsverfahren zur Verfügung, das diese Einflüsse größtenteils erfasst und auch Betrachtungen zum Verformungsvermögen erlaubt.

4.5.1. Sandwichmodell

Das Tragverhalten eines Plattenelements unter allgemeiner Beanspruchung kann mit einem Sandwichmodell beschrieben werden; dabei werden auf der Grundlage des unteren Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie die Biegemomente m_x und m_y sowie die Drillmomente $m_{xy} = m_{yx}$ durch äquivalente Scheibenkräfte n_{xi}, n_{yi} und n_{xyi} im unteren und oberen Sandwichdeckel (bottom and top cover) ersetzt, während dem Kern die Querkraft V_x und V_y zugewiesen werden.

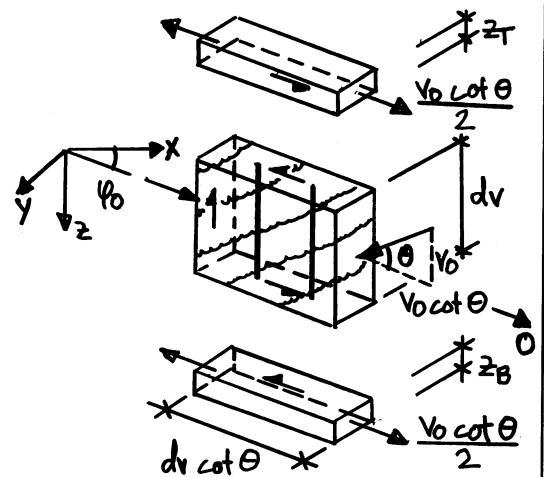
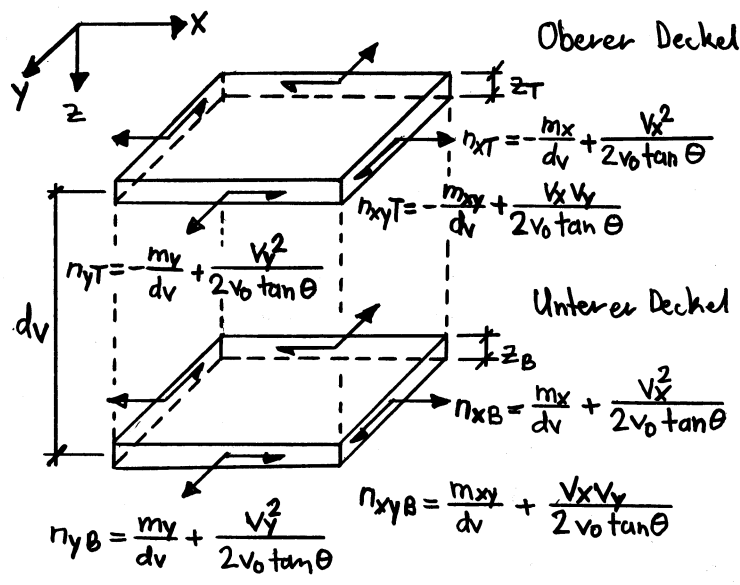


Die Dicke des Kerns d_v entspricht dem Hebelarm der Scheibenkräfte

beziehungsweise dem Abstand der Mittelebenen des unteren und oberen Deckels mit Scheibendicken z_B und z_T . Aufgrund von Gleichgewichtsüberlegungen wird vorausgesetzt, dass die Mittelebenen der Bewehrungslagen mit den Mittelebenen der Sandwichdeckel zusammenfallen.

Die Querkräfte v_x und v_y entsprechen einer Hauptquerkraft $v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, deren Richtung mit der x -Achse einen Winkel $\varphi_0 = \arctan(v_y/v_x)$ einschließt. Unter der Voraussetzung, dass die nominelle Schubspannung in Hauptquerkraftrichtung bei dünnen Platten einen bestimmten Wert von ungefähr $\tau_{co} = v_0/dv \leq f_{ct}/3$ beziehungsweise $\tau_{co} \leq \sqrt{f_{ct}}/6$ nicht überschreitet, geht man von der Modellvorstellung eines ungerissenen Kerns aus, bei welcher auf eine Querkraftbewehrung verzichtet werden kann, $p_z = 0$. Im Kern ergibt sich ein Zustand reinen Schubes mit entgegengesetzt gleich grossen Hauptspannungen $\pm v_0/dv$, die eine Neigung von $\pi/4$ zur Plattenebene aufweisen; die Scheibkräfte im unteren und oberen Deckel werden durch die Querkraft nicht beeinflusst. Bei der Modellvorstellung des ungerissenen Kerns entspricht die nominelle Bruchschubspannung einer fiktiven Zugfestigkeit des Betons, wobei diese in direktem Zusammenhang mit der Rissverzahnung im Kern steht, welche wiederum durch die Rissöffnung limitiert wird. Obwohl wir von einer Modellvorstellung eines ungerissenen Kerns ausgehen, weist dieser Risse auf, da sich die Rissflächen in den Sandwichdeckeln auch in den Kern erstrecken. Eine Abweichung der Hauptbeanspruchungsrichtungen von den Bewehrungsrichtungen führt zu einem

weicheren Tragverhalten und somit auch zu grösseren Rissbreiten (Kapitel 3.4.5.), die eine entsprechende Verminderung des Querkraftwiderstands bewirken. Zur Bestimmung des richtungsabhängigen Querkraftwiderstands von Platten ohne Querkraftbewehrung, werden zum Beispiel in der Norm SIA 262 (4.3.3.2) die nominellen Bruchschubspannungen proportional zu $(\cos^4 \varphi_0 + \sin^4 \varphi_0)$ abgemindert.



Für grössere nominelle Schubspannungen ($\tau_{co} > f_t/3$ beziehungsweise $\tau_{co} > \sqrt{f_c}/6$) wird von der Modellvorstellung des gerissenen Kerns ausgegangen und es ist zur Aufnahme der Querkraft eine Querkraftbewehrung mit einem Bewehrungsgehalt von

$$\rho_z = \frac{V_0 \tan \theta}{dv \sigma_{sz}}$$

erforderlich. Dabei bezeichnen θ und σ_{sz} die Neigung des Betondruckfelds im gerissenen Plattenkern respektive die gewählte Bemessungsspannung der Querkraftbewehrung. Das geneigte Druckfeld im Kern verursacht zusätzliche Zugkräfte von $\frac{1}{2} V_0 \cot \theta$ im unteren und oberen Deckel in Richtung der Hauptquerkraft, welche in Kombination mit den

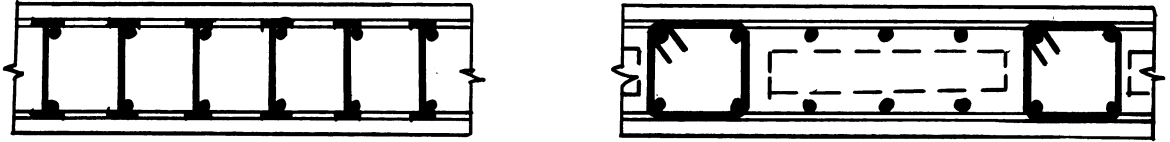
Biege- und Drillmomenten zu den resultierenden äquivalenten Scheibenkräften in den Bewehrungsrichtungen führen.

Mit den in Kapitel 3.2. behandelten Fließbedingungen für Scheibenelemente sowie dem in Kapitel 3.4. vorgestellten klassischen linear elastischen Druckfeldmodell stehen zwei Methoden für die Bemessung der Sandwichdeckel zur Verfügung. Im weiteren erlaubt das linear elastische Druckfeldmodell eine Beschreibung des Verformungsverhaltens von Plattenelementen. Dabei entsprechen die aufgebrachten Scheibenspannungen σ_{xi} , σ_{yi} und τ_{xyi} den durch die Scheibendicke z_i dividierten Scheibenkräften, $\sigma_{xi} = n_{xi}/z_i$, $\sigma_{yi} = n_{yi}/z_i$ und $\tau_{xyi} = n_{xyi}/z_i$. Zudem wird angenommen, dass die Spannungen und die Verzerrungen in der Mittelebene der Sandwichdeckel charakteristisch für das Verhalten des Scheibenelements sind.

4.5.2. Querkraftwiderstand und konstruktive Durchbildung

Damit bei Stahlbetonplatten ein spröder Querkraftbruch ausgeschlossen werden kann, sollte aufgrund der Modellvorstellung des ungerissenen Plattenkerns ($\sigma_{cR} \approx f_{ct}/3$) sowie unter Berücksichtigung des minimalen Bewehrungsgehalts von Stahlbetonzuggliedern ($\rho_{min} \approx 0,6\%$) ein minimaler Querkraftbewehrungsgehalt von $\rho_{z,min} = \rho_{min}/3 \approx 0,2\%$ im Plattenkern angeordnet werden. Dabei führen aufgrund experimenteller Erfahrungen bereits kleine Querkraftbewehrungsgehalte zu einer deutlichen Verbesserung des Trag- und Verformungsverhaltens von Stahlbetonplatten; der Masslabeffekt bei Platten ohne Querkraftbewehrung wird eliminiert. Insbesondere bei dicken Platten und bei grossen Quer-

Kraftbeanspruchungen empfiehlt sich daher eine konsequente Anordnung einer Querkraftbewehrung.



Bei grossen Querkraftbeanspruchungen mit entsprechend hohen Querkraftbewehrungsgehalten resultieren flächenhafte Anordnungen der Querkraftbewehrungsstäbe, während bei geringen Querkraftbeanspruchungen mit entsprechend kleinen Querkraftbewehrungsgehalten eine streifenartige Anordnung der Querkraftbewehrung zu vernünftigen Stabdurchmessern und Stababständen führt. Dabei kann der querkraftbewehrte Streifen als statische Diskontinuität aufgefasst werden, wobei die Schnittgrössenermittlung entsprechend der Streifenrichtung angepasst werden muss (Kapitel 4.1.3.). Die Tragwirkung entspricht derjenigen eines Hohlkastenträgers. Für den Schubanschluss des Sandwichdeckels (shear lag) ist eine zusätzliche Bewehrung orthogonal zur Streifenrichtung erforderlich.

Eine von den Bewehrungsrichtungen abweichende Hauptquerkraft- und Hauptmomentenrichtung bewirkt eine ausgeprägte Reduktion des Querkraftwiderstands bei Platten ohne Querkraftbewehrung. Dieser Einfluss muss bei der Bemessung entsprechend berücksichtigt werden.

4.5.3. Verformungsverhalten

Zur Beschreibung des Verformungsverhaltens eines Plattenelements werden die Scheibenelemente des unteren und oberen Sandwichdeckels sowie die Kernscheibe in Richtung der Hauptquerkraftrichtung mit

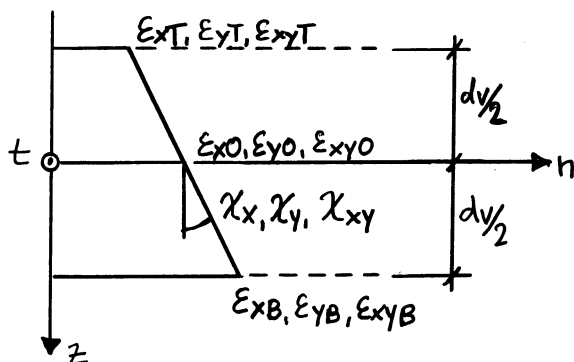
dem klassisch linear elastischen Druckfeldmodell erfasst. Mit den charakteristischen Verzerrungen in der Mittelebene der Sandwichdeckel infolge einer allgemeinen Beanspruchung durch Biege- und Drillmomente ist der Verzerrungszustand über die Dicke des Plattenelements bestimmt. Die Beziehungen

$$\varepsilon_x(z) = \varepsilon_{x0} + z \cdot \chi_x = \frac{\varepsilon_{xB} + \varepsilon_{xT}}{2} + z \cdot \frac{\varepsilon_{xB} - \varepsilon_{xT}}{d_v}$$

$$\varepsilon_y(z) = \varepsilon_{y0} + z \cdot \chi_y = \frac{\varepsilon_{yB} + \varepsilon_{yT}}{2} + z \cdot \frac{\varepsilon_{yB} - \varepsilon_{yT}}{d_v}$$

$$\gamma_{xy}(z)/2 = \varepsilon_{xy}(z) = \varepsilon_{xy0} + z \cdot \chi_{xy} = \frac{\varepsilon_{xyB} + \varepsilon_{xyT}}{2} + z \cdot \frac{\varepsilon_{xyB} - \varepsilon_{xyT}}{2}$$

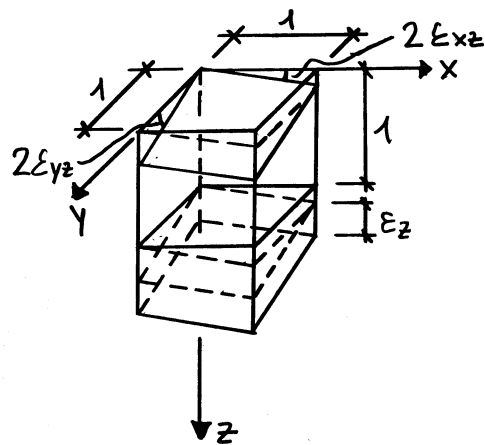
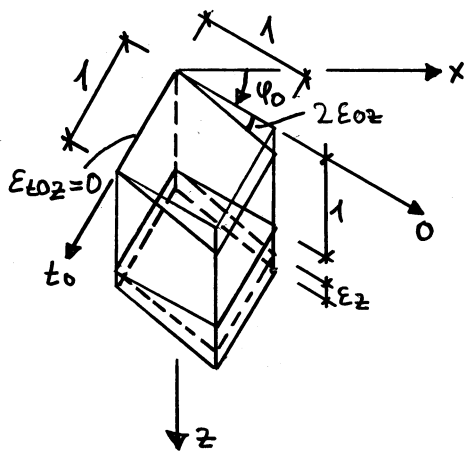
entsprechen den Verzerrungen in der x-y-Ebene, wobei diese mit den drei Krümmungen χ_x, χ_y und χ_{xy} sowie den drei Verzerrungen $\varepsilon_{x0}, \varepsilon_{y0}$ und ε_{xy0} der Mittelebene des Plattenkerns festgelegt sind. Die Krümmungen beschreiben das Biegeverhalten,



während der Verzerrungszustand in der Mittelebene des Plattenkerns die für das Querkrafttragverhalten relevanten Verzerrungen in der x-y-Ebene charakterisiert. Mit dem

klassischen linear elastischen Druckfeldmodell erhält man die Verzerrungen $\varepsilon_{xi}, \varepsilon_{yi}$ und ε_{zi} sowie die Hauptverzerrungsrichtung θ_{vi} der beiden Sandwichdeckel, wobei ε_{xi} und ε_{yi} die Verzerrungen in Richtung der orthogonal verlaufenden Bewehrungsrichtungen und ε_{zi} die kleinsten Hauptverzerrungen bezeichnen. Die Schiebungen γ_{xyi} beziehungsweise die Verzerrungen ε_{xyi} folgen mit der Transformationsformel

$\tau_{xy}/2 = \epsilon_{xy} = (\epsilon_{xi} - \epsilon_{zi}) \cdot \cot \theta_{vi} = (\epsilon_{yi} - \epsilon_{zi}) \cdot \tan \theta_{vi}$. Betrachtet man die Kernscheibe in Richtung der Hauptquerkraft (O - z -Ebene) unter Berücksichtigung der Verzerrung $\epsilon_0 = \epsilon_{x0} \cdot \cos^2 \varphi_0 + \epsilon_{y0} \cdot \sin^2 \varphi_0 + 2\epsilon_{xy0} \cdot \sin \varphi_0 \cdot \cos \varphi_0$ infolge der Sandwichdeckelverzerrungen auf halber Kernhöhe in Hauptquerkraftrichtung, so folgen für eine bestimmte Hauptquerkraftbeanspruchung $\chi_{z0} = V_0/d_v$ die Verzerrungen ϵ_z und ϵ_3 sowie die Druckfeldneigung θ im Plattenkern. Die Schubverzerrung ϵ_{0z} in Hauptquerkraftrichtung beträgt somit $\epsilon_{0z} = (\epsilon_0 - \epsilon_3) \cdot \cot \theta = (\epsilon_z - \epsilon_3) \cdot \tan \theta$.



Unter Beachtung verschwindender Schubverzerrung $\epsilon_{0z} = 0$ orthogonal zur Hauptquerkraftrichtung lassen sich durch die Beziehungen

$$\epsilon_{xz} = \epsilon_{0z} \cdot \cos \varphi_0 \quad \text{und} \quad \epsilon_{yz} = \epsilon_{0z} \cdot \sin \varphi_0$$

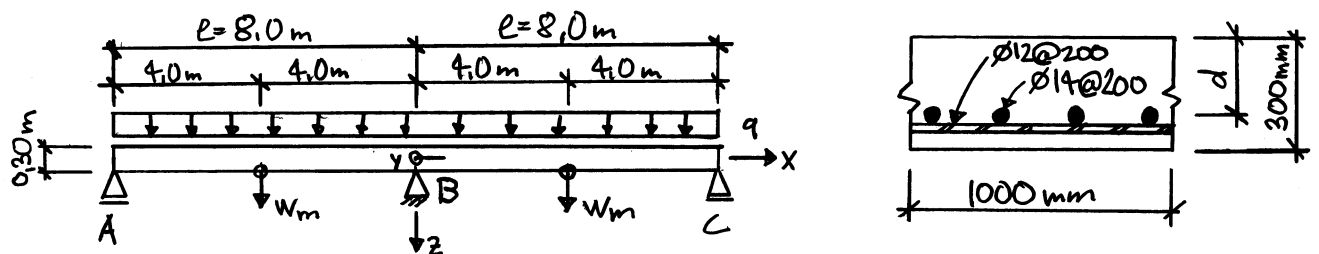
die Schubverzerrungen bezüglich dem globalen x - y -Koordinatensystem bestimmen. Das Verformungsverhalten des Plattenelements ist mit neun kinematischen Parametern, nämlich den sechs Verzerrungsgrößen ϵ_{x0} , ϵ_{y0} , ϵ_z , ϵ_{xy0} , ϵ_{xz} und ϵ_{yz} sowie den drei Krümmungsgrößen χ_x , χ_y und χ_{xy} , eindeutig bestimmt. Der entsprechende Verzerrungstensor kann in der Form

$$[E] = \begin{bmatrix} \epsilon_x(z) & \epsilon_{xy}(z) & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy}(z) & \epsilon_y(z) & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{x0} + z\chi_x & \epsilon_{xy0} + z\chi_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy0} + z\chi_{xy} & \epsilon_{y0} + z\chi_y & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix}$$

angegeben werden. Durch Integration der Verzerrungs- und Krümmungsgrößen lassen sich somit vollständige Belastungs-Verformungsverläufe von Stahlbetonplatten ermitteln, welche sowohl die Verformungen infolge Biege- und Drillmomenten als auch Querkraften erfassen.

4.5.4. Statisch unbestimmter Plattenstreifen

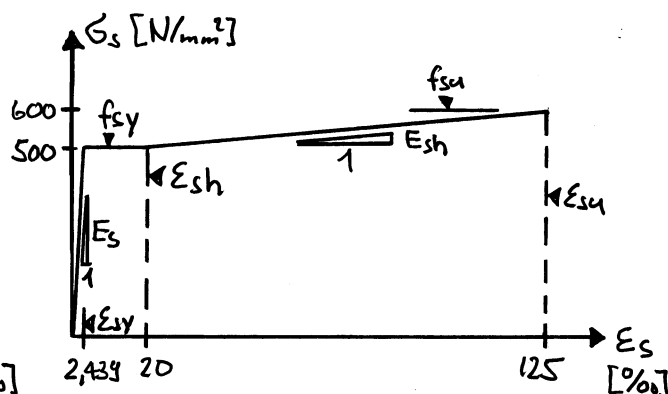
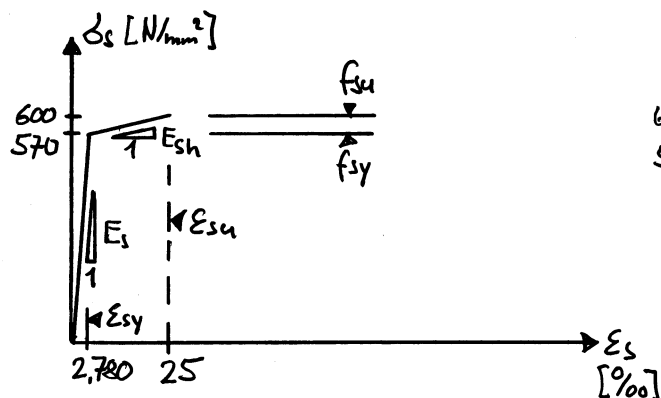
Zur Illustration des Verformungsvermögens betrachten wir einen über zwei Felder gespannten Plattenstreifen unter einer gleichmäßig verteilten Flächenlast.



Der Querschnitt ist in x-Richtung mit Stäben $\varnothing 14 @ 200 \text{ mm}$ in der 2. und 3. Lage bewehrt. Die Querbewehrung in der 1. und 4. Lage besteht aus Stäben $\varnothing 12 @ 200 \text{ mm}$. Die Betonüberdeckung beträgt $c = 20 \text{ mm}$; somit resultiert eine statische Höhe $d = 300 - 20 - 12 - \frac{1}{2} \cdot 14 = 261 \text{ mm}$ in x-Richtung.

Das Verformungsverhalten wird anhand von zwei geometrisch identischen Plattenstreifen diskutiert, wobei sich diese lediglich hinsichtlich der Duktilitätseigenschaften der Bewehrungsstäbe unterscheiden. Beim Plattenstreifen P1 handelt es sich um kaltverformten Stahl (B500A), während beim Plattenstreifen P2 naturharter Stahl (B500C) zur Anwendung kommt. Die nachfolgenden Berechnungen werden mit den effektiven Materialkennwerten durchgeführt.

	B500A	B500C
Fließgrenze f_{sy}	570 N/mm ²	500 N/mm ²
Zugfestigkeit f_{su}	600 N/mm ²	600 N/mm ²
Fließdehnung $\epsilon_{sy} = f_{sy}/E_s$	2,780 ‰	2,439 ‰
Dehnung bei Verfestigungsbeginn ϵ_{sh}	—	20 ‰
Bruchdehnung ϵ_{su}	25 ‰	125 ‰
Elastizitätsmodul E_s	205 kN/mm ²	205 kN/mm ²
Verfestigungsmodul E_{sh}	1350 N/mm ²	952 N/mm ²
Verfestigungsverhältnis f_{su}/f_{sy}	1,05	1,20
	"Bilinear"	"Trilinear"

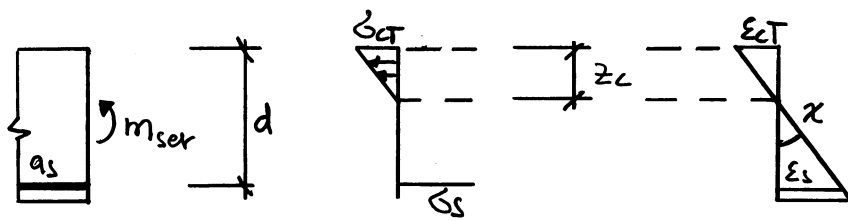


Beim Beton wird eine Zylinderdruckfestigkeit $f_{cc} = 30 \text{ N/mm}^2$ vorausgesetzt; es resultiert somit eine mittlere Betonzugfestigkeit $f_{ct} = 0,3 \cdot f_{cc}^{2/3} = 2,9 \text{ N/mm}^2$ und eine effektive Betondruckfestigkeit $f_c = 2,5 \cdot f_{cc}^{2/3} = 24,1 \text{ N/mm}^2$. Weiter wird eine Wertigkeit $n = E_s/E_c = 7$ angenommen.

