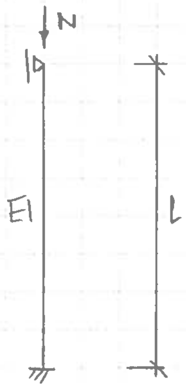
a)



Differentialgleichung:

$$EI_y \cdot w'''' + N \cdot w'' = 0$$

$$\hookrightarrow \quad w'''' + \lambda^2 \cdot w'' = 0 \qquad \text{mit} \quad \lambda^2 = \frac{N}{EI_y}$$

$l = 4\,m, \quad f_y = 235\,N/mm^2, \quad A = 5380\,mm^2$

$I_z = 13{,}4 \cdot 10^6\,mm^4, \quad E = 210\,GPa$

- Ansatz:

$$w(x) = c_1 + c_2 x + \sin(\lambda x + c_3)$$
$$w'(x) = c_2 + \lambda \cos(\lambda x + c_3)$$
$$w''(x) = -\lambda^2 \sin(\lambda x + c_3)$$

- Randbedingungen:

$$w(0) = 0 = c_1 + \sin(c_3) \qquad (1)$$
$$w'(0) = 0 = c_2 + \lambda \cos(c_3) \qquad (2)$$
$$w(l) = 0 = c_1 + c_2 l + \sin(\lambda l + c_3) \qquad (3)$$
$$w''(l) = 0 = -\lambda^2 \sin(\lambda l + c_3) \qquad (4)$$

- Da $\lambda \neq 0$ folgt:

$$(4): \quad \lambda l + c_3 = n \cdot \pi \quad \longrightarrow \quad c_3 = n\pi - \lambda l \qquad (5)$$
$$(3): \quad c_1 = -c_2 \cdot l \qquad (6)$$
$$(1): \quad c_1 = -\sin(c_3) = -\sin(n\pi - \lambda l) \qquad (7)$$
$$(6)+(7): \quad c_2 = -\frac{c_1}{l} = \frac{1}{l} \cdot \sin(n\pi - \lambda l) \qquad (8)$$
$$(2)+(8): \quad \lambda = -\frac{c_2}{\cos(c_3)} = -\frac{1}{l} \cdot \frac{\sin(n\pi - \lambda l)}{\cos(n\pi - \lambda l)} \qquad (9)$$

- Mit $l = 4\,m$ und $n = 1$ folgen

$$\lambda = 1.123 \cdot \frac{1}{m}; \quad c_1 = 0.976; \quad c_2 = -0.244 \cdot \frac{1}{m}; \quad c_3 = -1.352$$

$$\rightarrow \quad w(x) = 0{,}976 - 0{,}244 \cdot \frac{1}{m} \cdot x + \sin\left(1{,}123 \cdot \frac{1}{m} \cdot x - 1{,}352\right)$$

Wendepunkt der Biegelinie bei $w''(x) = 0$

$$\rightarrow \sin(1{,}123 \cdot x_0 - 1{,}352) = 0 \quad \rightarrow \quad x_0 = 1{,}203\,m$$

- Knicklänge l_k: Abstand zwischen Wendepunkten

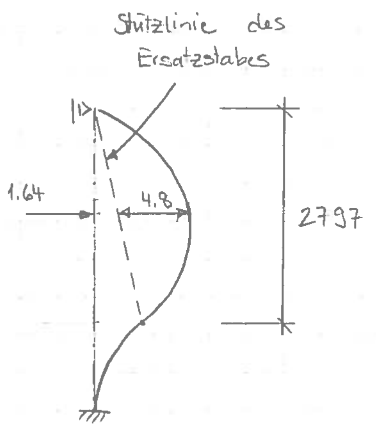
$$l_k = l - x_0 = 4 - 1{,}203 = 2{,}797\,m \;\hat{=}\; 0{,}6992\,l \;\hat{\approx}\; 0{,}7\,l$$

- Eulerknickkraft N_{cr}:

$$N_{cr} = \lambda^2 \cdot EI = \left(1{,}123 \cdot \frac{1}{m}\right)^2 \cdot EI = 3551\,kN$$

$$N.B.: \quad \frac{\pi^2 EI}{l_k^2} = \frac{\pi^2\, EI}{(0{,}6992 \cdot 4^2)} = 3551\,kN$$

b)



