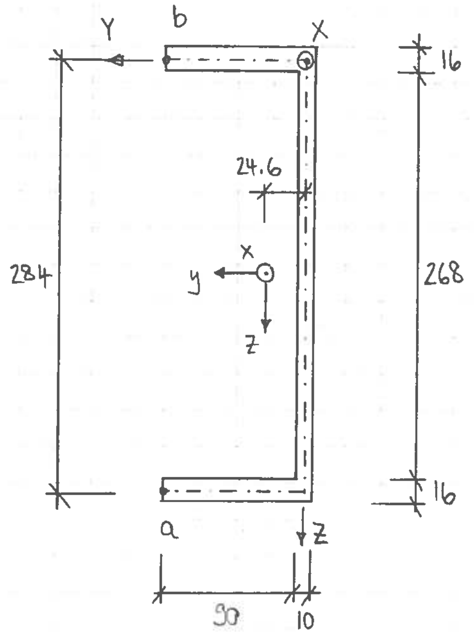
a)



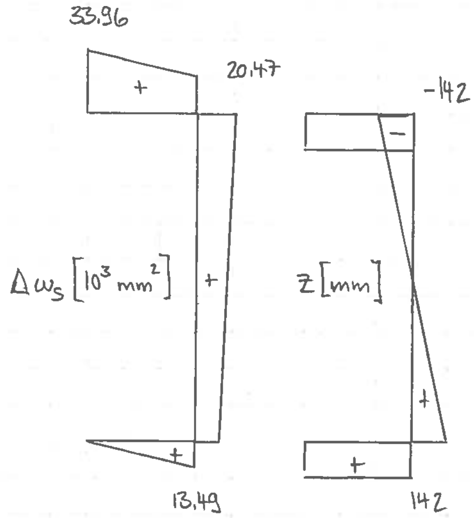
$$A = 2 \cdot 16 \cdot 100 + 268 \cdot 10 = 5880 \text{ mm}^2$$

$$y_s = \frac{2 \cdot 95 \cdot 16 \cdot \frac{95}{2}}{5880} = 24.56 \text{ mm}$$

$$z_s = \frac{95 \cdot 16 \cdot 284 + 284 \cdot 10 \cdot \frac{284}{2}}{5880} = 142 \text{ mm}$$

$$I_y = 2 \cdot \left[\frac{95 \cdot 16^3}{12} + 95 \cdot 16 \cdot 142^2 \right] + \frac{10 \cdot 284^3}{12} = 80.452 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_z = 2 \cdot \left[\frac{16 \cdot 95^3}{12} + 95 \cdot 16 \cdot \left(\frac{95}{2} - 24.6 \right)^2 \right] + \frac{284 \cdot 10^3}{12} + 284 \cdot 10 \cdot 24.6^2 = 5.623 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$



$$\Delta \omega_s = \int_a^s \rho_s \, ds$$

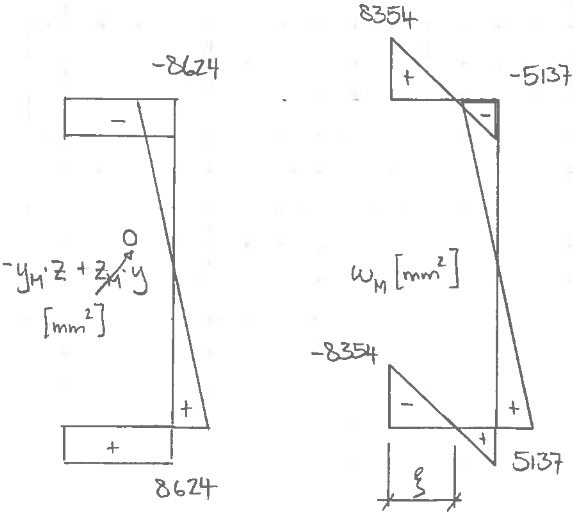
$$I_{z\omega} = \int_a^b \Delta\omega_s \, z \, t \, ds = \frac{1}{2} \cdot \left[142 \cdot 13.49 \cdot 95 \cdot 16 - 142 \cdot (33.96 + 20.47) \cdot 95 \cdot 16 \right] + \frac{1}{6} \cdot \left[142 \cdot (2 \cdot 13.49 + 20.47) - 142 \cdot (2 \cdot 20.47 + 13.49) \right] \cdot 284 \cdot 10 = -4.886 \cdot 10^9 \text{ mm}^5$$