4.5.4.1. Linear elastische - gerissene Steifigkeit

Bei den nachfolgenden Verformungsrechnungen treffen wir die Annahme, dass die Plattensteifigkeit entlang der Stabachse der linear elastischen - gerissenen Steifigkeit $E_c I_c^II$ entspricht und konstant

ist. Dabei wird ein Plattenstreifen mit der Breite $b = 1,0 \text{ m}$ betrachtet.



$$a_s = 770 \text{ mm}^2/\text{m}'$$

$$E_s = 205 \text{ kN/mm}^2$$

$$n = 7 \rightarrow E_c = 29,3 \text{ kN/mm}^2$$

$$\rho_x = a_s / (b \cdot d) = 770 / (1000 \cdot 261) = 0,30\%$$

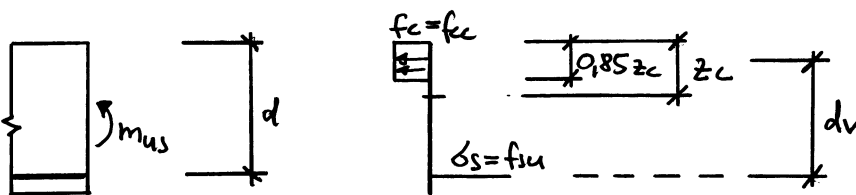
$$I_c^{\text{II}} = 0 = \frac{1}{2} z_c^2 b - n \cdot a_s \cdot (d - z_c) \Rightarrow \text{Druckzone: } z_c^{\text{II}} = 47,9 \text{ mm}$$

$$I_c^{\text{II}} = \frac{1}{3} z_c^3 b + n \cdot a_s \cdot (d - z_c)^2 = 281,4 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\text{Stiffigkeit } E_c I_c^{\text{II}} = E_s / n \cdot I_c^{\text{II}} = 8241,08 \text{ kNm}^2/\text{m}'$$

4.5.4.2. Hebelarm der inneren Kräfte

Für die folgenden Berechnungen ein Stringelquerschnitt, bestehend aus Druck- und Zugstahl sowie der Stegscheibe, vorausgesetzt; dabei wird ein konstanter Wert für den Hebelarm der inneren Kräfte d_v angenommen. Es wird weiter von den Annahmen ausgegangen, dass der Bewehrungsstahl die Zugfestigkeit f_{su} erreicht, während beim Beton die Zylinderdruckfestigkeit angesetzt werden kann, $f_c = f_{cc}$.



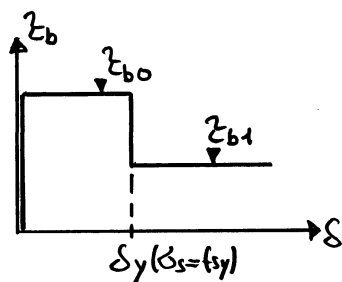
$$\text{Druckzone: } z_c = (a_s \cdot f_{su}) / (0,85 \cdot f_{cc}) = 18 \text{ mm}$$

$$\text{Hebelarm: } d_v = d - \frac{1}{2} \cdot 0,85 z_c = 253 \text{ mm}$$

Für die Bestimmung der Druckzonenhöhe z_c wird ein Volligkeitsbeiwert von 0,85 gemäß der Norm SIA 262 (4.2.1) zugrundegelegt. Der maximale Biege widerstand beim Erreichen der Zugfestigkeit ergibt sich somit zu $m_{us} = a_s \cdot f_{su} \cdot d_v = 117,0 \text{ kNm/m}$; dabei handelt es sich lediglich um einen theoretischen maximalen Wert des Biege widerstands.

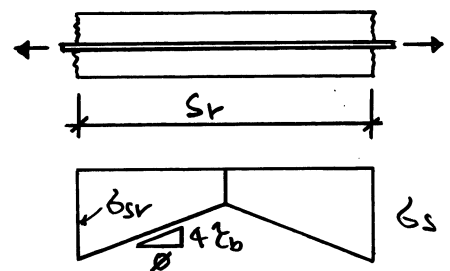
4.5.4.3. Grundlagen Zugzustmodell

Die folgenden Überlegungen bezüglich dem Verformungsvermögen basieren auf dem Zugzustmodell, welches die versteifende Wirkung des Betons zwischen den Rissen berücksichtigt. Dabei wird eine abgetreppte, starr-ideal plastische Verbundschubspannungs-Schlepp-
beziehung vorausgesetzt.



$$\tau_{b0} = 2f_{ct} = 0,6 f_{ct}^{2/3}$$

$$\tau_{b1} = f_{ct} = 0,3 f_{ct}^{2/3}$$



Mit den getroffenen Annahmen folgen die Beziehungen

$$s_{r0} = \frac{\varnothing \cdot f_{ct}}{2 \tau_{b0}} \cdot \frac{1-p}{p} = \frac{\varnothing (1-p)}{4p}$$

für den maximalen Rissabstand s_{r0} , wobei \varnothing den Stabdurchmesser und p den geometrischen Bewehrungsgehalt des Zugglieds bezeichnet, sowie

$$s_{r0}/2 \leq s_r \leq s_{r0} \quad \text{beziehungsweise} \quad s_r = \lambda s_{r0}$$

mit der Bedingung $0,5 \leq \lambda \leq 1$ für den Bereich des theoretischen Rissabstands s_r . Für die Spannungsumlagerung zwischen Stahl und Beton erhält man die Beziehung

$$\Delta \sigma_s = \frac{4 \tau_b}{\varnothing} \cdot \Delta x$$

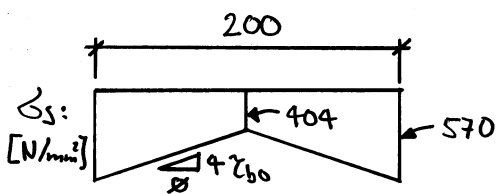
für die Spannungsänderung in der Bewehrung; je nachdem ob die Bewehrung einen Spannungszustand unter oder ober der Fließgrenze aufweist, ist für die Verbundschubspannung τ_b der Wert τ_{b0} oder τ_{b1} zu verwenden.

4.5.4.4. Abschätzung des Rissabstands

Mit der Annahme einer mitwirkenden Dicke der Betonzugzone $h_{eff} = 2 \cdot (h - d) = 78 \text{ mm}$ resultiert ein geometrischer Bewehrungsgehalt $\rho = a_s (b \cdot h_{eff}) = 0,99\%$ des Betonzugglieds. Somit ergibt sich ein maximaler Rissabstand $s_{r0} = \varnothing(1 - \rho) / (4 \rho) = 351 \text{ mm}$ beziehungsweise lässt sich der theoretische Rissabstand mit der Bedingung $\frac{1}{2} s_{r0} = 176 \text{ mm} \leq s_r \leq 351 \text{ mm} = s_{r0}$ eingrenzen. Da die Teilung der Querbewehrung 200 mm beträgt, werden sich die Risse an den Stellen der Querstäbe einstellen (Schwächung des Betonquerschnitts). Für die weiteren Betrachtungen treffen wir die Annahme eines Rissabstands von $s_r = 200 \text{ mm}$.

4.5.4.5. Plattenstreifen P1 ("kaltverformter Stahl")

• Risselement bei Fließbeginn



$$\Delta \sigma_s = 4 \chi_{bo} \cdot \Delta x / \varnothing, \quad \chi_{bo} = 2 f_{ct}$$

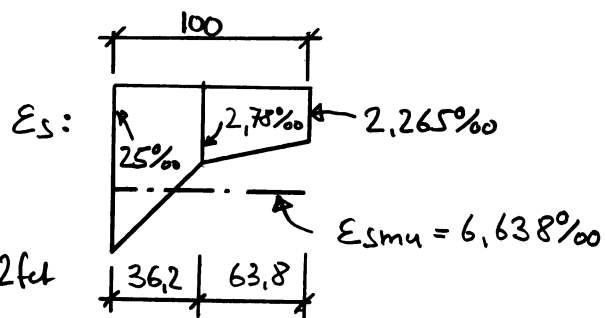
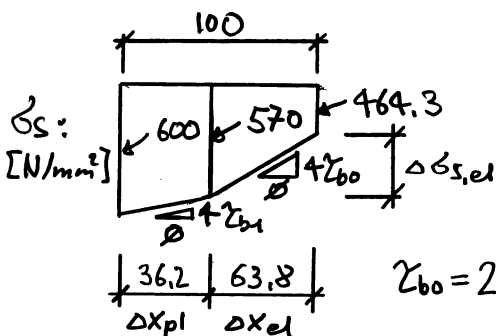
$$\sigma_{sr} = f_{sy} = 570 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{sm} = f_{sy} - 2 \chi_{bo} \cdot s_r / \varnothing = 404 \text{ N/mm}^2$$

Mittlere Stahldehnung: $\epsilon_{smy} = f_{sy} / E_s - (\chi_{bo} \cdot s_r) / (\varnothing \cdot E_s) = 2,38\%$

Fließmoment: $m_y = a_s \cdot f_{sy} \cdot d_v = 111,0 \text{ kNm/m}$

• Risselement beim Erreichen der Zugfestigkeit



$$\Delta x_{pl} = (\Delta \sigma_s \cdot \varnothing) / (4 \chi_{bo}) = 36,2 \text{ mm}, \quad \Delta \sigma_{s,el} = 4 \chi_{bo} \cdot \Delta x_{el} / \varnothing = 105,7 \text{ N/mm}^2$$

Mittlere Dehnung beim Erreichen der Zugfestigkeit: $\varepsilon_{smu} = 6,638\%$

• Plastischer Rotationswinkel ϑ_{pl}

Die Länge des plastischen Gelenks l_{pl} entspricht ungefähr dem doppelten Wert der statischen Höhe, $l_{pl} \approx 2d$. Mit der mittleren Stahldehnung bei Fließbeginn ε_{sm} und der mittleren Stahldehnung bei einer bestimmten Beanspruchung über der Fließgrenze ε_{sm} , erhält man den plastischen Rotationswinkel

$$\vartheta_{pl} = \frac{l_{pl} (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{sm})}{(d - z_c)} = \frac{2d}{(d - z_c)} (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{sm}) = 2,148 (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{sm})$$

• Fließbeginn beim Mittelager B

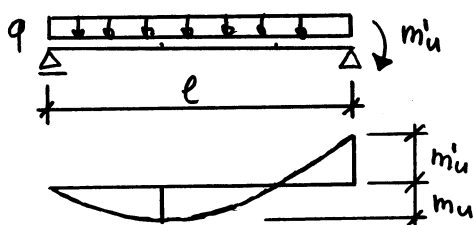
Belastung bei Fließbeginn beim Mittelager $q_{y,B}$:

$$q_{y,B} = 8 m_y / l^2 = 13,88 \text{ kN/m}^2$$

Mittendurchbiegung $w_m(q_{y,B})$:

$$w_m(q_{y,B}) = \frac{5 q_{y,B} \cdot l^4}{384 E_c I_c^{\text{II}}} - \frac{m_y l^2}{16 E_c I_c^{\text{II}}} = \frac{q_{y,B} \cdot l^4}{192 E_c I_c^{\text{II}}} = 35,9 \text{ mm}$$

• Fließbeginn im Feld



$$q = \frac{4 m_u + 2 m'_u}{l^2} + \frac{4}{l^2} \sqrt{m_u^2 + m_u \cdot m'_u}$$

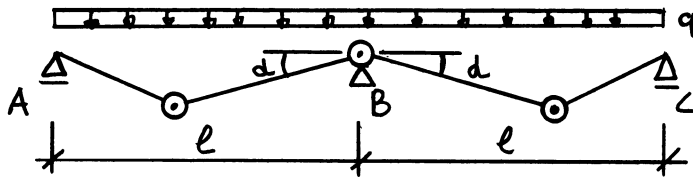
Annahmen: • Bruchwiderstand $m_{us} = 117,0 \text{ kNm/m} = m'_u$ beim Mittelager B

• Fließmoment $m_y = 11,0 \text{ kNm/m} = m_u$ im Feld

$$\rightarrow q_{y,F} = 20,54 \text{ kN/m}^2$$

Damit eine Belastung $q_{y,F} = 20,54 \text{ kN/m}^2$ aufgenommen werden kann, muss das plastische Gelenk beim Mittelager ein geringeres

Verformungsvermögen aufweisen beziehungsweise muss der erforderliche Verformungsbedarf sichergestellt sein.



$$\theta_{pl} = 2d$$

Verformungsbedarf beim Mittelager B:

$$\alpha = \frac{(q_{y,F} - q_{y,B}) \cdot l^3}{24 E_c I_c^{II}} - \frac{(m_{us} - m_y) \cdot l}{3 E_c I_c^{II}} = 15,304 \text{ mrad} \hat{=} 0,877^\circ$$

$$\theta_{pl,erf} = 2d = 30,61 \text{ mrad} \hat{=} 1,754^\circ$$

Verformungsvermögen beim Mittelager B:

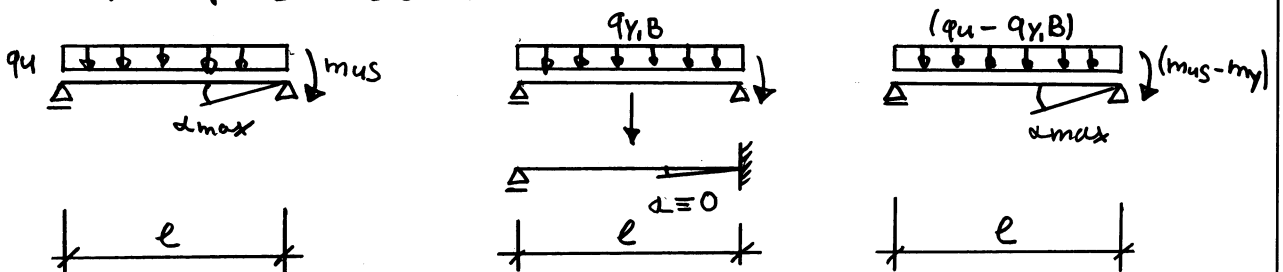
$$\theta_{pl} = 2,148 \cdot (\epsilon_{smu} - \epsilon_{smy}) = 9,147 \text{ mrad} \hat{=} 0,524^\circ$$

$$\Rightarrow \theta_{pl} = 0,524^\circ < \theta_{pl,erf} = 1,976^\circ \quad \nabla \rightarrow \text{Zerreißen der Bewehrung}$$

Das Fließmoment im Feld kann nicht erreicht werden, da das Rotationsvermögen beim Mittelager B nicht ausreicht, das heißt eine Schnittgrössenumlagerung ist nur teilweise möglich. Beim Erreichen der Traglast wird über dem Mittelager B ein spröder Bruch infolge Zerreißen der Bewehrung eintreten.

• Traglast (Zerreißen der Bewehrung beim Mittelager B)

Das Rotationsvermögen beim Mittelager B ist auf $\theta_{pl} = 9,147 \text{ mrad} \hat{=} 0,524^\circ$ beschränkt; die Traglast wird bei einer Neigung $\alpha_{max} = \theta_{pl}/2$ beim Mittelager B erreicht.



$$\alpha_{max} = 4,574 \text{ mrad} \hat{=} 0,262^\circ$$

$$d_{max} = \frac{(q_u - q_{y,B}) l^3}{24 E_c I_c^{\text{II}}} - \frac{(m_{us} - m_y) \cdot l}{3 E_c I_c^{\text{II}}} \rightarrow (q_u - q_{y,B}) = 2,52 \text{ kN/m}^2$$

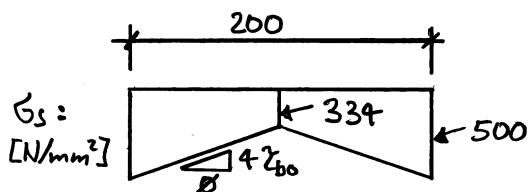
Traglast: $q_u = q_{y,B} + (q_u - q_{y,B}) = 16,4 \text{ kN/m}^2$

Mittendurchbiegung $w_m(q_u)$:

$$w_m(q_u) = \frac{5 q_u l^4}{384 E_c I_c^{\text{II}}} - \frac{m_{us} l^2}{16 E_c I_c^{\text{II}}} = 49,3 \text{ mm}$$

4.5.4.6. Plattenstreifen P2 ("naturschaer Stahl")

• Risselement bei Fließbeginn



$$\Delta \sigma_s = 4 \zeta_{bo} \cdot \Delta x / d, \quad \zeta_{bo} = 2 f_{ct}$$

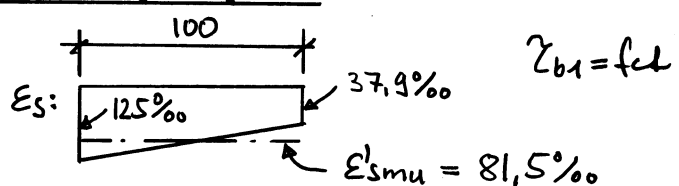
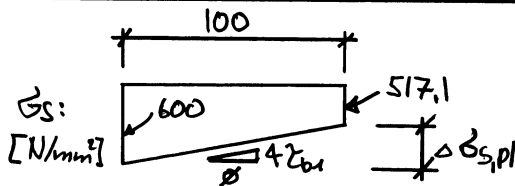
$$\sigma_{sr} = f_{sy} = 500 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{sm} = f_{sy} - 2 \zeta_{bo} \cdot s_r / d = 334 \text{ N/mm}^2$$

Mittlere Stahldehnung: $\epsilon_{smy} = f_{sy} / E_s - (\zeta_{bo} \cdot s_r) / (d \cdot E_s) = 2,03\%$

Fließmoment: $m_y = q_s \cdot f_{sy} \cdot d_v = 97,4 \text{ kNm/m}^1$

• Risselement beim Erreichen der Zugfestigkeit



$$\Delta \sigma_{pl} = 4 \zeta_{b1} \cdot \Delta x_{pl} / d = 4 \cdot \zeta_{b1} \cdot \frac{1}{2} s_r / d = 82,9 \text{ N/mm}^2$$

Die mittlere Dehnung des Zugstahls beim Bruch beträgt $\epsilon'_{smu} = 81,5\%$.

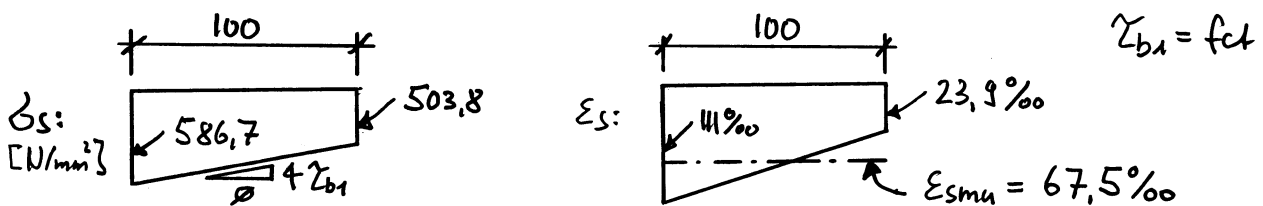
Mit der Annahme einer Bruchstauchung des Betons $\epsilon_{cu} = 5\%$, welche aufgrund experimenteller Erfahrung beruht, erfolgt die Kontrolle der Betonrandstauchung.

$$\epsilon_c = \epsilon'_{smu} \cdot z_c (d - z_c) = 6,04\% > \epsilon_{cu} = 5\% ?$$

Die Zugfestigkeit des Bewehrungsstahls wird nicht erreicht; beim

Erreichen des Biege widerstands tritt Betonbruch im Druckquart auf, während die Bewehrung im Zugquart am Fließen ist ($\sigma_s < f_{su}$). Der Zugquart wird für die Ermittlung des Biege widerstands nicht massgebend. Die mittlere Dehnung ϵ_{smu} des Zugquarts beim Erreichen des Biege widerstands ergibt sich zu

$$\epsilon_{smu} = \epsilon_{cu} (d - z_c) / z_c = 67,5\text{‰}$$



• Biege widerstand

Beim Erreichen des Biege widerstands (Bruchzustand Beton, $\epsilon_{cu} = 5\text{‰}$) beträgt die Stahlspannung am Riss $\sigma_{sr} = 586,7 \text{ N/mm}^2 < f_{su}$.

$$\text{Biege widerstand: } m_{uc} = a_s \cdot \sigma_{sr} \cdot d_v = 114,3 \text{ kNm/m'}$$

$$\text{Verformungsvermögen: } \theta_{pl} = 2,148 (\epsilon_{smu} - \epsilon_{smv}) = 140,639 \text{ mrad} \hat{=} 8,058^\circ$$

• Fließbeginn beim Mittelager B

Belastung bei Fließbeginn beim Mittelager $q_{y,B}$:

$$q_{y,B} = 8 m_y / l^2 = 12,18 \text{ kN/m}^2$$

Mittendurchbiegung $w_m(q_{y,B})$:

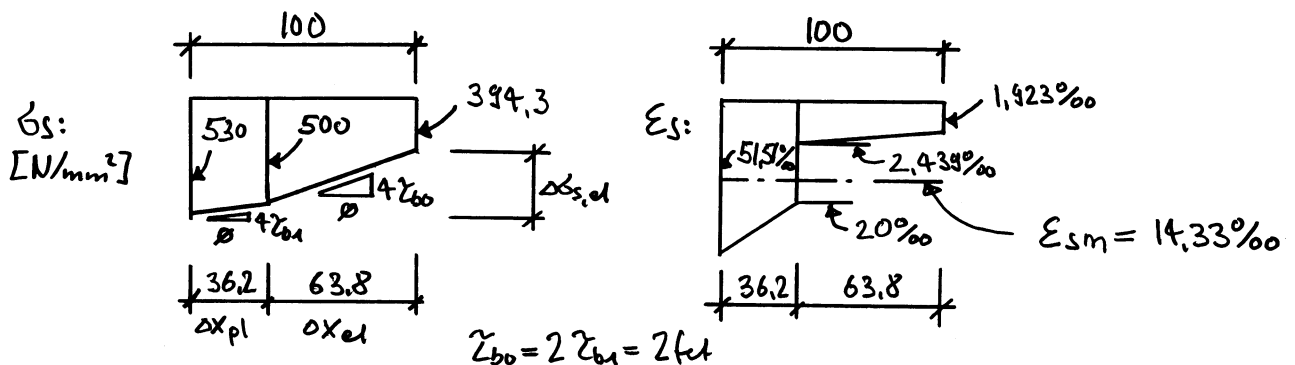
$$w_m(q_{y,B}) = \frac{5 q_{y,B} \cdot l^4}{384 E_c I_c^{\text{II}}} - \frac{m_y l^2}{6 E_c I_c^{\text{II}}} = \frac{q_{y,B} \cdot l^4}{192 E_c I_c^{\text{II}}} = 31,5 \text{ mm}$$

• Fließbeginn im Feld

Beim Erreichen des Fließmoments $m_y = 97,4 \text{ kNm/m'}$ im Feld beträgt das Biegemoment beim Mittelager $m_B(q_{y,F}) = -103,2 \text{ kNm/m} = -m_{y,B}$ die Ermittlung des Moments beim Mittelager B erfordert ein iteratives Lösungsverfahren, bei welchem der Verformungsbedarf der effektiven

plastischen Rotation beim Mittelager B gegenüber gestellt wird.

