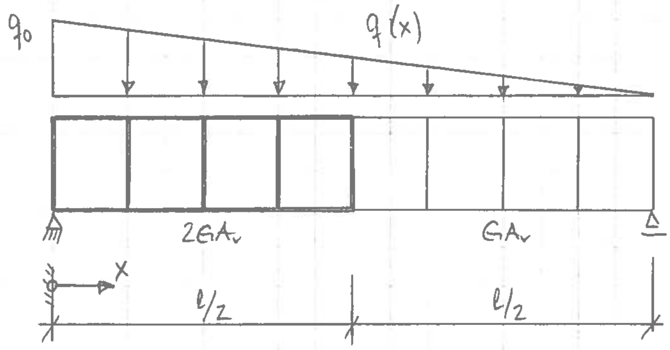
Teilaufgabe 1



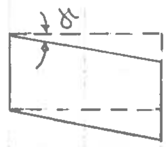
$$q(x) = q_0 \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

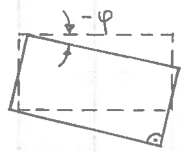
$$GA_v(x) = \begin{cases} 2GA_v & 0 \leq x \leq l/2 \\ GA_v & l/2 < x \leq l \end{cases}$$

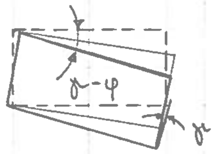
– Allgemeinster Lösungsweg:

Gleichgewicht: $\quad q_z = -\dfrac{dV_z}{dx} \quad ; \quad V_z = \dfrac{dM_y}{dx}$ (1)

Kinematische Relation:

reine Schubverformung:  $\gamma = \dfrac{dw}{dx}$

reine Biegeverformung:  $-\varphi = \dfrac{dw}{dx}$

kombiniert:  $\gamma - \varphi = \dfrac{dw}{dx}$

Beim Schubträger ist die Biegesteifigkeit im Vergleich zu Schubsteifigkeit sehr gross. Im Grenzfall des reinen Schubträgers ist $EI_y \to \infty$ und $\dfrac{M_y}{EI_y} = \chi = \dfrac{d\varphi}{dx} = 0$. Eine Schiefstellung φ ist folglich auch beim Schubträger möglich, sie ist aber auf jeden Fall konstant.

Die kinematische Relation lautet somit:

$$\gamma = \varphi_0 + w' \qquad (2)$$

Stoffgesetz: $V_z = GA_v \cdot \gamma$ (3)

Gleichgewichts-Differentialbeziehungen:

$$V_z = -\int q_z(x)\,dx = q_0 \cdot \left(\frac{x^2}{2l} - x\right) + C_0 \qquad (4)$$

$$M_y = \int V_z(x)\,dx = q_0 \cdot \left(\frac{x^3}{6l} - \frac{x^2}{2}\right) + C_0 \cdot x + C_1 \qquad (5)$$

Verformungen: Aus (2) und (3) folgt $w = \int \frac{V_z}{GA_v} - \varphi_0 \, dx$ (6)

Bereich 1: $$w_1 = \frac{q_0}{2GA_v} \cdot \left(\frac{x^3}{6l} - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{C_0 \cdot x}{2GA_v} - \varphi_{0,1} \cdot x + C_2 \qquad (7)$$

Bereich 2: $$w_2 = \frac{q_0}{GA_v} \cdot \left(\frac{x^3}{6l} - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{C_0 \cdot x}{GA_v} - \varphi_{0,2} \cdot x + C_3 \qquad (8)$$

Rand- / Übergangsbedingungen:

$w_1(0) = 0$	(9)	$\xrightarrow{(7)}$	$C_2 = 0$	(15)
$w_2(l) = 0$	(10)	$\xrightarrow{(8)}$	$C_3 = \varphi_{0,2} \cdot l$	(16)
$M(0) = 0$	(11)	$\xrightarrow{(5)}$	$C_1 = 0$	(17)
$M(l) = 0$	(12)	$\xrightarrow{(5)}$	$C_0 = \frac{q_0 \cdot l}{3}$	(18)
$w_1(l/2) = w_2(l/2)$	(13)	$\xrightarrow{(7),(8)}$	$\varphi_{0,1} + \varphi_{0,2} = -\frac{q_0 \cdot l}{16\,GA_v}$	(19)
$\varphi_{0,1} = \varphi_{0,2}$	(14)	$\xrightarrow{(19)}$	$\varphi_{0,1} = \varphi_{0,2} = -\frac{q_0 \cdot l}{32\,GA_v}$	(20)

