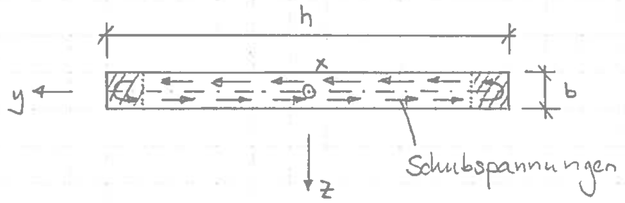
Baustatik III	**Musterlösung**	Page 1/4
Hausübung 5		LT/ 24.10.13

a) Herleitung der maximalen Schubspannung τ_{max} aus St. Venant Torsion bei offenen dünnwandigen Querschnitten:



$h \gg b$

Dünnwandig heisst, dass $h \gg b$ ist. Der Potentialansatz ϕ wird so gewählt, dass er nur von z abhängig ist. Somit entsteht an den Querschnittsränder (Schaffur in der Zeichnung oben) ein kleiner Fehler, welcher für grosse Verhältnisse h/b vernachlässigbar wird.

Da $\phi_{,zz} = 1$ kann $\phi(z)$ höchstens ein Polynom 2. Grades sein.

Ansatz:

$$\phi(z) = c_1 \cdot z^2 + c_2 \cdot z + c_3$$

$$\phi_{,z} = 2c_1 \cdot z + c_2$$

$$\phi_{,zz} = 2c_1$$

Randbedingungen:

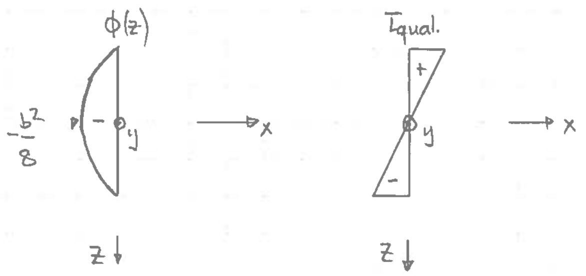
$$\phi_{,zz} = 1 \quad \rightarrow \quad c_1 = \frac{1}{2}$$

$$\phi_{,z}(z=0) = 0 \quad \rightarrow \quad c_2 = 0$$

$$\phi\left(z = \frac{b}{2}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad c_3 = -\frac{b^2}{8}$$

Lösung:

$$\phi(z) = \frac{1}{2}\left(z^2 - \frac{b^2}{4}\right)$$



Bem. Die Schubspannungen verlaufen affin zu Ableitung des Potentials.

Torsionsträgheitsmoment: $I_x = -4 \cdot \int_A \phi \, dA = -4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{-b^2}{8} \cdot b \cdot h = \frac{b^3 h}{3}$

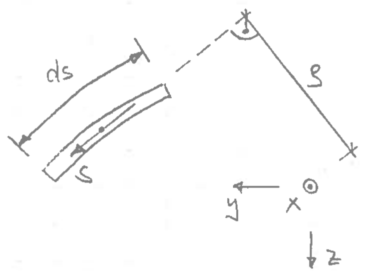
Schubspannungen: $\tau_{yx} = -\phi_{,z} \cdot 2G\Theta_{,x} = -2G\Theta_{,x} \cdot z$

$\tau_{zx} = \phi_{,y} \cdot 2G\Theta_{,x} = 0$

mit $G\Theta_{,x} = \frac{M_x}{I_x}$ folgt $\tau_{yx,max} = -2 \frac{M_x}{I_x} \cdot z_{min} = -2 \frac{M_x}{b^3 h} \cdot 3 \cdot \left(-\frac{b}{2}\right)$

$$= \underline{\frac{3M_x}{b^2 h} = \frac{M_x}{I_x} \cdot b}$$

b) Herleitung der maximalen Schubspannung τ_{max} aus Bredt'schem Schubfluss bei geschlossenen dünnwandigen Querschnitten:



Annahme: Schubfluss $S = \tau_{sx} \cdot t(s) = \text{konst.}$

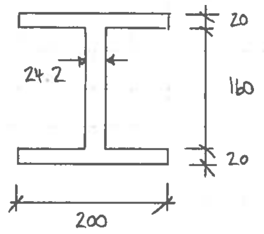
Gleichgewicht: $M_x = \oint S \cdot \varrho \, ds = S \cdot \oint \varrho \, ds = S \cdot 2A_0$

Schubspannung: $\tau_{sx} = \frac{M_x}{2A_0 \cdot t(s)}$

$$\underline{\tau_{sx,max} = \frac{M_x}{2A_0 \cdot t_{min}}}$$

c)