Rissenelement beim Mittelager B:



$$\Delta x_{pl} = (\sigma_s \cdot \varnothing) / (4 \cdot z_{b1}) = 36,2 \text{ mm} \quad , \quad \Delta \sigma_{s,el} = 4 \cdot z_{b0} \cdot \Delta x_{el} / \varnothing = 105,7 \text{ N/mm}^2$$

Mittlere Dehnung des Zugzugs: $\epsilon_{sm}(q_{y,F}) = 14,33\text{‰}$

Plastische Rotation beim Mittelager B:

$$\Theta_{pl}(q_{y,F}) = 2,148 (\epsilon_{sm}(q_{y,F}) - \epsilon_{sm,y}) = 26,420 \text{ mrad} \hat{=} 1,514^\circ$$

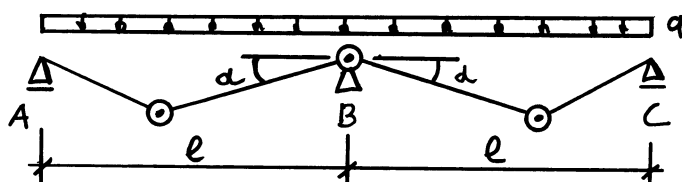
Biegemoment beim Mittelager B:

$$m_B(q_{y,F}) = -q_s \cdot z_{sr}(q_{y,F}) \cdot dv = -103,2 \text{ kNm/m} = -m'_B$$

Belastung bei Fließbeginn im Feld $q_{y,F}$:

$$q_{y,F} = \frac{4 m_F + 2 m'_B}{l^2} + \frac{4}{l^2} \sqrt{m_F^2 + m_F \cdot m'_B} = 18,05 \text{ kN/m}^2$$

Verformungsbedarf beim Mittelager B:



$$\Theta_{pl} = 2\alpha$$

$$\alpha = \frac{(q_{y,F} - q_{y,B}) \cdot l^3}{24 E_c I_c^{II}} - \frac{(m'_B - m_y) \cdot l}{3 E_c I_c^{II}} = 13,329 \text{ mrad} \hat{=} 0,764^\circ$$

$$\Theta_{pl,ert} = 2\alpha = 26,658 \text{ mrad} \hat{=} 1,527^\circ$$

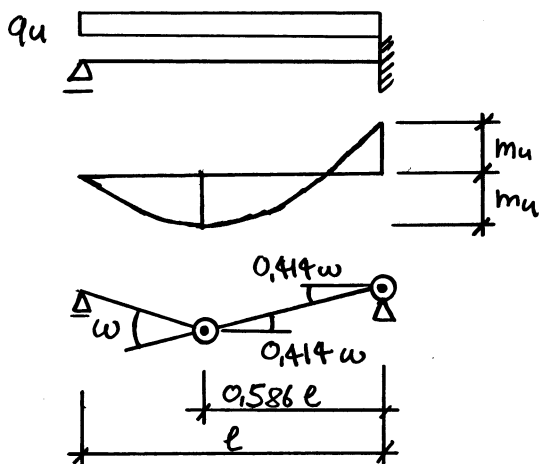
$\Rightarrow \Theta_{pl,ert} = 1,527^\circ \approx \Theta_{pl}(q_{y,F}) = 1,514^\circ \rightarrow$ Kontrolle des Rotationswinkels

Mittendurchbiegung $w_m(q_{y,F})$:

$$w_m(q_{y,F}) = \frac{5 q_{y,F} \cdot l^4}{384 E_c I_c^{II}} - \frac{m'_B \cdot l^2}{16 E_c I_c^{II}} = 66,7 \text{ mm}$$

• Traglast (Betonstanchen im Druckzust beim Mittelager B)

Das Rotationsvermögen des plastischen Gelenks beim Mittelager B ist auf $\theta_{pl} = 140,639 \text{ mrad} \hat{=} 8,058^\circ$ beschränkt; bei einer Neigung der Stabachse beim Mittelager B von $\alpha = \theta_{pl}/2$ wird die Traglast q_u erreicht. Nach dem Erreichen des Fließmoments im Feld bildet sich ein zweites Fließgelenk im Feld. Bei der weiteren Laststeigerung zeigen die Fließgelenke beim Mittelager B und im Feld ein verfestigendes Verhalten. In dieser Phase stellt sich ein Mechanismus, wobei für die Verformungsbeobachtungen angenommen wird, dass sich das Fließgelenk im Feld beim Erreichen der Traglast in einem Abstand von $0,586 \cdot l$ vom Mittelager B entfernt befindet. Dieser Abstand entspricht der plastischen Lösung des einseitig eingespannten Balkens mit identischen positiven und negativen Biege widerständen.

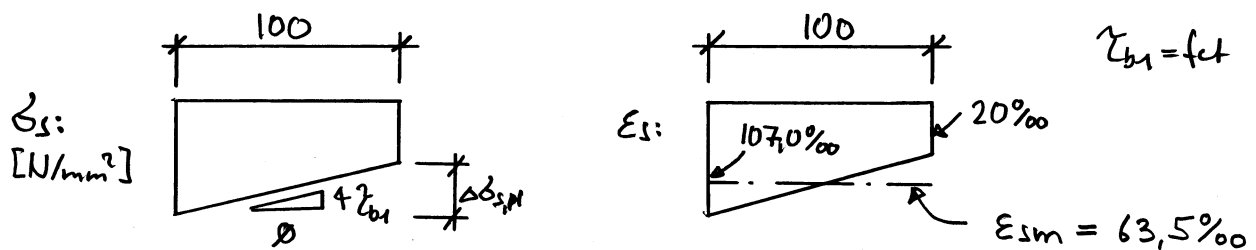


$$q_u = 11,66 \frac{m_u}{l^2}$$

Der Winkel w entspricht dem plastischen Rotationswinkel $\theta_{pl,F}$ des Fließgelenks im Feld.

Beim Erreichen der Traglast entspricht das Biegemoment beim Mittellager B betragsmäßig dem Biegevermögen $m_{uc} = 114,3 \text{ kNm/m}$, während sich im plastischen Gelenk des Felds ein Biegemoment $m_F(q_u) = 113,6 \text{ kNm}$ einstellt. Die Annahme betreffend Ort des Fließgelenks im Feld ist somit aufgrund des geringen Unterschieds für die Verformungsbetrachtungen ausreichend.

Risselement im Feld (plastisches Gelenk):



$$\Delta \sigma_{s,pl} = 4 z_{b1} \cdot \Delta x_{pl} / \varnothing = 82,9 \text{ N/mm}^2$$

Mittlere Dehnung des Zuggurts: $\epsilon_{sm}(q_u) = 63,5\text{‰}$

Plastische Rotation im Feld (Fließgelenk):

$$\Theta_{pl,F}(q_u) = 2,148 (\epsilon_{sm}(q_u) - \epsilon_{sm,y}) = 132,047 \text{ mrad} \hat{=} 7,566^\circ$$

Biegemoment im Feld:

$$m_F(q_u) = q_s \cdot \sigma_{s,pl}(q_u) \cdot dv = 113,6 \text{ kNm/m}$$

Traglast q_u :

$$q_u = \frac{4 m_F(q_u) + 2 m_{uc}}{\ell^2} + \frac{4}{\ell^2} \sqrt{m_F^2(q_u) + m_F(q_u) \cdot m_{uc}} = 20,73 \text{ kN/m}^2$$

Verformungsbedarf beim Mittellager B:

$$\alpha = \frac{q_u \cdot \ell^3}{24 E_c I_c^{II}} - \frac{m_{uc} \cdot \ell}{3 E_c I_c^{II}} + 0,414 \Theta_{pl,F}(q_u) = 71,34 \text{ mrad} \hat{=} 4,087^\circ$$

$$\Theta_{pl,eff} = 2\alpha = 142,68 \text{ mrad} \hat{=} 8,17^\circ$$

$$\Rightarrow \Theta_{pl,eff} = 8,17^\circ \approx \Theta_{pl} = 8,06^\circ \rightarrow \text{Kontrolle des Rotationswinkels}$$

Mittendurchbiegung $w_m(q_u)$:

$$w_m(q_u) = \frac{5 q_u \cdot l^4}{384 E_c I_c^{II}} - \frac{m_{uc} \cdot l^2}{16 E_c I_c^{II}} + 0,414 G_{pl,F}(q_u) \cdot \frac{l}{2} = 297,3 \text{ mm}$$

• Querkraftwiderstand gemäss SIA 262

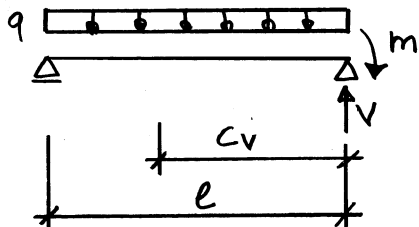
Der Querkraftwiderstand für Bauteile ohne Querkraftbewehrung gemäss der Norm SIA 262 basiert auf der empirischen Beziehung

$$\frac{V_R}{b d} = \frac{0,3 \sqrt{f_{cc}}}{0,9 + 2,3 \cdot \varepsilon \cdot d \cdot 48 / (16 + d_a)} = \Sigma_{cR}$$

wobei d_a dem Grösstkon der Zuschlagstoffe entspricht und

$$\varepsilon = \varepsilon_{sv} \frac{0,6 d - z_c}{d - z_c}$$

eine fiktive Dehnung im kritischen Schnitt bezeichnet, während ε_{sv} die Stahldehnung im Rissquerschnitt darstellt.



$$V = m/l + 1/2 \cdot q l$$

$$c_v = V/q \rightarrow \beta = c_v/l$$

$$\begin{aligned} m(q_{y,B}) &= 97,4 \text{ kNm/m}^2, & q_{y,B} &= 12,2 \text{ kN/m}^2 \rightarrow \beta = 0,625, & \varepsilon_{sv} &= 2,44\% \\ m(q_{y,F}) &= 103,2 \text{ kNm/m}^2, & q_{y,F} &= 18,0 \text{ kN/m}^2 \rightarrow \beta = 0,590, & \varepsilon_{sv} &= 51,51\% \\ m(q_u) &= 114,3 \text{ kNm/m}^2, & q_u &= 20,7 \text{ kN/m}^2 \rightarrow \beta = 0,586, & \varepsilon_{sv} &= 111,06\% \end{aligned}$$

Mit $d = 261 \text{ mm}$ und $z_c = 18 \text{ mm}$ sowie unter Beachtung der

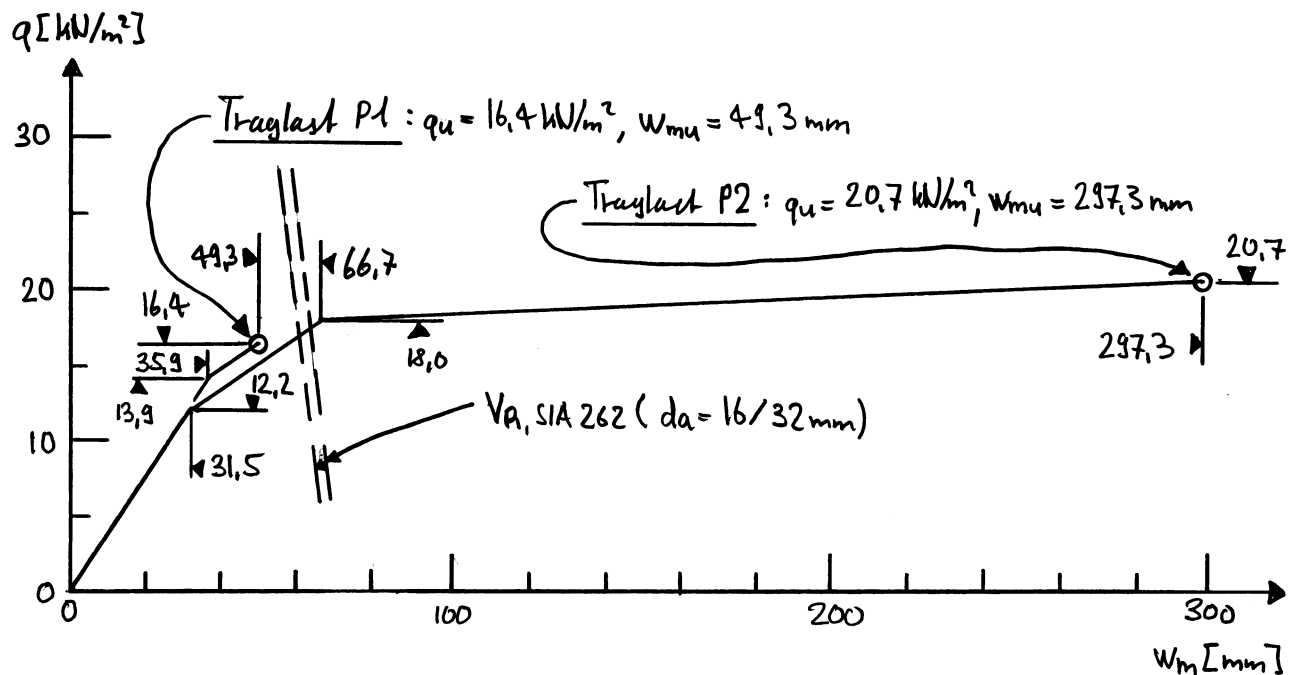
Beziehung $(\Sigma_{cR} \cdot b \cdot d) / (\beta \cdot l) = q$ erhält man für Betone

mit Grösstkon $d_a = 16/32 \text{ mm}$ die folgenden Querkraftwiderstände:

$$d_a = 16 \text{ mm}: q_R(q_{y,B}) = 70,2 \text{ kN/m}^2, \quad q_R(q_{y,F}) = 5,9 \text{ kN/m}^2$$

$$d_a = 32 \text{ mm}: q_R(q_{y,B}) = 87,1 \text{ kN/m}^2, \quad q_R(q_{y,F}) = 8,6 \text{ kN/m}^2$$

4.5.4.7. Last - Mittendurchbiegungsdiagramm



4.5.4.8 Diskussion

Das Verformungsvermögen des Plattenstreifens P1 mit kaltverformtem Bewehrungsstahl (B500A) ist aufgrund des kleinen Verfestigungsverhältnisses sowie der geringen Bruchdehnung sehr gering. Im Feldbereich kann sich kein Fließgelenk ausbilden, da das plastische Verformungsvermögen des Fließgelenks beim Mittelager ungenügend ist, das heisst die Bewehrung wird zerrissen. Bei einer Bemessung auf der Grundlage der Plastizitätstheorie und unter Verwendung von Stahl B500A ist ein Verformungsnachweis zwingend erforderlich beziehungsweise ist für die Schnittgrössenumlagerung ein entsprechendes Verformungsvermögen nötig.

Der Plattenstreifen P2 mit naturhartem Bewehrungsstahl (B500C) zeichnet sich im Gegensatz zum Plattenstreifen P1 durch ein ausgeprägtes Verformungsvermögen der plastischen Verformungsbereiche aus. Beim Erreichen der Biegetraglast weist sowohl das Fließgelenk

beim Mittellager als auch das Fließgelenk im Feld beachtliche plastische Verformungen auf. Damit ein vorzeitiges Versagen aufgrund eines spröden Querkraftbruchs ausgeschlossen werden kann, ist jedoch die Anordnung einer Querkraftbewehrung erforderlich.

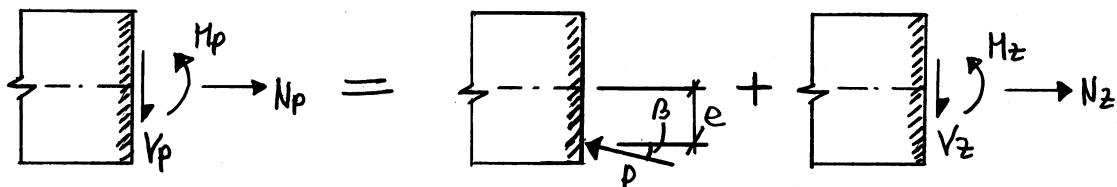
Ein duktiler Tragverhalten erfordert zwingend eine sorgfältige Durchbildung der verschiedenen Bewehrungen. Der Massstabseffekt und das spröde Querkraftbruchverhalten bei Stahlbetonplatten ohne Querkraftbewehrung können mit einem minimalen Querkraftbewehrungsgehalt eliminiert werden; dabei empfiehlt sich insbesondere in Bereichen mit grosser Querkraftbeanspruchung sowie in plastischen Verformungstonen eine konsequente Anordnung einer Querkraftbewehrung. Zur Sicherstellung des Verformungsvermögens sind weiter die Eigenschaften des Bewehrungsstahls von zentraler Bedeutung, das heisst die Verwendung von duktilen Stählen mit entsprechender Verfestigung und Bruchdehnung ist unerlässlich. Stähle der Qualitätsklasse B500A sollten daher nicht verwendet werden.

5. Vorspannung

Mit einer Vorspannung wird insbesondere das Gebrauchsverhalten von Stahlbetontragwerken positiv beeinflusst; dabei wird dem Tragwerk mit aktiven Massnahmen ein Eigenspannungszustand aufgezwungen. Die Vorspannung bewirkt eine höhere Risslast und somit ein steileres Verhalten im Gebrauchszustand. In den nachfolgenden Betrachtungen wird insbesondere die Deutung des Lastfalls Vorspannung als Eigenspannungszustand und als Anker-, Umlenk- und Reibungskräfte diskutiert.

5.1. Deutung der Vorspannung

Die Schnittgrössen infolge Vorspannung können als eine auf den Betonquerschnitt aufgebrachte Belastung aufgefasst werden.



Unter Voraussetzung von kleinen Kabelneigungen β erhält man mit den linearisierten Beziehungen $\cos \beta \approx 1$ und $\sin \beta \approx \tan \beta \approx \beta$ die Schnittgrössen infolge Vorspannung

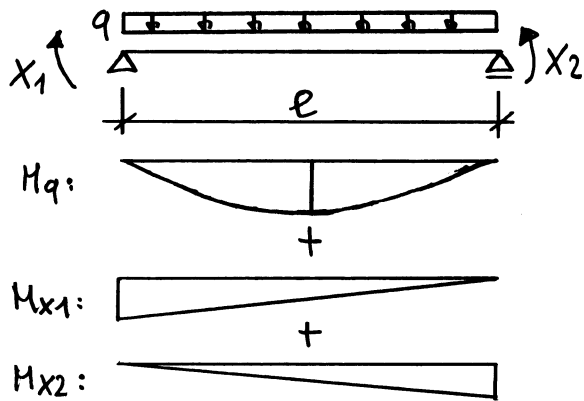
$$M_p = M_z - P \cdot e \cdot \cos \beta \approx M_z - P \cdot e$$

$$V_p = V_z - P \cdot \sin \beta \approx V_z - P \cdot \tan \beta$$

$$N_p = N_z - P \cdot \cos \beta \approx N_z - P$$

Die Zwängungsschnittgrössen, welche auch als Sekundärschnittgrössen oder Parasitärschnittgrössen bezeichnet werden, haben keinen Einfluss auf die Belastung des Tragwerks, da diese als überzählige Grössen bei statisch unbestimmten Systemen aufgetaut

werden können. Die überzähligen Größen verursachen Biegemomente mit linearem Funktionsverlauf beziehungsweise Querkräfte mit konstantem Funktionsverlauf.



Mit den differentiellen Beziehungen an einem infinitesimalen Stabelement $dM/dx = V$ und $dV/dx = -q$ folgt mit den Sekundärmomenten M_{x1} und M_{x2} infolge der überzähligen Größen x_1 und

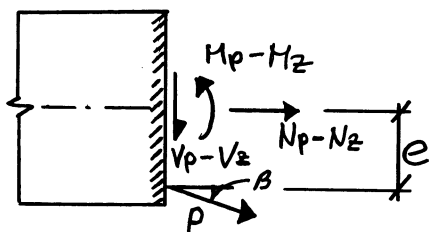
x_2 die Beziehung $d^2M(q+x_1+x_2)/dx^2 = -q$ beziehungsweise

$$\frac{d^2M(x_1)}{dx^2} = \frac{d^2M(x_2)}{dx^2} = 0$$

Somit bewirken die Zwängungsschnittgrößen lediglich eine Verschiebung der Schlusslinie der Momenten- und Querkraftverläufe.

5.1.1. Betrachtung als Eigenspannungszustand

Bei der Interpretation als Eigenspannungszustand werden die Schnittgrößen infolge Vorspannung, welche auf den Betonquerschnitt wirken, sowie die Kraft der Vorspannbewehrung betrachtet.



$$M = M_p + P \cdot e \cdot \cos \beta - M_z = 0$$

$$V = V_p + P \cdot \sin \beta - V_z = 0$$

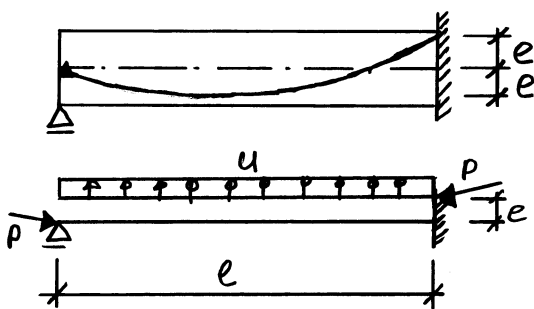
$$N = N_p + P \cdot \cos \beta - N_z = 0$$

Die Vorspannkraft wird auf der Widerstandsseite berücksichtigt; auf der Einwirkungsseite müssen lediglich die Zwängungsschnittgrößen infolge behinderter Verformungen bei statisch

unbestimmten Systemen betrachtet werden. Da die Zwängungs-schnittgrößen keinen Einfluss auf die Belastung haben, können diese bei der Bemessung theoretisch vernachlässigt werden, sofern ein genügendes Verformungsvermögen sichergestellt ist, so dass die Zwängungsschnittgrößen weglassifiziert werden können. In der Regel führt jedoch die Berücksichtigung zu zweckmäßigeren Bewehrungsanordnungen der zusätzlichen schlaffen Bewehrung.

5.1.2. Betrachtung als Anker-, Umlenk- und Reibungskräfte

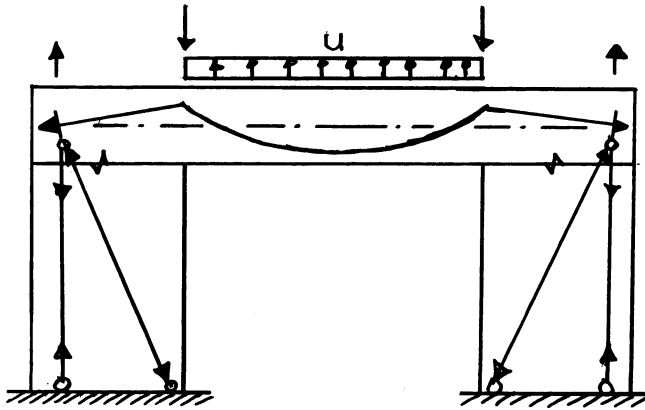
Bei der Interpretation als Anker-, Umlenk- und Reibungskräfte werden die von der Vorspannung erzeugten Kräfte als Einwirkung auf den Betonquerschnitt betrachtet; die Vorspannbewehrung wird dabei nicht als Bestandteil des Stahlbetonquerschnitts angesehen. Die Vorspannung kann somit als Lastfall aufgefasst werden, bei welchem die Zwängungsschnittgrößen infolge behinderter Verformungen bei statisch unbestimmten Systemen direkt erfasst werden.



Eine Krümmung des Kabelverlaufs mit dem Krümmungsradius R verursacht bei einer Kabelkraft P eine Umlenkkraft $u = \frac{P}{R}$, die

auf den Betonquerschnitt einwirkt. Die Betrachtung der Vorspannung als Anker-, Umlenk- und Reibungskräfte eignet sich auch besonders bei Scheiben und Platten, da mit den aus der Vorspannung resultierenden Anker-, Umlenk- und Reibungskräften ein entsprechender Lastfall generiert werden kann. Bei Platten wird dabei aufgrund der in der Regel behinderten

horizontalen Auflagerverschiebungen die Normalkraft infolge Vorspannung vernachlässigt; es werden lediglich Umblenkkräfte die orthogonal zur Plattenebene wirken berücksichtigt.



Im dargestellten Beispiel bewirken die steifen Wandscheiben, dass die Normalkraft infolge Vorspannung zum größten

Teil von den Wandscheiben aufgenommen wird, während die Platte eine verschwindende Normalkraftbeanspruchung erfährt.

5.1.3. Spannkraftverluste

Spannkraftverluste werden durch Reibung und zeitabhängige Effekte wie Schwinden und Kriechen des Betons sowie Relaxation des Vorspannstahls verursacht. Zeitabhängige Effekte führen zu einem Abfall der wirksamen Vorspannkraft, während Reibungsverluste einen variierenden Kraftverlauf entlang des Kabels verursachen.

Die Spannkraftverluste infolge Reibung und ungewollter Kabelumlenkungen pro Längeneinheit, welche durch Verlegetoleranzen entstehen, werden mit dem Reibungskoeffizient μ und dem Reibungsfaktor k berücksichtigt. Es folgt die Beziehung

$$P(x) = P_0(x=0) \cdot e^{-(\mu\alpha + kx)}$$

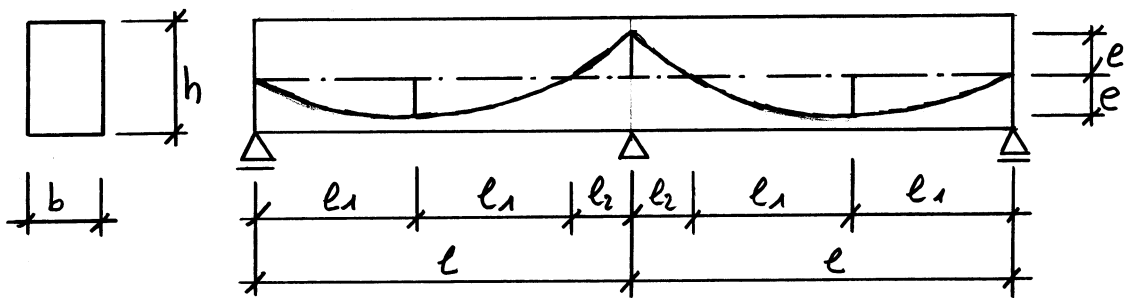
für die Vorspannkraft an der Stelle x , wobei $P_0(x=0)$ die Vorspannkraft an der Spannstelle $x=0$, α die Summe aller

Umlenkwinkel bis zur Stelle x im Bogenmass [rad] und x den Abstand von der Spannstelle in Meter bezeichnet. Die Reibungskoeffizienten μ und k liegen bei Stahlhüllrohren in der Größenordnung $\mu \approx 0,2$, $k \approx 0,8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ und bei Kunststoffhüllrohren $\mu \approx 0,14$, $k \approx 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}$; genauere Werte können den Produktdokumentationen der Vorspannfirmer entnommen werden.