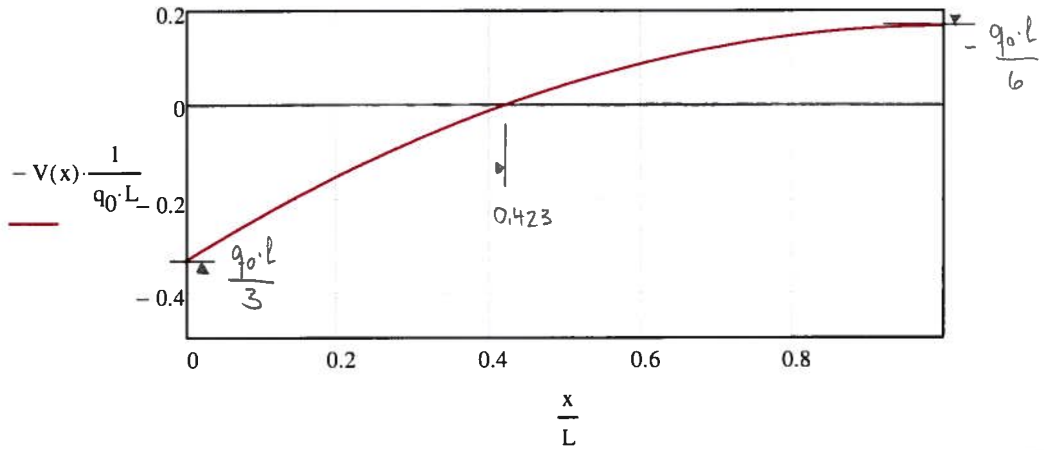
Lösung:

$$V_z(x) = q_0 \cdot \left(\frac{x^2}{2l} - x + \frac{l}{3}\right)$$

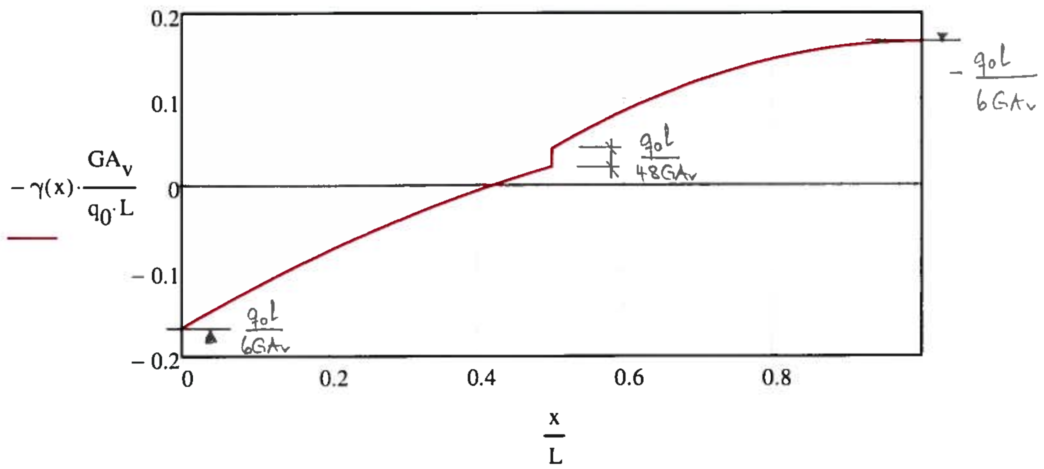
$$w_1(x) = \frac{q_0 \cdot x}{GA_v} \cdot \left(\frac{x^2}{12l} - \frac{x}{4} + \frac{19l}{96}\right) \qquad \gamma_1(x) = \frac{q_0}{GA_v} \cdot \left(\frac{x^2}{4l} - \frac{x}{2} + \frac{l}{6}\right)$$

$$w_2(x) = \frac{q_0 \cdot x}{GA_v} \cdot \left(\frac{x^2}{6l} - \frac{x}{2} + \frac{35l}{96}\right) - \frac{q_0 l^2}{32\,GA_v} \qquad \gamma_2(x) = \frac{q_0}{GA_v} \cdot \left(\frac{x^2}{2l} - x + \frac{l}{3}\right)$$