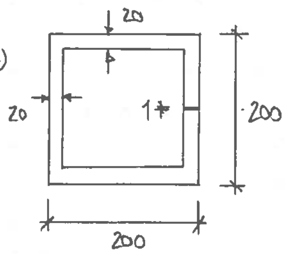
①



$$I_x = \sum_i \frac{b_i^3 h_i}{3} = \frac{1}{3}\left(20^3 \cdot 200 \cdot 2 + 24.2^3 \cdot 180\right)$$

$$= 1.917 \cdot 10^6 \ mm^4$$

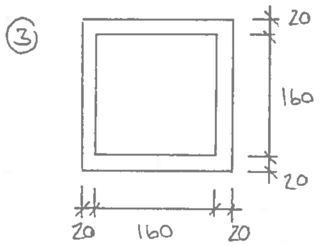
②



$$I_x = \sum_i \frac{b_i^3 h_i}{3} = \frac{1}{3}\left(3 \cdot 20^3 \cdot 180 + 2 \cdot 20^3 \cdot 89.5\right)$$

$$= 1.917 \cdot 10^6 \ mm^4$$

③



$$I_x = \frac{4A_o^2}{\oint \frac{ds}{t(s)}} = \frac{4 \cdot 180^4}{4 \cdot 180} \cdot 20 = 116.664 \cdot 10^6 \ mm^4$$

$$\rightarrow \frac{I_{x,3}}{I_{x,2}} = 60.8$$

Die Torsionssteifigkeit I_x des geschlossenen Profils 3 ist rund 60 mal grösser als diejenige des quasi identischen Profils 2 mit einer kleinen Öffnung!

Schubspannungen:

$$\tau_{max,1} = \frac{M_x}{I_x} \cdot b_{max} = M_x \cdot \frac{24.2 \ mm}{1.917 \cdot 10^6 mm^4} \quad (100\%)$$

$$\tau_{max,2} = \frac{M_x}{I_x} \cdot b_{max} = M_x \cdot \frac{20 \ mm}{1.917 \cdot 10^6 \ mm^4} \quad (82.6\%)$$

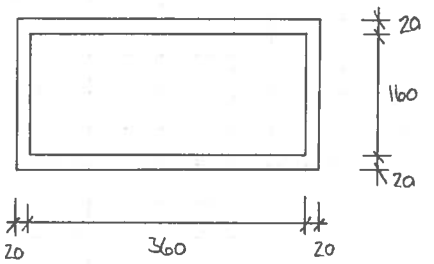
$$\tau_{max,3} = \frac{M_x}{2A_o \cdot t} = M_x \cdot \frac{1}{2 \cdot 180^2 \cdot 20 \ mm^3} \quad (6.1\%)$$

Bei einem primär auf Torsion beanspruchten Träger ist der Querschnittstyp 3 den anderen vorzuziehen!

Vorteile: + grössere Steifigkeit

+ kleinere Schubspannung

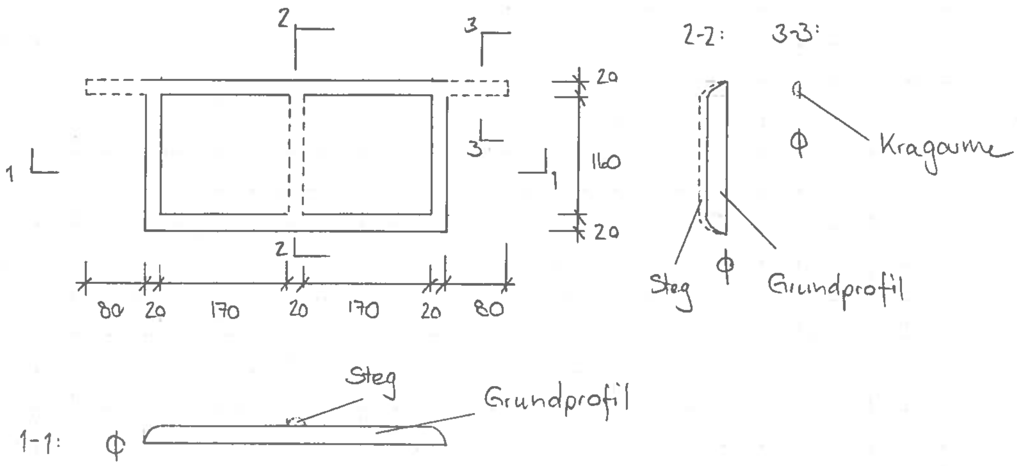
d) Grundprofil:



$$I_{x,0} = \frac{4A_0^2}{\oint \frac{ds}{t(s)}} = \frac{4\cdot(180\cdot380)^2}{2\cdot(180+380)}\cdot 20$$

$$= 334.2\cdot10^6\ mm^4$$

ergänztes Profil:



Das Torsionsträgheitsmoment vergrössert sich durch die Ergänzungen um

$$\Delta I_x = \sum_i \frac{b_i^3 h}{3} = \frac{1}{3}\cdot\left(2\cdot20^3\ 90 + 20^3\cdot180\right) = 0.96\cdot10^6\ mm^4$$

Dies entspricht einer Vergrösserung von nur

$$\frac{I_{x,0}+\Delta I_x}{I_{x,0}} - 1 = \frac{334.2+0.96}{334.2} - 1 = 0.3\ \%$$