In den anschließenden Betrachtungen wird auf die Spannkraftverluste nicht weiter eingegangen.

5.1.4. Beispiel Zweifeldträger

Die Deutung der Vorspannung wird am Beispiel eines Zweifeldträgers mit Rechteckquerschnitt und gleichen Spannweiten erläutert.

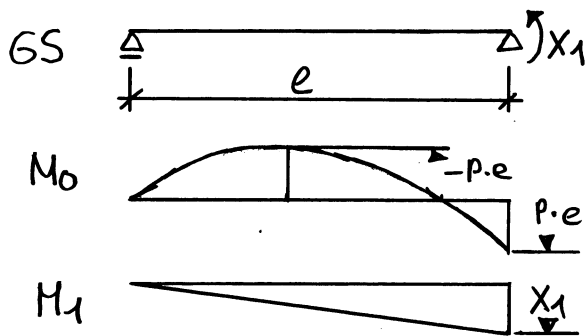


Wir betrachten ein Vorspannkabel mit einem parabolischen Verlauf, das heißt es resultieren die Stellen mit maximaler Kabelexzentrizität e , die mit $l_1 = l / (1 + \sqrt{2})$ und $l_2 = l \cdot (\sqrt{2} - 1) / (\sqrt{2} + 1)$ festgelegt sind.

• Deutung als Eigenspannungszustand

Da die Vorspannkraft auf der Widerstandseite berücksichtigt wird, interessieren insbesondere die Zwangungsschnittgrößen, welche auf die statisch unbestimmte Lagerung zurückzuführen sind. Dabei

entsprechen die Zwangungsschnittgrößen den durch die überrählige Größe X_1 verursachten Schnittgrößen; der Eigenspannungszustand wird mit den Schnittgrößen infolge der exzentrischen Lage der Kabelkraft am statisch bestimmten Grundsystem berücksichtigt.



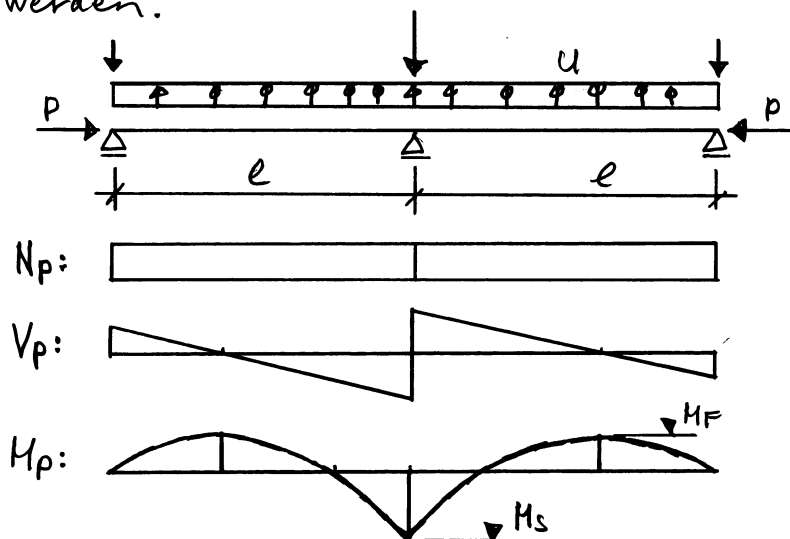
$$X_1 = \frac{2\sqrt{2}-1}{8} P \cdot e = 0,457 P \cdot e$$

• Deutung als Anker- und Umlenkkräfte

Die Umlenkkraft infolge der gekrümmten Kabelführung beträgt

$$u = \frac{8 P \cdot e}{(2e_1)^2} = \frac{6 + 4\sqrt{2}}{e^2} P \cdot e = \frac{11,656}{e^2} P \cdot e$$

welche mit den Ankerkräften und konzentrierten Umlenkkräften als äussere Einwirkung auf das statisch unbestimmte System eingeführt werden.

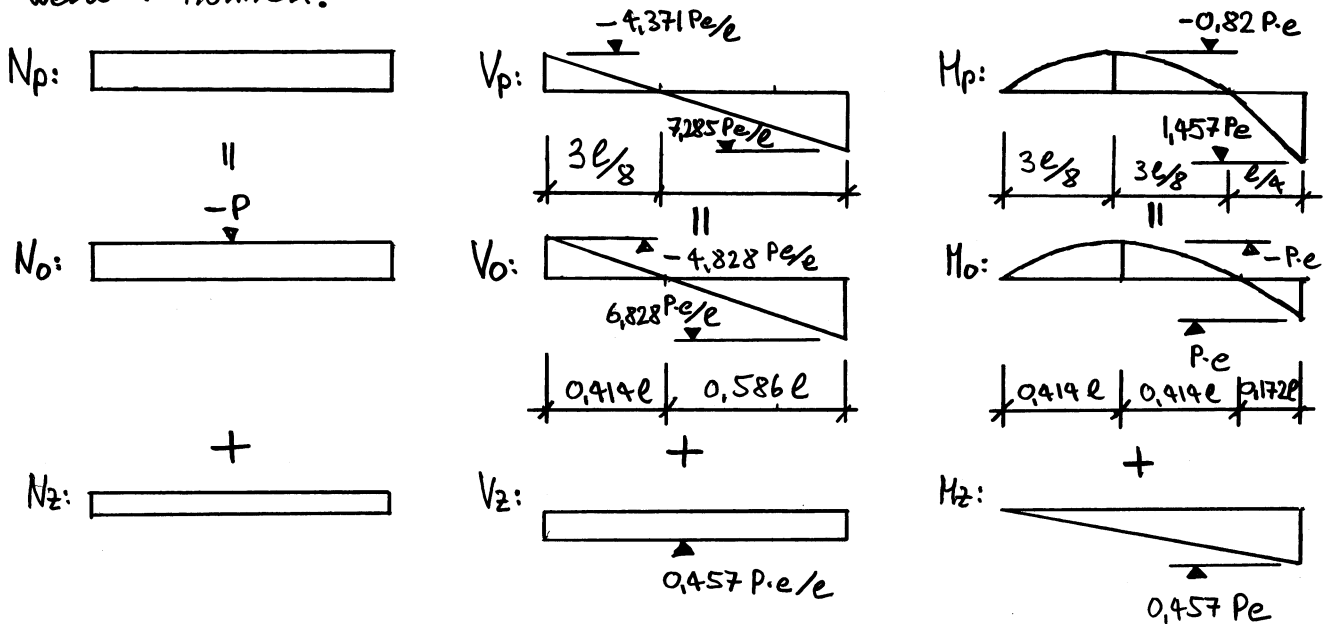


$$M_s = \frac{3+2\sqrt{2}}{4} P \cdot e = 1,457 P \cdot e$$

$$-M_f = \frac{9(3+2\sqrt{2})}{64} P \cdot e = 0,8196 P \cdot e$$

Der Lastfall Vorspannung verursacht die Schnittgrößen N_p , V_p , und M_p , welche in einen Eigenspannungsanteil infolge der

exzentrischen Kabelkraft und einen Zwängungsanteil zerlegt werden können.



• Diskussion

Bei der Anwendung der Deutung als Eigenspannungszustand werden die infolge auf den Betonquerschnitt einwirkenden Schnittgrößen des Eigenspannungszustands ohne Vorspannbewehrung und die Zwängungsschnittgrößen auch als Schnittgrößen infolge Vorspannung bezeichnet. Man sollte sich jedoch stets im klaren sein, dass diese Schnittgrößen auf den Betonquerschnitt wirken, während am Gesamtsystem infolge Vorspannung lediglich die Zwängungsschnittgrößen als äussere Einwirkung angreifen.

5.2. Vorspannkonzeppte

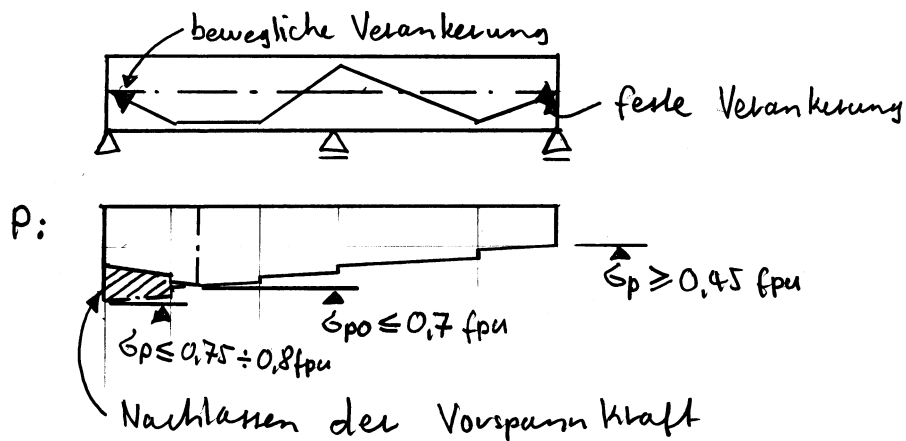
Grundsätzlich unterscheidet man zwischen einer vollen, einer beschränkten und einer teilweisen Vorspannung. Bei einer vollen Vorspannung treten unter der betrachteten Last im Gebrauchszustand rechnerisch keine Zugspannungen im Beton in Richtung der Vorspannbewehrung auf, $\sigma_c \leq 0$; das heißt das Tragwerk bleibt ungerissen. Im Gegensatz zur vollen Vorspannung werden bei der beschränkten Vorspannung im Gebrauchszustand rechnerisch minimale Zugspannungen im Beton zugelassen, welche unterhalb der Betonzugfestigkeit liegen müssen, $\sigma_c < f_{ct}$; das Tragwerk bleibt somit ebenfalls ungerissen, wobei eine Rissbildung aufgrund von Spannungskonzentrationen nicht ausgeschlossen werden kann. Bei einer teilweisen Vorspannung werden im Gebrauchszustand unter einer bestimmten Last Risse zugelassen, wobei das Tragverhalten einem schlaff bewehrten Tragwerk entspricht.

Bei der Bemessung eines Tragwerks wird oft für einen bestimmten Lastfall die Vorspannung so gewählt, dass die Anker- und Umlenkkräfte die bestimmte Belastung kompensieren; beispielweise die ständigen Lasten. Das Tragwerk bleibt somit im Gebrauchszustand unter den ständigen Lasten ungerissen. Die zusätzlichen Nutlasten führen in der Regel zu einer Rissbildung, so dass für den Lastfall ständige Lasten und Nutlasten eine teilweise Vorspannung vorliegt. Da in der Regel immer eine schlaffe Mindestbewehrung erforderlich ist, führt eine teilweise Vorspannung für die gesamte Gebrauchslast zu wirtschaftlichen Bewehrungsgehalten.

5.3. Vorspannarten

Grundsätzlich wird zwischen Vorspannung mit nachträglichem Verbund und Vorspannung ohne Verbund unterschieden; Spannhaltvorspannung mit direktem Verbund wird im Rahmen der folgenden Betrachtungen nicht behandelt.

Das Vorspannniveau unmittelbar nach dem Vorspannen wird normalerweise auf $\sigma_{p0} \leq 0,7 \cdot f_{pu}$ begrenzt, wobei σ_{p0} der effektiven Spannung der Vorspannbewehrung und f_{pu} der Zugfestigkeit des Vorspannstahls entspricht. Während des Spanns sind kurzzeitig höhere Spannungen, $\sigma_p \leq 0,75 \div 0,8 f_{pu}$, zulässig; mit den höheren Spannungsniveaus können Reibungsverluste kompensiert werden.



Damit im Bruchzustand die Vorspannbewehrung die Fließspannung f_{yp} erreicht, wird bei Vorspannsystemen mit nachträglichem Verbund die minimal zulässige Spannung infolge Vorspannung auf $\sigma_p \geq 0,45 f_{pu}$ limitiert. Bei Vorspannsystemen ohne Verbund wird im Bruchzustand die Fließgrenze in der Regel nicht erreicht; der Spannungszuwachs der Vorspannbewehrung ist gering und kann normalerweise vernachlässigt werden.

5.3.1. Vorspannung ohne Verbund

Bei einer Vorspannung ohne Verbund liegt der Vorspannstahl gleitfähig im Hüllrohr; auch im Bauzustand nach dem Vorspannen und vor dem Injizieren von Vorspannkabeln mit nachträglichem Verbund liegt eine Vorspannung ohne Verbund vor.

5.3.2. Vorspannung mit nachträglichem Verbund

Nach dem Vorspannen werden die Hüllrohre mit einem Zementmörtel ausinjiziert; die Verbundschubspannung zwischen dem Vorspannkabel und dem Injektionsmörtel kann aufgrund von Ausziehversuchen mit der Beziehung

$$\sigma_{bpo} = 4 \sqrt{\frac{f_{cw}}{P_{bp}}} \quad \text{in N/mm}^2$$

wobei f_{cw} der Würfeldruckfestigkeit in N/mm^2 und P_{bp} dem wirksamen Verbundumfang des Vorspannkabels in mm entspricht. Der wirksame Verbundumfang kann als kleinste konvexe Hülle des Litzen- oder Drahtbündels definiert werden. Mit der Gesamtfläche A_p des Vorspannkabels folgen die Ausdrücke

$$P_{bp} = 6 (\pi - 3 + \sqrt{12m - 3}) \cdot \sqrt{\frac{A_p}{7\pi m}}$$

für Litzenstrahlkabel mit m siebendrähtigen Litzen und

$$P_{bp} = 2 (\pi - 3 + \sqrt{12m - 3}) \cdot \sqrt{\frac{A_p}{\pi m}}$$

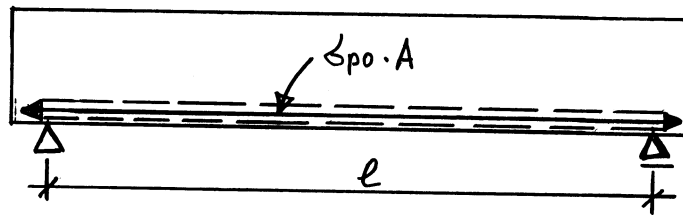
für Paralleldrahtkabel mit m Drähten. Der maximal mögliche Kraftanstieg pro Spanngliedlänge beträgt somit $\Delta P = \sigma_{bpo} \cdot P_{bp}$ im Bereich von elastischen Spannungszuständen der

Vorspannbewehrung. Damit im Bruchzustand der Spannungszuwachs ($f_{py} - \sigma_{po}$) sichergestellt ist beziehungsweise der Vorspannstahl die Fließspannung f_{py} erreicht, ist in der Umgebung von plastischen Fließgelenken ein entsprechender Verbundbedarf erforderlich.

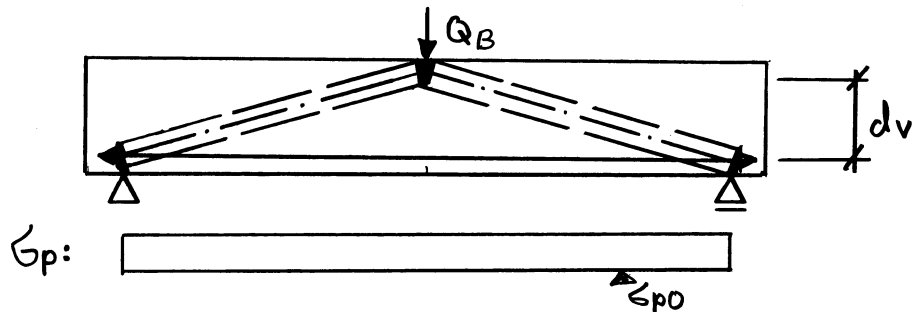
5.4. Tragverhalten von vorgespannten Trägern

Zur Illustration des Tragverhaltens betrachten wir einen statisch bestimmten Spannbetonträger unter einer in Feldmitte angreifenden Einzelkraft. Der rechteckförmige Träger ist mit einem geraden, exzentrisch angeordneten Vorspannkabel mit nachträglichem Verbund bewehrt; es wird keine schlaffe Bewehrung berücksichtigt. Das Vorspannkabel mit einer Fläche A_p weist nach dem Spannen eine Stahlspannung σ_{po} auf; die Fließgrenze wird mit f_{py} bezeichnet, wobei ein ideal plastisches Materialverhalten vorausgesetzt wird.

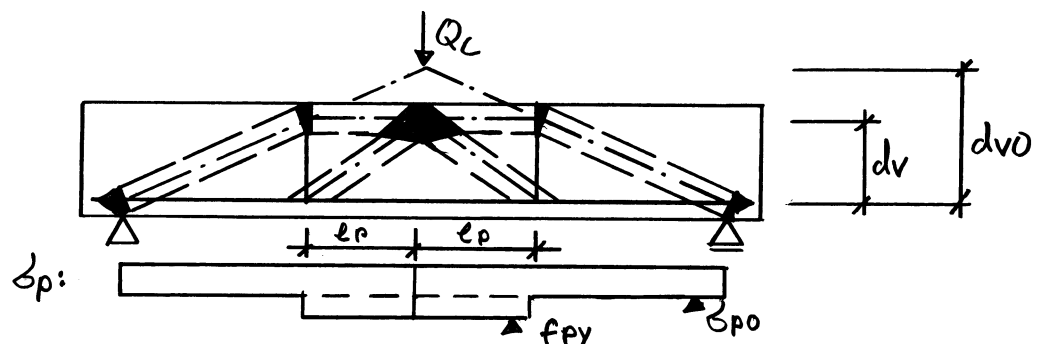
Zustand A:



Zustand B:



Zustand C:



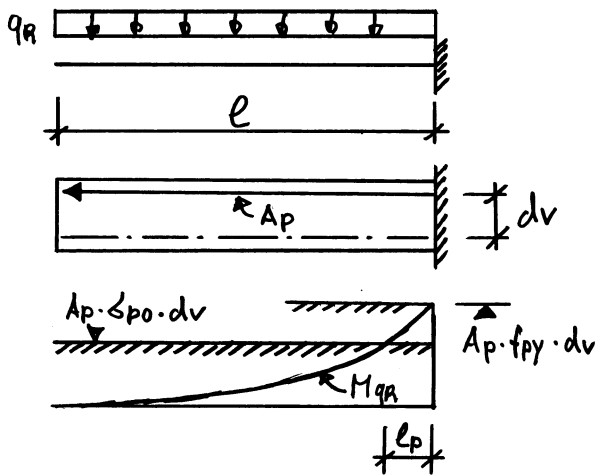
Nach dem Vorspannen herrscht der Zustand A. Dabei bewirkt die Vorspannkraft $P_0 = \sigma_{p0} \cdot A_p$ eine resultierende Druckkraft im Betonquerschnitt, deren Wirkungslinie der Spanngliedachse entspricht.

Bei der kontinuierlichen Steigerung der Einzelkraft bis zu einem Wert von $Q_B = 4 \cdot A_p \cdot \sigma_{p0} \cdot dv/l$ wandert die Wirkungslinie der resultierenden Betondruckkraft bis zum oberen Trägerband. Die Spannung in dem Spannglied bleibt ungefähr konstant und entspricht der Spannung σ_{p0} zum Zeitpunkt des Vorspannens.

Bei der anschließenden Laststeigerung bis zu einem Wert von $Q_C = 4 \cdot A_p \cdot f_{yp} \cdot dv/l$ verläuft bei einem fiktiven Kräftepaar $A_p \cdot \sigma_{p0}$ die Wirkungslinie der Betondruckkraft den Betonquerschnitt auf einer Länge $2 \cdot l_p$, wobei $A_p \cdot \sigma_{p0} \cdot d_{v0} = A_p \cdot f_{yp} \cdot dv$ gilt. Aufgrund der Verbundeigenschaften kann im Bruchzustand im Spannglied die Fließspannung erreicht werden; der Verbundbedarf infolge des Spannungszuwachs $(f_{yp} - \sigma_{p0})$ erfordert im mittleren Bereich über eine Länge von $2 \cdot l_p$ ein entsprechendes Verbundvermögen.

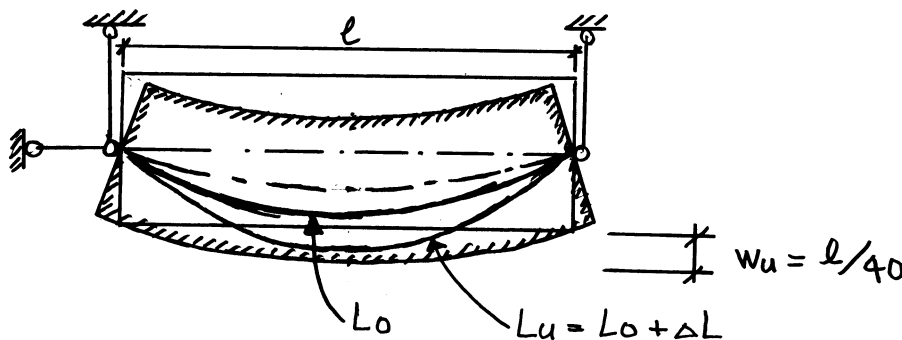
In der Regel ist das Verbundvermögen der Spannglieder ausreichend, so dass im Bruchzustand die Fließspannung des Vorspannstahls auch erreicht wird. Bei bestimmten Tragwerken, wie zum Beispiel bei Tragplatten unter gleichmäßig verteilter Flächenlast, sollte überprüft werden, ob das

Verbundvermögen den Spannungszuwachs ($f_{py} - \sigma_{po}$) sicherstellt.



Aufgrund des grossen Momenten-
gradienten bei der Einspannung
resultiert eine kurze Verbund-
länge l_p , über welche der
Spannungszuwachs ($f_{py} - \sigma_{po}$)
garantiert werden muss.

Betrachtet man anstelle des Spannglieds mit nachträglichem
Verbund ein solches ohne Verbund, so kann aufgrund des
fehlenden Verbunds der Zustand C, das heisst Fließen des
Spannglieds, nicht erreicht werden. Im Bruchzustand wird
lediglich der Zustand B erreicht, wobei ein Spannungszuwachs
im Vorspannstahl aufgrund der Gesamtverlängerung des
Spannglieds berücksichtigt werden kann. Dabei wird von einer
Trägerdurchbiegung im Bruchzustand von $w_u = l/40$ ausgegangen;
der Wert basiert auf experimentellen Untersuchungen.



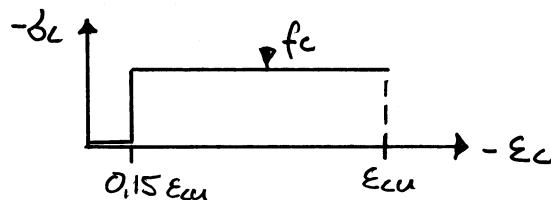
Im Bruchzustand weist das Vorspannkabel eine Länge von $L_u = L_0 + \Delta L$
auf; die Kabelverlängerung ΔL bei einer entsprechenden Durch-
biegung $w_u = l/40$ führt zu einem Spannungszuwachs von
 $\Delta \sigma_p = E_p \cdot \Delta L / L_0$ über die gesamte Kabellänge, wobei E_p den

Elastizitätsmodul des Vorspannstahls bezeichnet. In der Regel ist dieser Spannungszuwachs gering und wird bei der Bemessung oft vernachlässigt.

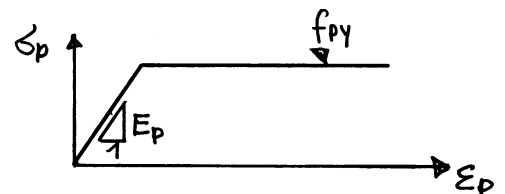
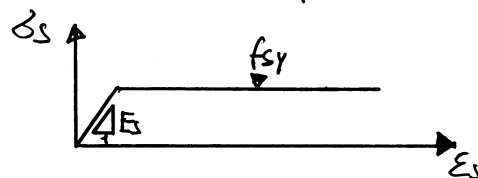
5.5. Tragwiderstand und Tragsicherheitsnachweise

Annahmen: - Normalen zur unverformten Stabachse bleiben während der Verformung gerade und stehen senkrecht auf der verformten Stabachse \rightarrow Eben- und Senkrechtbleiben des Querschnittes.

