

7. Vorspannung

7.1 Allgemeines

Zur Einführung in die Vorspanntechnik wird auf das Buch 'Ingenieur-Betonbau' verwiesen (pp. 58-65).

Übersicht: - Spannbettverfahren

- Kabelspannverfahren - extern

- intern - ohne Verbund

- mit Verbund

Die vorliegende Vorlesung beschränkt sich auf interne Kabelvorspannung mit Verbund. Als Spannstahl werden jeweils siebendrähtige Litzen ϕ 12.9 bzw. 15.7 mm ($f_{pk} = 1860$ bzw. 1770 N/mm²) betrachtet.

Auf folgende Ziffern der Norm SIA 262 wird verwiesen:

3.3 Spannstahl

3.4 Spannsysteme

4.1.5 Vorgespannte Tragwerke

4.2.3 Spannstahl (Bemessungswerte)

4.3.8.1 Ermüdung - Allgemeines

5.3 Vorgespannte Tragwerke (konstruktive Durchbildung)

6.3 Verarbeitung von Spannstahl und Spanngliedern

6.5 Vorspannung

Bei praktischen Anwendungen ist es unerlässlich, sich auf die 'Technische Dokumentation' des jeweils gewählten Spannsystems zu stützen.

Zusätzlich zu den oben aufgeführten Ziffern der Norm SIA 262 wird fallweise auf weitere Bestimmungen dieser Norm verwiesen. Siehe auch die ergänzenden Festlegungen der Norm SIA 262/1.

7.2 Auswirkungen der Vorspannung und Vorspannkonzepte

7.2.1 Einführung

Beim Vorspannen werden durch das Spannen von Spannstahl kontrolliert Kräfte auf ein Tragwerk oder Bauteil aufgebracht.

Zwischen dem Spannstahl und dem vom Spannstahl befreiten Tragwerk wirken Verankerungs-, Umlenk- und Reibungskräfte.

Das Vorspannen erzeugt im Tragwerk einen Eigenspannungszustand und verursacht Tragwerksverformungen.

Bei statisch unbestimmten Systemen entstehen im Allgemeinen Zwangsschnittgrößen aus behinderter Verformung.

Bei Spanngliedern mit Verbund bleibt die Dehnungsdifferenz $\epsilon_p - \epsilon_c$ zwischen Spannstahl (ϵ_p) und Beton (ϵ_c) nach dem Vorspannen konstant.

Durch Reibung im Hüllrohr ändert sich die Spannkraft entlang des Spannglieds; zusätzlich ist bei der Ermittlung des Verlaufs der Spannkraft der vom jeweiligen Spannsystem abhängige Verankerungsschlupf zu berücksichtigen. Durch Kriechen und Schwinden des Betons sowie Relaxation des Spannstahls entstehen zeitabhängige Spannkraftverluste.

Für Näherungsbetrachtungen kann von einer entlang des Spannglieds konstanten Spannkraft P ausgegangen werden. Zeitabhängige Spannkraftverluste können vereinfachend mit einer pauschalen Abminderung berücksichtigt werden, z.B.

$$P(t \rightarrow \infty) = P_\infty \approx 0.85 P_0 \quad (7.1)$$

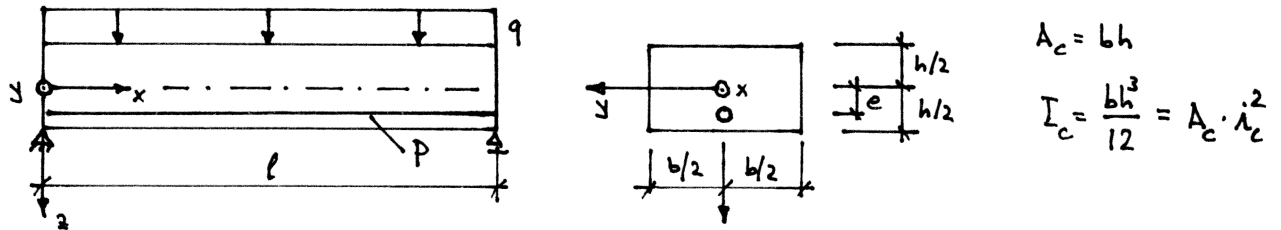
wobei $P_0 = P(t=0) = \text{initiale Spannkraft} \leq 0.7 f_{pk} \cdot A_p$, vgl. SIA 262 Ziffer 4.1.5.2.2.

A_p ... Querschnittsfläche des Spannstahls

f_{pk} ... charakteristischer Wert der Zugfestigkeit des Spannstahls

7.2.2 Statisch bestimmte Systeme

a) Einfacher Balken mit Rechteckquerschnitt, $q = \text{const}$, $P = \text{const}$, $e = \text{const}$

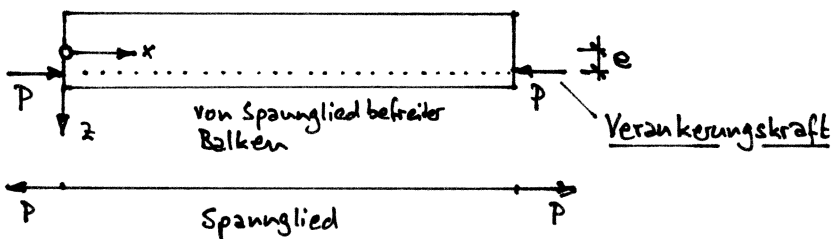


$N_c(P) = -P$

$M_c(P) = -P \cdot e$

$M(q) = q \cdot x \cdot (l-x) / 2$

Die Zugkraft P im Spannstahl und die im Beton wirkenden Schnittgrößen M_c und N_c bilden einen Eigenspannungszustand.



Spannungen im Beton, vereinfachte Betrachtung mit reinen Betonquerschnittswerten:

$$\sigma_c = \frac{N_c(P)}{A_c} + \frac{M_c(P) + M(q)}{I_c} \cdot z \quad (7.2)$$

Im Beispiel folgt

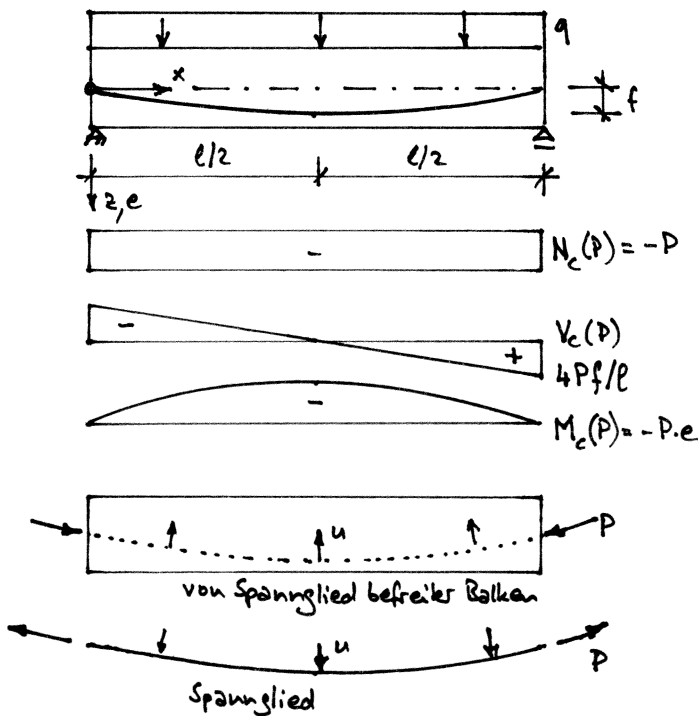
$$\sigma_c = - \frac{P}{A_c} \left(1 + \frac{e \cdot z}{i_c^2} \right) + \frac{q \cdot x \cdot (l-x) \cdot z}{2 I_c}$$

Keine Zugspannungen beim Auflager ($x=0, z=-h/2$) ergeben sich, sofern $e < h/6$ ist, d.h. das Spannglied im Kern des Querschnitts liegt. In Feldmitte ergeben sich keine Zugspannungen ($x=l/2, z=h/2$), sofern $P > \frac{q l^2}{8(e + \frac{h}{6})}$ ist.

Bemerkungen:

- Treten im Beton keine Zugspannungen auf, spricht man von einer vollen Vorspannung.
- Eine volle Vorspannung ist im Allgemeinen unnötig und unwirtschaftlich. Mit der stets vorhandenen schlaffen (Mindest-) Bewehrung (A_s) können die Anforderungen an Tragsicherheit und Gebrauchstauglichkeit (Durchbiegungen, Risse) zusammen mit der vorgespannten Bewehrung (A_p) nach dem Konzept der teilweisen Vorspannung optimal erfüllt werden.
- Die mittlere Vorspannung $-P/A_c$ bewirkt eine mittlere Stauchung $-P/(E_c A_c)$. Wegen der Exzentrizität e von P wird der Balken nach oben verkrümmt; die Durchbiegung in Feldmitte beträgt $w(x=l/2) = -Pe l^2 / (8 E_c I_c)$.
- Schwinden und Kriechen des Betons sowie Relaxation des Spannstahls führen mit der Zeit zu Spannungsabnahmen im Spannstahl und weiteren Verformungen.
- (7.2) bleibt auch für variable q , P und e gültig.

b) Parabolische Kabelführung



Exzentrizität $e = \frac{4fx(l-x)}{l^2}$

Für $f \ll l$ darf die Horizontalkomponente von P näherungsweise gleich P gesetzt werden: $N_c = -P, V_c = -P \cdot \frac{de}{dx}, M_c = -P \cdot e$

Das gekrümmte Spannglied verursacht Umlenkkräfte

$$u \approx -P \cdot \frac{d^2 e}{dx^2} = \frac{8Pf}{l^2} \quad (7.3)$$

Bemerkung: Wird $u=q$ gewählt (d.h. $P = ql^2 / (8f)$), erreicht man einen vollständigen Lastausgleich (load balancing). In jedem Querschnitt ergibt sich ein zentraler Druckspannungszustand $\sigma_c = -P/A_c$, da $M_c(P) = -M(q), V_c(P) = -V(q)$.

BEISPIEL 7.1

$b = 1.75 \text{ m}$	Eigenlast $g_0 = b \cdot h \cdot 25 \text{ kN/m}^3 = 65.625 \text{ kN/m}$	Beton C 30/37... $f_{cd} = 20 \text{ N/mm}^2$ Spannglied G-19 (19 Litzen $\phi 15.7 \text{ mm}$) ... $f_{pd} = 1320 \text{ N/mm}^2$ $\sigma_{p0} = 0.7 \cdot f_{pk} = 1239 \text{ N/mm}^2$ $\sigma_{p\infty} \approx 0.85 \cdot \sigma_{p0} = 1053 \text{ N/mm}^2$
$h = 1.5 \text{ m}$	Auflast $g_1 = b \cdot 0.8 \text{ m} \cdot 20 \text{ kN/m}^2 = 28 \text{ kN/m}$	
$f = 0.6 \text{ m}$	Nutzlast $q = b \cdot 8 \text{ kN/m}^2 = 14 \text{ kN/m}$	
$l = 16 \text{ m}$		

- Tragsicherheitsnachweis (schlechte Bewehrung vernachlässigt):

$$M_d = [\gamma_G (g_0 + g_1) + \gamma_Q q] l^2 / 8 = [1.35 \cdot 93.625 + 1.5 \cdot 14] \cdot 16^2 / 8 = \underline{4717 \text{ kNm}}$$

$$A_p \cdot f_{pd} = 19 \cdot 150 \cdot 1320 = 3762 \text{ kN}$$

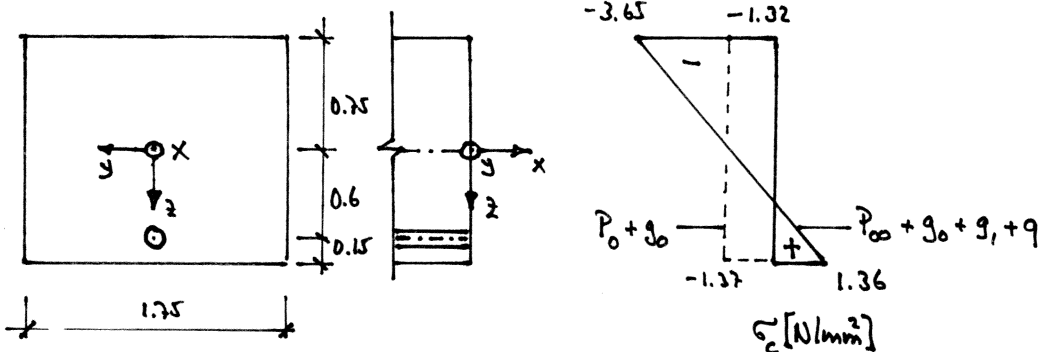
$$A_p \cdot f_{pd} / (b \cdot f_{cd}) = 3762 / (1.75 \cdot 20) = 107.5 \text{ mm}$$

$$M_{Rd} = A_p f_{pd} \left(\frac{h}{2} + f - \frac{A_p f_{pd}}{2 b f_{cd}} \right) = 3762 \cdot \left(\frac{1500}{2} + 600 - \frac{107.5}{2} \right) = \underline{4877 \text{ kNm}} > M_d, \text{ o.k.}$$

- Spannungsnachweise in Feldmitte:

$t = 0: P_0 = 19 \cdot 150 \cdot 1239 = 3531 \text{ kN} = -N_c(P)$	$A_c = b \cdot h = 2.625 \text{ m}^2$ $I_c = \frac{b h^3}{12} = 0.4922 \text{ m}^4$	(7.2): $z = \bar{z} \frac{h}{2}$ $\sigma_{c, \text{sup}} = \underline{-1.32 \text{ N/mm}^2}$ $\sigma_{c, \text{inf}} = \underline{-1.37 \text{ N/mm}^2}$
$M_c(P) = -P \cdot f = -3531 \cdot 0.6 = -2119 \text{ kNm}$		
$M(g_0) = g_0 \cdot l^2 / 8 = 65.625 \cdot 16^2 / 8 = 2100 \text{ kNm}$		

$t \rightarrow \infty: P_\infty = 0.85 \cdot P_0 = 3001 \text{ kN} = -N_c(P)$	(7.2): $\sigma_{c, \text{sup}} = \underline{-3.65 \text{ N/mm}^2}$ $\sigma_{c, \text{inf}} = \underline{1.36 \text{ N/mm}^2}$
$M_c(P) = -P \cdot f = -1801 \text{ kNm}$	
$M(g_0 + g_1 + q) = 107.625 \cdot 16^2 / 8 = 3444 \text{ kNm}$	



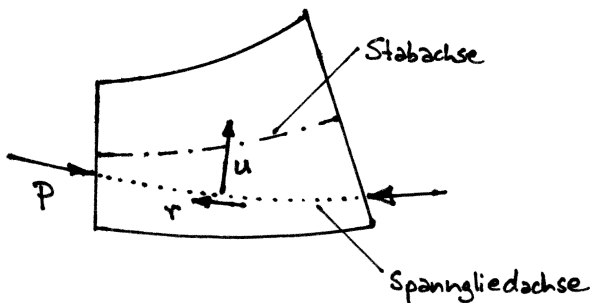
Wegen der geringen Zugspannung $\sigma_{c, \text{inf}}(t \rightarrow \infty)$ müsste streng genommen noch ein Spannungsnachweis an gewissen Querschnitt gemacht werden.

c) Beliebige Systeme

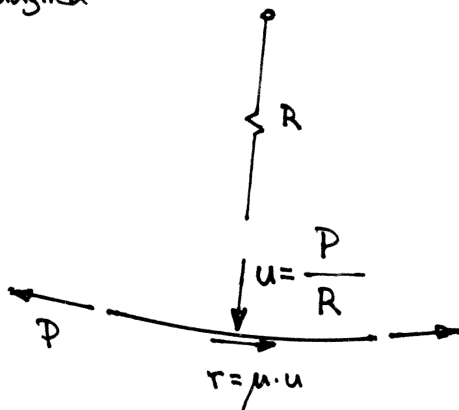
Die für ungerissene Querschnitte gültige Beziehung (7.2) lässt sich auf beliebige Systeme mit gekrümmten Stabachsen, variablen Querschnitten und variablen Spannkraften und Exzentrizitäten anwenden.

In jedem Querschnitt eines von seinen Spannungsgliedern befreiten Trägers wirkt an der Stelle und in der Richtung der resultierenden Spannkraft $P(x)$ eine betragsmässig gleich grosse Druckkraft in entgegengesetzter Richtung; es liegt ein Eigenspannungszustand vor. Zwischen zwei Querschnitten wirken die Umlenkkräfte $u(x) = P(x)/R(x)$ in Richtung des Krümmungsradius $R(x)$ und die dazu senkrechten (zur Achse von P tangentialen) Reibungskräfte $r(x) = \mu \cdot u(x)$ mit $\mu =$ Reibungsbeiwert:

Von Spannungsglied befreites Trägerelement



Spannungsglied



Bemerkungen:

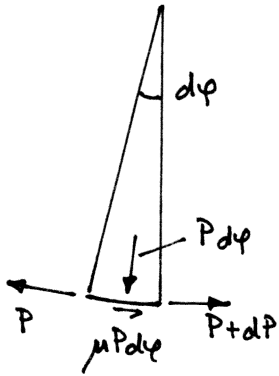
- In der nebenstehenden Figur ist vereinfachend nur ein Spannungsglied dargestellt. Bei mehreren Spannungsgliedern entspricht die 'Spannungsgliedachse' der Lage der resultierenden Spannkraft $P(x)$ in jedem Querschnitt x .
- Der Krümmungsradius R von Mehrlitzenkabeln sollte im Allgemeinen etwa wie folgt beschränkt werden:

$$R_{\min} \geq 125 \cdot \sqrt{A_p} \quad (7.4)$$
- Wegen der Litzenstreuung in den Verankerungen sollte das Kabelprofil unmittelbar bei den Verankerungen über eine Länge von 0.8 bis 1.5m gerade sein (je nach Kabelgrösse).

Achtung: Gefahr des Anreisens innenliegender Kabel!

→ Umlenkkräfte rückverbügelnd!

7.2.3 Reibungsverluste



Gleichgewicht erfordert $\mu P d\varphi + dP = 0$, somit $dP/P = -\mu d\varphi$, d.h. $\ln(P/P_{\max}) = -\mu \cdot \varphi$ oder

$$P = P_{\max} \cdot e^{-\mu \varphi} \quad (7.5)$$

Um außer plannässigen Umlenkungen φ_x bis zur Stelle x auch ungewollte Umlenkungen $\Delta\varphi$ pro

Längeneinheit zu berücksichtigen, wird (7.5) verallgemeinert, siehe SIA 262 (23):

$$P(x) = P_{\max} \cdot e^{-\mu(\varphi_x + \Delta\varphi \cdot x)} \quad (7.6)$$

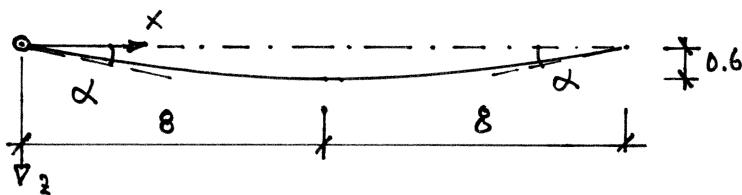
Typische Werte ... $\mu = 0.2$, $\Delta\varphi = 5 \text{ mrad/m}$ für Stahlhüllrohre
 $\mu = 0.14$, $\Delta\varphi = 7 \text{ mrad/m}$ für Kunststoffhüllrohre

BEISPIEL 7.2

Das in Beispiel 7.1 behandelte Spannglied 6-19 wird einseitig auf

$$\sigma_{p,\max} = 0.75 f_{pk} = 0.75 \cdot 1770 = 1327.5 \text{ N/mm}^2 \text{ gespannt, vgl. SIA 262 (20),}$$

d.h. $P_{\max} = A_p \cdot \sigma_{p,\max} = 19 \cdot 150 \cdot 1327.5 = 3783 \text{ kN}$. Ermittle $P(x)$ beim Spannen.