$$y_M = \frac{I_{z\omega}}{I_y} = \frac{-4.886}{0.08045} = -60.73 \text{ mm}$$

$$I_{y\omega} = 0 \rightarrow z_M = 0$$

$$S_\omega = \int_a^b \Delta\omega_s \, t \, ds = \frac{1}{2} \cdot \left[13.49 \cdot 95 \cdot 16 + (20.47 + 13.49) \cdot 284 \cdot 10 + (33.96 + 20.47) \cdot 95 \cdot 16 \right] = 99.842 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\omega_{s,a} = -\frac{S_\omega}{A} = -\frac{99.842 \cdot 10^6}{5880} = -16.976 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$$



$$\omega_M = \Delta\omega_S - y_M \cdot z + \underbrace{\cancel{z_M \cdot y}}_{0} + \omega_{S,a}$$

$$\xi = \frac{8354}{8354+5137} \cdot 95 = 58.83\,mm$$

$$I_\omega = \int_a^b \omega_M^2\, t\, ds$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \left[16 \cdot \left(58.8 \cdot 8354^2 + 36.2 \cdot 5137^2\right) + 10 \cdot \left(142 \cdot 5137^2\right)\right]$$

$$= 78.96 \cdot 10^9\ mm^6$$

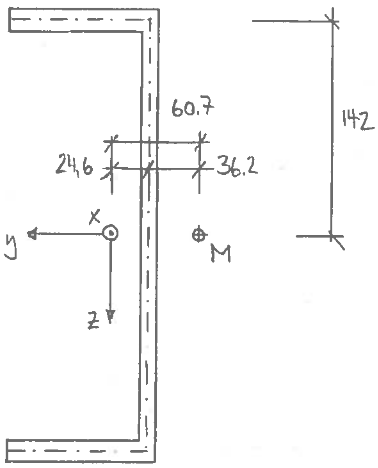
$$I_x = \sum_i \frac{b_i^3 h_i}{3} = \frac{1}{3} \cdot \left(2 \cdot 16^3 \cdot 95 + 10^3 \cdot 284\right) = 354.1 \cdot 10^3\ mm^4$$

- Elastizitäts- und Schubmodul Stahl: $E = 210\,GPa$, $G = 81\,GPa$

$\rightarrow$ $EI_\omega = 16.58 \cdot 10^{15}\ Nmm^4$

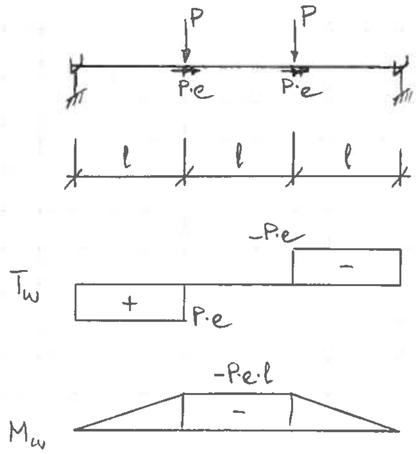
$GI_x = 28.68 \cdot 10^9\ Nmm^2$

b)



Im Schubmittelpunkt M weist das Profil das kleinste Wölbträgheitsmoment auf. Um ihn dreht sich das Profil bei Torsionsbeanspruchung.

c) Reine Wölbkrafttorsion: $m_x = EI_\omega \cdot \vartheta''''$



Torsionsbeanspruchung und Wölbbimoment aus Querkraftanalogie:

$$T_\omega = -EI_\omega \cdot \vartheta''' \longleftrightarrow V_z = -EI_y \cdot w'''$$

$$T_\omega = -M_\omega' \longleftrightarrow V_z = M_y'$$

$$\sigma_x = \frac{M_\omega}{I_\omega} \cdot \omega \longleftrightarrow \sigma_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot z$$