- Beton homogen, isotrop, starr - ideal plastisch



- Schlaffer Bewehrungsstahl und Vorspannstahl linear elastisch - ideal plastisch



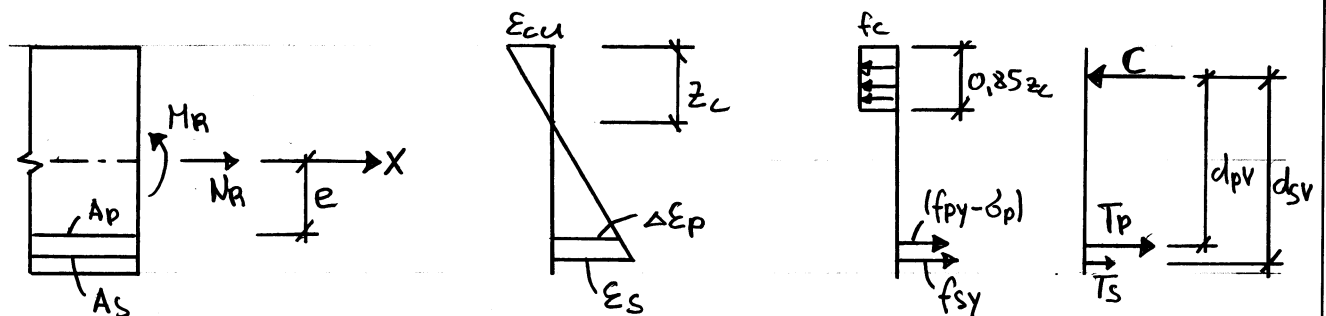
- Die folgenden Betrachtungen bezüglich den Tragsicherheitsnachweisen basieren grundsätzlich auf einer linear elastischen Schnittgrössenermittlung sowie auf Querschnittsnachweisen.

- In den anschließenden Betrachtungen werden Tragsysteme ohne Zwängungsnormalkräfte N_z sowie Normalkräfte N infolge äusserer Belastungen behandelt, das heisst die Tragsysteme werden lediglich durch die Vorspannkraft beansprucht.

5.5.1. Vorspannung mit nachträglichem Verbund

5.5.1.1. Betrachtung als Anker- und Umlenkkräfte

Die Wirkung der Vorspannung wird als Einwirkung auf das Tragwerk betrachtet. Die Vorspannbewehrung kann analog einer schlaffen Bewehrung mit einer fiktiven Fließspannung $(f_{py} - \sigma_p)$ behandelt werden, wobei σ_p die Spannung beim Vorspannen bezeichnet.



$$T_p = A_p (f_{py} - \sigma_p), \quad T_s = A_s \cdot f_{sy}, \quad C = A_p \cdot f_{py} + A_s \cdot f_{sy}$$

Bei der Deutung als Anker- und Umlenkkräfte wird ein Nachweis für Biegung mit Normalkraft geführt. Die Vorspannkraft wird mit $P = A_p \cdot \sigma_p$ bezeichnet. Kontrollen: $\Delta \epsilon_p \geq (f_{py} - \sigma_p) / E_p$, $\epsilon_s \geq f_{sy} / E_s$.

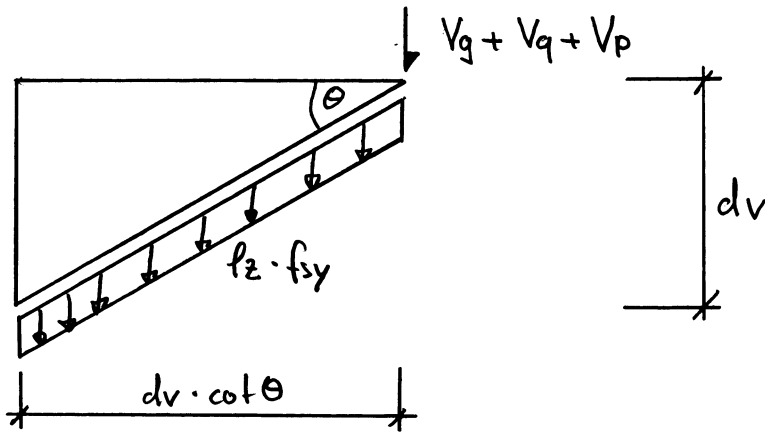
$$N_R = -A_p \cdot \sigma_p = N_p = -P \quad (N_g + N_q + N_z = 0)$$

$$M_R = (A_p \cdot f_{py} \cdot d_{pv}) - (A_p \cdot \sigma_p \cdot e) + (A_s \cdot f_{sy} \cdot d_{sv})$$

Tragsicherheitsnachweis:

$$M_R = A_p \cdot f_{py} \cdot d_{pv} + A_s \cdot f_{sy} \cdot d_{sv} - P \cdot e \geq M_g + M_q + M_p = M_g + M_q + M_z - P \cdot e$$

Die Zwängungsschnittgrößen sind im Lastfall Vorspannung direkt enthalten und werden somit auf der Einwirkungsseite berücksichtigt. Bei verschwindenden äußeren Normalkräften resultiert lediglich eine Normalkraft infolge Vorspannung, da die Vorspannkraft auf der Einwirkungsseite berücksichtigt wird.



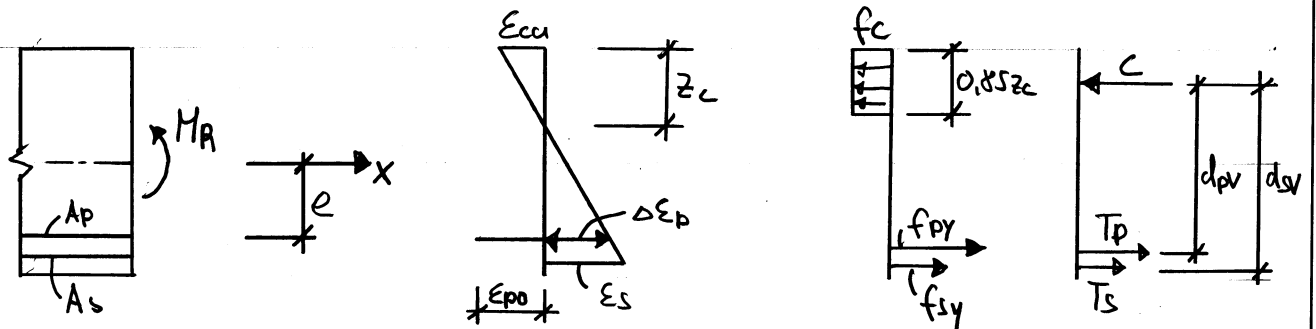
Tragsicherheitsnachweis Querkraft:

$$V_R = f_z \cdot f_{sy} \cdot b_w \cdot d_v \cdot \cot \theta \geq V_g + V_q + V_p = V_g + V_q + V_z - P \cdot \sin \beta$$

Die Stegbreite wird mit b_w bezeichnet. Auf Widerstandsseite wird lediglich die Querkraftbewehrung berücksichtigt, da die Vorspannkraft auf der Einwirkungsseite einfließt.

5.5.2. Betrachtung als Eigenspannungszustand

Die Vorspannkraft wird auf der Widerstandsseite berücksichtigt.



$$T_p = A_p \cdot f_{py}, \quad T_s = A_s \cdot f_{sy}, \quad C = A_p \cdot f_{py} + A_s \cdot f_{sy}$$

Bei der Deutung als Eigenspannungszustand wird ein Nachweis für reine Biegung geführt. ϵ_{po} bezeichnet die Vordrehung des Vorspannstahls infolge der Vorspannkraft. Kontrollen: $\epsilon_s \geq f_{sy} / E_s$, $\epsilon_{po} + \Delta \epsilon_p \geq f_{py} / E_p$.

$$N_R = 0 \quad (N_g + N_q + N_z = 0)$$

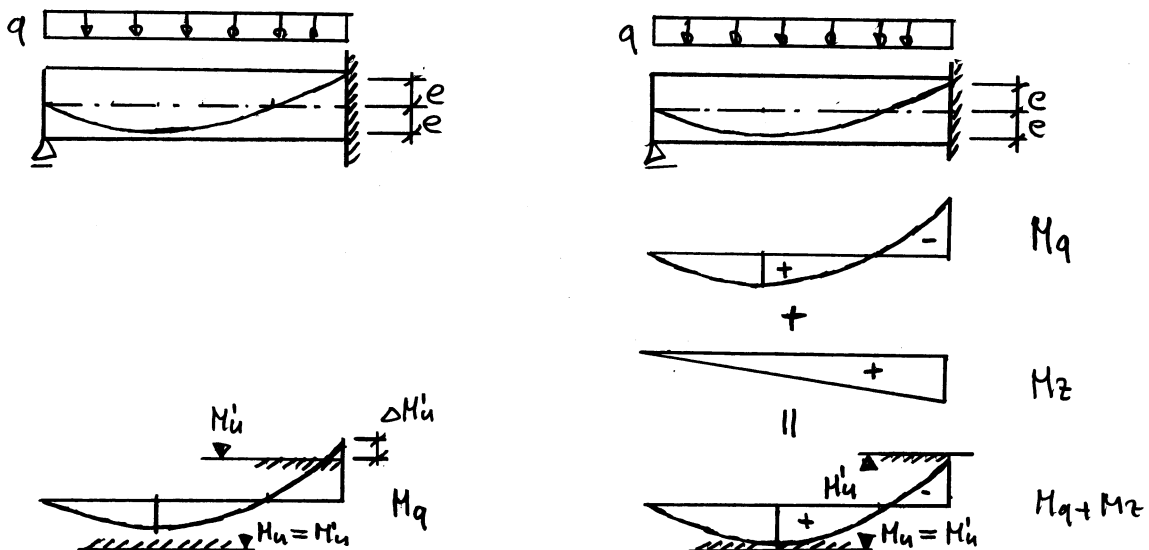
$$M_R = (A_p \cdot f_{py} \cdot d_{pv}) + (A_s \cdot f_{sy} \cdot d_{sv})$$

Tragsicherheitsnachweis:

$$M_R = A_p \cdot f_{py} \cdot d_{pv} + A_s \cdot f_{sy} \cdot d_{sv} \geq M_g + M_q + M_z$$

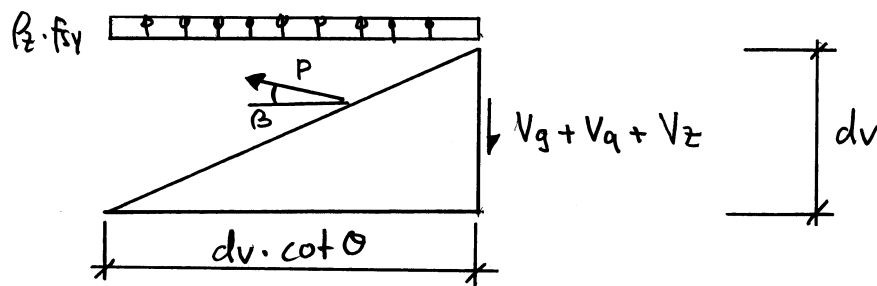
Ein Vergleich mit dem Nachweis bei der Deutung als Anker- und Umlenkkräfte zeigt, dass die Berücksichtigung des Zwängungsmoments auf der Einwirkungsseite bei der Deutung als Eigenspannungszustand zu einem gleichwertigen Nachweis führt.

Werden die Zwängungsmomente nicht berücksichtigt, so müssen bei einem statisch unbestimmten Tragsystem die Zwangsschnittgrößen rechnerisch umgelagert werden, sofern die Traglast mit plastischen Bemessungsmethoden ermittelt wird. Aufgrund der beschränkten Duktilitätseigenschaften des Vorspannstahls ist ein entsprechendes Verformungsnachweis zu führen, da das Verformungsvermögen rechnerisch sichergestellt werden kann.



Betrachtet man einen einseitig eingespannten Träger mit Rechteckquerschnitt, der lediglich mit einem parabolisch angeordneten Vorspannkabel bewehrt ist, so wirkt sich die Berücksichtigung der Zwängungsschnittgrößen bei einer linear elastischen Schnitt-

grössenermittlung günstig auf den Tragsicherheitsnachweis aus. Werden rechnerisch keine Schnittgrössenumlagerungen zugelassen, so muss bei der Einspannung der fehlende Widerstand $\sigma_{t,u}$ mit einer zusätzlichen schlaffen Bewehrung abgedeckt werden, während im Feld Widerstandsreserven vorhanden sind. Wird jedoch eine plastische Bemessung unter Vernachlässigung der Zwängungsschnittgrössen zugrundegelegt, so muss der fehlende Widerstand $\sigma_{t,u}$ rechnerisch umgelagert werden; ein entsprechendes Verformungsvermögen muss sichergestellt werden. Eine Berücksichtigung der Zwängungsschnittgrössen führt somit zu einer wirklichkeitsnäheren Beschreibung des Tragwerks sowie zu zweckmässigeren Anordnungen der schlaffen Bewehrung.



Tragsicherheitsnachweis Querkraft:

$$\underline{V_R = P_z \cdot f_{sy} \cdot b_w \cdot d_v \cdot \cot \theta + P \cdot \sin \beta \geq V_g + V_q + V_z}$$

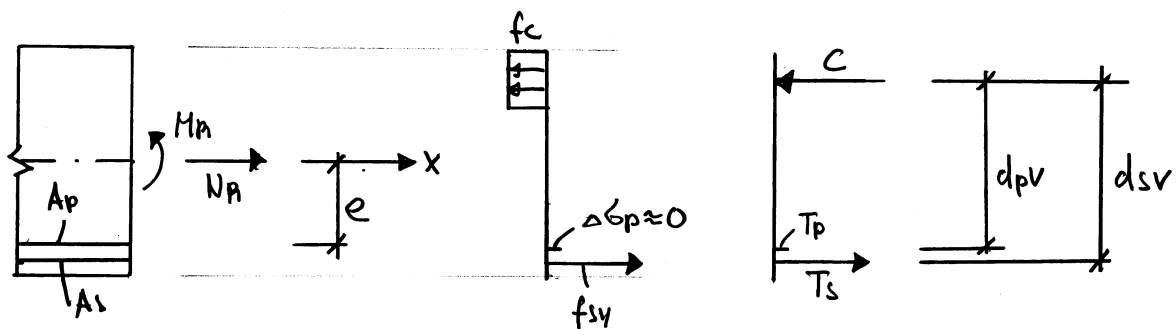
Die Vorspannkraft wird auf der Widerstandsseite berücksichtigt. Ein Vergleich mit dem Nachweis bei der Deutung als Anker- und Umlenkkräfte zeigt, dass die Berücksichtigung der Zwängungsquerkraft auf der Einwirkungsseite bei der Deutung als Eigenspannungszustand zu einem gleichwertigen Nachweis führt. Werden beim Biegenachweis die Zwängungsmomente berücksichtigt, so müssen aufgrund des differentiellen Zusammen-

hangs $dM_z/dx = V_z$ die Zwangsquerkräfte beim Querkraftnachweis zwingend berücksichtigt werden.

5.5.2. Vorspannung ohne Verbund

Die Beziehungen für die Vorspannung mit nachträglichem Verbund können modifiziert für die Vorspannung ohne Verbund übernommen werden, wobei die Vorspannbewehrung die Fließspannung f_{py} in der Regel nicht erreicht. Aufgrund der Gesamtverlängerung des Spannglieds mit zunehmender Trägerdurchbiegung kann ein Spannungszuwachs berücksichtigt werden; ansonsten darf lediglich die Vorspannkraft beziehungsweise die Spannung σ_p für die Vorspannbewehrung angesetzt werden.

5.5.2.1. Betrachtung als Anker- und Umlenkkräfte



$$T_p = 0 \quad (\Delta \sigma_p \neq 0), \quad T_s = A_s \cdot f_{sy}, \quad L = A_p \cdot \sigma_p + A_s \cdot f_{sy}$$

$$N_R = -A_p \cdot \sigma_p = N_p = -P \quad (N_g + N_q + N_z = 0)$$

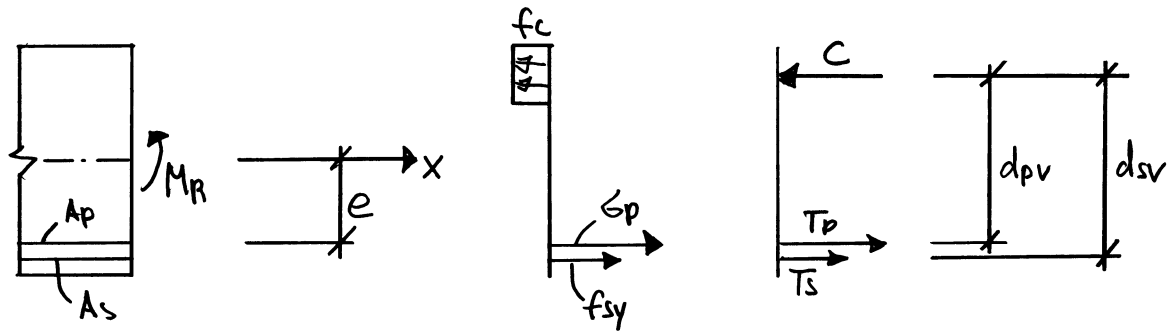
$$M_R = (A_s \cdot f_{sy} \cdot d_{sv}) + (A_p \cdot \sigma_p \cdot d_{pv}) - (A_p \cdot \sigma_p \cdot e)$$

Tragsicherheitsnachweis:

$$M_R = A_p \cdot \sigma_p \cdot d_{pv} + A_s \cdot f_{sy} \cdot d_{sv} - P \cdot e \geq M_g + M_q + M_p = M_g + M_q + M_z - P \cdot e$$

Die Annahme, dass die schlaffe Bewehrung fließt, muss kontrolliert werden.

5.5.2.2. Betrachtung als Eigenspannungszustand



$$T_p = A_p \cdot \sigma_p, \quad T_s = A_s \cdot f_{sy}, \quad C = A_p \cdot \sigma_p + A_s \cdot f_{sy}$$

$$N_R = 0 \quad (N_g + N_q + N_z = 0)$$

$$M_R = (A_p \cdot \sigma_p \cdot d_{pv}) + (A_s \cdot f_{sy} \cdot d_{sv})$$

Tragsicherheitsnachweis:

$$\underline{M_R = A_p \cdot \sigma_p \cdot d_{pv} + A_s \cdot f_{sy} \cdot d_{sv} \geq M_g + M_q + M_z}$$

Die Annahme, dass die schlaffe Bewehrung fließt, muss kontrolliert werden.

5.5.2.3. Lastfall Vorspannung

Das Vorspannen der Spannglieder stellt bei der Bemessung einen Lastfall im Bauzustand dar; die erforderlichen Nachweise für die Tragsicherheit sind analog einer Vorspannung ohne Verbund zu führen. Je nach Tragwerk ist die Vorspannkraft etappenweise aufzubringen, das heißt dass zum Beispiel eine Fundamentplatte erst nach Fertigstellung der darüberliegenden Stockwerke, welche die dominante Einwirkung darstellen, auf die volle Kraft vorgespannt werden darf. Im weiteren ist der Kraftausbreitung bei Spanngliedverankerungen sowie Umlenkkraften infolge Kabelkrümmungen ein besonderes Augenmerk zu schenken.

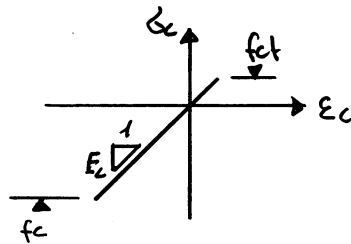
5.5.3 Berücksichtigung von Normalkräften

Die Betrachtungen in den Kapiteln 5.5.1. und 5.5.2. erfolgten für Tragsysteme ohne Normalkräfte; die entsprechenden Beziehungen können jedoch auf Tragsysteme mit Normalkräften N und Zwängungsnormalkräften N_z erweitert werden.

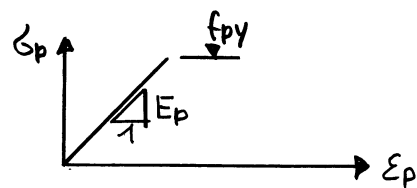
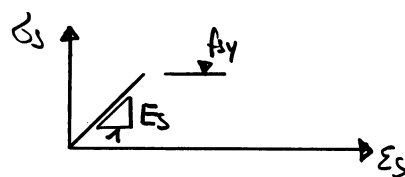
5.6. Spannungsnachweise

Annahmen: - Normale zur unverformten Stabachse bleiben während der Verformung gerade und stehen senkrecht auf der verformten Stabachse \rightarrow Eben- und Senkrechtbleiben der Querschnitte.

- Beton homogen, isotrop, linear elastisch

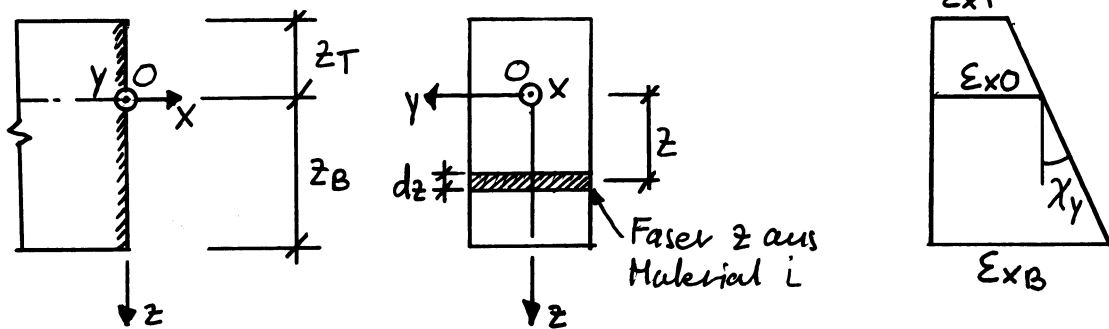


- Schlaffer Bewehrungsstahl und Vorspannstahl linear elastisch



- In den folgenden Betrachtungen wird der Beton als Referenzmaterial definiert, das heißt $n_s = E_s/E_c$ und $n_p = E_p/E_c$. Dabei bezeichnen E_c , E_s und E_p die Elastizitätsmoduln des Betons, des Bewehrungsstahls und des Vorspannstahls.
- Linear elastische Schnittgrössenermittlung.

5.6.1. Ideale Querschnitte



Wir betrachten einen Balkenquerschnitt unter einaxialer Biegung mit Normalkraft.

Allgemein:

$$\epsilon_x(z) = \epsilon_{x0} + z \cdot \chi_y$$

Normalkraft der Faser z : $dN = \epsilon_x(z) \cdot E_i(z) \cdot dA = \epsilon_x(z) \cdot n_i(z) \cdot E_c \cdot dA$

$$N_x = E_c \int_A (\epsilon_{x0} + z \cdot \chi_y) \cdot n_i(z) \cdot dA$$

$$N_x = E_c \cdot \epsilon_{x0} \underbrace{\int_A n_i(z) \cdot dA}_{A_{id}} + E_c \cdot \chi_y \underbrace{\int_A z \cdot n_i(z) \cdot dA}_{S_{id,y-y}}$$

$$M_y = E_c \int_A (\epsilon_{x0} + z \cdot \chi_y) \cdot z \cdot n_i(z) \cdot dA$$

$$M_y = E_c \cdot \epsilon_{x0} \underbrace{\int_A z \cdot n_i(z) \cdot dA}_{S_{id,y-y}} + E_c \cdot \chi_y \cdot \underbrace{\int_A z^2 \cdot n_i(z) \cdot dA}_{I_{id,y-y}}$$

Wählt man das Bezugssystem so, dass der Ausdruck des idealen Flächenmoments 1. Ordnung verschwindet, $S_{id,y-y} = \int_A z \cdot n_i(z) \cdot dA = 0$, dann werden die Beziehungen für die Normalkraft N_x das Biegemoment M_y reduziert. Das entsprechende Koordinatensystem definiert die sogenannten idealen Querschnittsachsen. Mit der idealen Fläche A_{id} und dem idealen Flächenmoment 2. Ordnung folgt die allgemein gültige Beziehung für die Dehnungsverteilung

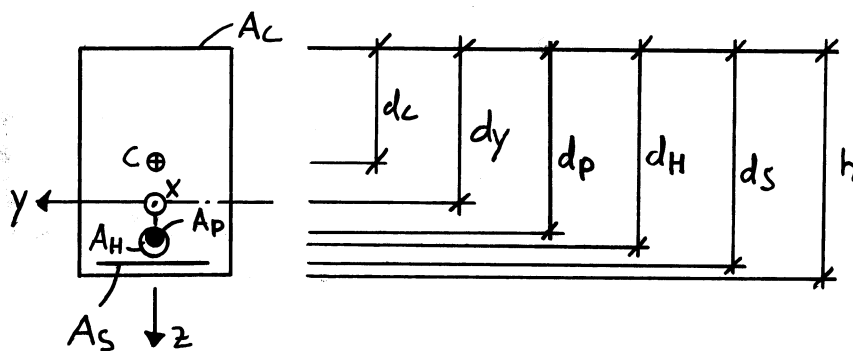
$$\epsilon_x(z) = \frac{N_x}{A_{id} \cdot E_c} + z \cdot \frac{M_y}{I_{id,y-y} \cdot E_c}$$

5.6.2. Betonquerschnitt ungerissen

In den nachfolgenden Betrachtungen für den Fall des ungerissenen Betonquerschnitts, $\sigma_c \leq f_{ct}$, wird die Vorspannung als äussere Einwirkung infolge Anker- und Umlenkkraften berücksichtigt.