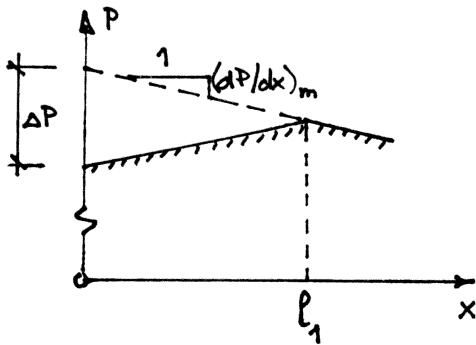
Stahlhüllrohr

$$\tan \alpha = \frac{2 \cdot 0.6}{8} = 0.15 \rightarrow \alpha = 149 \text{ mrad}$$

x	φ_x	P
0	0	3783
8	149	3643
16	298	3508
m	mrad	kN

7.2.4 Verankerungsschlupf

Beim Ablassen des Öldrucks in der Spannpresse verteilen sich die Litzen. Dabei ergibt sich ein Verankerungsschlupf (Klemmeneinzug) von etwa $\Delta = 6 \text{ mm}$. Dies bewirkt eine Umkehr der Relativverschiebungen und damit der Reibung in der Nähe der Spannverankerung:



Einerseits gilt

$$\Delta = l_1 \cdot \frac{\Delta P}{2 E_p A_p}$$

und andererseits

$$e_1 \cdot \left(\frac{dP}{dx}\right)_m = \frac{\Delta P}{2}$$

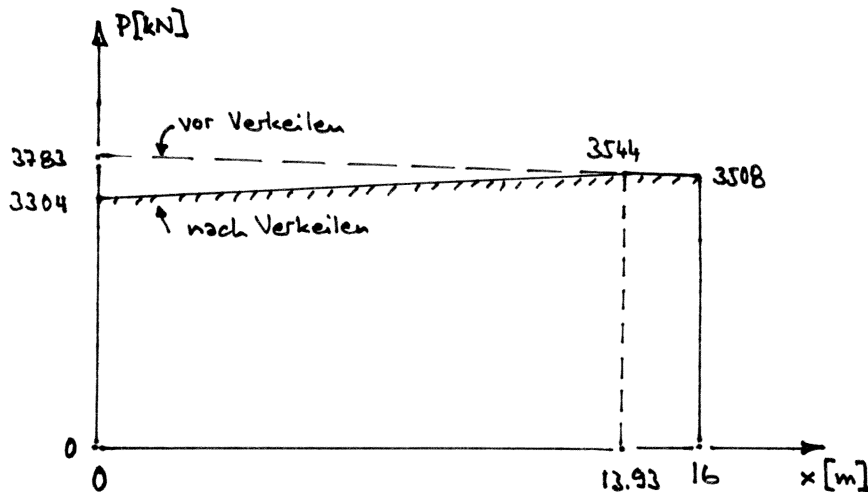
somit

$$l_1 = \sqrt{\frac{\Delta \cdot E_p A_p}{\left(\frac{dP}{dx}\right)_m}} \quad (7.7)$$

BEISPIEL 7.3

Anwendung von (7.7) auf das Beispiel 7.2:

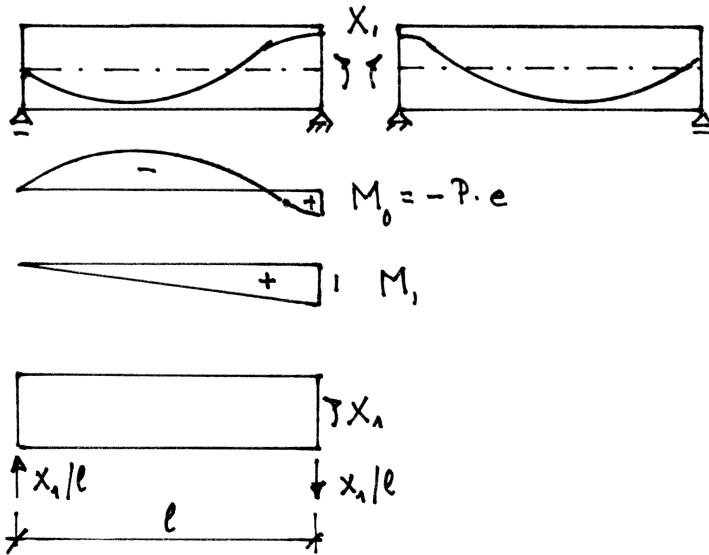
$$\left. \begin{array}{l} \Delta = 6 \text{ mm} \\ E_p = 195 \text{ kN/mm}^2 \\ A_p = 2850 \text{ mm}^2 \\ \left(\frac{dP}{dx}\right)_m \approx (3783 - 3508)/16 = 17.2 \text{ kN/m} \end{array} \right\} l_1 = 13.93 \text{ m}, \Delta P = 479 \text{ kN}$$



Kontrolle $P_{\max} = 3544 \text{ kN} \rightarrow \sigma_p = 3544 / 2850 = 1244 \text{ N/mm}^2 \approx 0.70 f_{pk} = 1239 \text{ N/mm}^2, \text{ o.k.}$

7.2.5 Statisch unbestimmte Systeme

Bei statisch unbestimmten Systemen entstehen wegen der Vorspannung P im Allgemeinen Zwangsschnittgrößen infolge behinderter Verformung:

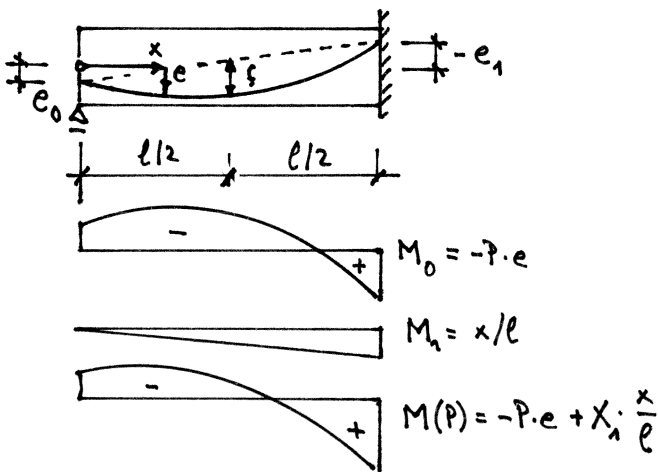


$$\delta_1 = \delta_{10} + X_1 \delta_{11} = 0$$

$$\delta_{10} = \int \frac{M_0}{EI} M_1 dx$$

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1}{EI} M_1 dx$$

a) Einseitig eingespannter Träger mit parabolischem Spannungsglied



Exzentrizität

$$e = e_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right) + e_1 \cdot \frac{x}{l} + \frac{4fx(l-x)}{l^2}$$

$$= e_0 + x \cdot \frac{4f - e_0 + e_1}{l} - x^2 \cdot \frac{4f}{l^2}$$

Annahme $P = \text{const}$, $EI = \text{const}$

$$\delta_{10} = \frac{-P}{EI l^3} \int_0^l [x e_0 l^2 + x^2 l (4f - e_0 + e_1) - x^3 4f] dx$$

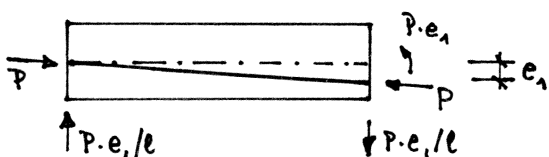
$$= \frac{-Pl}{EI} \left(\frac{e_0}{6} + \frac{e_1}{3} + \frac{f}{3} \right)$$

$$\delta_{11} = \frac{l}{3EI}$$

Somit

$$X_1 = P \cdot \left(\frac{e_0}{2} + e_1 + f \right) \quad (7.8)$$

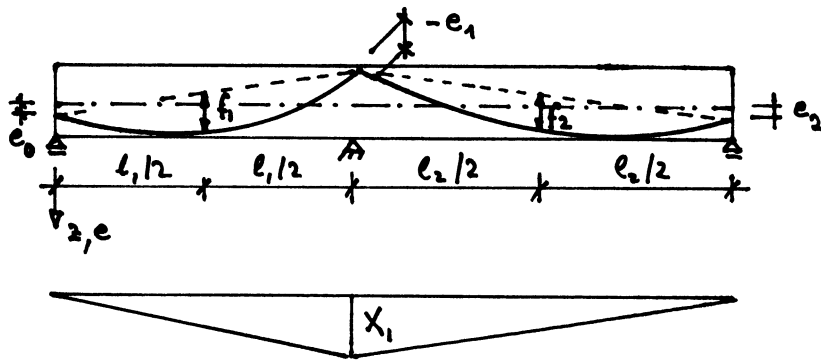
Spezialfall $e_0 = f = 0$:



$$X_1 = P \cdot e_1 \rightarrow M(P) = -P \cdot e_1 \frac{x}{l} + P \cdot e_1 \frac{x}{l} = 0$$

Im Beton entsteht ein zentrischer Druckspannungszustand, unabhängig von e_1 .

b) Durchlaufträger über zwei Felder



Annahme $P = \text{const}$, $EI = \text{const}$

Pfeilhöhen f_1, f_2

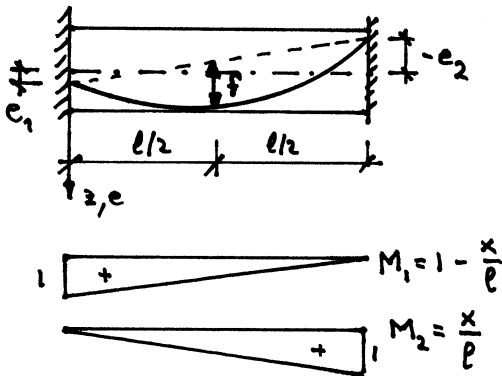
Endexzentrizitäten e_0, e_2

Exzentrizität e_1 über Zwischenauflager (Anrundung mit R_{min} vernachlässigt)

Anwendung der Kraftmethode bringt

$$X_1 = P \cdot \left(e_1 + \frac{l_1 f_1 + l_2 f_2}{l_1 + l_2} + \frac{l_1 e_0 + l_2 e_2}{2(l_1 + l_2)} \right) \quad (7.9)$$

c) Beidseitig eingespannter Träger



Annahme $P = \text{const}$, $EI = \text{const}$

Exzentrizität $e = e_1 + \frac{x}{l} \cdot (4f - e_1 + e_2) - \frac{4fx^2}{l^2}$

$$\delta_{10} = \frac{-Pl}{EI} \left(\frac{e_1}{3} + \frac{e_2}{6} + \frac{f}{3} \right)$$

$$\delta_{20} = \frac{-Pl}{EI} \left(\frac{e_1}{6} + \frac{e_2}{3} + \frac{f}{3} \right)$$

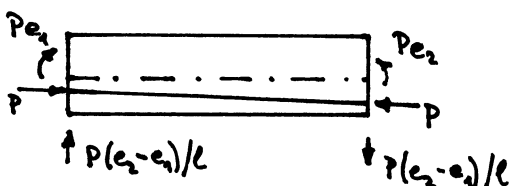
$$\delta_{11} = \delta_{22} = 2 \cdot \delta_{12} = \frac{l}{3EI}$$

Aus den Kompatibilitätsbedingungen $\delta_1 = \delta_{10} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} = 0$, $\delta_2 = \delta_{20} + X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} = 0$

folgt

$$X_1 = P \left(e_1 + \frac{2f}{3} \right), \quad X_2 = P \left(e_2 + \frac{2f}{3} \right) \quad (7.10)$$

Spezialfall $f = 0$:



$$M(P) \equiv 0$$

Im Beton entsteht ein zentraler Druckspannungszustand, unabhängig von e_1 und e_2 !

7.2.6 Vorspannkonzeppte

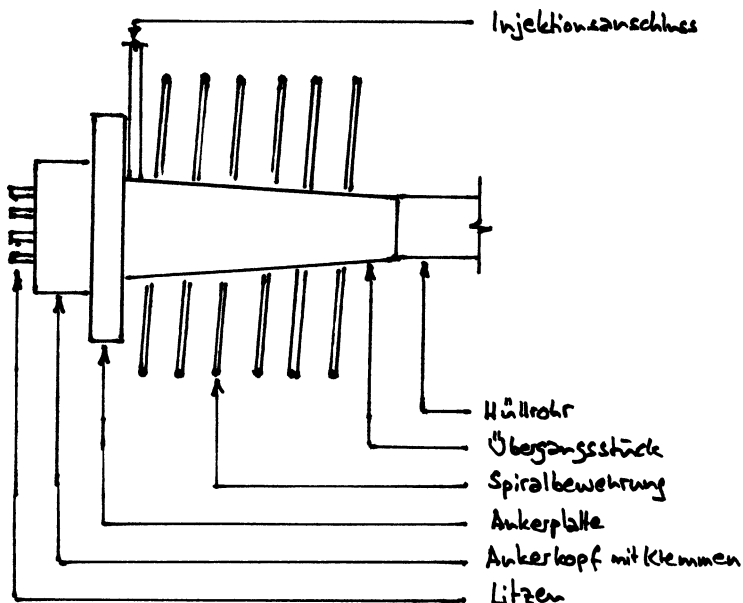
a) Allgemeines

Mit dem Vorspannkonzeppte werden die Kabelgrösse, das Kabelprofil und der Spannvorgang festgelegt.

Dazu sind gute Kenntnisse der einzelnen Komponenten des gewählten Spannsystems erforderlich, siehe jeweilige 'Technische Dokumentation'. Insbesondere ist es wichtig, sich von Anfang der Entwicklung eines Vorspannkonzepptes an Klarheit über die erforderlichen Platzverhältnisse für Verankerungen, Hüllrohre und Spannpressen zu verschaffen.

b) Verankerungen

Grundsätzlich sind spannbare und nicht spannbare Verankerungen zu unterscheiden. Die Hauptkomponenten können gut anhand einer (spannbaren) Plattenverankerung (z.B. VSL Typ E) illustriert werden:



Die Spiralbewehrung sichert die Kraftausbreitung in der Ankerzone und ist Teil des Spannsystems.

Die Aufnahme der Spreizkräfte in der an die Ankerzone anschließenden Kraftausbreitungszone liegt in der Verantwortung der Projektverfassenden.

Durch Zusammenfassen von Ankerplatte und Übergangsstück in einem Gussteil mit integriertem Injektionsanschluss ergeben sich sehr kompakte Verankerungen (z.B. VSL Typ Ec). Bei nebeneinanderliegenden Verankerungen ist deren

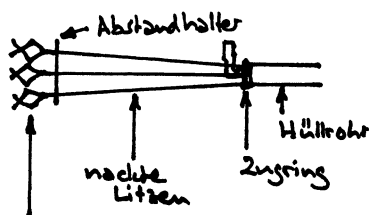
Achsabstand

$$X \approx 8\sqrt{A_p} \quad (7.11)$$

zu beachten. Für den Randabstand ist mindestens $X/2 + c_{nom}$ zu wählen.

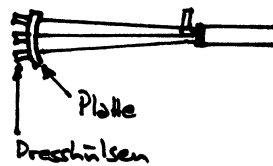
Wirkungsweise nicht spannbarer Verankerungen:

Verbund (z.B. VSL Typ H)

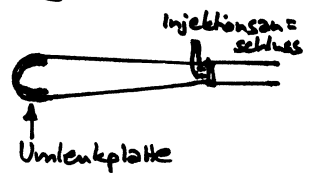


Zwiebelförmige Enden der Litzen (durch Aufstücken)

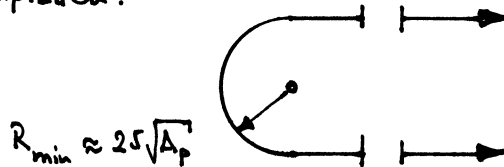
Faltenwirkung (z.B. VSL Typ P)



Umlenkung (z.B. VSL Typ U)



Bei nicht zugänglichen Enden empfiehlt es sich oft, Kabel U-förmig zu führen und an beiden Enden gleichzeitig zu spannen (z.B. VSL Typ L), etwa für Wände oder Bodenplatten:



Zum Ankoppeln von Kabeln an bereits gespannte bzw. noch nicht gespannte Kabel gibt es spezielle Kupplungen (z.B. VSL Typ K bzw. V). Ferner gibt es spezielle Zwischenverankerungen (z.B. VSL Typ Z) zum Spannen von Kabeln in Spannischen bei nicht zugänglichen Enden, etwa bei Durchstößen, Silos oder Fahrbahnplatten

c) Hüllrohre

Für den hauptsächlich verwendeten Typ der gewellten, metallischen Hüllrohre aus Bandstahl (Kategorie a gemäss SIA 262 Ziffer 3.4.2.2) gilt für den Aussendurchmesser

$$\phi_{ext} \approx 2\sqrt{A_p} \quad (7.12)$$

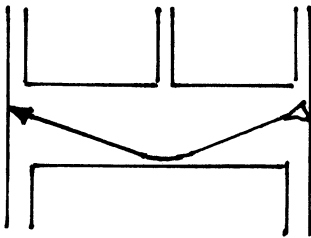
und die Exzentrizität des Schwerpunkts von A_p beträgt etwa

$$e \approx 0.3\sqrt{A_p} \quad (7.13)$$

d) Platten und Balken

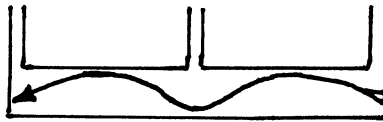
Das Kabelprofil wird etwa affin zur Momentenlinie gewählt. Die Spannkraft P wird meist etwa so festgelegt, dass der Beton unter ständigen Einwirkungen nicht dekomprimiert.

Abfangträger



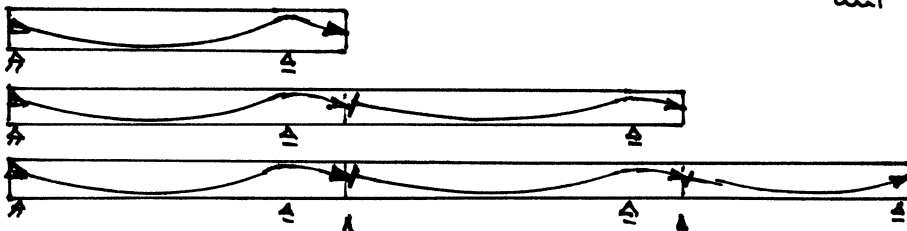
→ spannbar
 ◁ nicht spannbar

Bodenplatte (überhöht)



- alternierend von beiden Seiten spannen, um möglichst gleichmäßige Verteilung von P zu erhalten
- Kabel sukzessive nach Baufortschritt spannen (Kompensation der Stützenlasten durch Umlenkkräfte?)
- Evtl. Zwischenverankerungen verwenden bzw. Kabel aus Spannschienen spannen.

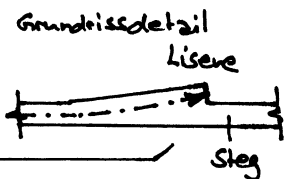
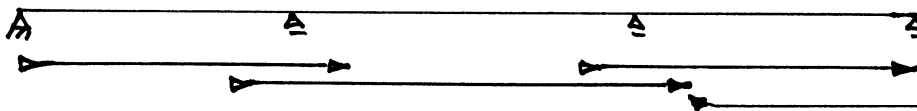
e) Durchlaufträger



Spannweitenweise Herstellung z.B. mit Vorschubrüstung

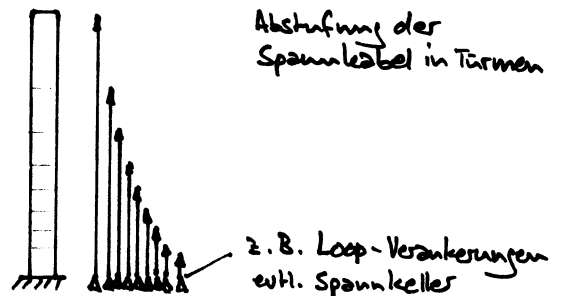
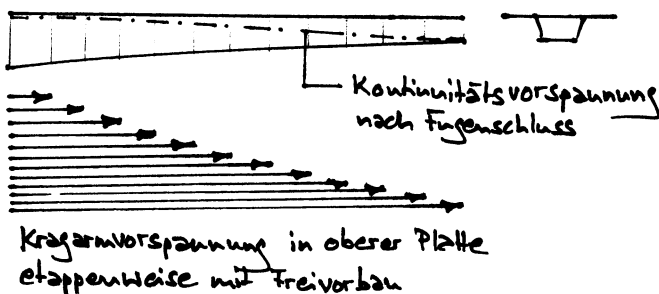
Kupplungen an Arbeitsfugen ca. im Fünftelspannenpunkt

Evtl. Überlappung von Kabeln im Zwischenstützenbereich:



Evtl. Kabel bei Lisenen von beiden Seiten spannbar → beliebige Kombinationen!

f) Freivorbausträger und Wände bzw. Türme

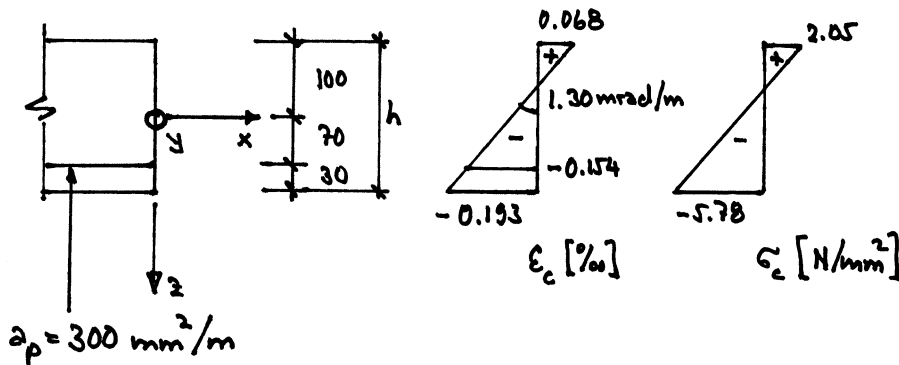


7.3 Biegetragverhalten

7.3.1 Momenten - Krümmungsdiagramm eines Plattenquerschnitts

Eine 200 mm dicke Platte wird mit Litzen $\phi 15.7$ mm im Abstand von 500 mm vorgespannt. Die auf die Mittelebene der Platte bezogene Exzentrizität der Litzen beträgt 70 mm. Die Litzen werden auf $\sigma_{p0} = 0.7 f_{pk} = 1239 \text{ N/mm}^2$ vorgespannt. Beton und Spannstahl werden als linear elastisch mit $E_c = 30 \text{ kN/mm}^2$ bzw. $E_p = 200 \text{ kN/mm}^2$ vorausgesetzt. Langzeitverluste werden nicht betrachtet.

a) Vorspannen



Die Vorspannkraft $P_0 = a_p \cdot \sigma_{p0} = 300 \cdot 1239 = \underline{371.7 \text{ kN/m}}$ wirkt auf den Nettoquerschnitt mit: $a_n = 200\,000 - 300 = \underline{199\,700 \text{ mm}^2/\text{m}}$

$$\text{Schwerpunktlage } z_n = -70 \cdot 300 / 199\,700 = -0.1 \text{ mm} \rightarrow e_{pn} = \underline{70.1 \text{ mm}}$$

$$i_n = 200^3 \cdot 1000 / 12 + 0.1^2 \cdot 200\,000 - 70^2 \cdot 300 = \underline{665 \cdot 2 \cdot 10^6 \text{ mm}^4/\text{m}}$$

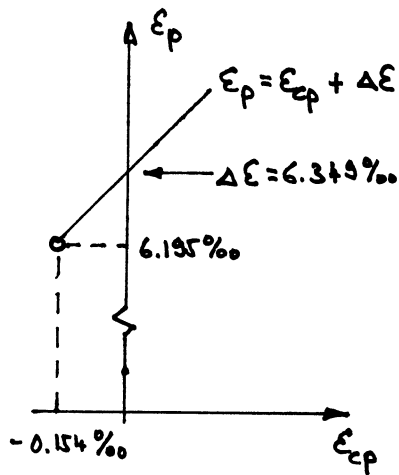
Somit Randspannungen

$$z_{n,\text{sup}} = -99.9 \text{ mm}: \sigma_{c,\text{sup}}^0 = \frac{-P_0}{a_n} - \frac{P_0 \cdot e_{pn} \cdot z_{n,\text{sup}}}{i_n} = \underline{2.05 \text{ N/mm}^2} \dots \epsilon_{c,\text{sup}} = 0.068 \text{ ‰}$$

$$z_{n,\text{inf}} = 100.1 \text{ mm}: \sigma_{c,\text{inf}}^0 = \frac{-P_0}{a_n} - \frac{P_0 \cdot e_{pn} \cdot z_{n,\text{inf}}}{i_n} = \underline{-5.78 \text{ N/mm}^2} \dots \epsilon_{c,\text{inf}} = -0.193 \text{ ‰}$$

Auf der Höhe der Litzen resultiert eine Betondehnung $\epsilon_{cp0} = \underline{-0.154 \text{ ‰}}$ und die Krümmung ergibt sich zu $\chi_0 = (\epsilon_{c,\text{inf}} - \epsilon_{c,\text{sup}}) / h = \underline{-1.30 \text{ mrad/m}}$.