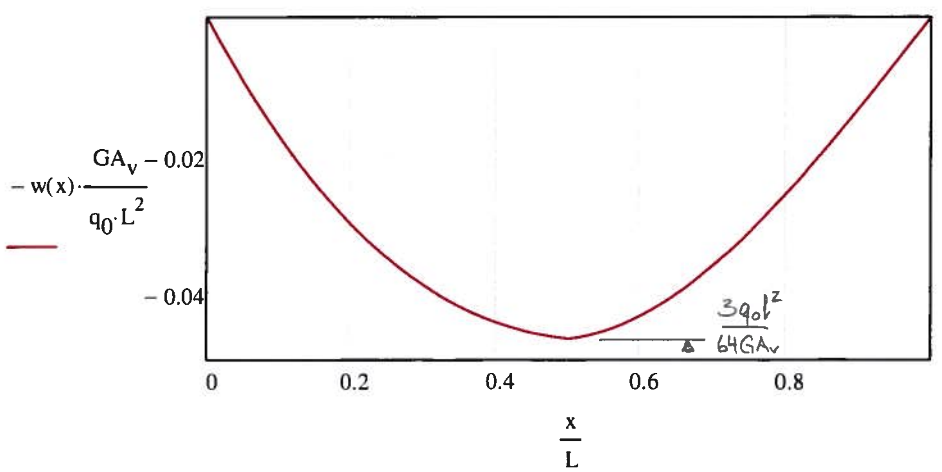
Querkraft:



Schiebung:



Durchbiegung:



- Schnellerer Lösungsweg:

Da das System äusserlich statisch bestimmt ist, sind keine Kenntnisse über die Verformungen erforderlich, um die Schnittgrössen zu bestimmen. Die Querkraftlinie $V_z(x)$ sowie die Momentenlinie $M_y(x)$ folgen direkt aus der Integration der Belastung.

$$V_z(x) = -\int q_z(x)\,dx = q_0 \cdot \left(\frac{x^2}{2l} - x\right) + C_0$$

$$M_y(x) = \int V_z(x)\,dx = q_0 \cdot \left(\frac{x^3}{6l} - \frac{x^2}{2}\right) + C_0 \cdot x + C_1$$

Mit $M(0) = M(L) = 0$ folgen $C_1 = 0$, $C_0 = \frac{q_0 l}{3}$

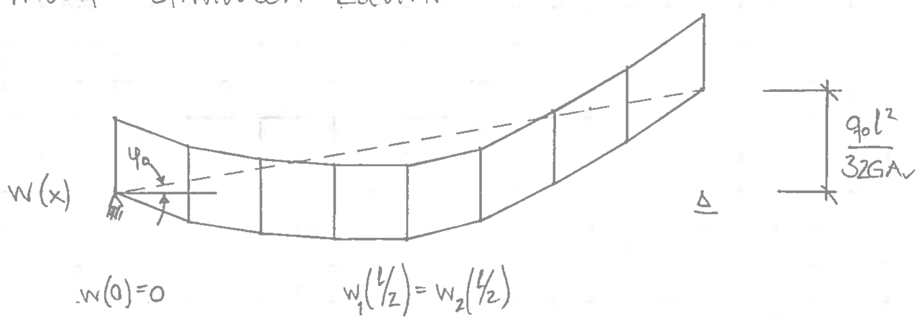
Unter Vernachlässigung der konstanten Verdrehung φ_0 folgt aus der kinematischen Relation $\gamma = \frac{dw}{dx}$ zusammen mit dem Stoffgesetz $GA_v \cdot \gamma = V_z$:

$$\gamma = \frac{V_z}{GA_v} \quad \text{und} \quad w = \int \gamma\,dx$$

$$\gamma = \begin{cases} \frac{q_0}{2GA_v} \cdot \left(\frac{x^2}{2l} - x + \frac{l}{3}\right) & 0 \leq x \leq l/2 \\ \frac{q_0}{GA_v} \cdot \left(\frac{x^2}{2l} - x + \frac{l}{3}\right) & l/2 < x \leq l \end{cases}$$

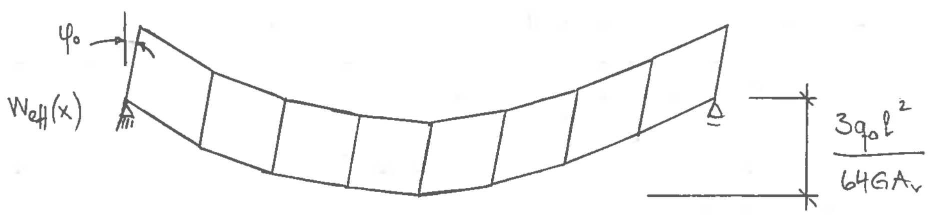
$$w = \begin{cases} \frac{q_0}{2GA_v} \cdot \left(\frac{x^3}{6l} - \frac{x^2}{2} + \frac{lx}{3}\right) + C_2 & 0 \leq x \leq l/2 \\ \frac{q_0}{GA_v} \cdot \left(\frac{x^3}{6l} - \frac{x^2}{2} + \frac{lx}{3}\right) + C_3 & l/2 < x \leq l \end{cases}$$