5.6.2.1. Spannungsnachweis vor Injektion des Spannglieds

Vor dem Injizieren des Spannglieds entspricht das Tragverhalten einer Vorspannung ohne Verbund. Da die Vorspannung als Anker- und Umlenkkraften gedeutet wird und keinen Verbund aufweist, setzt sich der ideale Querschnitt aus den Anteilen des Betons und der schlaffen Bewehrung zusammen.



A_H bezeichnet die Fläche des Hüllbohrers und C den Schwerpunkt der Bruttofläche des Betonquerschnitts.

$$A_{id,0} = A_c + A_s(n_s - 1) - A_H$$

$$d_{y,0} = \frac{d_c \cdot A_c + d_s \cdot A_s \cdot (n_s - 1) - d_H \cdot A_H}{A_{id,0}}$$

$$I_{id,y-y_0} = I_{c,y-y_0} + (d_s - d_{y,0})^2 \cdot A_s \cdot (n_s - 1) - (d_H - d_{y,0})^2 \cdot A_H$$

Spannungsnachweise:

$$\sigma_c(z) = \frac{N_g + N_q + N_z - P}{A_{id,0}} + z \cdot \frac{M_g + M_q + M_z - P \cdot (d_p - d_{y,0})}{I_{id,y-y_0}} \leq f_{ct}$$

$$\sigma_s(z_s) = \sigma_c(z_s) \cdot n_s$$

$$\sigma_p(z_p) = \sigma_p \quad (\text{Spannung infolge Vorspannkraft})$$

Die Schnittgrößen beziehen sich dabei auf die ideellen Querschnittsachsen. In der Regel werden die Schnittgrößen bei der statischen Bemessung bezüglich den Schwerachsen des reinen Betonquerschnitts ermittelt; entsprechend der Verschiebung ($d_y - d_c$) müssen die Schnittgrößen umgerechnet werden.

5.6.2.2. Spannungsnachweis nach Injektion des Spannglieds

Nach dem Injizieren des Spannglieds wirkt das Vorspannkabel im Verbund. Der ideale Querschnitt setzt sich aus den Anteilen des Betons, der schlaffen Bewehrung sowie der Vorspannbewehrung zusammen.

$$A_{id,1} = A_c + A_s \cdot (n_s - 1) + A_p (n_p - 1)$$

$$d_{y,1} = \frac{d_c \cdot A_c + d_s \cdot A_s \cdot (n_s - 1) + d_p \cdot A_p \cdot (n_p - 1)}{A_{id,1}}$$

$$I_{id,y-y,1} = I_{c,y-y,1} + (d_s - d_{y,1})^2 \cdot A_s \cdot (n_s - 1) + (d_p - d_{y,1})^2 \cdot A_p \cdot (n_p - 1)$$

Die Lage der ideellen Querschnittsachsen vor dem Injizieren, Zustand 0, und nach dem Injizieren, Zustand 1, ist verschieden. Unter Beachtung, dass die Schnittgrößen vor dem Injizieren der Kabel auf die ideellen Querschnittsachsen des Zustands 0 beziehungsweise die Schnittgrößen zuwachs nach dem Injizieren der Kabel auf die ideellen Querschnittsachsen des Zustands 1 bezogen sind, erhält man die Beziehungen für die totalen Spannungen.

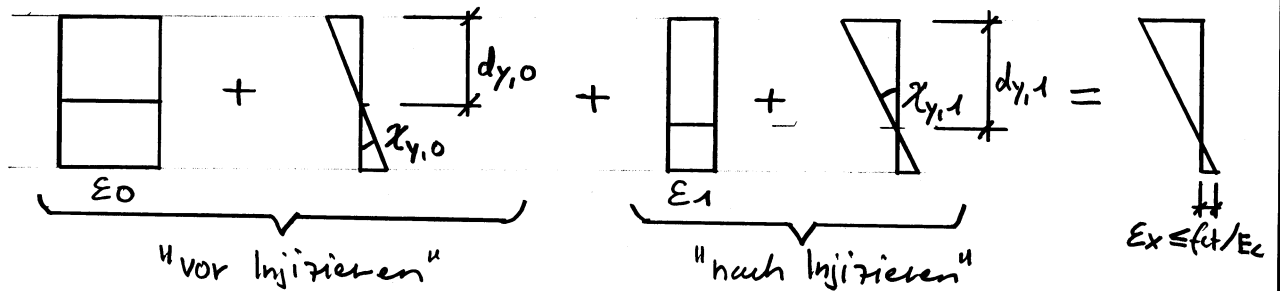
Spannungsnachweise:

$$\sigma_c(z) = \underbrace{\frac{N_g + N_q + N_z - P}{A_{id,0}} + z \cdot \frac{M_g + M_q + M_z - P \cdot (d_p - d_{y,0})}{I_{id,y-y,0}}}_{\text{"vor Injizieren"}} + \underbrace{\frac{\Delta N_q}{A_{id,1}} + z \cdot \frac{\Delta M_q}{I_{id,y-y,1}}}_{\text{"nach Injizieren"}} \leq f_{ct}$$

$$\underline{\sigma_s(z_s) = \sigma_c(z_s) \cdot n_s}$$

$$\underline{\sigma_p(z_p) = \sigma_p + \left(\frac{\Delta N_q}{A_{id,1}} + z_p \cdot \frac{\Delta M_q}{I_{id,y-y,1}} \right) \cdot n_p}$$

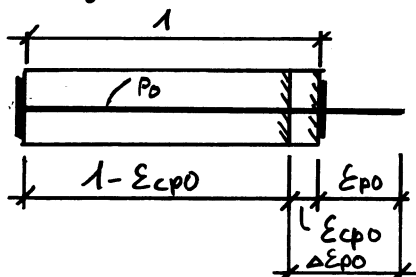
Dehnungsverteilung:



Die Einwirkungen, welche nach dem Injizieren aufgebracht werden, verursachen die Schnittgrößen ΔN_q und ΔM_q .

5.6.3. Betonquerschnitt gerissen

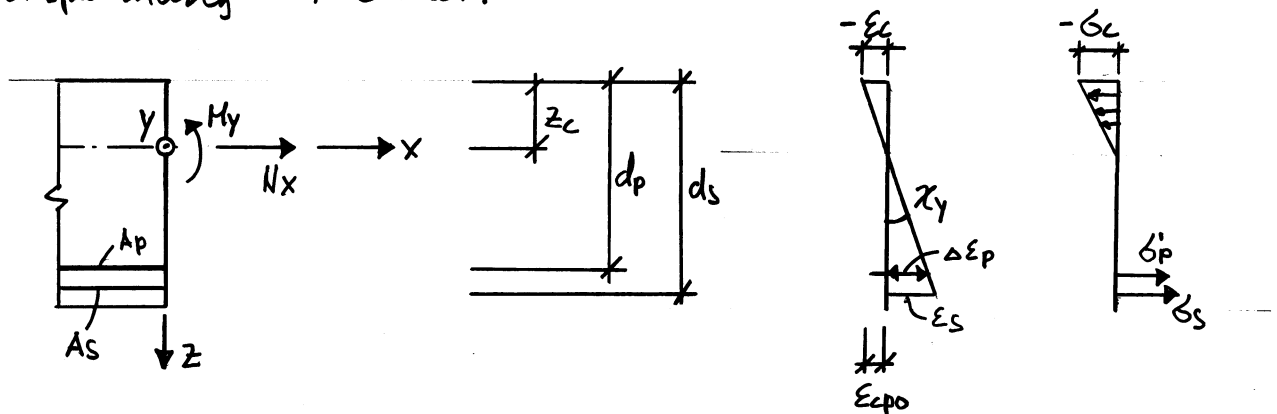
Infolge Vorspannung weist der Vorspannstahl eine Dehnungsdifferenz $\Delta \epsilon_{p0} = \epsilon_{p0} + \epsilon_{cp0}$ gegenüber den Dehnungen des Betonquerschnitts auf. Dabei bezeichnet ϵ_{p0} die effektive Dehnung des Spannglieds infolge der Vorspannkraft $P_0 = \sigma_{p0} \cdot A_p$ und ϵ_{cp0} die Betonstauchung auf Höhe des Spannglieds.



In der Regel ist $\epsilon_{cp0} \ll \epsilon_{p0}$, so dass in guter Näherung $\Delta \epsilon_{p0} \approx \epsilon_{p0}$ angenommen werden kann. Die nachfolgenden Betrachtungen beziehen sich auf Spannglieder mit nachträglichem Verbund, welche für Spannglieder ohne Verbund modifiziert werden können.

5.6.3.1. Betrachtung als Anker- und Umlenkkkräfte

Die Wirkung der Vorspannung wird auf der Einwirkungsseite berücksichtigt; die Vorspannbewehrung kann analog einer schlaffen Bewehrung mit einer fiktiven Fließspannung ($f_{py} - \sigma_{p0}$) aufgefasst werden, wobei σ_{p0} die initiale Spannung infolge Vorspannung bezeichnet.



Die Schnittgrößen beziehen sich auf die ideellen Querschnittsachsen; mit den Schnittgrößen

$$N_x = N_g + N_q + N_z - P_0$$

und

$$M_y = M_g + M_q + M_z - P_0 \cdot (d_p - z_c)$$

sowie den Beziehungen

$$\epsilon_c = -z_c \cdot \chi_y, \quad \epsilon_s = (d_s - z_c) \cdot \chi_y, \quad \Delta \epsilon_p = (d_p - z_c) \cdot \chi_y$$

und

$$\sigma_c = \epsilon_c \cdot E_c, \quad \sigma_s = \epsilon_s \cdot E_c \cdot n_s, \quad \sigma'_p = (\epsilon_{c p 0} + \Delta \epsilon_p) \cdot E_c \cdot n_p$$

folgen die Gleichgewichtsbedingungen

$$N_x = N_g + N_q + N_z - P_0 = A_p \cdot \sigma'_p + A_s \cdot \sigma_s + \frac{1}{2} \cdot b \cdot z_c \cdot \sigma_c$$

$$M_y = M_g + M_q + M_z - P_0 (d_p - z_c) = A_p \cdot \sigma'_p (d_p - z_c) + A_s \cdot \sigma_s (d_s - z_c) - \left(\frac{1}{2} b z_c \sigma_c \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot z_c$$

welche nach der Krümmung χ_y und der Druckzonenhöhe z_c aufgelöst werden können; dabei wird eine rechteckförmige Druckzone mit

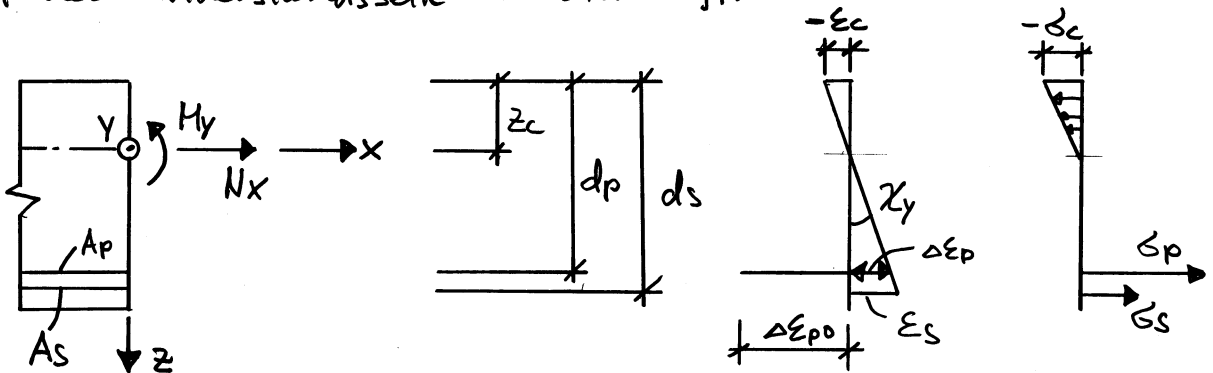
einer Breite b vorausgesetzt. Handelt es sich um eine Vorspannung ohne Verbund, so reduzieren sich die Gleichgewichtsbedingungen unter Berücksichtigung eines nicht vorhandenen Spannungszuwachs in der Vorspannbewehrung, $\delta'_p = 0$, auf die Beziehungen

$$N_x = N_g + N_q + N_z - P_0 = A_s \cdot \sigma_s + \frac{1}{2} \cdot b \cdot z_c \cdot \sigma_c$$

$$M_y = M_g + M_q + M_z - P_0 (d_p - z_c) = A_s \cdot \sigma_s \cdot (d_s - z_c) - \left(\frac{1}{2} \cdot b \cdot z_c \cdot \sigma_c\right) \cdot \frac{2}{3} \cdot z_c$$

5.6.3.2. Betrachtung als Eigenspannungszustand

Die Vorspannung wird mit einer Dehnungsdifferenz $\Delta \epsilon_{p0} = \epsilon_{p0} + \epsilon_{cp0}$ auf der Widerstandsseite berücksichtigt.



Die auf die idealen Querschnittsachsen bezogenen Schnittgrößen betragen

$$N_x = N_g + N_q + N_z$$

und

$$M_y = M_g + M_q + M_z$$

Mit den Beziehungen für die Dehnungen $\epsilon_c = -z_c \cdot \chi_y$, $\epsilon_s = (d_s - z_c) \cdot \chi_y$ und $\Delta \epsilon_p = (d_p - z_c) \cdot \chi_y$ sowie für die Spannungen $\sigma_c = \epsilon_c \cdot E_c$, $\sigma_s = \epsilon_s \cdot E_s$ und $\sigma_p = (\Delta \epsilon_{p0} + \Delta \epsilon_p) \cdot E_c \cdot n_p$ erhält man die Bestimmungsgleichungen

$$N_x = N_g + N_q + N_z = A_p \cdot \sigma_p + A_s \cdot \sigma_s + \frac{1}{2} \cdot b \cdot z_c \cdot \sigma_c$$

$$M_y = M_g + M_q + M_z = A_p \cdot \sigma_p \cdot (d_p - z_c) + A_s \cdot \sigma_s \cdot (d_s - z_c) - \left(\frac{1}{2} \cdot b \cdot z_c \cdot \sigma_c\right) \cdot \frac{2}{3} \cdot z_c$$

für die Krümmung χ_y und die Druckzonenhöhe z_c . Bei einer Vorspannung ohne Verbund ist für die Vorspannung die initiale Spannung $\sigma_{po} = \epsilon_{po} \cdot E_p$ infolge der Vorspannkraft P_0 zu berücksichtigen; die Bestimmungsgleichungen für die Krümmung und die Druckzonenhöhe kann somit in der Form

$$N_x = N_g + N_q + N_z = A_p \cdot \sigma_{po} + A_s \cdot \sigma_s + \frac{1}{2} \cdot b \cdot z_c \cdot \sigma_c$$

$$M_y = M_g + M_q + M_z = A_p \cdot \sigma_{po} \cdot (d_p - z_c) + A_s \cdot \sigma_s \cdot (d_s - z_c) - \left(\frac{1}{2} \cdot b \cdot z_c \cdot \sigma_c \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot z_c$$

angegeben werden.

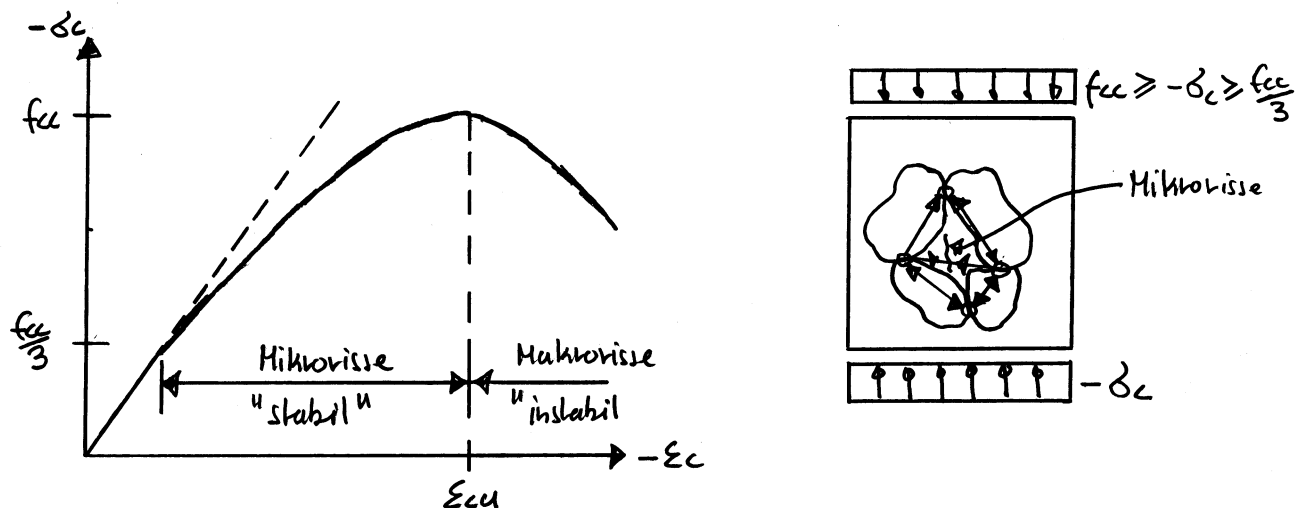
5.6.4. Praktische Anwendung

Spannungsnachweise werden einerseits für die Beurteilung der Rissbreiten beziehungsweise für die Rissbreitenbeschränkung verwendet; aufgrund von Vergleichsrechnungen mit Modellen zur Beschreibung des Zugzugs mit verschieblichem Verbund können für bestimmte Rissbreiten die entsprechenden zulässigen Spannungen der schlaffen sowie der vorgespannten Bewehrung ermittelt werden. Andererseits sind die Spannungsnachweise für die Beurteilung der Ermüdungssicherheit von zentraler Bedeutung.

Nebenbemerkung:

Die Ermüdungsfestigkeit von Stahl ist von der aufgebrachten Spannungsdifferenz $\Delta \sigma_s$, der Anzahl Spannungswechsel N sowie der konstruktiven Durchbildung der Bewehrung (Spannungskonzentrationen) abhängig. Bei Spannstahl hat die Reibung zwischen Spannglied und Hüllrohre einen wesentlichen Einfluss auf das Ermüdungsverhalten; dabei zeigen Kunststoffhüllrohre ein besseres Verhalten als

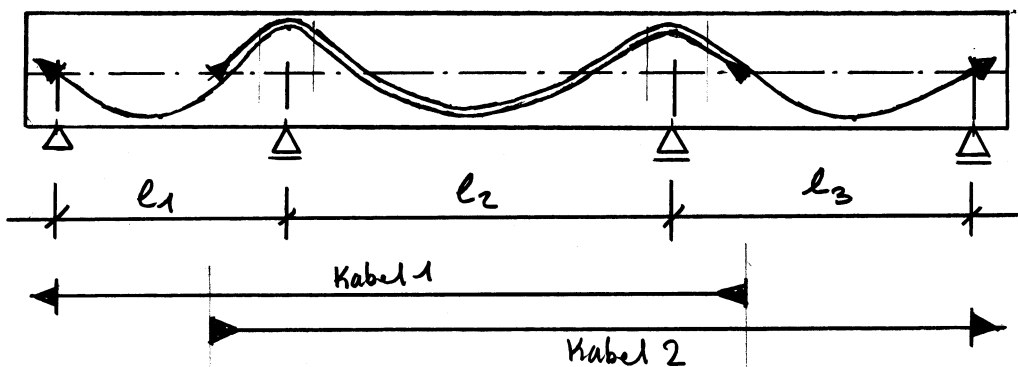
Stahlhüllrohre. Im Gegensatz zu Stahl ist das Ermüdungsverhalten von Beton vergleichsweise wenig erforscht. Die Ermüdungsfestigkeit hängt neben der Anzahl Spannungswechsel N von der maximalen Betonspannung $\sigma_{c,max}$ und der minimalen Betonspannung $\sigma_{c,min}$ ab. Betrachtet man das Spannungs-Dehnungsverhalten eines Betonzylinders bei einem Druckversuch, so stellt man bis ungefähr einem Drittel der Zylinderdruckfestigkeit ein mehr oder weniger linear elastisches Verhalten fest. Im Bereich zwischen einem Drittel der Zylinderdruckfestigkeit und der Zylinderdruckfestigkeit bilden sich Mikrorisse im Zementstein.



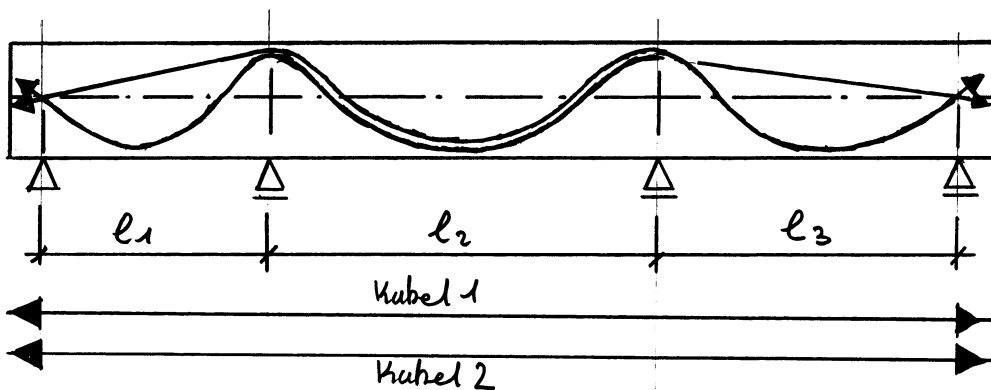
Die Ermüdungsfestigkeit wird durch die Mikrorissbildung negativ beeinflusst; Belastungswechsel können zu einem Risswachstum aufgrund von Spannungskonzentrationen an den Risspitzen führen. Werden die aufgebrachten Betonspannungen auf ungefähr einen Drittel der Zylinderdruckfestigkeit begrenzt, so kann die Mikrorissbildung mehrheitlich ausgeschlossen und somit die Ermüdungsfestigkeit signifikant verbessert werden.

5.7. Festlegung der Vorspannglieder

Bei der Festlegung der Vorspannung werden die Anker- und Umlenkkräfte oft so gewählt, dass eine bestimmte Belastung kompensiert wird. Aufgrund von unterschiedlichen Spannweiten und Querschnittsgeometrien können entsprechend die Anzahl und Grösse der Spannglieder festgelegt werden.



Betrachtet man zum Beispiel einen dreifeldrigen Durchlaufträger mit unterschiedlichen Spannweiten, so kann eine über die gesamte Trägelänge gleichmässige Umlenkkraft mit der Abstufung der Vorspannkabel oder auch mit der Kabelgeometrie erreicht werden. Kabelverankerungen sollen dabei im Schwerpunkt des Trägerquerschnitts liegen.