Die Litzen sind auf $\epsilon_{p0} = \sigma_{p0} / E_p = \underline{6.195 \text{ ‰}}$ gedehnt.



Nach dem Vorspannen bleibt die Dehnungs-
differenz

$$\Delta \varepsilon = \varepsilon_p - \varepsilon_{cp} \quad (7.14)$$

konstant, da starrer Verbund vorausgesetzt
wird.

b) Ungeissen elastisches Verhalten

Im ungeissen elastischen Zustand gelten ideelle Querschnittswerte:

$$z_i = 200\,000 + \left(\frac{200}{30} - 1\right) \cdot 300 = \underline{201\,700 \text{ mm}^2/\text{m}}$$

$$\text{Schwerpunktlage } z_i = 70 \cdot \left(\frac{200}{30} - 1\right) \cdot 300 / 201\,700 = 0.6 \text{ mm}$$

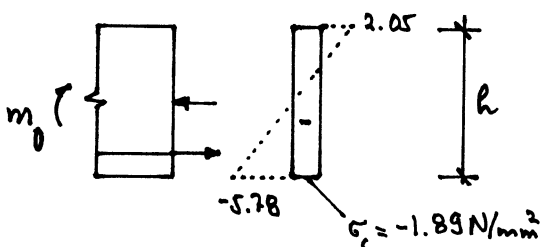
$$i_i^2 = 200^3 \cdot 1000 / 12 + 0.6^2 \cdot 200\,000 + (69.4)^2 \cdot \left(\frac{200}{30} - 1\right) \cdot 300 = \underline{674.9 \cdot 10^6 \text{ mm}^4/\text{m}}$$

Die Spannungen im Beton und im Spannstahl infolge eines Moments m [kNm/m]
folgen aus

$$\Delta \sigma_c = \frac{m \cdot z_i}{i_i} \quad , \quad \Delta \sigma_p = \frac{m \cdot 69.4 \text{ mm } E_p}{i_i \cdot E_c}$$

Im folgenden werden die drei Fälle $\chi = 0$ (zentrische Vorspannung),
 $\sigma_{c, \text{inf}} = 0$ (Dekompression) und $\sigma_{c, \text{inf}} = f_{ct}$ (Reissen des Betons) betrachtet.

1. Zentrische Vorspannung

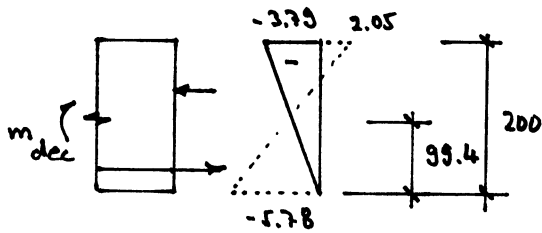


$$m_0 = \frac{(\sigma_{c, \text{sup}}^0 - \sigma_{c, \text{inf}}^0) i_i}{h} = \underline{26.4 \text{ kNm/m}}$$

$$\text{Somit } \Delta \sigma_p = \frac{26.4 \cdot 69.4 \cdot 200}{674.9 \cdot 10^6 \cdot 30} = 18.1 \text{ N/mm}^2 \rightarrow P = (\sigma_{p0} + \Delta \sigma_p) \cdot a_p = \underline{377.1 \text{ kN/m}}$$

$$\sigma_c = 2.05 - \frac{26.4 \cdot 100.6}{674.9 \cdot 10^6} = -5.78 + \frac{26.4 \cdot 99.4}{674.9 \cdot 10^6} = \underline{-1.89 \text{ N/mm}^2}$$

2. Dekompression



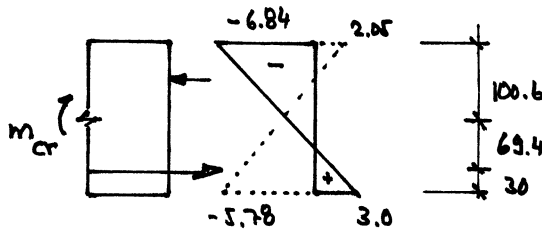
$$m_{dec} = \frac{-\sigma_{c,inf}^0 \cdot I_i}{z_{i,inf}} = \frac{5.78 \cdot 674.9}{99.4} = \underline{39.2 \text{ kNm/m}}$$

$$\Delta \sigma_p = \frac{39.2 \cdot 69.4 \cdot 200}{674.9 \cdot 30} = \underline{26.9 \text{ N/mm}^2} \rightarrow P = (\sigma_{p0} + \Delta \sigma_p) a_p = \underline{379.8 \text{ kN/m}}$$

$$\sigma_{c,sup} = 2.05 - \frac{39.2 \cdot 100.6}{674.9} = \underline{-3.79 \text{ N/mm}^2}$$

$$\chi_{dec} = \frac{3.79}{30 \cdot 200} = \underline{0.63 \text{ mrad/m}}$$

3. Reißen des Betons (Annahme $f_{ct} = 3 \text{ N/mm}^2$)



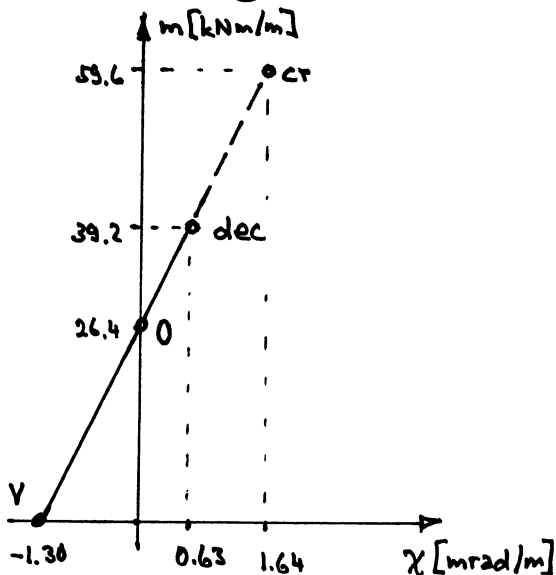
$$m_{cr} = \frac{(-\sigma_{c,inf}^0 + f_{ct}) I_i}{z_{i,inf}} = \frac{8.78 \cdot 674.9}{99.4} = \underline{59.6 \text{ kNm/m}}$$

$$\Delta \sigma_p = \frac{59.6 \cdot 69.4 \cdot 200}{674.9 \cdot 30} = \underline{40.9 \text{ N/mm}^2} \rightarrow P = (\sigma_{p0} + \Delta \sigma_p) a_p = \underline{384.0 \text{ kN/m}}$$

$$\sigma_{c,sup} = 2.05 - \frac{59.6 \cdot 100.6}{674.9} = \underline{-6.84 \text{ N/mm}^2}$$

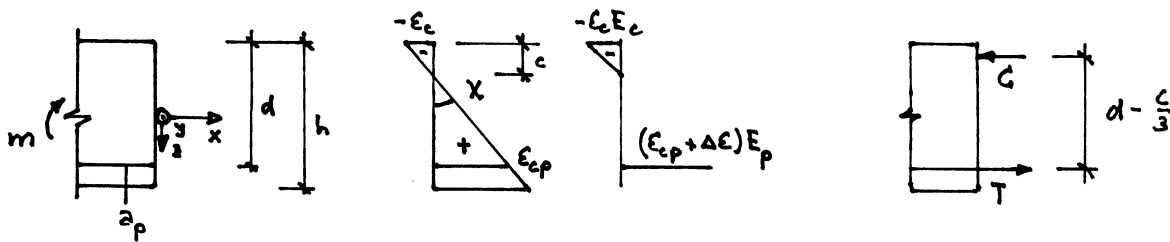
$$\chi_{cr} = \frac{6.84 + 3.0}{30 \cdot 200} = \underline{1.64 \text{ mrad/m}}$$

4. Zusammenfassung:



Vom Vorspannen (v) bis zum Reißen (cr) nimmt P nur wenig zu, nämlich von $P_0 = 371.7 \text{ kN/m}$ auf $P = 384.0 \text{ kN/m}$. Dafür nimmt der Hebelarm der inneren Kräfte von 0 auf 155 mm zu.

c) Gerissen elastisches Verhalten



- Kräftegleichgewicht in x-Richtung erfordert

$$E_p a_p [(d-c)x + \Delta\epsilon] = \chi c E_c \cdot \frac{c}{2}$$

und somit

$$\chi = \frac{\Delta\epsilon E_p a_p}{E_c \cdot \frac{c^2}{2} - (d-c) E_p a_p} \quad (7.15)$$

Weiter gilt

$$\epsilon_c = -c \cdot \chi, \quad \epsilon_{cp} = (d-c) \cdot \chi, \quad T = C = \frac{-c E_c \epsilon_c}{2}, \quad m = T \left(d - \frac{c}{3}\right) \quad (7.16)$$

→ Ann. c: Ausgehend von angenommenen Werten folgt damit das m - χ -Diagramm mit Hilfe einer Tabellenrechnung:

c	χ	$-\epsilon_c$	ϵ_{cp}	T	$d - \frac{c}{3}$	m
200	0.63	0.127	-0.019	379.8	102.3	39.2
170	0.88	0.149	0	380.9	112.3	43.2
150	1.13	0.170	0.023	382.3	120	45.9
120	1.79	0.215	0.089	386.3	130	50.2
90	2.26	0.294	0.261	396.6	140	55.5
60	8.04	0.482	0.884	434.0	150	65.1
50	12.57	0.625	1.509	471.5	153.3	72.3
mm	mm/dm	%	%	kN/m	mm	kNm/m

→ Dekompression

→ ≈ Fließbeginn,

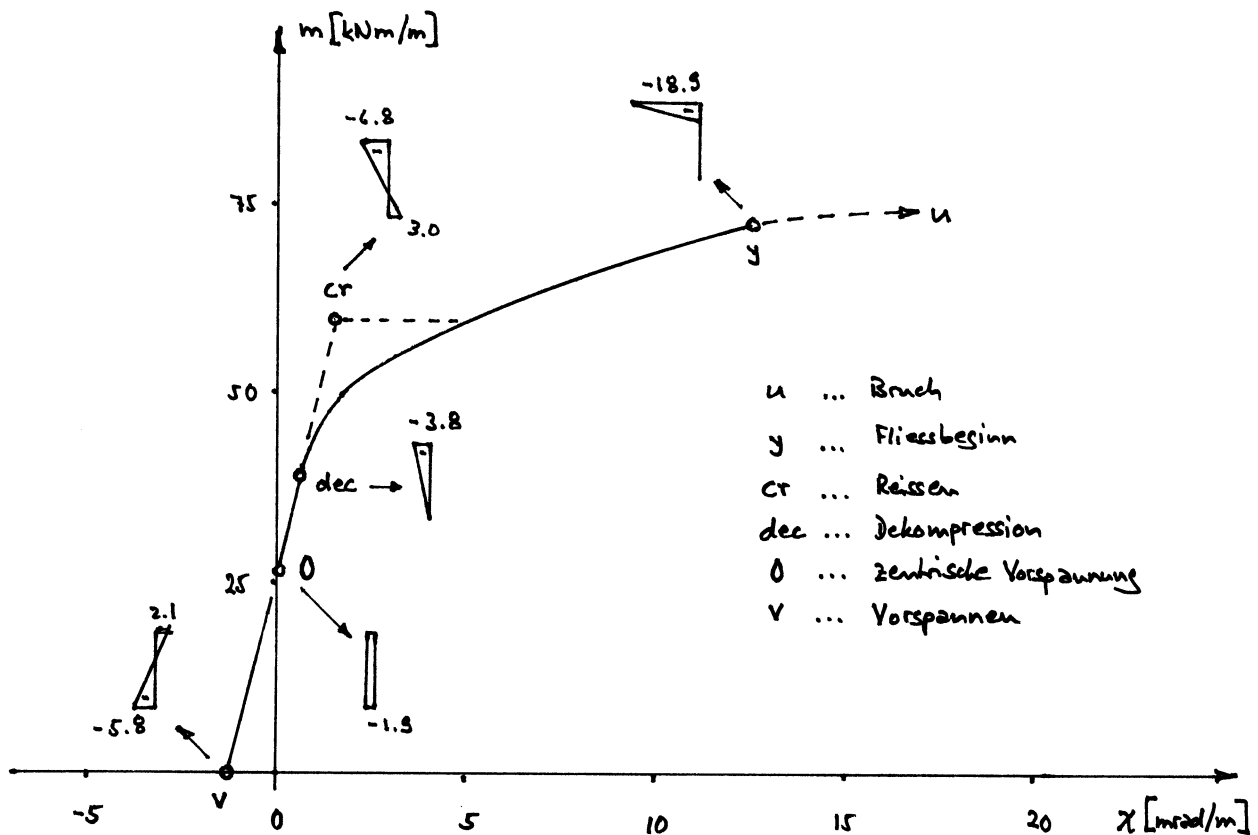
$$a_p \cdot f_{py} \approx 300 \text{ mm}^2/\text{m} \cdot 1570 \text{ N/mm}^2 = 471 \text{ kN/m}$$

Trotz des vorausgesetzten linearen Spannungs-Dehnungsverhaltens von Beton und Spannstahl resultiert für den gerissenen Bereich ein nicht lineares m - χ -Diagramm. Das Verhalten bleibt jedoch elastisch, d.h. bei einer Entlastung kehrt der Bildpunkt entlang der gebümmten Linie zum Dekompressionspunkt zurück.

d) Plastisches Verhalten

Auch nach dem Fließbeginn des Spannstahls kann das $m-\chi$ -Diagramm punktweise ermittelt werden. Dazu ist das nichtlineare $\sigma_p-\epsilon_p$ -Diagramm (SIA 262 Fig. 6) sowie das nicht lineare $\sigma_c-\epsilon_c$ -Diagramm (SIA 262 Fig. 11) zu benutzen. Hier wird das nicht weiter ausgeführt (Abschnitt $y-u$ im untenstehenden Diagramm).

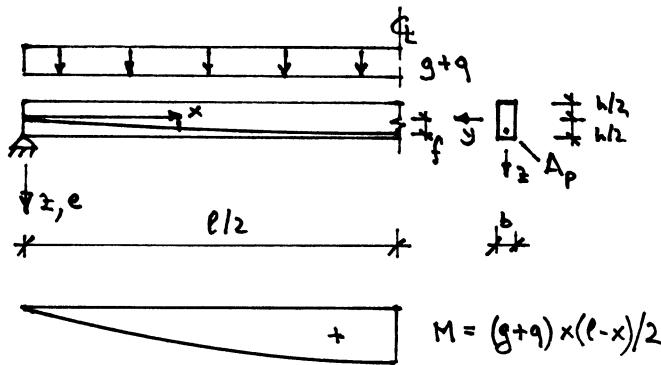
e) Zusammenfassung



Zwischen den Punkten cr und y ergäbe sich ähnlich wie bei Stahlbetonbauteilen ein Zugversteifungseffekt. Dieser ist jedoch wegen der relativ hohen Risslast bei Spannbetonbauteilen eher von untergeordneter Bedeutung.

Mit handelsüblichen Querschnittsprogrammen können Spannungszustände für beliebige Querschnittsgeometrien, Bewehrungen und Beanspruchungen leicht durchgeführt werden. Damit können auch Momenten-Krümmungsdiagramme ermittelt werden.

7.3.2 Einfacher Balken mit Rechteckquerschnitt unter gleichförmig verteilter Belastung



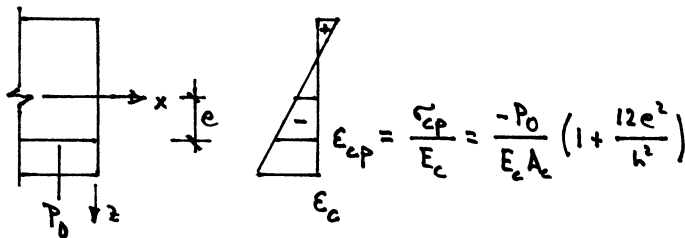
Parabolisch geführtes Spannungsglied

$$e = 4fx(l-x)/l^2$$

$$A_c = bh, I_c = bh^3/12$$

Schlaffe Bewehrung vernachlässigt.

a) Vorspannen auf P_0



Annahme $P_0(x) = P_0 = \text{const}$

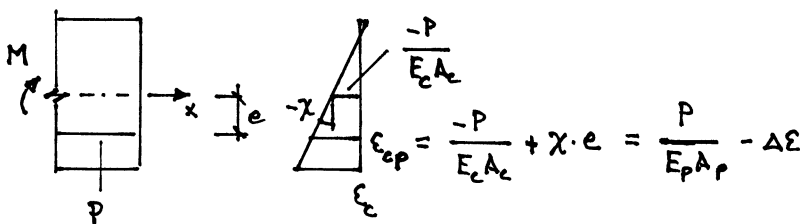
(Reibungsverluste und Kabelneigung vernachlässigt)

$$\rho_p = \frac{A_p}{A_c}, \quad n_p = \frac{E_p}{E_c}$$

Unter Verwendung von (7.2) folgt zunächst ϵ_{cp} , und mit $\epsilon_p = P_0 / (E_p A_p)$ folgt aus (7.14)

$$\Delta \epsilon = \frac{P_0}{E_p A_p} \left[1 + \rho_p n_p \left(1 + \frac{12e^2}{h^2} \right) \right] \quad (7.17)$$

b) Verhalten im komprimierten Zustand



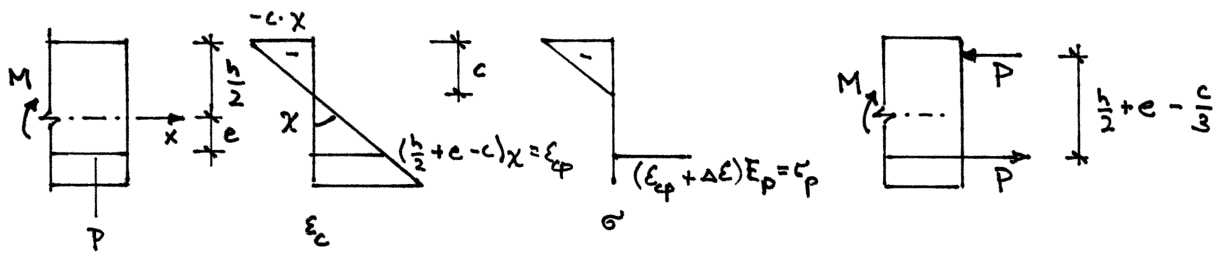
Mit $\chi = (M - P \cdot e) / (E_c I_c)$ folgt unter Berücksichtigung von (7.17)

$$P = P_0 + \frac{M}{e \left[1 + \frac{(1 + \rho_p n_p) h^2}{12e^2 \rho_p n_p} \right]} \quad (7.18)$$

Für das Dekompressionsmoment $M_{dec} = P \left(e + \frac{h}{6} \right)$ resultiert

$$M_{dec} = \frac{P_0 \left(e + \frac{h}{6} \right) \left[h^2 + \rho_p n_p (h^2 + 12e^2) \right]}{h^2 + \rho_p n_p (h^2 - 2eh)} \quad (7.19)$$

c) Verhalten im dekomprimierten Zustand



Für die Biegezug- und -druckkräfte gilt unter Berücksichtigung von (7.17)

$$\frac{bc^2 \chi E_c}{2} = P = P_0 \left[1 + \rho_p n_p \left(1 + \frac{12e^2}{h^2} \right) \right] + \left(\frac{h}{2} + e - c \right) \chi E_p A_p \quad (7.20)_{1,2}$$

und somit

$$\chi = \frac{P_0 \left[1 + \rho_p n_p \left(1 + \frac{12e^2}{h^2} \right) \right]}{\frac{bc^2 E_c}{2} - E_p A_p \left(\frac{h}{2} + e - c \right)} \quad (7.20)_3$$

und M folgt aus

$$M = P \left(\frac{h}{2} + e - \frac{c}{3} \right) \quad (7.21)$$

Für einen gegebenen Querschnitt x mit gegebenen Lasten g+q können die obigen Gleichungen durch Annahme von c und sukzessive Verbesserung iterativ gelöst werden:

- Annahme c
- Berechnung von χ und P mit (7.20)₃ bzw. (7.20)₁
- Berechnung von M mit (7.21)
- Vergleich mit $M = (g+q)x(e-x)/2$
- Wiederholung mit angepasstem c

BEISPIEL 7.4

g+q = 16 kN/m							
x	0	2	4	6	8	10	m
c	1000	1000	917	764	486	663	mm
χ	0	.104	.185	.271	.340	.366	1/mrad
w	0	4.3	8.2	11.3	13.4	14.1	mm
P	1115	1122	1137	1156	1172	1178	kN
g+q = 25 kN/m							
x	0	2	4	6	8	10	m
c	1000	736	355	286	271	268	mm
χ	0	.285	1.360	2.364	2.816	2.943	1/mrad
w	0	33.1	64.8	91.1	108.1	114.0	mm
P	1115	1129	1255	1418	1572	1542	kN

l = 20 m

b = 0.4 m } g = 0.4 · 25 = 10 kN/m
h = 1.0 m }

A_p = 7 · 150 = 1050 mm², f = 400 mm

P₀ = 0.6 · 1770 · 1050 = 1115 kN

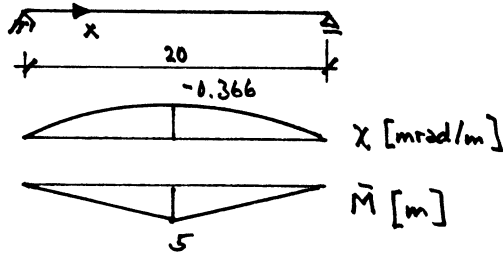
E_p = 195 kN/mm²

f_{cm} = 49 N/mm² (f_{ck} = 41 N/mm²)

E_c = 10 · √49 = 36.6 kN/mm²

N.B. Durchbiegungen w aus doppelter Integration der Krümmungen χ (MOHRsche Analogie).