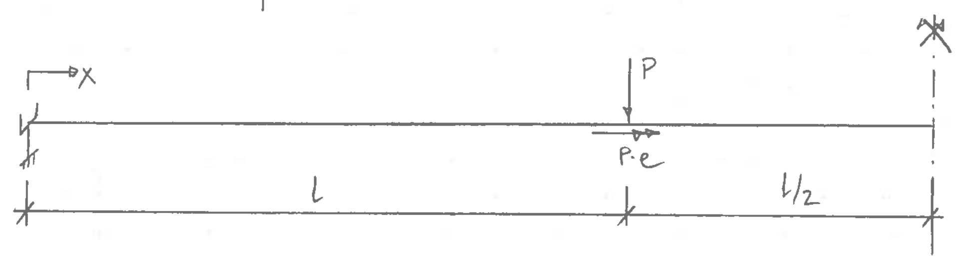
$$\sigma_{x,max} = -\frac{M_\omega}{I_\omega} \cdot \omega_{max}$$

mit $\omega_{max} = 8354\ mm^2$

und $I_\omega = 78.96 \cdot 10^9\ mm^6$

	e	P·e	M_ω	$\sigma_{x,max}$
P im Schubpunkt	60,7	911	911	96,4
P in Stegebene	36,2	543	543	57.4
	mm	Nm	Nm²	N/mm²

d)



RB bei $x = 0$:

- Verdrehung: $\vartheta = 0$
- Bimoment: $M_\omega = 0$ mit $M_\omega = -EI_\omega \cdot \vartheta''$ folgt $\vartheta'' = 0$

ÜB bei $x = \frac{3l}{2}$:

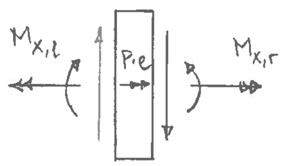
- Gesamttorsion: $T_s + T_\omega = 0 \rightarrow GI_x \cdot \vartheta' - EI_\omega \cdot \vartheta''' = 0$
- Verschiebungen: $u(x,y,z) = 0$ mit $u(x,y,z) = \vartheta'(x) \cdot \omega(y,z)$ folgt $\vartheta' = 0$

ÜB bei $x = l$:

- Verdrehung: $\vartheta_l = \vartheta_r$
- Verschiebung: $u_l(x,y,z) = u_r(x,y,z) \quad \longrightarrow \quad \vartheta_l' = \vartheta_r'$
- Bimoment: $M_{\omega,l} = M_{\omega,r} \quad \longrightarrow \quad \vartheta_l'' = \vartheta_r''$
- Gesamttorsion: $M_{x,l} = M_{x,r} + P \cdot e$

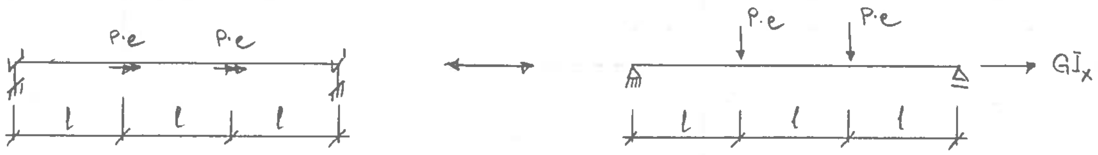
$$\longrightarrow \quad GI_x \cdot (\vartheta_l' - \vartheta_r') - EI_\omega \cdot (\vartheta_l''' - \vartheta_r''') = P \cdot e$$