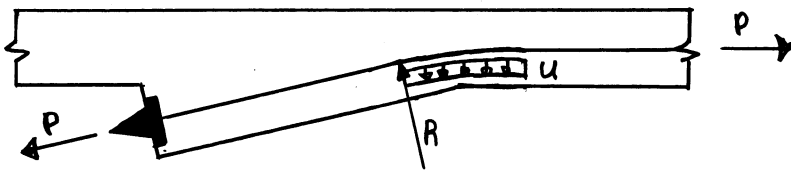


5.8. Konstruktive Durchbildung

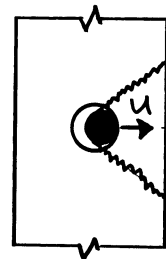
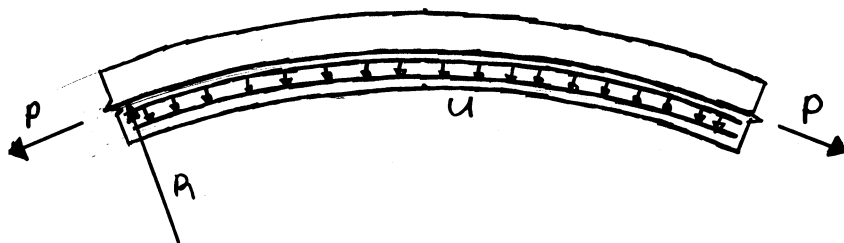
Im Verankerungsbereich von Vorspanngliedern sowie bei gekrümmten Kabeln wirken grosse Kräfte auf den Stahlbetonquerschnitt ein; der Kraftfluss ist detailliert zu untersuchen und mit einer entsprechenden konstruktiven Durchbildung der schlaffen Bewehrung sowie der Vorspannbewehrung sicherzustellen. Die folgenden Beispiele sollen die entsprechende Problematik aufzeigen.

5.8.1. Umlenkkräfte infolge Kabelkrümmung

Kabelverankerung mit Lisenen:



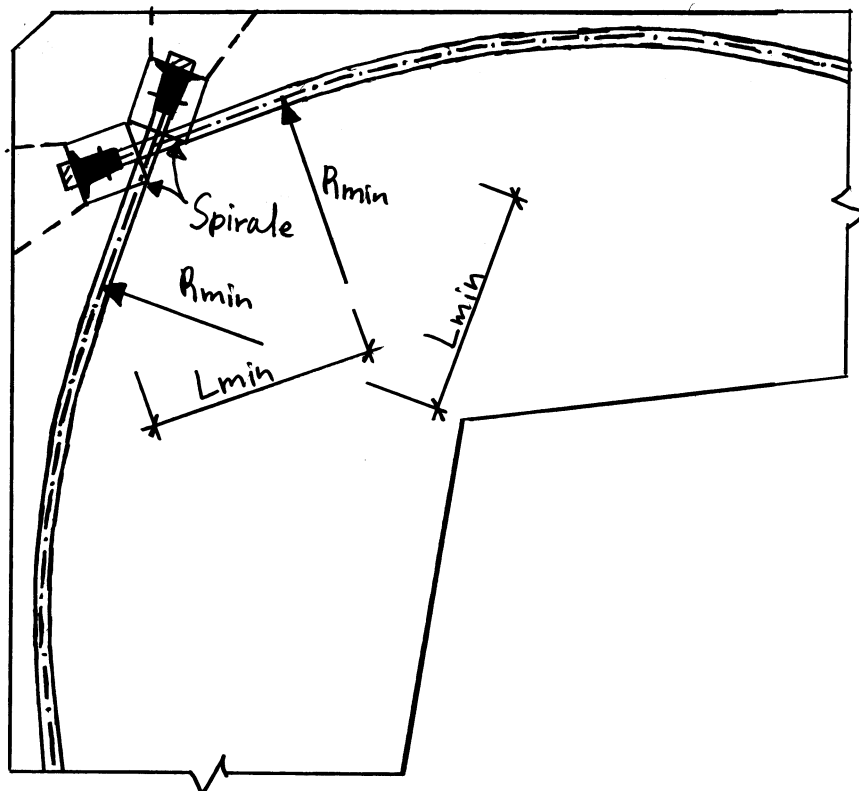
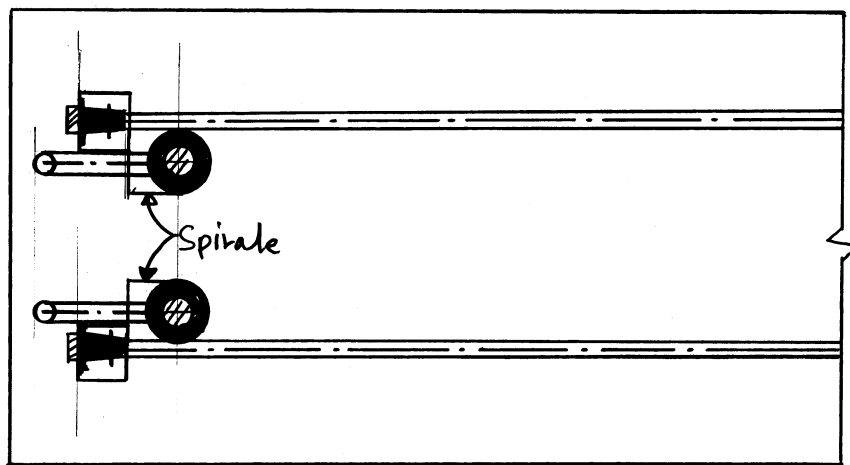
Gekrümmte Trägersteg:



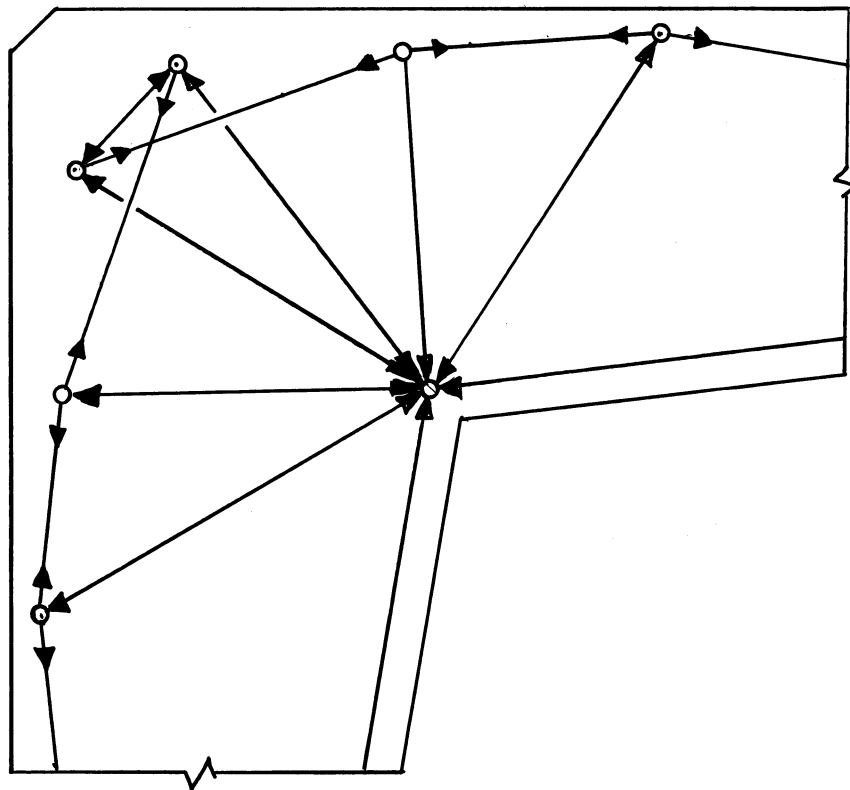
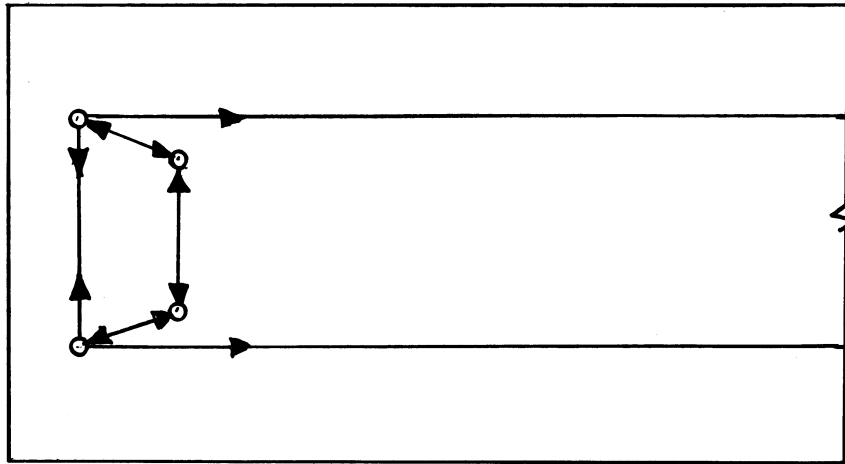
Damit ein lokales Ausreißen der einzelnen Spannglieder verhindert werden kann, muss die entsprechende Umlenkkraft $U = P/R$ mit einer schlaffen Bewehrung aufgenommen werden.

5.8.2. Vorgespannte Rahmenecken

In Rahmenecken liegen die Spannglieder des Rahmenstiels und des Rahmenriegels nicht in einer Ebene; der Kraftfluss zwischen den Kabelverankerungen kann mit einem räumlichen Spannungsfeld beziehungsweise Fachwerkmodell untersucht werden.



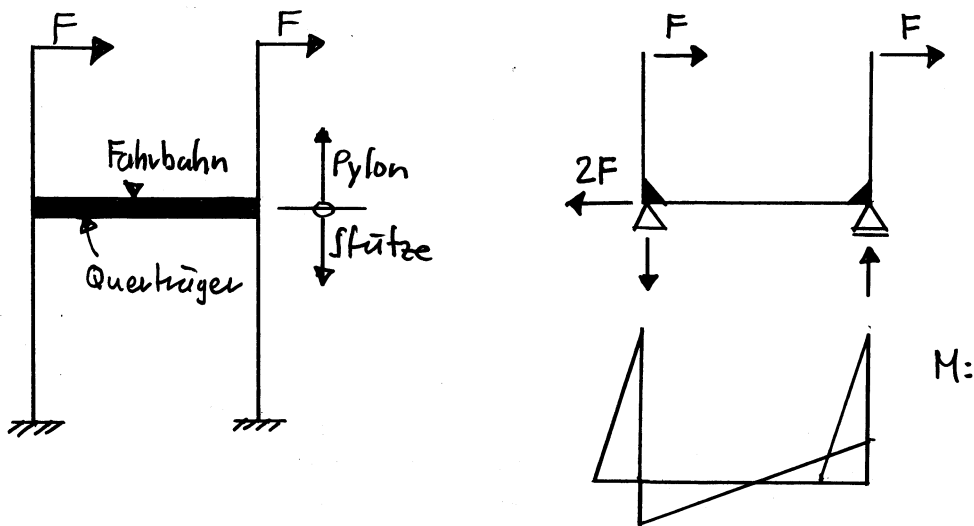
Fachwerkmodell:



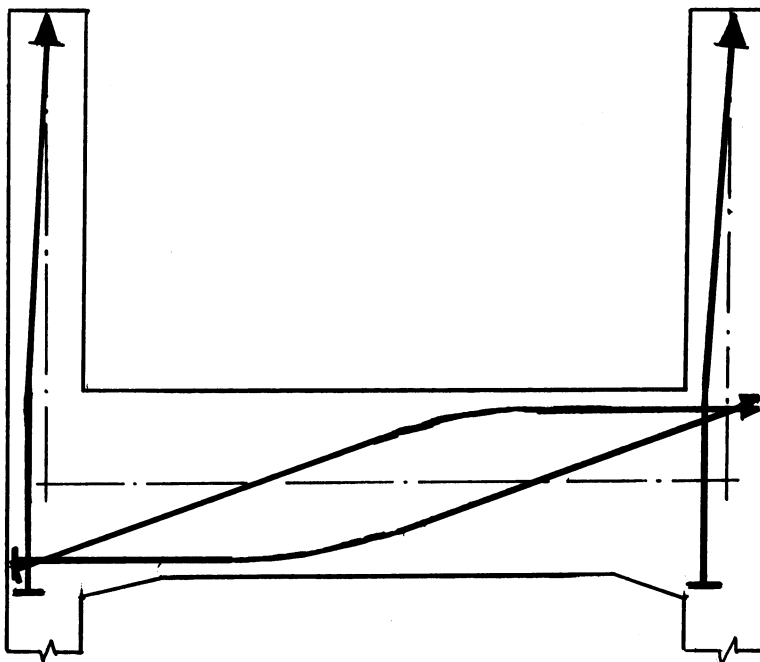
Aufgrund der minimalen Krümmungsradien können die Vorspannkabel nicht um die Ruhenecke gezogen. Im Bereich des Kabelstoßes resultieren starke Beanspruchungen des Betons; mit einer räumlichen Anordnung der schlaffen Bewehrung im Kraftübertragungsbereich führt die Umschnürung des Betons zu einem verbesserten Verformungs- und Bruchverhalten.

Beispiel: Brückenpfeiler der "Sunnibergbrücke"

Bei der "Sunnibergbrücke" handelt es sich um eine im Grundriss gekrümmte Schräghakenbrücke. Die Krümmung der Brücke verursacht Querbiegung der Pylone oberhalb der Fahrbahn; mit einem steifen Querträger unterhalb der Fahrbahn werden diese Querbiegemomente aufgenommen, so dass die Stützen unterhalb der Fahrbahn vorwiegend mit Normalkräften beansprucht sind.



Anordnung der Spannglieder:

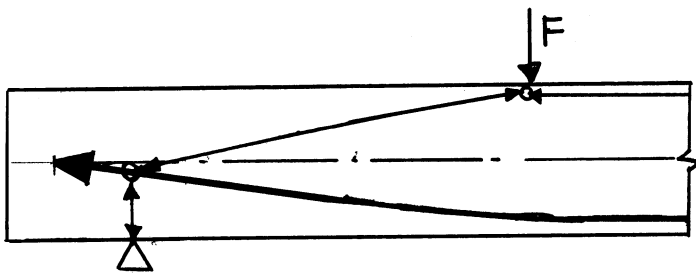


Neben der Vorspannbewehrung weisen die Pylone sowie der Quertträger eine massive schlaffe Bewehrung auf. Infolge der engen Platzverhältnisse und der erforderlichen Kräfteinleitungsbereiche der Vorspannkabel ist insbesondere in den Rahmenecken eine schlaffe Bewehrung zur Sicherstellung des Kraftflusses erforderlich.

Vorgespannte Rahmenecken erfordern grundsätzlich eine detaillierte Untersuchung des Kraftflusses mit einer entsprechenden konstruktiven Durchbildung.

5.8.3. Auflagerbereiche

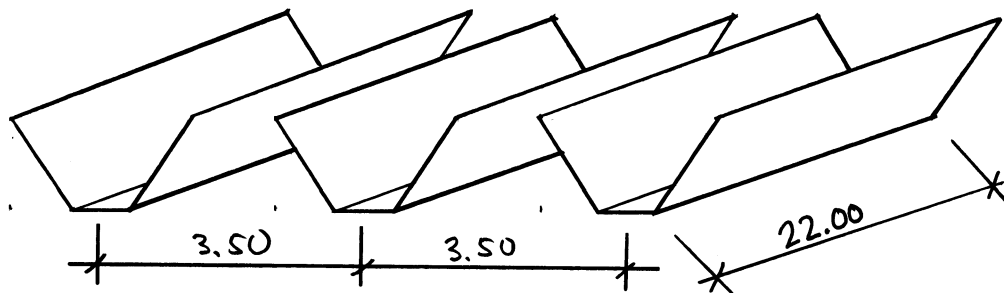
Die vollständige Kräfteinleitung beziehungsweise Kraftausbreitung der Vorspannkraft erfordert eine bestimmte Länge; damit bei Trägerenden die Vorspannkabel mobilisiert werden können, sollten die Kabelenden genügend weit über die Auflager geführt werden.



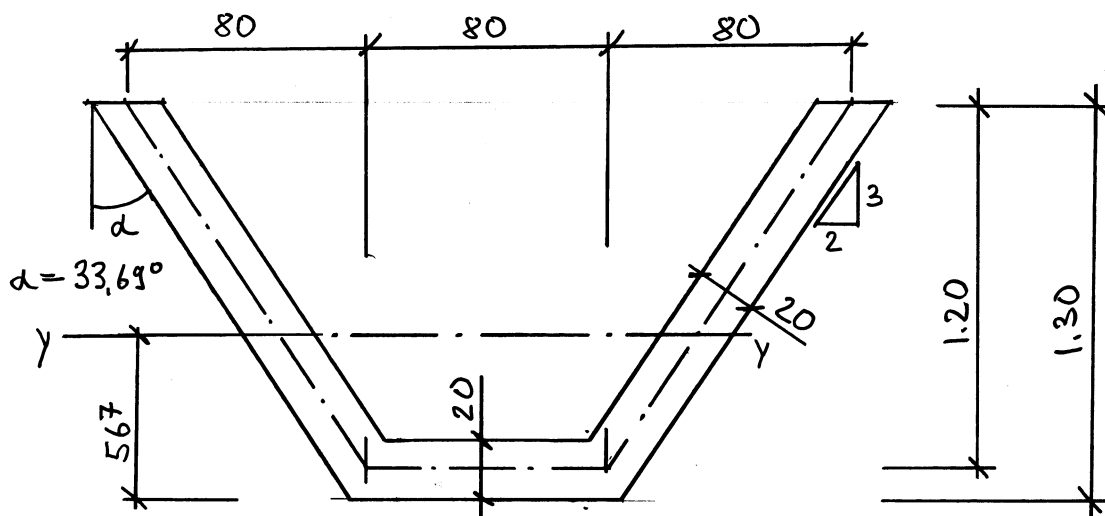
Werden die Spannglieder direkt über oder vor dem Auflager verankert, so ist zur Aufnahme der Zugkraft in Trägerlängsrichtung, welche als Längszugkraft infolge Querkraft interpretiert werden kann, eine schlaffe Bewehrung erforderlich.

6. Anwendungsbeispiel "Faltweckträger"

Dachkonstruktion aus trapezförmigen Dachträgern mit einer Spannweite von $l = 22,0\text{m}$, wobei die Dachträger als einfach gelagerte Faltwecke wirken. Zwischen den einzelnen Dachträgern sind Oblichter angeordnet.



Querschnitt:

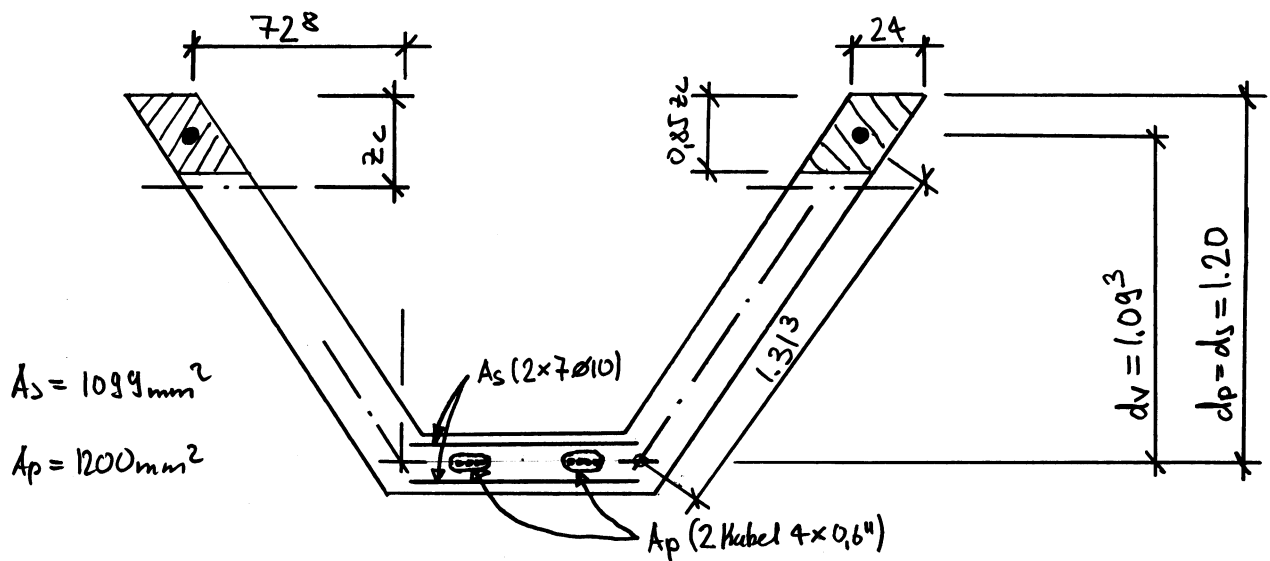


$$\text{Querschnittsweite: } A_c = 0,737 \text{ m}^2$$

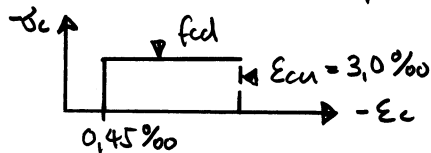
$$I_{c,y-y} = 0,116'151 \text{ m}^4$$

Neben dem Eigengewicht von $g = A_c \cdot \gamma_c = 0,737 \cdot 25,0 = 18,4 \text{ kN/m}'$ wird eine Nutzlast infolge Schnee von $q = 8,0 \text{ kN/m}'$ pro Dachträger berücksichtigt; die Einflussbreite pro Dachträger beträgt $b = 3,50 \text{ m}$. In Längsrichtung sind die Dachträger mit einer Vorspannung mit nachträglichem Verbund vorgespannt.

• Tragsicherheit - Längsbiegung



Materialkennwerte: • Beton C30/37 $\rightarrow f_{cd} = 20 \text{ N/mm}^2$



• Bewehrungsstahl B500B $\rightarrow f_{sd} = 435 \text{ N/mm}^2$

• Vorspannstahl Y1770 $\rightarrow f_{pu} = 1770 \text{ N/mm}^2, f_{pd} = 1320 \text{ N/mm}^2$

Biege widerstand: $T_{yd} = A_s \cdot f_{sd} + f_{pd} \cdot A_p = 1099 \cdot 435 + 1200 \cdot 1320 = 2062 \text{ kNm}$

Druckzone: $z_c = T_{yd} / (0,85 \cdot b \cdot f_{cd}) = 2062 / (0,85 \cdot 0,48 \cdot 20)$

$$z_c = 252,7 \text{ mm}$$

Hebelarm: $d_v = d - 0,425 \cdot z_c = 1093 \text{ mm}$

$$\underline{M_{Rd} = T_{yd} \cdot d_v = 2252,9 \text{ kNm}}$$

Schnittgrößen: $q_d = \gamma_g \cdot g + \gamma_q \cdot q = 1,35 \cdot 18,4 + 1,5 \cdot 8,0 = 36,8 \text{ kN/m}'$

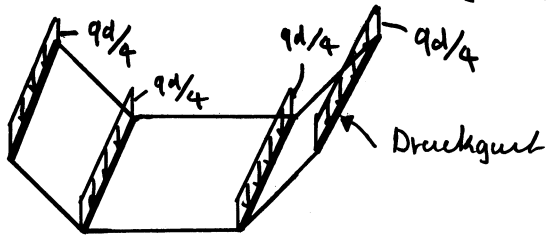
$$\underline{M_d = \frac{1}{8} \ell^2 \cdot q_d = 2228,8 \text{ kNm}}$$

$$\Rightarrow \underline{M_d = 2228,8 \text{ kNm} < M_{Rd} = 2252,9 \text{ kNm} \rightarrow i.O.}$$

Kontrolle $z_c/d \rightarrow$ Die schräge Bewehrung und die Vorspannbewehrung erreichen die Fließspannung.