- Vorspannen:



(7.18) mit $M=0$ liefert $P = P_0 = \text{const} = 1115 \text{ kN}$

Somit für $x=10\text{m}$: $\chi_m = \frac{-1115 \text{ kN} \cdot 0.4 \text{ m}}{36.6 \frac{\text{GN}}{\text{m}^2} \cdot \frac{0.4 \text{ m}^4}{12}} = -0.366 \text{ mrad/m}$

und $w_m = \frac{5}{12} \cdot 20 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} \cdot (-0.366 \text{ mrad/m}) = -15.2 \text{ mm}$

- Dekompression in Feldmitte:

(7.19) mit $P_0 = 1115 \text{ kN}$, $e = 0.4 \text{ m}$, $h = 1 \text{ m}$, $\rho_p \cdot n_p = \frac{1050 \cdot 195}{400000 \cdot 36.6} = 0.014$ liefert $M_{\text{dec}} = 656 \text{ kNm}$

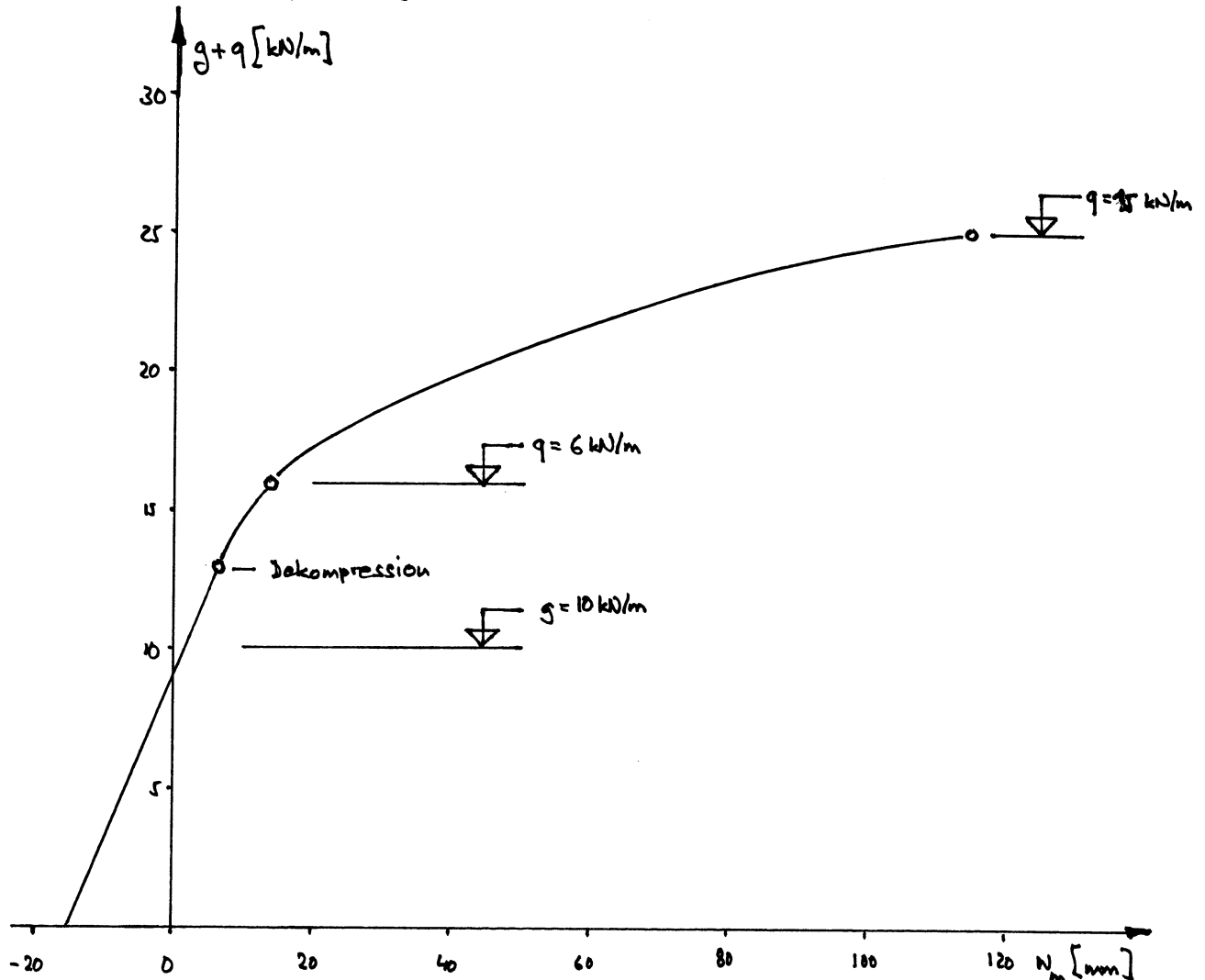
d.h. $(g + q_{\text{dec}}) \cdot l^2 / 8 = M_{\text{dec}} \rightarrow q_{\text{dec}} = 3.1 \text{ kN/m}$

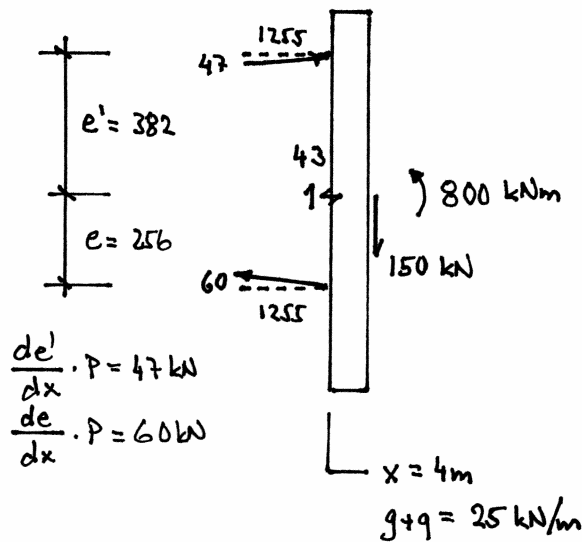
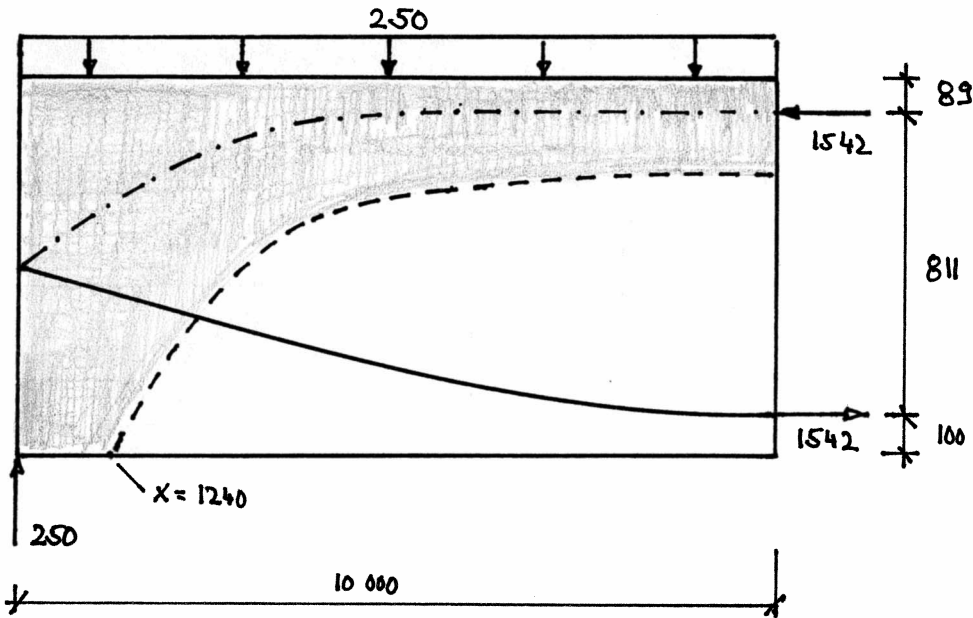
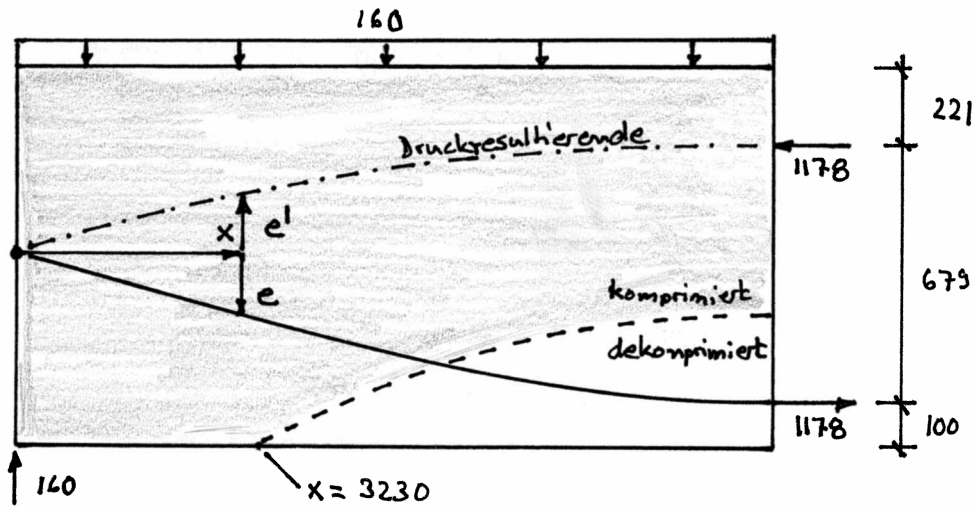
Aus (7.18) erhält man $P(x=10\text{m}) = P_m = 1157 \text{ kN} \rightarrow \chi_m = \frac{656 - 1157 \cdot 0.4}{36.6 \cdot \frac{0.4}{12}} = 0.158 \text{ mrad/m}$

Zwischen $x=0$ und $x=10\text{m}$ variiert P von $P_0 = 1115 \text{ kN}$ bis $P_m = 1157 \text{ kN}$.

Verwacht man diese Variation, erhält man $w_m \approx \frac{5}{12} \cdot 20 \cdot 5 \cdot 0.158 = 6.6 \text{ mm}$

- Last - Mittendurchbiegungsdiagramm:





$$\frac{de'}{dx} \cdot P = 47 \text{ kN}$$

$$\frac{de}{dx} \cdot P = 60 \text{ kN}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 \text{ m} \dots P = 1125 \text{ kN} \\ x = 6 \text{ m} \dots P = 1418 \text{ kN} \end{array} \right\} \frac{1418 - 1125}{4} \cdot (256 + 382)$$

$$= 46 \text{ kN} \approx 43 \text{ kN}, \text{ o.k.}$$

N.B.: ein wesentlicher Teil der Querkraft wird durch die geneigten Druck- bzw. Zugkräfte abgetragen:

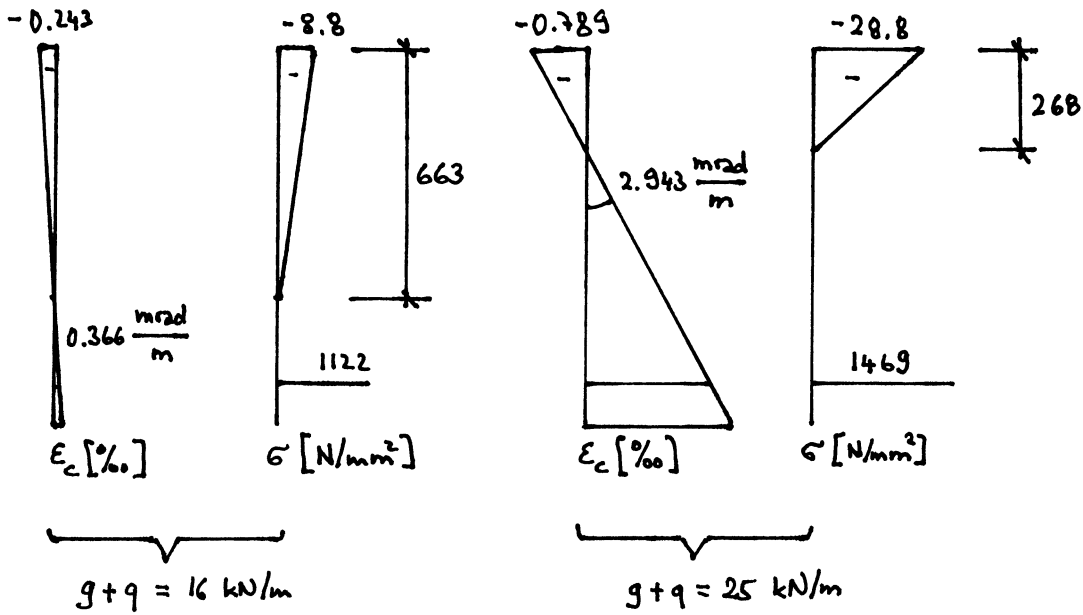
$$M = P \cdot (e + e')$$

$$V = \frac{dM}{dx} = \underbrace{\frac{dP}{dx} (e + e')}_{\text{Anteil Schubfeld zwischen Gurtkräften}} + \underbrace{P \cdot \left(\frac{de}{dx} + \frac{de'}{dx} \right)}_{\text{Anteil geneigte Gurtkräfte}}$$

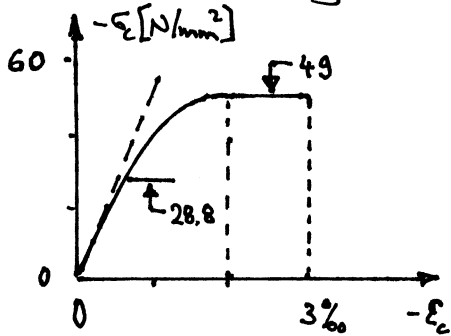
Im Beispiel... 43 kN

60 kN + 47 kN

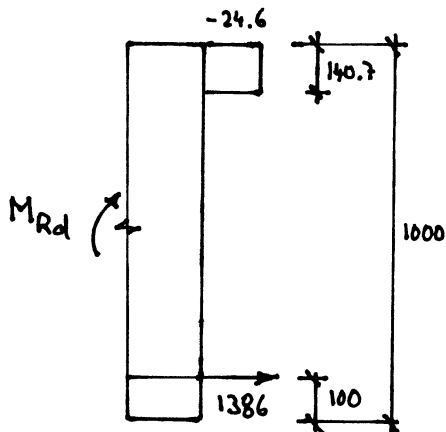
- Spannungsverteilung bei $x = 10\text{ m}$:



Die angenommene lineare Spannungsverteilung ist noch vertretbar, wenn man das nichtlineare Spannungs-Dehnungsverhalten des Betons betrachtet:



$-M_{Rd}$ bei $x = 10\text{ m}$:



$$A_p \cdot f_{pd} = 1050\text{ mm}^2 \cdot 1320\text{ N/mm}^2 = 1386\text{ kN}$$

$$f_{cm} = 49\text{ N/mm}^2 \rightarrow f_{ck} = 49 - 8 = 41\text{ N/mm}^2$$

$$\rightarrow f_{cd} = \frac{\sqrt[3]{f_{ck} \cdot 30}}{\gamma_c} = 24.6\text{ N/mm}^2$$

$\gamma_c = 1.5$

$$\frac{A_p \cdot f_{pd}}{b \cdot f_{cd}} = \frac{1386000}{400 \cdot 24.6} = 140.7\text{ mm}$$

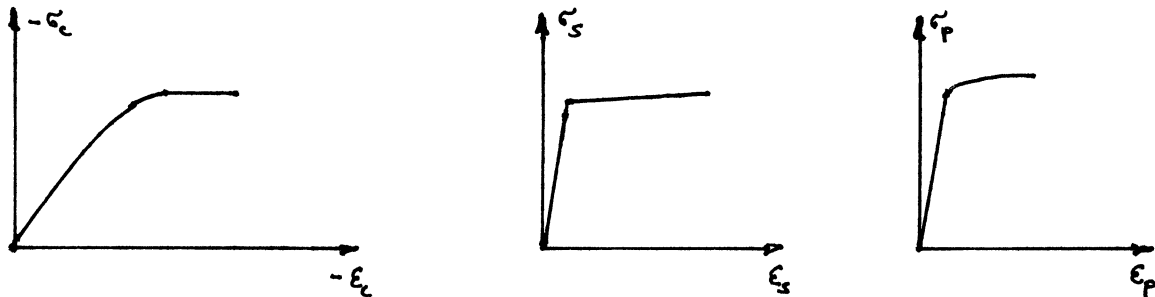
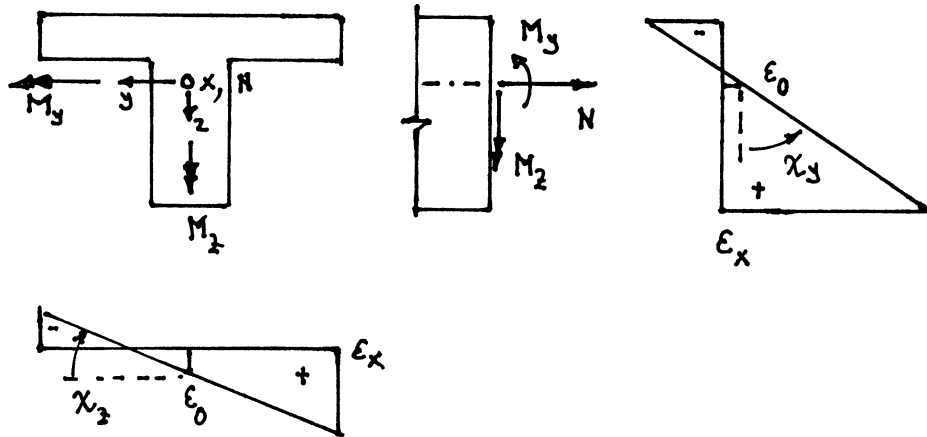
$$M_{Rd} = 1386 \cdot \left(1.0 - 0.1 - \frac{0.1407}{2}\right) = \underline{\underline{1150\text{ kNm}}}$$

Aus $(g \cdot \delta_a + q_{adm} \cdot \delta_a) \cdot \frac{l^2}{8} = M_{Rd}$ folgt somit

$\underbrace{\quad}_{1.35} \quad \underbrace{\quad}_{1.5}$
 $\underbrace{\quad}_{10\text{ kN/m}}$

$$\underline{\underline{q_{adm} = 6.3\text{ kN/m}}}$$

7.3.3 Allgemeine Querschnitte, Beanspruchungen und Spannungs-Dehnungsdiagramme



Grundsätzlich kann das Tragverhalten beliebiger Querschnitte unter einer beliebigen Beanspruchung (N, M_y, M_z) und unter Voraussetzung allgemeiner Spannungs-Dehnungsdiagramme für den Beton, den Betonstahl und den Spannstahl ermittelt werden. Aus der Annahme ebenbleibender Querschnitte folgt

$$\epsilon_x = \epsilon_0 + \chi_y \cdot z - \chi_z \cdot y \quad (7.22)$$

und damit ergeben sich für jeden Satz verallgemeinerter Verformungen $(\epsilon_0, \chi_y, \chi_z)$ die Spannungen

$$\sigma_c(y, z) = \sigma_c(\epsilon_x), \quad \sigma_s(y, z) = \sigma_s(\epsilon_x), \quad \sigma_p(y, z) = \sigma_p(\epsilon_x + \Delta\epsilon) \quad (7.23)$$

wobei die Vordehnungen $\Delta\epsilon$ des Spannstahls zu berücksichtigen sind.