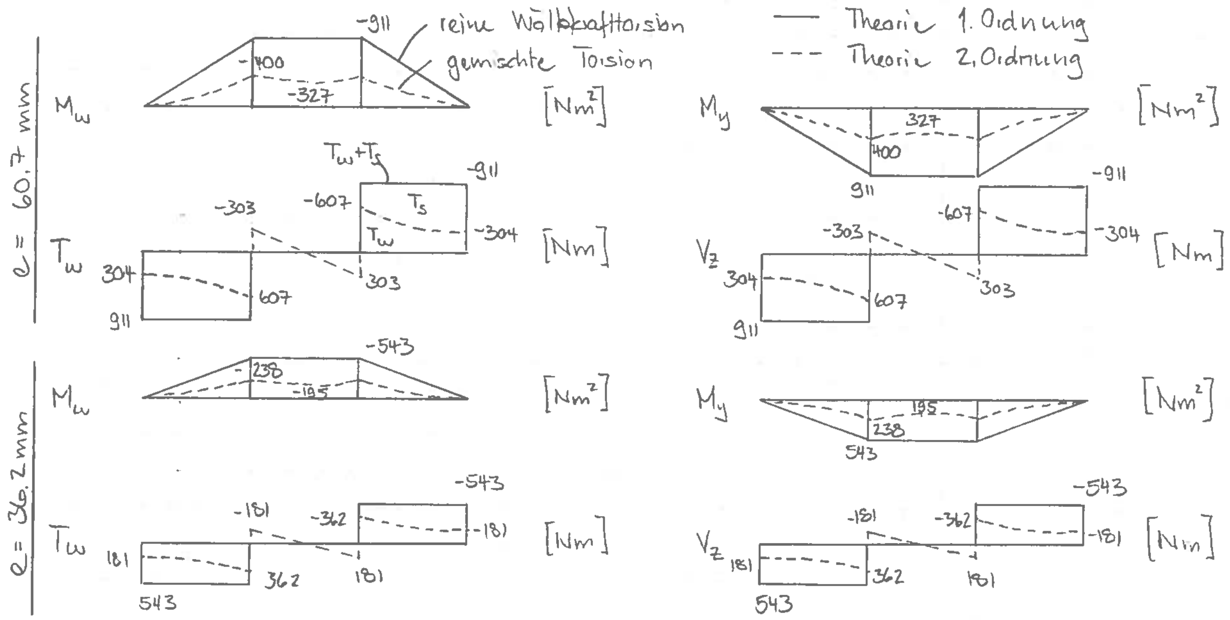
Betrachte hierzu das SKD bei $x = l$:



c) gemischte Torsion: $m_x = EI_\omega \, \vartheta'''' - GI_x \, \vartheta''$

Zugstabanalogie: $q_z = EI_y \, w'''' - N \, w''$





Normalspannungen σ_x bei $x = \frac{3L}{2}$:

- Aus Biegung:

$$\sigma_{x,B} = \frac{M_y}{I_y} \cdot z \qquad \text{im Flansch:} \quad \sigma_{x,B,max} = \frac{P \cdot L}{I_y} \cdot z_{min} = \frac{15 \cdot 10^6}{80{,}45 \cdot 10^6} \cdot (-142)$$

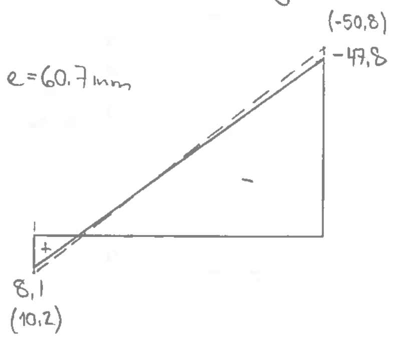
$$= -26{,}5 \ N/mm^2$$

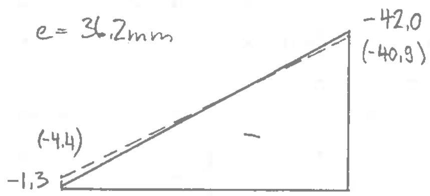
- Aus Wölbkrafttorsion:

$$\sigma_{x,\omega} = -\frac{M_\omega}{I_\omega} \cdot \omega \qquad \text{im Flansch:}$$

σ_x [N/mm^2]	$\omega = 8354\ mm^2$	$\omega = -5137\ mm$
e = 60.7 mm	34,6	-21.3
e = 36.2 mm	25.2	-15.5

- Totale Spannungen im oberen Flansch:





—— berechnete Werte

- - - (Versuchsergebnisse)

Die berechneten Werte zeigen eine sehr gute Übereinstimmung mit den Messungen aus dem Versuch!