Mit der Randbedingung $w_1(0) = 0$ können die Durchbiegungen durch einfache Integration der Schiebungen gefunden werden. Die Übergangsbedingung $w_1(l/2) = w_2(l/2)$ stellt sicher, dass beim Übergang kein Versatz der Durchbiegungen auftritt. Die so aufgezeichneten Durchbiegungen $w(x)$ weisen bei $x=l$ einen Wert von $w(l) = -\frac{q_0 l^2}{32 GA_v}$ auf, was physikalisch nicht stimmen kann.



Die Abweichung ergibt sich wegen der Vernachlässigung der – für Schubträger im Allgemeinen konstanten – Verdrehung φ_0. Unter nachträglicher Berücksichtigung von φ_0 in der kinematischen Relation muss $w(x)$ durch den linear wachsenden Term $\varphi_0 \cdot x$ korrigiert werden.

$$w_{eff}(x) = w(x) + \frac{q_0 l}{32 GA_v} \cdot x \qquad \text{wobei} \quad \varphi_0 = -\frac{q_0 l}{32 GA_v}$$



Kommentar:

Der "schnelle Lösungsweg" eignet sich in diesem Fall, weil das System statisch bestimmt ist. Bei äusserlich statisch unbestimmten Systemen ist jedoch ein allgemeinerer Weg einzuschlagen!

Teilaufgabe 2

b) Reduzierte Schubfläche A_v

Stahlprofil: $A_v = 2518\ mm^2$ (C5 - Tabelle)

Vollwandträger: $A_v = \frac{5}{6} A = \frac{5}{6} \cdot 222{,}5 \cdot 445 = 82'510\ mm^2$

I-Profil: $A_v \cong A_w + 2 \cdot t_w \cdot \frac{t_f}{2} = 50 \cdot 245 + 2 \cdot 50 \cdot \frac{100}{2} = 17'250\ mm^2$

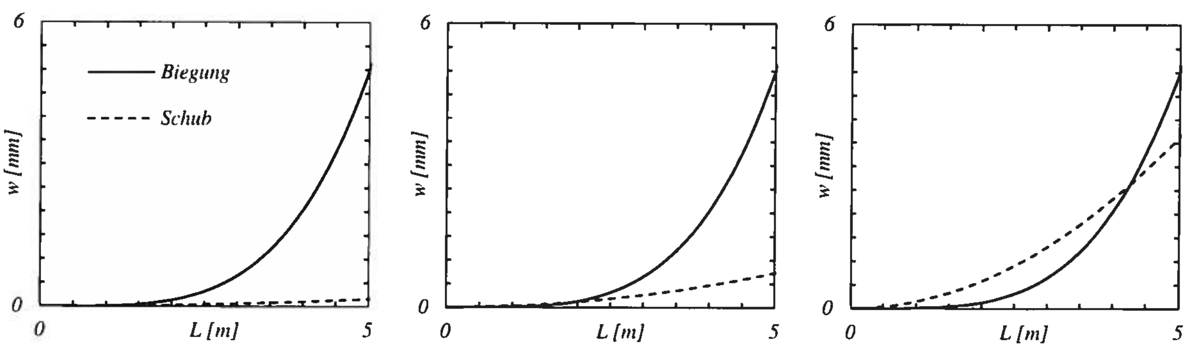
c) Biege- / Schubverformungen

Biegeverformung am einfachen Balken: $w_B = \frac{5 q l^4}{384 EI_y}$

Schubverformung am einfachen Balken: $w_S = \frac{q l^2}{8 G A_v}$

	Stahlprofil	Vollwandträger	I-Profil
EI_y [MNm^2]	16,3	16,3	16,3
GA_v [MN]	203,5	42,8	8,63

Stahlprofil — Vollwandträger — I-Profil



d) - bei kleinem Verhältnis $\frac{G}{E}$ (Material)

- bei kleiner wirksamen Schubfläche A_v (Querschnitt)

- bei kleiner Spannweite L (stat. System)