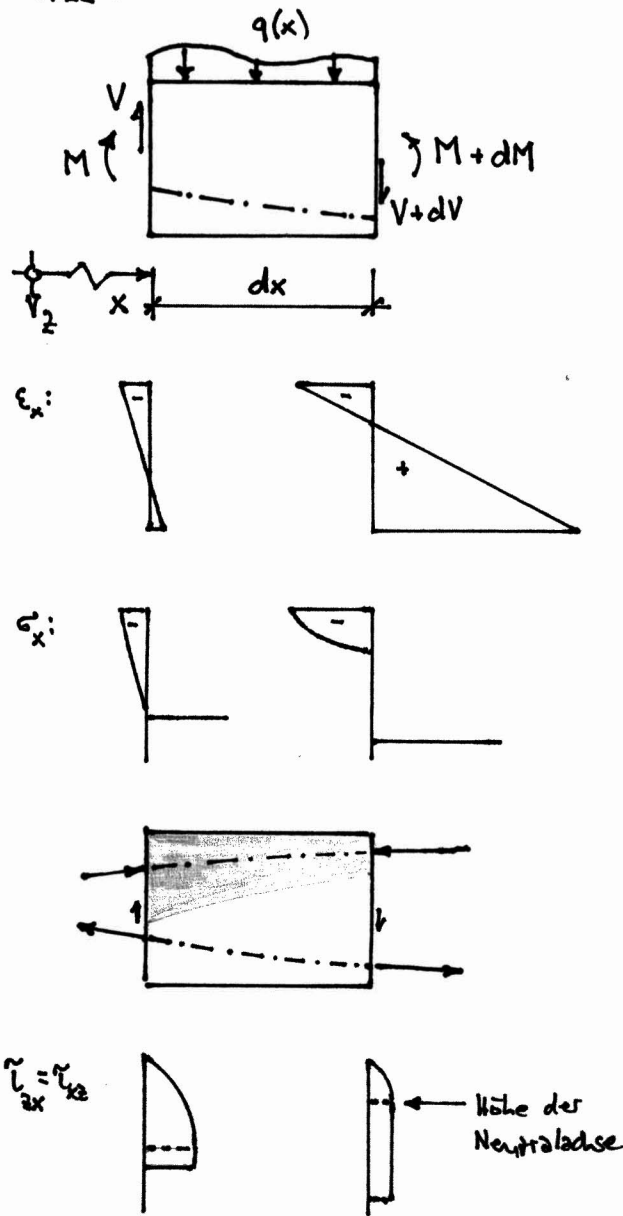
Integration über den Querschnitt bringt

$$N = \int_A \sigma dA, \quad M_y = \int_A z \sigma dA, \quad M_z = - \int_A y \sigma dA \quad (7.24)$$

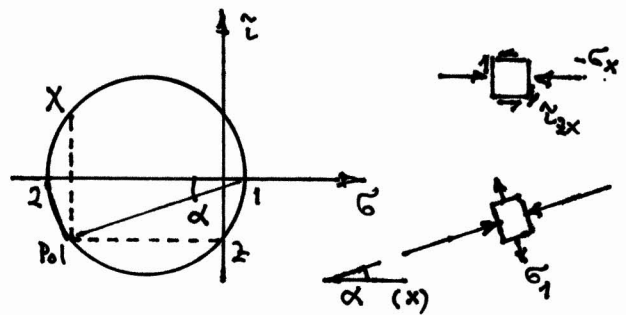
Die zu einem Satz von Schnittgrößen (N, M_y, M_z) gehörigen Verformungsgrößen $(\epsilon_0, \chi_y, \chi_z)$ ergeben sich iterativ.

Durch die Betrachtung nebeneinander liegender Querschnitte kann man analog wie bei der Herleitung der Biegeformel auf die aus Gleichgewichtsgründen erforderlichen Schubspannungen schließen. Beschränkt man sich auf den Fall spezieller Biegung um die y-Achse ergeben sich etwa folgende Verhältnisse, vgl. S.

7.22 :

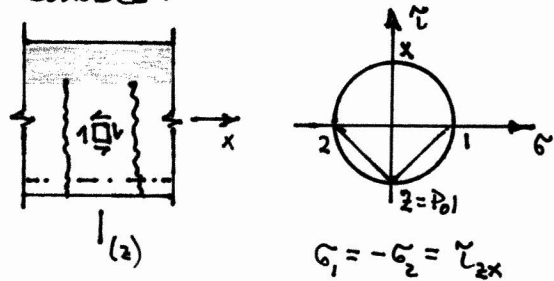


Die Kombination der Schubspannungen $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ mit den Normspannungen σ_x in der Biegedruckzone verursacht schiefe Hauptzug- und -druckspannungen σ_1 bzw. σ_2 :

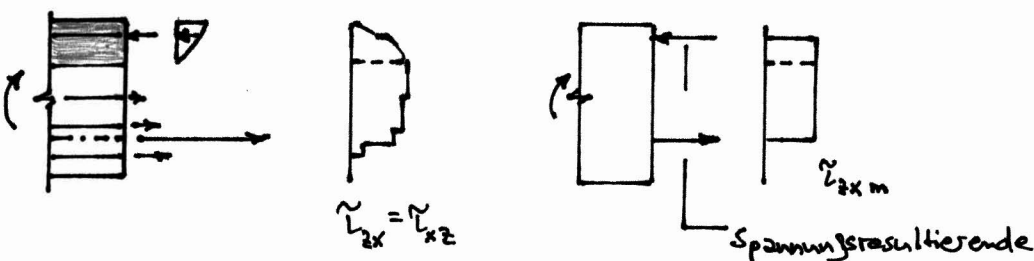


$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\tau_{zx}^2}{\sigma_x^2}} \right) \quad (7.25)$$

In der (gerissenen) Biegezugzone sind entlang der Risse Rissverankerungskräfte erforderlich (aggregate interlock), zwischen den Rissen herrscht ein Zustand reinen Schubes:



Bei mehreren Bewehrungsstegen ergibt sich eine Abstufung des τ -Diagramms:

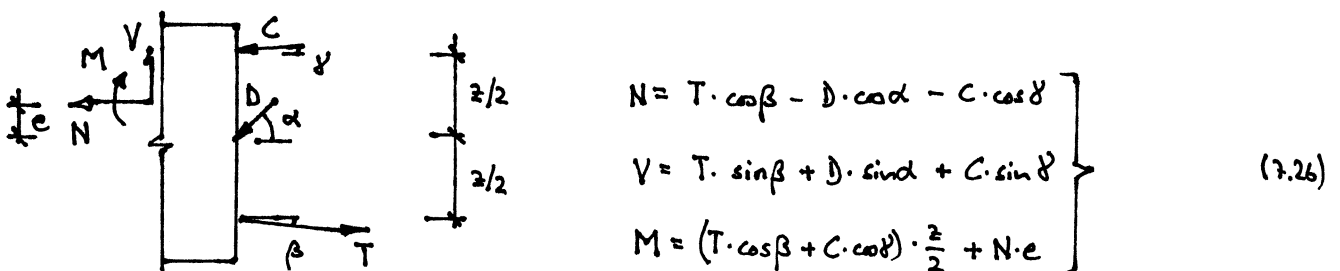


7.4 Querkraft

7.4.1 Querschnittsbetrachtung

a) Allgemeines Vorgehen

Aus den Betrachtungen in Kapitel 7.3.3 ergibt sich ein allgemeines Vorgehen zur Berücksichtigung der Querkräfte. Dabei ist in der Regel von einem gewissen Druckfeld zwischen den resultierenden Druck- und Zugkräften aus Biegung und Normalkraft auszugehen:



Elimination von D aus (7.26)₁ und (7.26)₂ bringt

$$N + (V - T \cdot \sin\beta - C \cdot \sin\delta) \cdot \cot\alpha = T \cos\beta - C \cos\delta \quad (7.27)$$

Bei gegebenen Schnittgrößen (M, N, V) und Querschnittseigenschaften (Geometrie, Bewehrung, Vordehnungen, σ - ϵ -Diagramme) erfordert die Bestimmung der übrigen Größen ($T, \beta, C, \delta, z, e$) bei angenommenem α ein iteratives Vorgehen. Aus einer Querschnittsanalyse für das Moment $M - N \cdot e$ und die Normalkraft $N + (V - T \cdot \sin\beta - C \cdot \sin\delta) \cdot \cot\alpha$ mit zunächst geschätzten Werten e sowie $T \cdot \sin\beta + C \cdot \sin\delta$ folgen die Verformungsgrößen ϵ_0 und χ_y und damit die Kräfte $C \cdot \cos\delta, T \cdot \cos\beta$ sowie die geometrischen Größen e, z . Aus der Betrachtung benachbarter Querschnitte resultieren ferner die Winkel β und δ , und damit kann die Analyse mit verbesserten Werten e sowie $T \sin\beta + C \sin\delta$ wiederholt werden, bis eine angestrebte Genauigkeit erreicht ist.

Der erforderliche Widerstand einer vertikalen Bügelbewehrung pro Längeneinheit beträgt

$$\frac{V - T \cdot \sin\beta - C \cdot \sin\delta}{z \cdot \cot\alpha} \quad (7.28)$$

und die Betondruckspannungen im geneigten Druckfeld betragen

$$\frac{V - T \cdot \sin \beta - C \cdot \sin \delta}{b_{w, \text{nom}} \cdot z \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha} \quad (7.29)$$

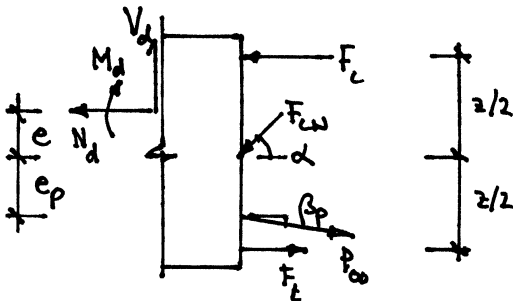
wobei

$$b_{w, \text{nom}} = b_w - 0.5 \cdot \sum \phi_H \quad (7.30)$$

mit ϕ_H = Hüllrohrdurchmesser, vgl. SIA 262 (35).

b) Vereinfachung gemäss SIA 262

Ausser der diagonalen Druckkraft F_{cw} und den parallelen Druck- und Zugkräften F_c bzw. F_t wird eine geneigte Spannkraft P_∞ betrachtet.



Gleichgewicht:

$$\left. \begin{aligned} F_{cw} &= \frac{V_d - P_\infty \cdot \sin \beta_p}{\sin \alpha} \\ F_c &= \frac{M_d}{z} - N_d \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{e}{z} \right) + P_\infty \cos \beta_p \left(\frac{1}{2} - \frac{e_p}{z} \right) - \frac{V_d - P_\infty \sin \beta_p}{2} \cdot \cot \alpha \\ F_t &= \frac{M_d}{z} + N_d \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{e}{z} \right) - P_\infty \cos \beta_p \left(\frac{1}{2} + \frac{e_p}{z} \right) + \frac{V_d - P_\infty \sin \beta_p}{2} \cdot \cot \alpha \end{aligned} \right\} \quad (7.31)$$

Die Betondruckspannungen im geneigten Druckfeld betragen

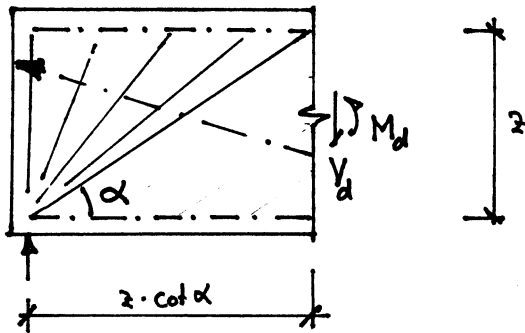
$$\frac{V_d - P_\infty \cdot \sin \beta_p}{b_{w, \text{nom}} \cdot z \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha} \quad (7.32)$$

Für Vorkenträger wurden mit (4.19) bereits zu (7.31) analoge Formeln erarbeitet.

Erforderlicher Widerstand vertikaler Bügel pro Längeneinheit

$$\frac{V_d - P_\infty \cdot \sin \beta_p}{z \cdot \cot \alpha} \quad (7.33)$$

Nachweisschnitt bei direkter Auflagerung bzw. Krafteinleitung:



Im Abstand $z \cdot \cot \alpha$ von der Krafteinleitung kann von einem über die Höhe z gleichförmigen Druckfeld ausgegangen werden.

7.4.2 Spannungsfelder

Für spezielle Aufgabenstellungen, insbesondere bei der Beurteilung der Tragsicherheit bestehender Bauwerke, kann die Entwicklung von Spannungsfeldern analog zu Kapitel 4.3 sinnvoll sein. Dabei empfiehlt es sich, die Wirkung der Vorspannung auf den vom Spannstahl befreiten Stahlbeton über Anker-, Umlenk- und Reibungskräfte zu erfassen.

Grundlagen und Beispiele dazu sind in folgender Publikation enthalten:

Marki, P. und Stoffel P., "Beurteilung der Tragsicherheit bestehender Betonbauten", IBK Publikation SP-009, Sept. 1989, 87 pp.

7.4.3 Bruchmechanismen

Die Anwendung der kinematischen Methode der Plastizitätstheorie unter Verwendung diskreter Gleitlinien (siehe Kapitel 4.5) eignet sich insbesondere für die Überprüfung der Tragsicherheit bestehender Bauwerke.

Auch hierzu wird auf die oben aufgeführte Publikation verwiesen.

7.4.4 Bemerkungen

Bei Torsion und kombinierter Beanspruchung kann das Torsionsmoment in äquivalente Scheibenquerkräfte zerlegt werden, sofern die Schnittgrößen, die Querschnittsabmessungen und die Bewehrung in der Längsrichtung eines Trägers nicht abrupt ändern und somit ein konstanter Schubfluss angenommen werden darf. Vgl. Kapitel 5.1 sowie SIA 262 Ziffer 4.3.5.

Im Vergleich zu Bauteilen aus Stahlbeton beeinflusst eine Vorspannung das Tragverhalten unter Querkraft- und Torsionsbeanspruchung positiv, weil

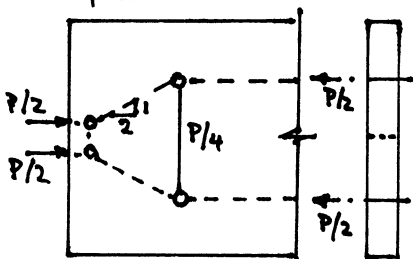
- die Risslast erhöht wird
- die Umlagerung der inneren Kräfte nach dem Reißen reduziert wird
- das Stanchen des diagonal gedrückten Betons verzögert wird
- ein beträchtlicher Anteil der Querkräfte durch günstig wirkende Komponenten $P \cdot \sin \beta_p$ aufgenommen werden kann.

7.5 Konstruktive Durchbildung

In Kapitel 7.2.6 b) wurde die Unterscheidung von Ankerzone und Kraftausbreitzzone eingeführt und auf die Verantwortung der Projektverfassenden für die Spreizkraftbemessung hingewiesen.

Zur Abschätzung der Spreizkräfte eignen sich Fachwerkmodelle. Um die Rissbreiten im Gebrauchszustand zu begrenzen, wird empfohlen, die Spannungen in der Spreizkraftbewehrung auf etwa 250 N/mm^2 zu beschränken. Oft resultiert damit eine Querschnittsfläche der Spreizkraft-

Beispiel:



bewehrung in der gleichen Größenordnung wie die Querschnittsfläche des verankerten Spannungsglieds ($A_p \cdot \sigma_{p0} / 4 \approx A_s \cdot \sigma_s$).

Achtung: räumliche Kraftausbreitung beachten!

Für detaillierte Informationen zur konstruktiven Durchbildung, illustriert mit vielen Anwendungsbeispielen, wird auf folgende Publikation verwiesen:

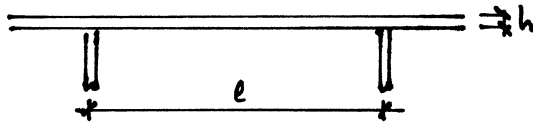
Rojowsky, J. M. und Marth, P., "Detailing for Post-Tensioning", VSL Report Series 3, Bern, 1991, 49 pp.

7.6 Deckenvorspannung

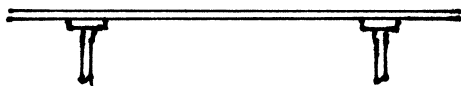
7.6.1 Allgemeines

Weit gespannte Decken im Hochbau werden oft vorgespannt. Dabei kommen sowohl Spannglieder mit Verbund als auch Spannglieder ohne Verbund zur Anwendung. Zur Reduktion der Eigenlasten werden häufig rippenförmige oder kassettenförmige Konstruktionen eingesetzt. Um ein Durchstanzen in hochbeanspruchten Stützenbereichen zu vermeiden, werden Stützenkopfstärkungen aus Beton oder Stahl verwendet.

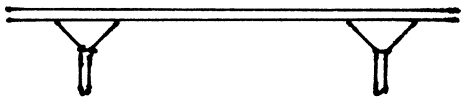
a) Bauformen



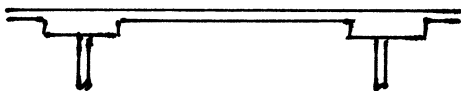
Flachdecke ($l \approx 7$ bis 12 m)



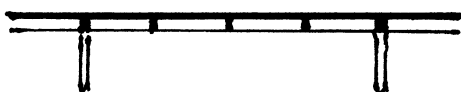
Flachdecke mit Stützenkopfstärkung (drop panel)



Pilzdecke



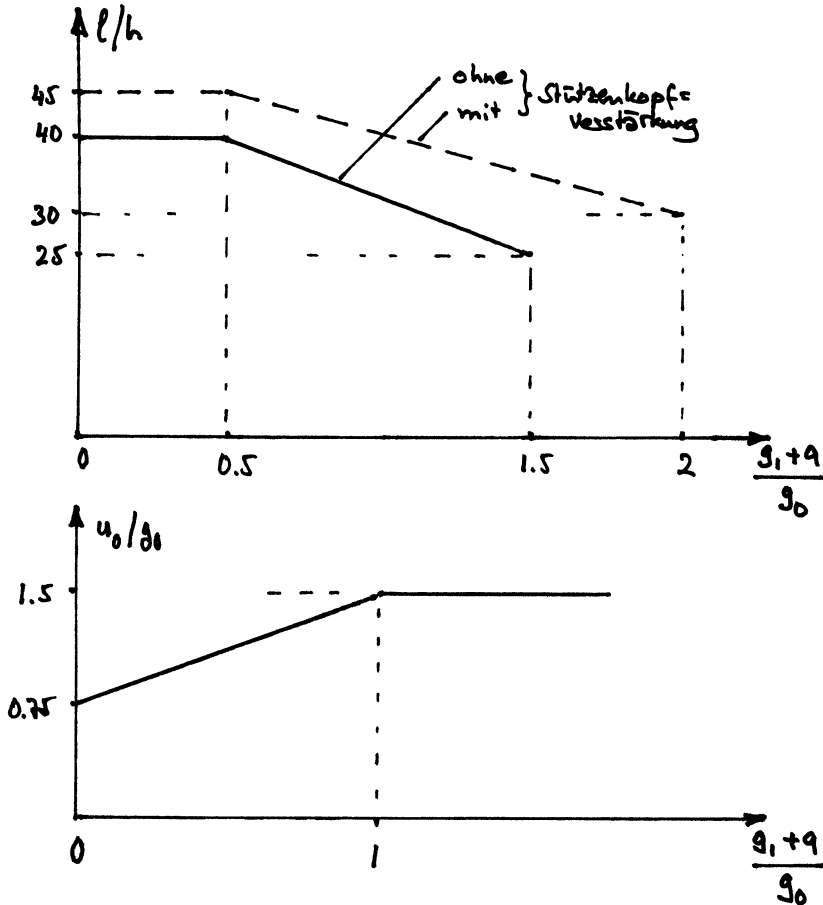
Rippendecke



Kassettendecke (l bis ca. 15 m)

b) Deckenstärken und Umlenkkräfte

Für vorgespannte Flachdecken werden folgende Schlankheiten und initialen Umlenkkräfte empfohlen:



$g_0 = h \cdot 25 \text{ kN/m}^3 = \text{Eigenlast} \text{ [kN/m}^2\text{]}$

$g_1 = \text{Auflast} \text{ ["]}$

$q = \text{Nutzlast} \text{ ["]}$

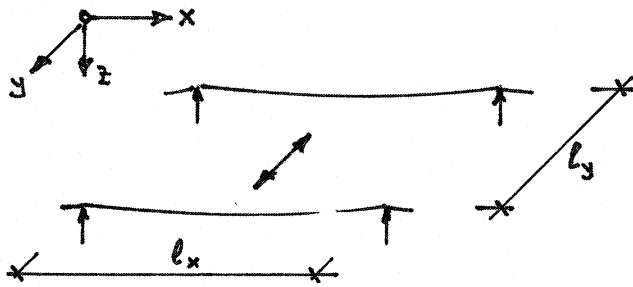
$u_0 = \text{mittlere initiale Umlenkraft} \text{ ["]}$

c) Nachweise

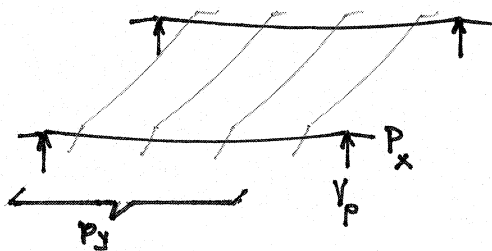
- Tragsicherheit ... Biegung
Querkraft / Durchstanzen
- Gebrauchstauglichkeit ... Durchbiegungen
evtl. Risse / Spannungshochweise
evtl. Schwingungen

7.6.2 Vorspannkonzepte für Flachdecken

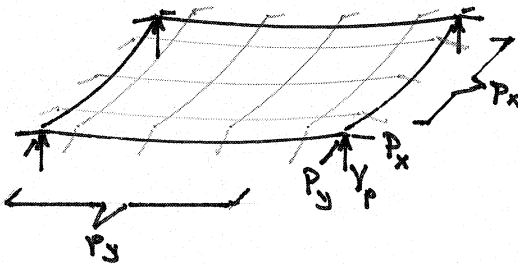
a) Mögliche Spanngliederanordnungen



Stützstreifenvorspannung in x-Richtung und
schleife Bewehrung in y-Richtung



Stützstreifenvorspannung in x-Richtung und
verteilte Vorspannung in y-Richtung



Stützstreifenvorspannung in x- und y-
Richtung (P_x, P_y) sowie verteilte
Vorspannung in x- und y-Richtung
(P_x, P_y).