• Tragsicherheit - Längsquerkraft und Querbiegung

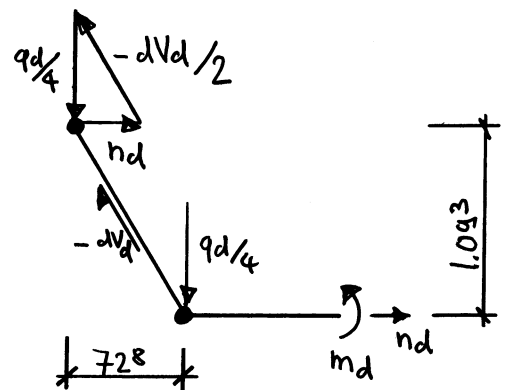
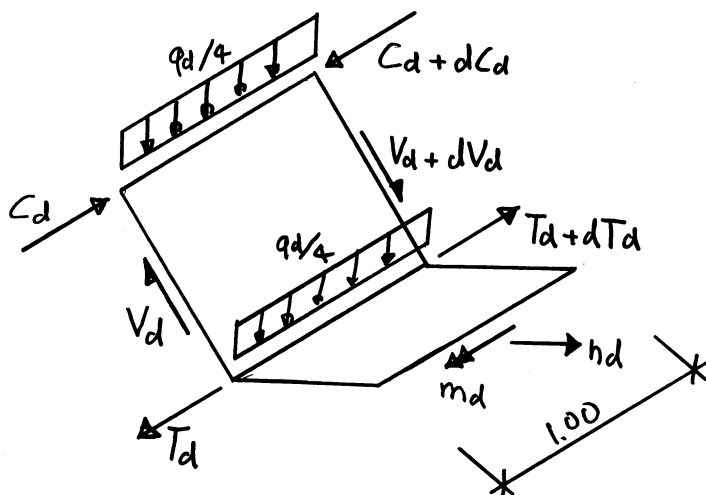
Der Querschnitt wird als Stringerquerschnitt mit vier Gurten modelliert; dabei wird angenommen, dass je ein Viertel der Belastung auf die beiden Druckgurte beziehungsweise je ein Viertel der Belastung auf die beiden Zuggurte einwirken



Die Belastung auf die Druckgurte führt zu Querbeanspruchungen der Zuggurtscheibe

und der beiden geneigten Stegscheiben. Die geneigten Stegscheiben weisen eine wirksame Höhe von $d_v/\cos\alpha = 1313\text{mm}$ auf; für die Druckfeldneigung in den Stegen wird ein Winkel von $\cot\theta = 1,75$ beziehungsweise $\theta = 29,7^\circ$ angenommen.

Weiter ist der Querschnitt in Querrichtung in der 1. und 4. Lage mit Stäben $\varnothing 8@150\text{mm}$ ($a_s = 335\text{mm}^2/\text{m}$) bewehrt.



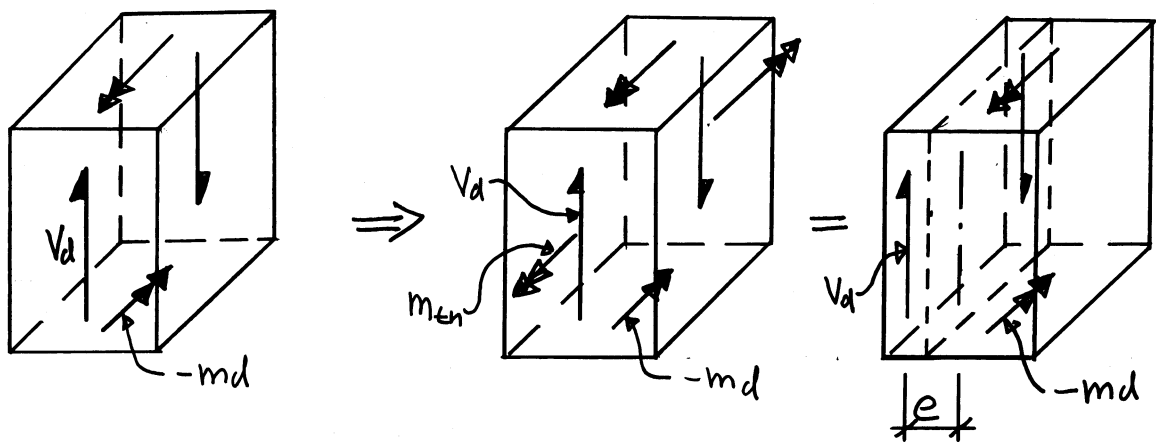
$$dV_d = -q_d / (2 \cdot \cos\alpha) = -22,14 \text{ kN/m'}$$

$$n_d = \frac{2}{3} \cdot q_d / 4 = 6,14 \text{ kN/m'}$$

$$m_d = -n_d \cdot d_v = -q_d / 4 \cdot \frac{2}{3} d_v = -6,71 \text{ kNm/m'}$$

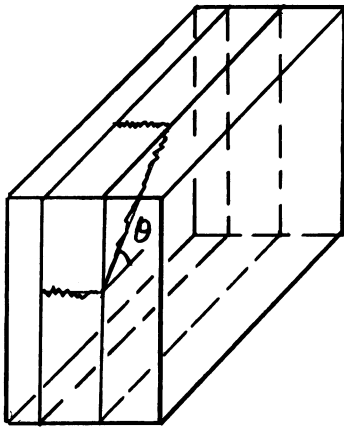
Die Querkraft der geneigten Steige beim Auflager beträgt
 $V_{d,A} = \frac{1}{2} \cdot (q_d \cdot l/2) / \cos\alpha = 243,5 \text{ kN}$ pro Steg; im maßgebenden
 Bemessungsschnitt in einem Abstand von $(d_v / \cos\alpha) \cdot \cot\theta = 2298 \text{ mm}$
 beträgt die Querkraft noch $V_d = V_{d,A} + (d_v \cdot \cot\theta / \cos\alpha) dV_d = 192,6 \text{ kN}$.

Bei der Bemessung der Stege wird der untere Stegbereich im
 Übergang zur Fugquerscheibe maßgebend, da dort Längsschub
 und Querbiegung berücksichtigt werden muss. Die Längsquer-
 kraft beträgt $V_d = 192,6 \text{ kN}$ und das Querbiegemoment $m_d = -6,7 \text{ kNm}$.
 Der Steg ist mit Stäben $\varnothing 8 @ 150 \text{ mm}$ bewehrt; mit einer
 Betonüberdeckung von $c = 30 \text{ mm}$ resultiert somit eine statische
 Höhe von $d = 166 \text{ mm}$.



Die Schnittgrößen V_d und m_d beziehen sich auf die Mittelebene
 der Stegscheibe. Damit ein maximales Querbiegemoment
 aufgenommen werden kann, wird das Schubfeld infolge der
 Längsquerkraft an den Scheibenrand verschoben; die Exzentrizität e
 der Längsquerkraft führt zu einer Drillmomenten-
 beanspruchung m_{tn} , welche in den Auflagerbereichen
 beziehungsweise mit den Auflagerquerscheiben aufgenommen werden.

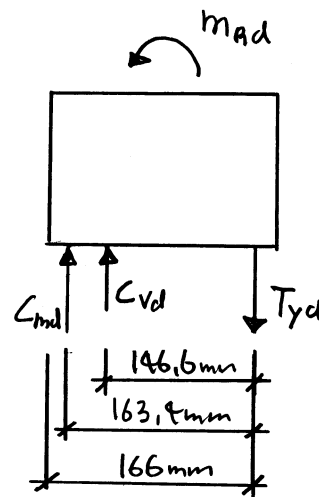
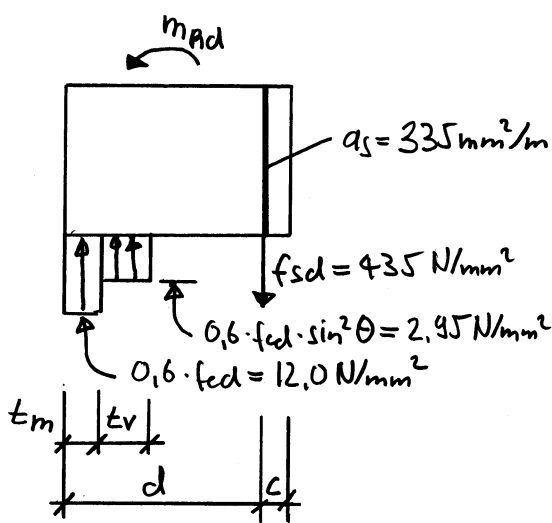
Im Steg wird mit $k_c = 0,6$ vereinfacht eine Druckfestigkeit des Betons von $f_c = k_c \cdot f_{cd} = 0,6 \cdot 20 = 12 \text{ N/mm}^2$ angenommen.



Die massgebende Querkraft im Steg, $V_d = 192,6 \text{ kN}$, erfordert eine minimale Stegdicke

$$t_v = \frac{V_d}{(d_v / \cos \alpha) \cdot \cot \theta} \cdot \frac{1}{0,6 \cdot f_{cd} \cdot \sin^2 \theta} = 28,4 \text{ mm}$$

$t_v \div$ geneigtes Druckfeld
 $t_m \div$ vertikales Druckfeld



$$T_{yd} = a_s \cdot f_{sd} = 335 \cdot 435 = 145,7 \text{ kN/m}$$

$$C_{vd} = V_d \cdot \cos \alpha / (d_v \cdot \cot \theta) = 192,6 / (1,313 \cdot 1,75) = 83,8 \text{ kN/m}$$

$$C_{md} = T_{yd} - C_{vd} = 61,9 \text{ kN/m} \rightarrow t_m = C_{md} / (0,6 \cdot f_{cd}) = 5,2 \text{ mm}$$

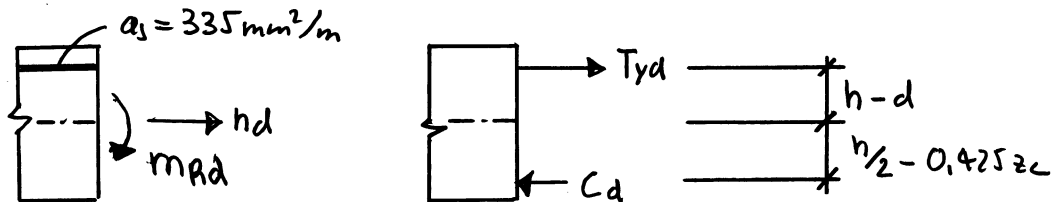
$$d_{vm} = d - t_m / 2 = 163,4 \text{ mm}$$

$$d_{vv} = d - t_m - t_v / 2 = 146,6 \text{ mm}$$

$$m_{Rd} = C_{md} \cdot d_{vm} + C_{vd} \cdot d_{vv} = 22,4 \text{ kNm/m}$$

$$\Rightarrow -m_d = 6,7 \text{ kNm/m} < m_{Rd} = 22,4 \text{ kNm/m} \rightarrow \text{i.O.}$$

Bei der Bemessung der Zugstreife in Querrichtung muss ein Querbiegemoment von $m_d = -6,7 \text{ kNm/m}$ und eine Normalkraft von $n_d = 6,1 \text{ kN/m}$ berücksichtigt werden.



$$T_{yd} = a_s \cdot f_{sd} = 335 \cdot 435 = 145,7 \text{ kN/m}$$

$$C_d = T_{yd} - n_d = 139,7 \text{ kN/m}$$

Unter Berücksichtigung von $k_c = 0,8$ in der Biegezugzone folgt die Druckzone in Querrichtung

$$z_c = C_d / (0,85 \cdot k_c \cdot f_{cd}) = 139,7 / (0,85 \cdot 0,8 \cdot 20) = 10,3 \text{ mm}$$

$$m_{rd} = T_{yd} \cdot (d - h/2) + C_d (h - 0,85 z_c) / 2 = 145,7 (166 - 100) + 139,7 (200 - 0,85 \cdot 10,3) / 2$$

$$m_{rd} = 22,9 \text{ kNm/m}$$

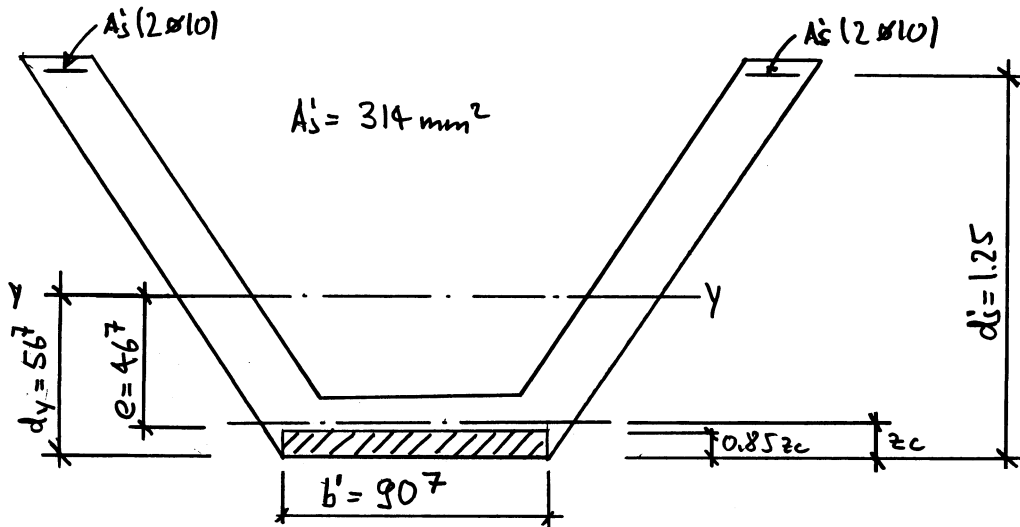
$$\Rightarrow \underline{\underline{-m_d = 6,7 \text{ kNm/m} < m_{rd} = 22,9 \text{ kNm/m} \rightarrow \text{i.O.}}}$$

• Tragsicherheit - Lastfall Vorspannung / Auflagerbereich

Aufgrund der geraden Kabelführung in der Zugstreife resultiert infolge Vorspannung ein konstantes Moment von $M_{po} = -\sigma_{po} \cdot A_p \cdot e = -0,7 \cdot 1770 \cdot 1200 \cdot 467 = -694,3 \text{ kNm}$, wobei die das Spannglied auf eine Spannung von $\sigma_{po} = 0,7 \cdot f_{pu} = 1239 \text{ N/mm}^2$ vorgespannt wird; die entsprechende Kabelkraft beträgt

$P_o = A_p \cdot \sigma_{po} = 1486,8 \text{ kN}$. Die Vorspannung wird mit einem Lastfaktor $\gamma_p = 1,2$ berücksichtigt, wobei diese als Anker- und Umlenkkräfte gedeutet wird. Weiter sind in den geeigneten Stellen im oberen Bereich je zwei Bewehrungsstäbe $\varnothing 10$ mit

einer statischen Höhe $d' = 1250 \text{ mm}$ eingesetzt. Für die Breite der trapezförmigen Druckzone wird vereinfacht eine konstante Breite von $b' = 907 \text{ mm}$ angenommen.



$$\text{Schnittgrößen: } N_d = -\gamma_p \cdot P_0 = -1,2 \cdot 1486,8 = -1784,2 \text{ kN}$$

$$M_d = \gamma_p \cdot M_{p0} = -1,2 \cdot 694,3 = -833,2 \text{ kNm}$$

$$\text{Biege widerstand: } T_{yd} = A_s \cdot f_{sd} = 314 \cdot 435 = 136,6 \text{ kN}$$

$$C_d = T_{yd} - N_d = 136,6 + 1784,2 = 1920,8 \text{ kN}$$

$$\text{Druckzone: } z_c = C_d / (0,85 \cdot b' \cdot f_{cd}) = 1920,8 / (0,85 \cdot 0,907 \cdot 20)$$

$$z_c = 124,6 \text{ mm}$$

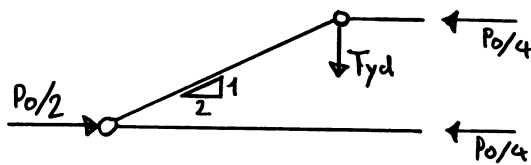
$$M_{rd} = C_d \cdot (d_y - 0,425 z_c) + T_{yd} \cdot (d_s' - d_y) = 1080,6 \text{ kNm}$$

$$(\text{Biegung mit Normalkraft: } M_{rd}(N_{ed} = -1784,2 \text{ kN}))$$

$$\Rightarrow -M_d = 833,2 \text{ kNm} < M_{rd}(N_{ed} = -1784,2 \text{ kN}) = 1080,6 \text{ kNm} \rightarrow \text{i.O.}$$

Spreizkräfte im Auflagerbereich: Für die Aufnahme der Spreizkräfte im Verankerungsbereich der Kabel wird die Bewehrungsdichte der Stäbe $\phi 8$ auf 75 mm reduziert, wobei angenommen wird, dass lediglich die Zusatzbewehrung zur Aufnahme der Spreizkräfte angerechnet wird.

Kraftausbreitung pro Steg:



$$T_{yd} \approx \gamma_p \cdot P_0/8 = 223 \text{ kN}$$

$$2 \varnothing 8 \rightarrow T_y = 43,7 \text{ kN}$$

$$b_w = 223/43,7 \cdot 150 = 765 \text{ mm}$$

Eine grobe Abschätzung zeigt, dass bei Berücksichtigung der Stegbewehrung $\varnothing 8 @ 150 \text{ mm}$ eine Verleifbreite von ungefähr 800 mm zur Aufnahme der Spreitkräfte genügt; die totale Bewehrung $\varnothing 8 @ 75 \text{ mm}$ im Auflagerbereich ist somit ausreichend und könnte noch optimiert beziehungsweise reduziert werden.

• Tragsicherheit - Lastfall Vorspannung / Feldmitte

Während dem Vorspannen ist der Träger lediglich durch sein Eigengewicht belastet, welches für den Tragsicherheitsnachweis für den Lastfall Vorspannen günstig wirkt; das Eigengewicht wird mit einem Lastfaktor $\gamma_{g, \min} = 0,8$ berücksichtigt.

$$\text{Schnittgrößen: } M_g = 1/8 \cdot l^2 \cdot g = 1113,2 \text{ kNm}$$

$$M_d = \gamma_{g, \min} \cdot M_g + \gamma_p \cdot M_{p0} = 0,8 \cdot 1113,2 - 1,2 \cdot 694,3$$

$$M_d = 57,4 \text{ kNm}$$

$$\underline{N_d = -\gamma_p \cdot P_0 = -1784,2 \text{ kN}}$$

⇒ Der Lastfall Vorspannung ist im Feldbereich nicht maßgebend!

• Spannungsnachweis zum Zeitpunkt $t=0$

Zum Zeitpunkt $t=0$ unmittelbar beim Spannen des Vorspannstahls ist der Lastfall "Vorspannung und Eigengewicht" von Interesse.

Schnittgrößen: $N = -P_0 = 1486,8 \text{ kN}$

$$M = M_g + M_p = 1113,2 - 694,3 = 418,9 \text{ kNm}$$

$$\sigma_{c, \text{unten}} = \frac{N}{A_c} + z_u \frac{M}{I_{c, y-y}} = \frac{-1486,8 \cdot 10^3}{0,737 \cdot 10^6} + 567 \cdot \frac{418,9 \cdot 10^6}{0,116'151 \cdot 10^{12}}$$

$$\sigma_{c, \text{unten}} = -2,017 + 2,045 = 0,028 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{c, \text{oben}} = \frac{N}{A_c} - z_o \frac{M}{I_{c, y-y}} = \frac{-1486,8}{0,737 \cdot 10^3} - 733 \frac{418,9}{116'151}$$

$$\sigma_{c, \text{oben}} = -2,017 - 2,644 = -4,661 \text{ N/mm}^2$$

\Rightarrow Der Querschnitt bleibt im Feld unter der Eigenlast zum Zeitpunkt $t=0$ ungerissen.

• Spannungsnachweis zum Zeitpunkt $t=\infty$

Die zeitabhängigen Vorspannverluste werden mit 15% berücksichtigt.

$$\sigma_{p\infty} = 0,85 \cdot \sigma_{p0} = 0,85 \cdot 1239 = 1053,2 \text{ N/mm}^2$$

Vernachlässigt man die Betonstauchungen, so resultiert unter Berücksichtigung eines Elastizitätsmoduls $E_p = 195 \text{ kN/mm}^2$ für den Vorspannstahl eine Vordehnung $\Delta \epsilon_{p\infty} = \sigma_{p\infty} / E_p = 5,401\%$. Mit den Biegemomenten infolge Eigengewicht und Nutzlast, $M_g = 1113,2 \text{ kNm}$ und $M_q = \frac{1}{8} \cdot \ell^2 \cdot q = 484 \text{ kNm}$, sowie mit $E_s = 205 \text{ kN/mm}^2$ und $n_s = 7$ können die Bestimmungsgleichungen für die Druckzonendicke z_c und die Krümmung χ_y des gerissenen Feldquerschnitts aufgestellt werden. Mit der Deutung als Eigenspannungszustand

lauten diese

$$N = 0 = A_p \cdot [\sigma \cdot \epsilon_{p0} + (d_p - z_c) \cdot \chi_y] \cdot E_p + A_s \cdot (d_s - z_c) \cdot \chi_y \cdot E_s - \frac{1}{2} \cdot b \cdot z_c^2 \cdot \chi_y \cdot E_s / \eta_s$$

$$M = M_g + M_q = A_p [\sigma \cdot \epsilon_{p0} + (d_p - z_c) \cdot \chi_y] \cdot E_p \cdot (d_p - z_c) + A_s \cdot (d_s - z_c)^2 \cdot \chi_y \cdot E_s + \frac{1}{3} \cdot b \cdot z_c^3 \cdot \chi_y \cdot E_s / \eta_s$$

wobei $d_p = d_s = 1200 \text{ mm}$, $b = 480 \text{ mm}$, $A_p = 1200 \text{ mm}^2$ und $A_s = 1099 \text{ mm}^2$. Man

erhält schließlich eine Druckzonenhöhe $z_c = 500,5 \text{ mm}$ und eine

Krümmung $\chi_y = 0,878'037 \text{ mrad/m}$. Es resultieren die

Spannungen

$$\sigma_{c, \text{oben}} = -12,9 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_s = 125,9 \text{ N/mm}^2$$

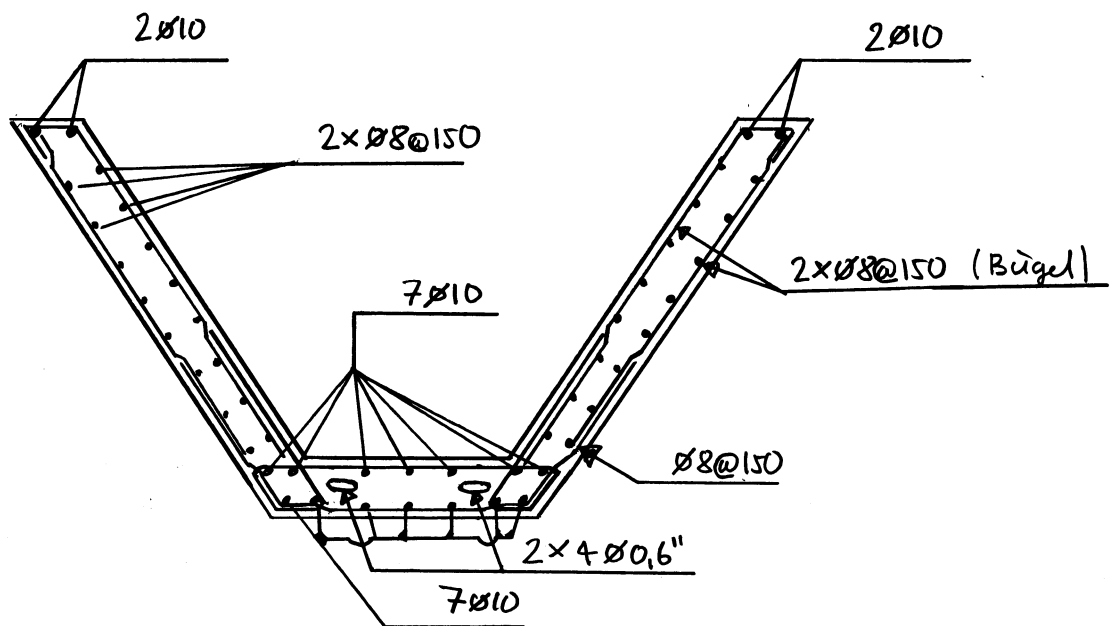
$$\sigma_p = 1173,0 \text{ N/mm}^2$$

wobei der Spannungszuwachs der Spannglieder $\Delta \sigma_p = 119,8 \text{ N/mm}^2$ beträgt.

• Diskussion

Das Beispiel soll die verschiedenen Probleme aufzeigen, welche bei der Bemessung berücksichtigt werden müssen. Hinsichtlich Querrichtung weist der Querschnitt eine ausreichende Betonabmessung auf, das heißt dass die erforderliche Mindestbewehrung in den geneigten Stegscheiben und in der Fuggutscheibe die Längsquerkraft, die Querbeanspruchungen sowie die Spritzkräfte im Klaffeinleitungsbereich der Spannglieder aufnehmen kann.

• Bewehrungsskizze Mst. 1:25



"Feldquerschnitt"

Mindestbewehrung $\text{Ø}8@150\text{mm}$ in 4-Lagen mit verstärkter Längsbewehrung in den Gurten (total $18\text{Ø}10$). Verstärkung der Querkraftbewehrung der geneigten Stegscheiben im Auflagerbereich, $\text{Ø}8@75\text{mm}$.