$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{13{,}4}{0{,}00538}} = 49{,}9\,mm$$

$$\lambda_E = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{f_y}} = \pi \cdot \sqrt{\frac{210'000}{235}} = 93{,}9$$

$$\lambda_k = \frac{l_k}{i_z} = \frac{2797}{49{,}9} = 56{,}05$$

$$\bar{\lambda}_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_E} = \frac{56{,}05}{93{,}9} = 0{,}597$$

$$\phi_k = \frac{1}{2} \cdot \left(\bar{\lambda}_k^2 + 1 + \frac{w_{0,max}}{k_{el}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\bar{\lambda}_k^2 + 1 + \frac{w_{0,max}}{W_{el,z}} \cdot A\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(0{,}597^2 + 1 + \frac{4{,}8 \cdot 5{,}38}{134}\right) = 0{,}7744$$

$$\chi_k = \frac{1}{\phi_k + \sqrt{\phi_k^2 - \bar{\lambda}_k^2}} = \frac{1}{0{,}7744 + \sqrt{0{,}7744^2 - 0{,}597^2}} = 0{,}789$$

$$N_k = \chi_k \cdot N_{pl} = 0{,}789 \cdot 5380 \cdot 235 = 997\,kN$$

N.B. Wegen der Haltekraft oben steht die Stützlinie des Ersatzstabes nicht vertikal.

- Vergleich mit SZS C4, S. 38, Knicklänge $l_k = 2.8\,m$

$$N_{kz,Rd} = 947\,kN \longrightarrow N_{kz} = 1.05 \cdot N_{kz,Rd} = 994.4\,kN \approx 997\,kN.$$

Der berechnete Wert stimmt mit dem Wert aus der Tabelle überein (Abweichung 0,3%).

c) · Maximale Verformung w_{tot}:

$$w_{tot,max} = \frac{1}{1-\alpha} w_{0,max} = \frac{1}{1-\frac{N_k}{N_{cr}}} \cdot w_{0,max} = \frac{1}{1-\frac{997}{3351}} \cdot 4.8 = 6.67\,mm$$

· Spannungen im höchstbeanspruchten Querschnitt:

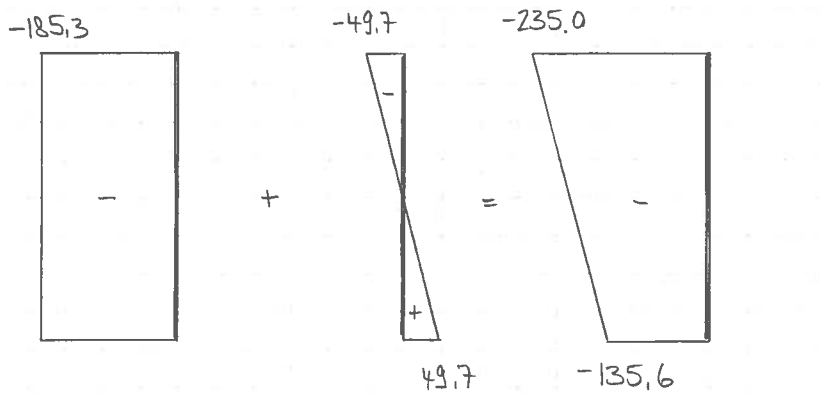
- Spannungen aus Normalkraft:

$$\sigma_N = -\frac{N}{A} = -\frac{997 \cdot 10^3}{5380} = -185.3\ N/mm^2$$

- Spannungen aus Biegung:

$$\sigma_M = \pm \frac{M}{W} = \pm \frac{N_k \cdot w_{tot,max}}{W_{el,z}} = \pm \frac{997 \cdot 6.67}{134} = \pm 49.7\ N/mm^2$$

- totale Spannungen:



$\sigma_N\ [N/mm^2]$ $\quad$ $\sigma_M\ [N/mm^2]$ $\quad$ $\sigma_{tot}\ [N/mm^2]$