Annahme: Stützstreifenspannglieder und verteilte Spannglieder haben dieselben Pfeilhöhen f_x bzw. f_y .

$$\text{Umlenkkräfte im Feld: } u_x = \frac{8P_x f_x}{l_x^2}, \quad u_y = \frac{8P_y f_y}{l_y^2}, \quad u_0 = u_x + u_y \quad (7.34)$$

$$\text{Umlenkkräfte in Stützachsen: } \bar{u}_x = \frac{8P_x f_x}{l_x^2} = u_y l_y, \quad \bar{u}_y = \frac{8P_y f_y}{l_y^2} = u_x l_x \quad (7.35)$$

$$\text{Totale Spannkraft: } P_x + P_x l_y = \frac{u_0 l_x^2 l_y}{8 \cdot f_x}, \quad P_y + P_y l_x = \frac{u_0 l_y^2 l_x}{8 \cdot f_y} \quad (7.36)$$

$$\text{Auf Stützen übertragene Umlenkraft: } V_p = \frac{8P_x f_x}{l_x} + \frac{8P_y f_y}{l_y} = u_0 \cdot l_x \cdot l_y \quad (7.37)$$

Zusammengefasst:

- Die mittleren Spannkraften in x- und y-Richtung betragen $u_0 \cdot l_x^2 / (8f_x)$ bzw. $u_0 \cdot l_y^2 / (8f_y)$, wobei u_0 = gewählte Umlenkraft.
- Der Anteil der Stützstreifenspannkraft kann in einer Richtung zwischen 0 und 100% frei gewählt werden, woraus die übrigen Anteile folgen, z.B. 60% Stützstreifenvorspannung in x-Richtung \rightarrow 40% Feldvorspannung in x-Richtung, 60% Feldvorspannung in y-Richtung und 40% Stützstreifenvorspannung in y-Richtung.
- Auf die Stützen werden Umlenkkräfte $V_p = u_0 \cdot l_x \cdot l_y$ abgetragen.

b) Mittlere Vorspannstahlgehalte [kg/m²]

$$g_0 = h \cdot \delta_c \quad \text{mit } \delta_c = 25 \text{ kN/m}^3 \quad \left| \quad \begin{aligned} \sigma_{cp_x} &= \frac{P_x + P_x \cdot l_y}{h \cdot l_y} = \frac{3}{4} \left(1 + \frac{g_1 + g_2}{g_0}\right) \cdot \delta_c \cdot l_x^2 / (8f_x) \\ \sigma_{cp_y} &= \frac{P_y + P_y \cdot l_x}{h \cdot l_x} = \frac{3}{4} \left(1 + \frac{g_1 + g_2}{g_0}\right) \cdot \delta_c \cdot l_y^2 / (8f_y) \end{aligned} \right.$$

$$u_0 = \frac{3}{4} g_0 \underbrace{\left(1 + \frac{g_1 + g_2}{g_0}\right)}_{\neq 2}$$

Annahme $f_x = f_y = f$, $\sigma_{p0} = 0.7 \cdot f_{pk} = 1239 \text{ N/mm}^2$, $\rho_p = 7850 \text{ kg/m}^3$

Damit resultiert für den Vorspannstahlgehalt

$$\mu_p = \frac{\sigma_{cp_x} + \sigma_{cp_y}}{\sigma_{p0}} \cdot h \cdot \rho_p \approx 0.015 \cdot \underbrace{(l_x^2 + l_y^2)}_{\text{in [m]}} \cdot \frac{h}{f} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{g_1 + g_2}{g_0}\right)}_{\neq 2} \quad \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \right] \quad (7.38)$$

Beispiel:

$$\left. \begin{aligned} g_0 &= 6 \text{ kN/m}^2 \\ g_1 &= g_2 = 2.5 \text{ kN/m}^2 \\ l_x &= 8.4 \text{ m} \\ l_y &= 7.8 \text{ m} \\ f &= 2h/3 \end{aligned} \right\} \mu_p = 5.4 \text{ kg/m}^2$$

Für aufgelöste Konstruktionen wie Kassendecken kann der Ausdruck rechterhand in (7.38) weiter verwendet werden, wobei statt der Konstruktionshöhe h die mittlere Konstruktionsdicke h_m einzusetzen ist.

7.7 Zusammenfassung

1. Die vorliegende Vorlesung beschränkt sich auf interne Kabelvorspannung mit Verbundunter Verwendung von Litzenspanngliedern. Für Draht- und Stabspannglieder sowie im Spambett hergestellte Bauteile können die hier dargestellten Überlegungen ohne weiteres übertragen werden. Für interne Vorspannung ohne Verbund sowie für extern vorgespannte Bauteile sind Verformungsbetrachtungen am Gesamtsystem erforderlich, wenn eine Spannkraft $> P_0$ in Rechnung gestellt werden soll.
2. Ausser den einschlägigen Normen (wie SIA 262 und SIA 262/1) sind die Angaben in der 'Technischen Dokumentation' des jeweiligen Spannsystems zu beachten.
3. Beim Vorspannen werden durch das Spannen von Spannstahl kontrolliert Kräfte auf ein Tragwerk oder Bauteil aufgebracht.
4. Zwischen dem Spannstahl und dem vom Spannstahl befreiten Tragwerk bzw. Bauteil wirken Verankerungs-, Umlenk- und Reibungskräfte.
5. Das Vorspannen erzeugt im Tragwerk einen Eigenspannungszustand und verursacht Tragwerksverformungen.
6. Bei statisch unbestimmten Systemen entstehen im Allgemeinen Zwangsschnittgrössen aus behinderter Verformung.
7. Bei Spanngliedern mit Verbund bleibt die Dehnungsdifferenz $\Delta \epsilon = \epsilon_p - \epsilon_{cp}$ nach dem Vorspannen (und Luftpumpen) konstant.

8. Infolge der Reibung im Hüllrohr ändert sich die Spannkraft entlang des Spannungsglieds. Bei der Berechnung des Spannkraftverlaufs sowie des Spannungswegs ist zusätzlich der Verankerungsschlupf zu berücksichtigen.
9. Kriechen und Schwinden des Betons sowie Relaxation des Spannstahls führen zu zeitabhängigen Spannkraftverlusten. Näherungsweise kann die Beziehung (7.1) verwendet werden.
10. Mit dem Vorspannkonzentrat werden die Kabelgröße, das Kabelprofil und der Spannvorgang festgelegt. Dazu sind gute Kenntnisse der Komponenten des gewählten Spannsystems erforderlich. Zur Abschätzung der Plateverhältnisse können die Beziehungen (7.11), (7.12) und (7.4) verwendet werden.
11. Aufgrund der Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte kann das Tragverhalten beliebiger Querschnitte unter (schiefer) Biegung und Normalkraft analog wie für Stahlbeton diskretisiert werden, wobei die Vordehnungen $\Delta \epsilon$ des Spannstahls zu berücksichtigen sind. Die Ermittlung der zu einem Satz von Schnittgrößen gehörigen Verformungsgrößen erfordert im Allgemeinen ein iteratives Vorgehen.
12. Durch Betrachtung benachbarter Querschnitte lässt sich über das Längsgleichgewicht auf den Schubspannungsverlauf über den Trägerquerschnitt schließen.
13. Bei vorgespannten Trägern wird oft ein wesentlicher Anteil der Querkräfte über die zur Stabachse geneigten resultierenden Druck- und Zugkräfte aus Biegung und Normalkraft abgetragen.
14. Die Berücksichtigung der Querkräfte kann allgemein mittels der (iterativ zu lösenden) Beziehungen (7.26) erfolgen. In der Praxis genügen meist die Vereinfachungen (7.31) bzw. (4.13).
15. Für spezielle Aufgabenstellungen kann die Anwendung von Spannungsfeldern und Bruchmechanismen sinnvoll sein.

16. Bei Torsion und kombinierter Beanspruchung kann das Torsionsmoment in äquivalente Scheibenkräfte zerlegt werden, wenn die Schnittgrößen, die Querschnittsabmessungen und die Bewehrung in Trägerlängsrichtung nicht abrupt ändern und somit ein konstanter Schubfluss angenommen werden darf.
17. Bei der konstruktiven Durchbildung ist die Aufteilung der Verantwortlichkeiten zwischen Systemlieferant (Ankerzone) und Projektverfasser (Kraftausbreitzungszone) zu beachten. Für die Bemessung der Spreizkraftbewehrung eignen sich Fachwerkmodelle, wobei (unter Gebrauchslasten) die Spannungen in der Spreizkraftbewehrung auf etwa 250 N/mm^2 beschränkt werden sollten.
18. Bei vorgespannten Decken werden zur Reduktion der Eigenlasten oft rippen- oder kassettenförmige Konstruktionen eingesetzt. Zudem kommen zur Verbesserung des Durchstanzverhaltens häufig Stützenkopfstärkungen aus Beton oder Stahl zur Anwendung.
19. Deckenstärken und Umlenkkräfte können mit den auf S. 7.31 dargestellten Diagrammen abgeschätzt werden.
20. Grundsätzlich ist die Aufteilung der Vorspannung in Stütstreifenvorspannung und verteilte Vorspannung (jeweils in Kombination mit schlaffer Bewehrung) frei. Dadurch ergibt sich eine grosse Vielfalt möglicher vorgespannter Konstruktionen für gegebene Randbedingungen. Die Freiheit wird lediglich beschränkt durch die zu erbringenden Nachweise hinsichtlich Tragsicherheit (Biegung sowie Querkraft/Durchstanz) und Gebrauchstauglichkeit (Durchbiegungen, evtl. Risse/Spannungsnachweise, evtl. Schwingungen).

8. Platten

8.1 Allgemeines

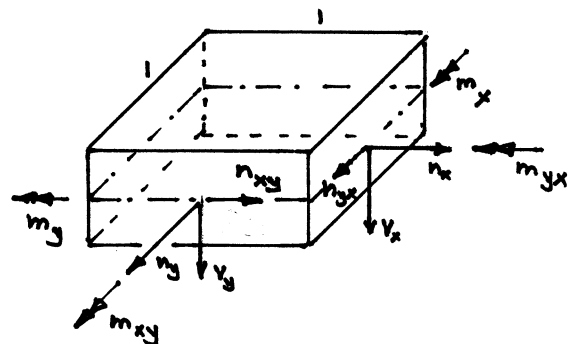
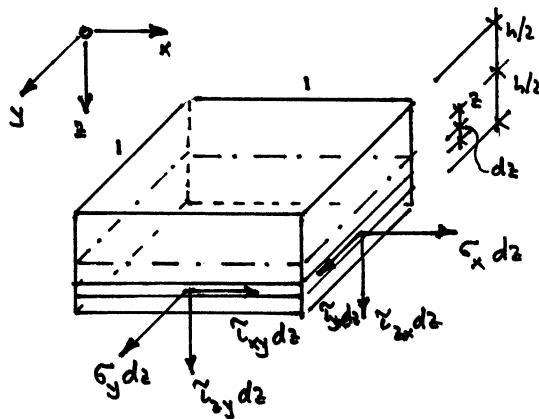
Als Platte bezeichnet man ein ebenes, primär oder anschließend senkrecht zu seiner Ebene belastetes Tragwerk mit vorherrschendem Biegezustand (Biege- und Drillmomente sowie Querkräfte) und vernachlässigbarem Membranspannungszustand (Scheibenkräfte).

N.B. Scheibe : ebenes, nur in seiner Ebene belastetes Tragwerk

Schale : Flächentragwerk mit gekrümmter Mittelfläche

Faltwerk : aus ebenen Teilflächen gebildetes Tragwerk.

Spannungen und Spannungsergebnende:



Momente [kNm/m]:

$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz, \quad m_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz, \quad m_{xy} = m_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz \quad (8.1)$$

Querkräfte [kN/m]:

$$V_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zx} dz, \quad V_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zy} dz \quad (8.2)$$

Membrankräfte [kN/m]:

$$n_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz, \quad n_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz, \quad n_{xy} = n_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz \quad (8.3)$$

Vorzeichenkonvention: positive Spannungen wirken an Elementen mit positiver Normalenrichtung in positiver Koordinatenrichtung

Doppelindizes: erster Index bezeichnet Richtung, in welcher die Spannung wirkt, und der zweite Index bezeichnet die Normalenrichtung des Elements, in welchem die Spannung wirkt.

Bei der Tragwerkanalyse stützt man sich oft auf die elastische Plattentheorie (Theorie dünner elastischer Platten nach KIRCHHOFF) und entsprechende numerische Verfahren, insbesondere die Methode der finiten Elemente. Weit verbreitet sind auch entsprechende Näherungsverfahren wie die Methode der stellvertretenden Rahmen.

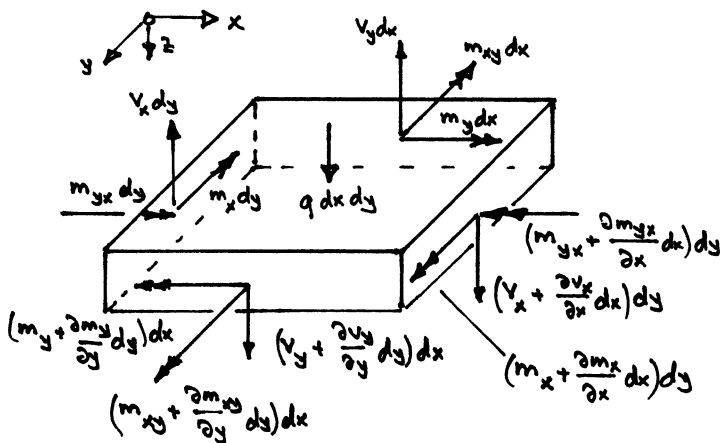
Aus dem Gebiet der plastischen Platten Theorie werden oft Gleichgewichtslösungen wie die Streifenmethode herangezogen, welche auf dem statischen (unteren) Grenzwertsatz beruhen. Andererseits kommt auch die Fliessgelenklinienmethode zur Anwendung, welche auf dem kinematischen (oberen) Grenzwertsatz beruht.

Bei der Bemessung stützt man sich analog wie bei den Scheiben (Kapitel 6.2) auf entsprechende Fliessbedingungen, meist in linearisierter Form.

Der Einfluss der Querkräfte wird im Allgemeinen nur bei konzentrierten Kräften und Stützen massgebend (Gefahr des Durchstanzens). Neben konstruktiven Massnahmen (ausreichende Plattendicke, evtl. Verstärkung mit Querkraft- bzw. Durchstanzbewehrung oder Stahlkonstruktionen) sind je nach Problemstellung verfeinerte Modellvorstellungen (Sandwichmodelle, Spannungsfelder, kinematische Modelle) in die Betrachtung einzubeziehen.

8.2 Statische Beziehungen

8.2.1 Gleichgewichtsbedingungen



Kräftegleichgewicht am differentiellen Element $dx \cdot dy$ in z -Richtung liefert

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + q = 0 \quad (8.4)$$

Momentengleichgewicht um die y - bzw. x -Achse

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} - V_x &= 0 \\ \frac{\partial m_y}{\partial x} + \frac{\partial m_x}{\partial y} - V_y &= 0 \end{aligned} \right\} (8.5)$$

Woraus

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + q = 0 \quad (8.6)$$

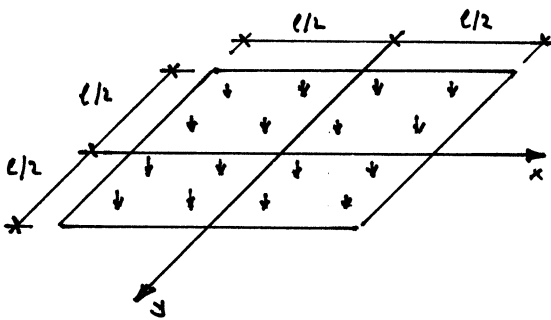
folgt.

Unter Verwendung der EINSTEIN'schen Summationskonvention lassen sich (8.4) bis (8.6) viel einfacher schreiben:

$$v_{i,i} + q = 0, \quad v_i = m_{i,j,j}, \quad m_{i,j,j} + q = 0 \quad (8.7)$$

Gleichgewichtslösungen gehen von Ansätzen für m_x , m_y und $m_{xy} = m_{yx}$ aus, welche (8.6) erfüllen. Für $q = \text{const}$ eignen sich beispielsweise parabolische Ansätze für m_x und m_y sowie hyperbolische Ansätze für m_{xy} .

BEISPIEL 8.1



Quadratplatte unter $q = \text{const}$

Ansätze:

$$m_x = m_u \left(1 - \frac{4x^2}{l^2}\right), \quad m_y = m_u \left(1 - \frac{4y^2}{l^2}\right) \quad (8.8)$$

$$m_{xy} = \mp m_u \frac{4xy}{l^2} \quad \text{bzw.} \quad m_{xy} = 0 \quad (8.9)$$

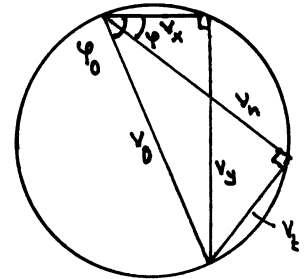
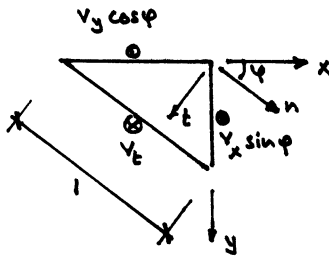
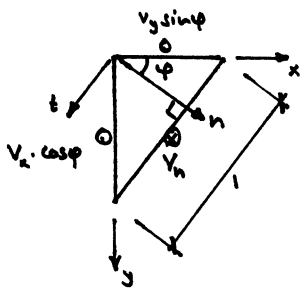
$m_{xy} = -m_u \cdot 4xy/l^2$... Aus (8.6) folgt $q = 24 m_u / l^2$. Wie später gezeigt wird, entspricht dieser Fall einer einfachen Lagerung am Plattenrand sowie gegen Abheben gesicherten Plattencken.

$m_{xy} = m_u \cdot 4xy/l^2$... Aus (8.6) folgt $q = 8 m_u / l^2$. Wie später gezeigt wird, entspricht dieser Fall einer an den Ecken gestützten Platte mit freien Rändern.

$m_{xy} = 0$... Aus (8.6) folgt $q = 16 m_u / l^2$. Der Ansatz entspricht der (einfachen) Streifenmethode für eine am Rand einfach gelagerte Platte. Die Last wird über Balken in x- und y-Richtung abgetragen.

8.2.2 Spannungstransformation

Querkräfte



Kräftegleichgewicht in z-Richtung erfordert

$$V_n = V_x \cdot \cos \varphi + V_y \cdot \sin \varphi, \quad V_t = -V_x \cdot \sin \varphi + V_y \cdot \cos \varphi \quad (8.10)$$

und somit

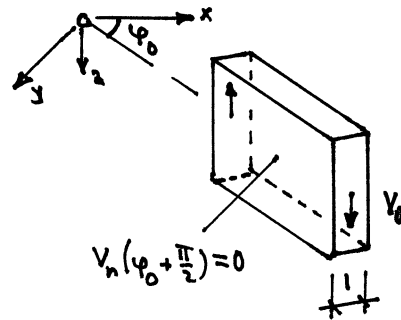
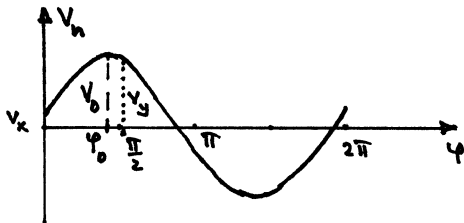
$$V_n^2 + V_t^2 = V_x^2 + V_y^2 = V_0^2 \quad (8.11)$$

Die Beziehung (8.11) lässt sich mit dem THALES-Kreis rechts oben veranschaulichen.

$V_0 = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$ bezeichnet die Hauptquerkraft, die in der Richtung φ_0 mit

$$\tan \varphi_0 = \frac{V_y}{V_x} \quad (8.12)$$

abgetragen wird. Senkrecht zu dieser Richtung verschwindet die Querkraft.



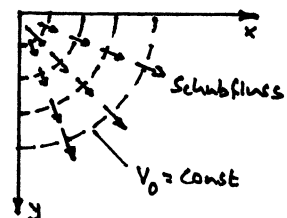
BEISPIEL 8.2

Anwendung von (8.5) auf den Fall $m_{xy} = m_u \cdot 4xy/e^2$ von Beispiel 8.1 bringt

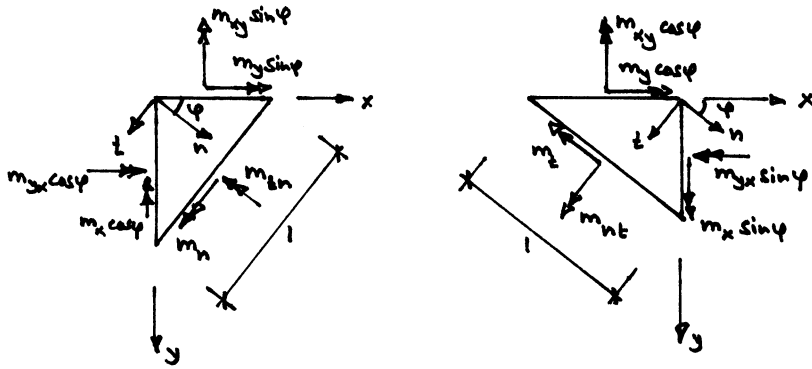
$$\left. \begin{aligned} V_x &= -4m_u x/e^2 \\ V_y &= -4m_u y/e^2 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(8.11)} V_0 = \frac{4m_u \sqrt{x^2 + y^2}}{e^2}$$

$$\xrightarrow{(8.12)} \tan \varphi_0 = \frac{y}{x}$$

Die Schubflusstrajektorien sind Geraden durch den Ursprung. Linien mit $v_0 = \text{const}$ sind konzentrische Kreise.



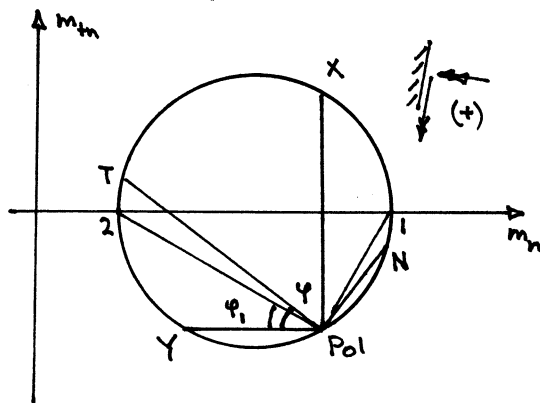
Momente



Aus den obigen Schnittkörperdiagrammen liest man ab:

$$\begin{Bmatrix} m_n \\ m_t \\ m_{nt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\varphi & \sin^2\varphi & \sin(2\varphi) \\ \sin^2\varphi & \cos^2\varphi & -\sin(2\varphi) \\ -\sin\varphi\cos\varphi & \sin\varphi\cos\varphi & \cos(2\varphi) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix} \quad (8.13)$$

Diese Transformationsformeln stimmen mit jenen für Normal- und Schubspannungen im ebenen Spannungszustand überein und lassen sich mit Hilfe von MOHR'schen Kreisen geometrisch interpretieren:



Hauptrichtungen ($m_{nn} = m_{tt} = 0$):

$$\tan(2\varphi_1) = \frac{2m_{xy}}{m_x - m_y} \quad (8.14)$$

Hauptmomente:

$$m_{1,2} = \frac{m_x + m_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{m_x - m_y}{2}\right)^2 + m_{xy}^2} \quad (8.15)$$

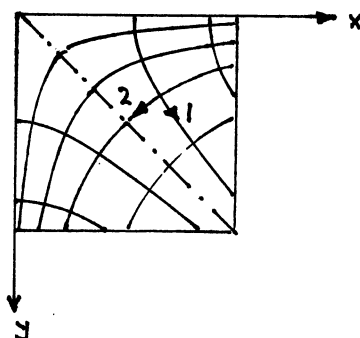
BEISPIEL 8.3

Anwendung auf Beispiel 8.2

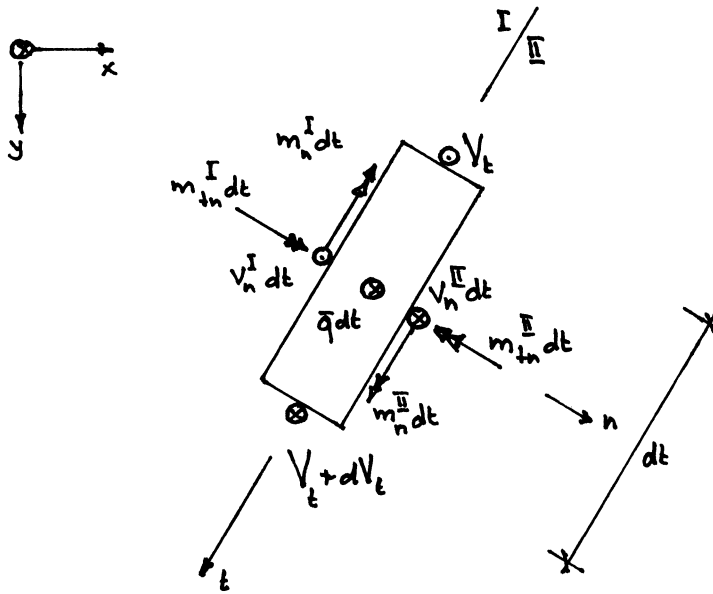
bringt

$$\tan(2\varphi_1) = \frac{2xy}{y^2 - x^2}$$

Die Hauptmomentenkontrajektoren sind Hyperbeln mit den Gleichungen $xy = \text{const}$ bzw. $x^2 - y^2 = \text{const}$.



8.2.3 Statische Diskontinuitätslinien



Die Plattenbereiche I und II sind durch die Diskontinuitätslinie in t -Richtung getrennt.

$$\sum F_z = 0 \quad \dots \quad -V_n^I + V_n^{II} + \bar{q} + \frac{dV_t}{dt} = 0$$

$$\sum M_t = 0 \quad \dots \quad -m_{tn}^I + m_{tn}^{II} = 0$$

$$\sum M_n = 0 \quad \dots \quad m_{tn}^I - m_{tn}^{II} + V_t = 0$$

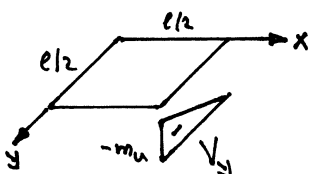
Somit müssen die Biegemomente m_n sowie die Stützkräfte $V_n + dm_{tn}/dt$ (bis auf eine allfällige Streckenlast \bar{q}) kontinuierlich sein. Die Querkräfte V_n sowie die Drillmomente m_{tn} können jedoch einen Sprung aufweisen. Der Sprung in m_{tn} entspricht einer entlang der Diskontinuitätslinie übertragenen Querkraft V_t .

Es gelten zusammengefasst folgende Beziehungen:

$$m_n^I = m_n^{II}, \quad V_n^I + \frac{dm_{tn}^I}{dt} = V_n^{II} + \frac{dm_{tn}^{II}}{dt} + \bar{q}, \quad V_t = m_{tn}^{II} - m_{tn}^I \quad (8.16)$$

BEISPIEL 8.4

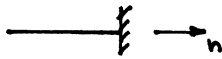
Am Plattenrand $x = \ell/2$, $0 \leq y \leq \ell/2$ des Beispiels 8.2 gilt im Platteninnern (Bereich I) $m_{xy}^I = m_n \cdot y / (\ell/2)$ und ausserhalb der Platte (Bereich II) $m_{xy}^{II} = 0$. Somit wird entlang dieses Plattenrandes nach (8.16)₃ eine Querkraft $V_y = -m_n \cdot y / (\ell/2)$ übertragen



8.2.4 Statische Randbedingungen

Plattenränder entsprechen statischen Diskontinuitätslinien, an denen im Allgemeinen ein Biegemoment m_n , ein Drillmoment m_{tn} und eine Querkraft v_n angreifen.

Eingespannter Rand



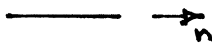
m_n , m_{tn} und v_n dürfen beliebige Werte annehmen, sie unterliegen aus statischer Sicht keinerlei Einschränkungen. Unter der Annahme eines elastischen Verhaltens ergeben sich jedoch, wie weiter unten gezeigt wird, zusätzliche Bedingungen.

Einfach gelagerter Rand



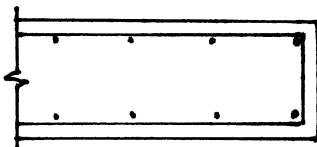
Hier gilt $m_n = 0$, und die Querkraft v_n sowie die Ableitung des Drillmoments sind zur Stützkraft $v_n + dm_{tn}/dt$ zusammenzufassen.

Freier Rand

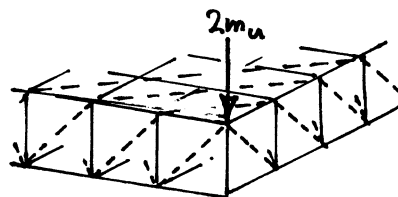


Hier gilt $m_n = 0$ sowie $v_n + dm_{tn}/dt = 0$.

Beim freien und einfach gelagerten Rand entsprechen die Drillmomente m_{tn} einer Randquerkraft $V_t = -m_{tn}$. Diese erfordert eine Randbewehrung, die z.B. mit Steckbügeln oder auf- bzw. abgebogenen Bewehrungsstäben realisiert werden kann:



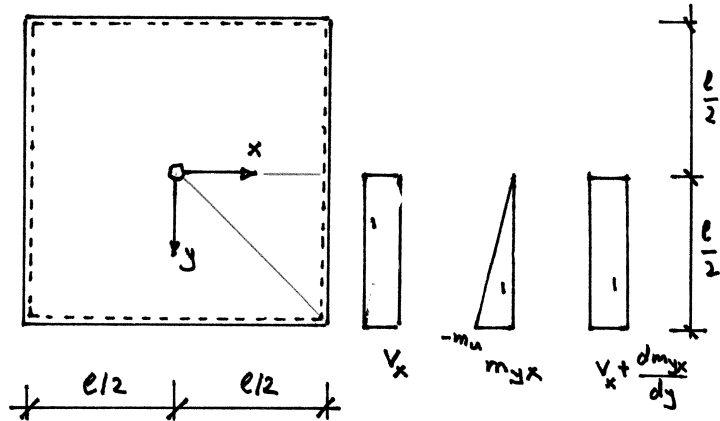
Die vertikalen Schenkel der Steckbügel wirken wie die Bügel in einem Plattenbög.



Veranschaulichung des Kraftflusses an Plattenecke mit räumlichem Fachwerkmodell ($m_{xy}^{Eck} = -m_u \rightarrow$ Eckkraft $V^{Eck} = 2 \cdot m_u$)

BEISPIEL 8.5

Siehe Beispiel 8.1 mit $m_{xy} = -4xy m_u / e^2$. Betrachte den Rand des ersten Oktanten ($x = e/2, 0 \leq y \leq e/2$):

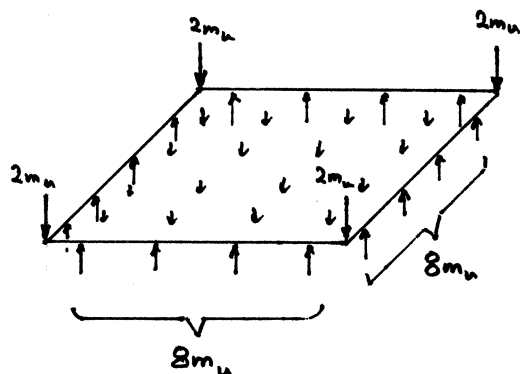


$$m_{yx} = \frac{-2m_u y}{e}$$

$$(8.5)_1: V_x = \frac{-6m_u}{e}$$

$$\text{Stützkraft } V_x + \frac{dmyx}{dy} = \frac{-8m_u}{e}$$

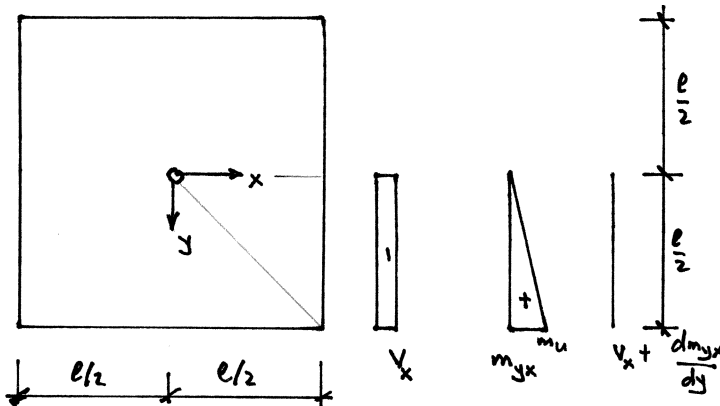
$$\text{Eckkraft } -2 \cdot (-m_u) = \underline{2m_u}$$



Die Belastung $q e^2 = 24m_u$ und die Eckkräfte $4 \cdot 2m_u = 8m_u$ sind mit den Stützkraften $4 \cdot (-8m_u/e) = -32m_u$ im Gleichgewicht... die Plattenränder sind einfach gelagert.

BEISPIEL 8.6

Wie Beispiel 8.5, aber $m_{xy} = 4xy m_u / e^2$.

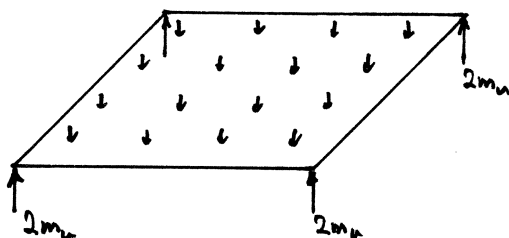


$$m_{yx} = \frac{2m_u y}{e}$$

$$(8.5)_1: V_x = \frac{-2m_u}{e}$$

$$\text{Stützkraft } V_x + \frac{dmyx}{dy} = 0$$

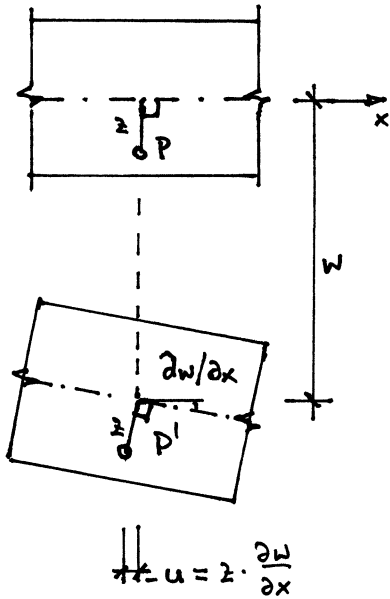
$$\text{Eckkraft } -2 \cdot (+m_u) = \underline{-2m_u}$$



Die Stützkraften verschwinden, und die Eckkräfte $4 \cdot (-2m_u) = -8m_u$ sind mit der Belastung $q e^2 = 8m_u$ im Gleichgewicht... die Plattenränder sind frei.

8.3 Kinematische Beziehungen

Nach der KIRCHHOFF'schen Theorie dünner Platten wird angenommen, dass Normalen zur Plattenmittelebene während der Verformung gerade und senkrecht zur verformten Mittelfläche bleiben:



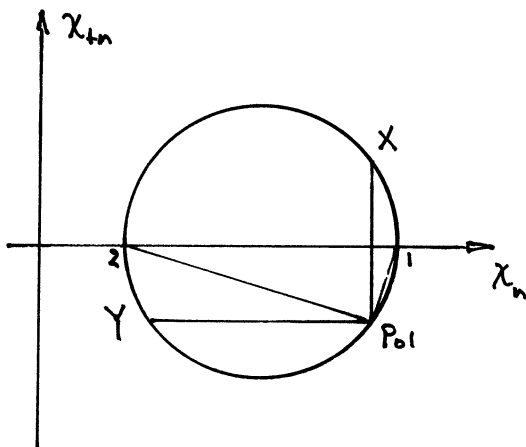
Verschiebungen $u = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial x}$ in x-Richtung,
analog $v = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial y}$ in y-Richtung.

Somit Verzerrungen

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= z \cdot \chi_x \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= z \cdot \chi_y \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= 2z \cdot \chi_{xy} \end{aligned} \right\} (8.17)$$

mit χ_x und χ_y = Krümmungen,
 χ_{xy} = Drilling.

Krümmungen und Drillungen transformieren sich analog wie Normal- und Schubspannungen bzw. wie Dehnungen und halbe Schiebungen:



Bei allgemeinen Problemstellungen (Schalen, Faltwerke) kommen zu den Krümmungen und Drillungen $\{\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}\}$ noch die Verzerrungen der Mittelebene

bzw. der Mittelfläche $\{\epsilon_{xm}, \epsilon_{ym}, \gamma_{xym}/2\}$ dazu:

$$\epsilon_x = \epsilon_{xm} + z \cdot \chi_x, \quad \epsilon_y = \epsilon_{ym} + z \cdot \chi_y, \quad \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{\gamma_{xym}}{2} + z \cdot \chi_{xy} \quad (8.18)$$

8.4 Elastische Platten

8.4.1 Annahmen

1. Normalen zur Mittelebene bleiben gerade und senkrecht zur verformten Mittelfläche.
2. Der Zusammenhang zwischen den einzelnen Plattenschichten wird als gelöst betrachtet.
3. Die Durchbiegungen sind klein und unabhängig von z , d.h. $w = w(x, y)$.
4. Der Werkstoff ist homogen, isotrop und linear elastisch.

Bemerkungen:

- Die Annahmen 1 und 2 entsprechen den Grundannahmen der Balkentheorie (eben und senkrecht zur Stabachse bleibende Querschnitte, getrennte Einzelfasern).
- Annahme 3 führt mit Annahme 1 zu den in Kapitel 8.3 dargestellten Beziehungen.
- Aus den kinematischen Beziehungen folgt $\gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$, d.h. z ist eine Hauptrichtung.
- Zusammen mit Annahme 4 folgt aus $\gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$ weiter $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ und somit $v_x = v_y = 0$, was im Widerspruch mit den Gleichgewichtserfordernissen steht. Der Widerspruch wird wie in der Balkentheorie derzeit gelöst, dass die Querkräfte als verallgemeinerte Resultanten betrachtet werden, d.h. als für das Gleichgewicht notwendige Schnittgrößen, denen verschwindende Verformungen entsprechen.
- Analog zur Balkentheorie, bei der einachsige Spannungszustände auftreten, betrachtet man aufgrund der Annahme 2 in der Plattentheorie ebene Spannungszustände in den einzelnen Plattenschichten.

8.4.2 Plattengleichung

Das HOOKEsche Gesetz für den ebenen Spannungszustand

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (8.19)$$

mit E = Elastizitätsmodul und ν = Querdehnungszahl lautet in invertierter Form

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (8.20)$$

Einsetzen von (8.17) in (8.20) bringt

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{-Ez}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (8.21)$$

Durch Einführen der Plattensteifigkeit

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (8.22)$$

und Einsetzen in (8.1) folgt

$$\begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix} = -D \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (8.23)$$

Unter Verwendung von (8.5) erhält man somit

$$v_x = -D \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w), \quad v_y = -D \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \cdot \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w) \quad (8.24)$$

und daraus mit (8.4) die sogenannte Plattengleichung

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \Delta \Delta w = \frac{q}{D} \quad (8.24)$$

eine inhomogene Bipotentialgleichung.

8.4.3 Lösungsverfahren

Eine direkte Lösung der Plattengleichung gelingt beispielsweise für rotationssymmetrische Probleme, siehe Kapitel 8.4.4.

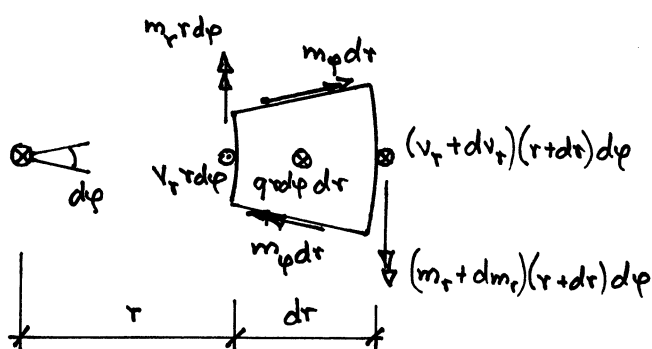
FOURIER-Reihenansätze eignen sich z.B. für Rechteckplatten mit unterschiedlichen Randbedingungen und Belastungsanordnungen. Auf dieser Basis sind viele in der Praxis oft verwendete Tabellenwerke entstanden.

Approximative Lösungen können mittels Energieverfahren (Methoden von RITZ und GALERKIN) erarbeitet werden.

Heute steht in der Praxis die Methode der finiten Elemente im Vordergrund. Damit können beliebige Randbedingungen und Belastungsanordnungen behandelt werden.

Zur Abschätzung der Grössenordnungen von Momenten, Querkräften und Durchbiegungen leisten die vielen in der Literatur dargestellten Lösungen für relativ einfache Randbedingungen und Belastungsanordnungen nach wie vor hervorragende Dienste. Nicht zuletzt sollten solche Lösungen immer wieder für Plausibilitätskontrollen der Ergebnisse herangezogen werden, die z.B. nach der Methode der finiten Elemente erhalten wurden.

8.4.4 Rotationssymmetrische Probleme



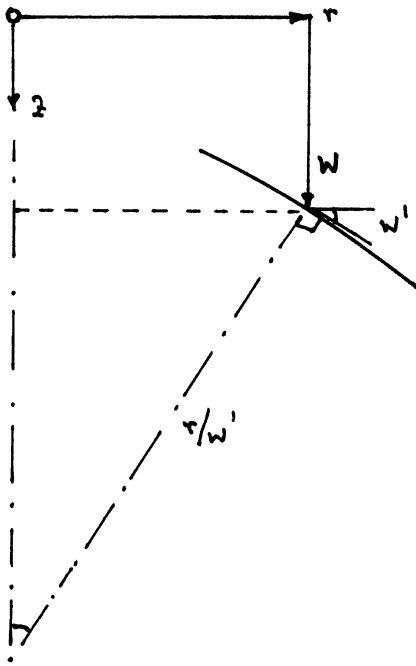
Gleichgewicht erfordert

$$\frac{d}{dr}(V_r \cdot r) + q r = 0 \quad (8.25)$$

sowie

$$\frac{d}{dr}(m_r \cdot r) - m_p - V_r \cdot r = 0 \quad (8.26)$$

N.B.: $m_{r\varphi} = V_\varphi = 0$, $r =$ einzige unabhängige Variable \rightarrow gewöhnliche Differentialgleichungen!



Für kleine w gilt (mit $' = d/dr$):

$$\chi_r = -w'' \quad , \quad \chi_\varphi = \frac{-w'}{r} \quad (8.27)$$

(8.23) reduziert sich auf

$$\begin{Bmatrix} m_r \\ m_\varphi \end{Bmatrix} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_r \\ \chi_\varphi \end{Bmatrix} \quad (8.28)$$

und die Verknüpfung von (8.25) bis (8.28) liefert

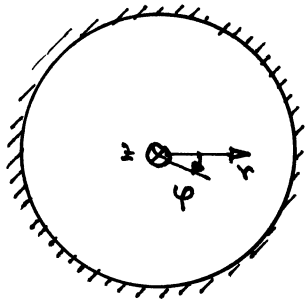
$$\frac{1}{r} \left\{ r \cdot \left[\frac{1}{r} (r \cdot w')' \right]' \right\} = \frac{q}{D} \quad (8.29)$$

Für $q = \text{const}$ und $D = \text{const}$ resultiert aus der Integration von (8.29) allgemein

$$w = \frac{q r^4}{64 D} + c_1 r^2 + c_2 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) + c_3 + c_4 r^2 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad (8.30)$$

Für Fälle, bei denen dw/dr an der Stelle $r=0$ verschwinden muss, gilt ferner $c_2 = 0$.

a) Am Rand eingespannte, gleichförmig belastete Kreisplatte



$$w'(0) = 0 \text{ und } w''(0) \text{ endlich} \rightarrow c_2 = c_4 = 0$$

Mit den Randbedingungen $w(r_0) = w'(r_0) = 0$ resultiert

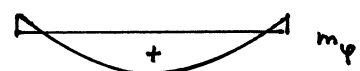
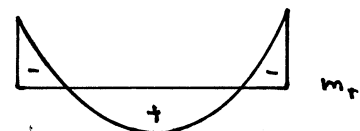
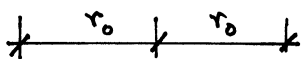
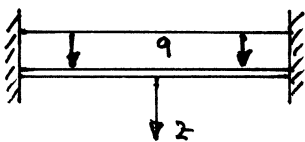
$$c_1 = \frac{-9r_0^2}{32D} \quad , \quad c_3 = \frac{9r_0^4}{64D}$$

und somit erhält man mit der Abkürzung $p = r/r_0$

$$w = \frac{9r_0^4}{64D} \cdot (1-p^2)^2 \quad (8.31)$$

sowie

$$m_r = \frac{9r_0^2}{16} \cdot [1+\nu - p^2(3+\nu)] \quad , \quad m_\varphi = \frac{9r_0^2}{16} [1+\nu - p^2(1+3\nu)] \quad (8.32)$$



N.B. Die Durchbiegung im Zentrum beträgt $3/8$ der Durchbiegung in der Mitte eines beidseitig eingespannten Trägers der Länge $2r_0$ mit $EI=D$:

$$\frac{9(2r_0)^4}{384 \cdot D} = \frac{8}{3} \cdot \frac{9r_0^4}{64D}$$

b) Am Rand einfach gelagerte, gleichförmig belastete Kreisplatte

Wie bei a): $c_2 = c_4 = 0$

Mit den Randbedingungen $w(r_0) = m_r(r_0) = 0$ resultiert

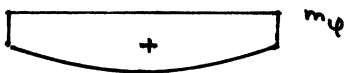
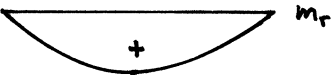
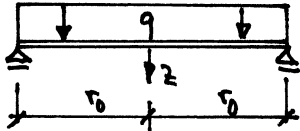
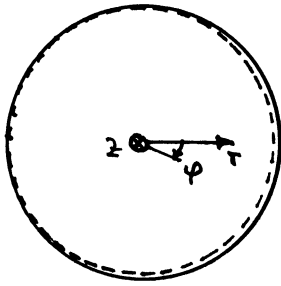
$$c_1 = \frac{-9r_0^2}{32D} \cdot \frac{3+\nu}{1+\nu}, \quad c_3 = \frac{9r_0^4}{64D} \cdot \frac{5+\nu}{1+\nu}$$

und somit

$$w = \frac{9r_0^4}{64D} (1-p^2) \cdot \left(\frac{5+\nu}{1+\nu} - p^2 \right) \quad (8.33)$$

sowie

$$m_r = \frac{9r_0^2}{16} (3+\nu)(1-p^2), \quad m_\varphi = \frac{9r_0^2}{16} [3+\nu - p^2(1+3\nu)] \quad (8.34)$$



N.B. In analoger Weise lassen sich, ausgehend von (8.29), beliebige rotations-symmetrische Probleme dünner linear elastischer Platten behandeln, z.B. Kreisringplatten mit unterschiedlichen Randbedingungen und Belastungen.

BEISPIEL 8.7

Eine am Rand eingespannte 0.36 m dicke Kreisplatte mit $2r_0 = 13.5$ m aus Beton C 30/37 muss sich selbst und eine Auflast von 2 kN/m^2 tragen.

Ermittle die langfristig zu erwartende Durchbiegung im Plattenzentrum und kontrolliere, ob die Platte ungerissen bleiben kann. Annahme $\nu = 0.2$

und $E_c = 10 \cdot 38^{1/3} = 33.6 \text{ kN/mm}^2$, $\varphi = 2$ (Kriechzahl), $f_{ctm} = 2.9 \text{ N/mm}^2$.

$$(8.22) \dots D = \frac{33.6 \cdot (0.36)^3}{12(1-0.2^2)} = 136.1 \text{ MNm}^3$$

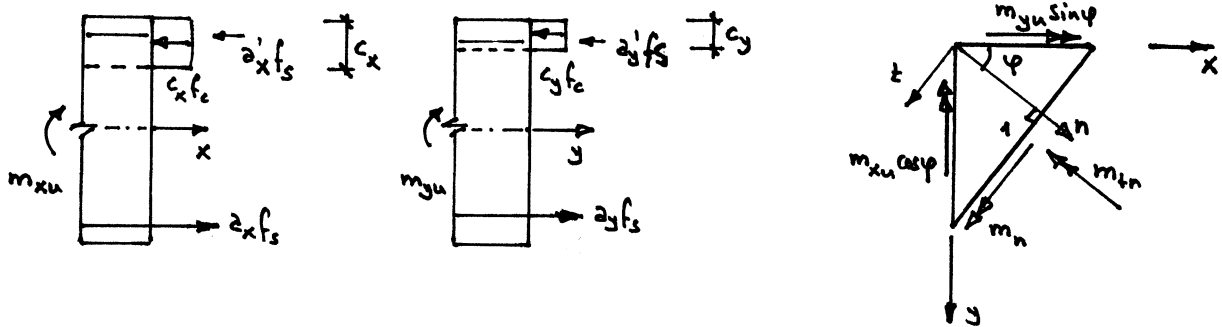
$$(8.31) \dots w_0(p=0) = \frac{(0.36 \cdot 25 + 2)}{64 \cdot 136.1} \cdot (1+2) \cdot (6.75)^4 = \underline{7.9 \text{ mm}}$$

$$(8.32)_1 \dots -m_r(p=1) = + \frac{(0.36 \cdot 25 + 2)}{8} \cdot (6.75)^2 = 62.6 \text{ kNm/m} \approx f_{ctm} \cdot \frac{h^2}{6}, \text{ o.k.}$$

8.5 Fließbedingungen

8.5.1 Normalmomenten-Fließbedingung

Wir beschränken uns auf die Betrachtung von in x- und y-Richtung orthogonal bewehrten Platten und übertragen die Spannungszustände, welche den Biegemomentszuständen m_{xu} und m_{yu} entsprechen:



Für einen beliebigen Schnitt erhält man

$$m_n = m_{xu} \cos^2 \varphi + m_{yu} \sin^2 \varphi, \quad m_{tn} = (m_{yu} - m_{xu}) \sin \varphi \cos \varphi \quad (8.35)$$

und die Membrankräfte verschwinden, $n_n = n_{tn} = 0$.

Sofern die Druckzonendicken c_x und c_y gleich sind, lässt sich dem betrachteten statisch zulässigen Spannungszustand ein verträglicher Fließgelenklinienmechanismus zuordnen, und es gilt

$$m_{nu} = m_{xu} \cos^2 \varphi + m_{yu} \sin^2 \varphi \quad (8.36)$$

Für $c_x \neq c_y$ gilt $m_{nu} \geq m_{xu} \cos^2 \varphi + m_{yu} \sin^2 \varphi$; der betrachtete statisch zulässige Spannungszustand liefert lediglich einen unteren Grenzwert der Traglast. Näherungsweise (und auf der sicheren Seite liegend) kann der Ausdruck (8.36) allgemein verwendet und mit dem analogen Ausdruck

$$m'_{nu} = m'_{xu} \cos^2 \varphi + m'_{yu} \sin^2 \varphi \quad (8.37)$$

für die Beträge der Widerstände bezüglich negativen Biegemomenten ergänzt werden.

Für die Fließgetrennlinienrichtung gilt einerseits $m_n = m_{nu}$ und andererseits $dm_n/d\varphi = dm_{nu}/d\varphi$, d.h.

$$\begin{aligned} (m_{xu} - m_x) \cdot \cos^2 \varphi_u + (m_{yu} - m_y) \sin^2 \varphi_u - 2m_{xy} \sin \varphi_u \cos \varphi_u &= 0 \\ -(m_{xu} - m_x) &+ (m_{yu} - m_y) &- 2m_{xy} \cot(2\varphi_u) &= 0 \end{aligned}$$

Division der ersten dieser beiden Gleichungen mit $\cos^2 \varphi_u$ bzw. $\sin^2 \varphi_u$ und Addition bzw. Subtraktion der zweiten bringt

$$(m_{yu} - m_y) \underbrace{(\tan^2 \varphi_u + 1)}_{1/\cos^2 \varphi_u} = 2m_{xy} \underbrace{(\tan \varphi_u + \frac{\cos^2 \varphi_u - \sin^2 \varphi_u}{2 \sin \varphi_u \cos \varphi_u})}_{1/\sin(2\varphi_u)} \rightarrow m_{yu} = m_y + m_{xy} \cot \varphi_u \quad (8.38)_1$$

bzw.

$$(m_{xu} - m_x) \underbrace{(\cot^2 \varphi_u + 1)}_{1/\sin^2 \varphi_u} = 2m_{xy} \underbrace{(\cot \varphi_u - \frac{\cos^2 \varphi_u - \sin^2 \varphi_u}{2 \sin \varphi_u \cos \varphi_u})}_{1/\sin(2\varphi_u)} \rightarrow m_{xu} = m_x + m_{xy} \tan \varphi_u \quad (8.38)_2$$

Analog erhält man

$$m'_{xu} = -m_x - m_{xy} \tan \varphi'_u, \quad m'_{yu} = -m_y - m_{xy} \cot \varphi'_u \quad (8.39)$$

Eliminierung von φ_u bzw. φ'_u aus (8.38) und (8.39) liefert die Fließbedingungen

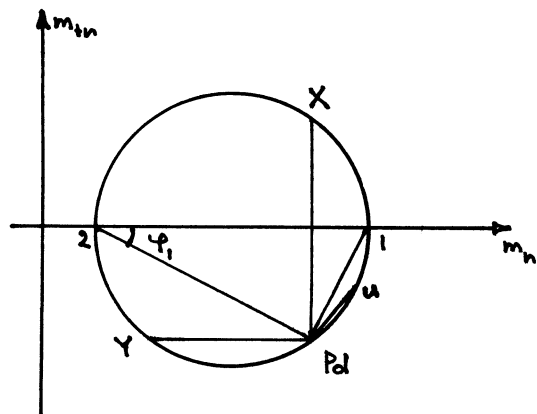
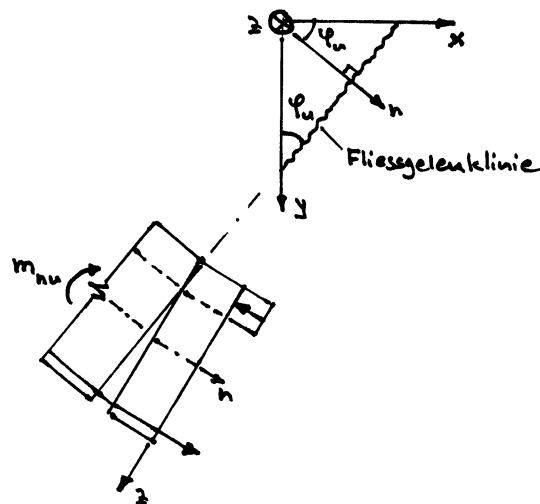
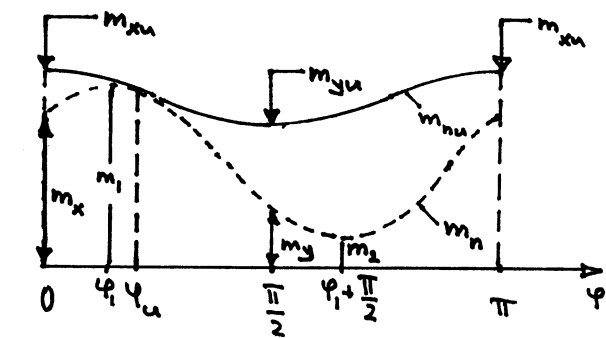
$$Y = m_{xy}^2 - (m_{xu} - m_x)(m_{yu} - m_y) = 0, \quad Y' = m_{xy}^2 - (m'_{xu} + m_x)(m'_{yu} + m_y) = 0 \quad (8.40)$$

wobei zu beachten ist, dass die Klammerausdrücke in (8.40) nicht negativ sein können.

Mit $k = |\tan \varphi_u|$ und $k' = |\tan \varphi'_u|$ gilt nach (8.38) und (8.39)

$$\begin{aligned} m_{xu} &\geq m_x + k \cdot |m_{xy}| & m'_{xu} &\geq -m_x + k' \cdot |m_{xy}| \\ m_{yu} &\geq m_y + \frac{1}{k} \cdot |m_{xy}| & m'_{yu} &\geq -m_y + \frac{1}{k'} \cdot |m_{xy}| \end{aligned} \quad (8.41)$$

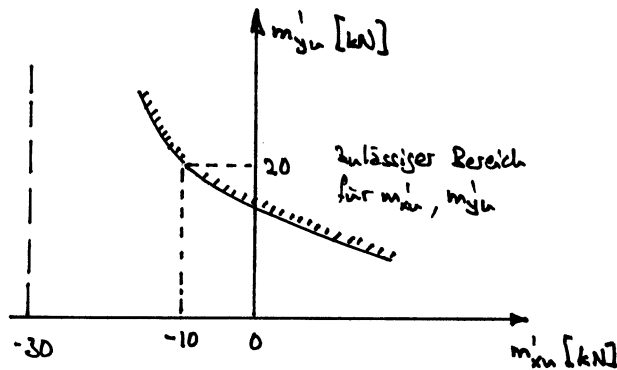
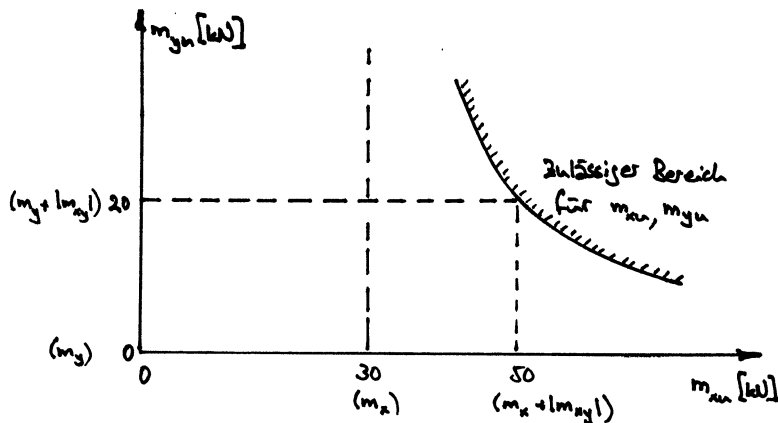
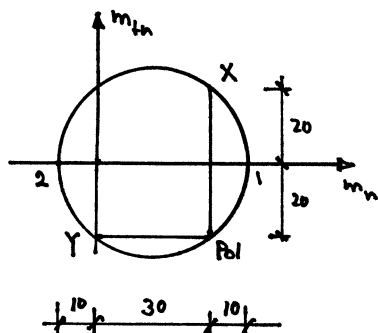
Oft werden die Parameter k und k' bei der Bemessung gleich eingesetzt (sogenannte Bemessungsmomente $m_x + |m_{xy}|$ etc.)



N.B. Im allgemeinen fällt die Flie遡gelenk= linienrichtung nicht mit einer Hauptax= mentenrichtung zusammen, $\varphi_u \neq \varphi_1$!

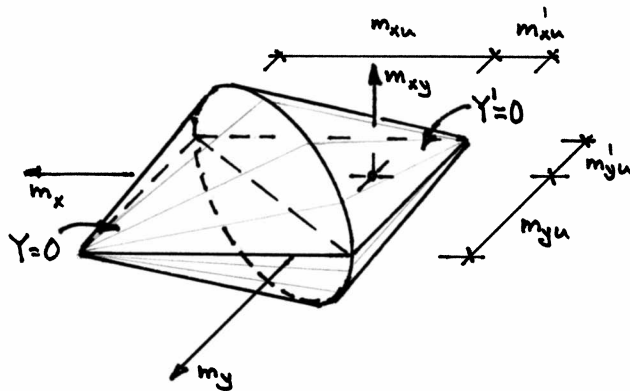
BEISPIEL 8.8

Man ermittle die erforderliche Biege widerstände für $\{m_x = 30 \text{ kN}, m_y = 0, m_{xy} = 20 \text{ kN}\}$



Gemäss (8.41) werden die zulässigen Bereiche für m_{xu}, m_{yu} bzw. m'_{xu}, m'_{yu} durch Hyperbeln abgegrenzt.

Die Fließbedingungen (8.40) entsprechen elliptischen Kegelflächen im Raum m_x, m_y, m_{xy} :



Nach der Theorie des plastischen Potentials sind der Fließfläche $Y=0$ über das Fließgesetz folgende Krümmungszinkremente zugeordnet ($\alpha \geq 0$):

$$\dot{\chi}_x = \alpha \frac{\partial Y}{\partial m_x} = \alpha (m_{yu} - m_y), \quad \dot{\chi}_y = \alpha \frac{\partial Y}{\partial m_y} = \alpha (m_{xu} - m_x), \quad 2\dot{\chi}_{xy} = \alpha \frac{\partial Y}{\partial m_{xy}} = 2\alpha m_{xy} \quad (8.42)$$

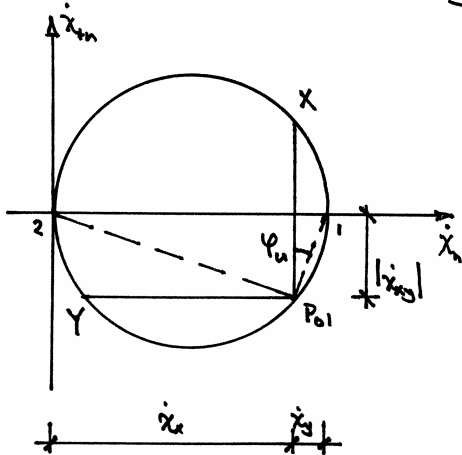
Der Vergleich mit (8.40) zeigt, dass

$$\dot{\chi}_x \dot{\chi}_y = \dot{\chi}_{xy}^2 \quad (8.43)_1$$

bzw.

$$\dot{\chi}_1 \cdot \dot{\chi}_2 = 0 \quad (8.43)_2$$

gilt. Da eine der Hauptkrümmungen verschwindet, ergeben sich abwickelbare Flächen.



Bildpunkten auf den Flächen $Y=0$ bzw. $Y'=0$ entsprechen im Bruchmechanismus abwickelbare Flächen, da eine Hauptkrümmung verschwindet. Für Bildpunkte auf der Schnittellipse der beiden Flächen sind dagegen nach dem verallgemeinerten Fließgesetz beliebige (nicht negative) Linearkombinationen der Krümmungszinkremente von $Y=0$ bzw. $Y'=0$ möglich.

8.5.2 Sandwichmodell

Siehe Kapitel 4.6.2

8.5.3 Allgemeine Fließbedingungen

Mit der zu (8.18) analogen, durch sechs Parameter bestimmten Beziehung

$$\dot{\epsilon}_x = \dot{\epsilon}_{xm} + 2 \cdot \dot{\chi}_x, \quad \dot{\epsilon}_y = \dot{\epsilon}_{ym} + 2 \cdot \dot{\chi}_y, \quad \frac{\dot{\gamma}_{xy}}{2} = \frac{\dot{\gamma}_{xym}}{2} + 2 \cdot \dot{\chi}_{xy} \quad (8.44)$$

sind die Verzerrungszinkremente in jeder Plattenschicht gegeben, und damit kann (bei gegebenen Fließbedingungen für alle Plattenschichten) die elementare Dissipationsarbeit

$$\begin{aligned} \dot{D} &= n_x \dot{\epsilon}_{xm} + n_y \dot{\epsilon}_{ym} + n_{xy} \dot{\gamma}_{xym} + m_x \dot{\chi}_x + m_y \dot{\chi}_y + m_{xy} 2 \dot{\chi}_{xy} \\ &= \dot{D}(\dot{\epsilon}_{xm}, \dot{\epsilon}_{ym}, \dot{\gamma}_{xym}, \dot{\chi}_x, \dot{\chi}_y, \dot{\chi}_{xy}) \end{aligned} \quad (8.45)$$

berechnet werden, und die zugehörigen verallgemeinerten Spannungen ergeben sich aus den partiellen Ableitungen von \dot{D} nach den zugehörigen verallgemeinerten Verzerrungen

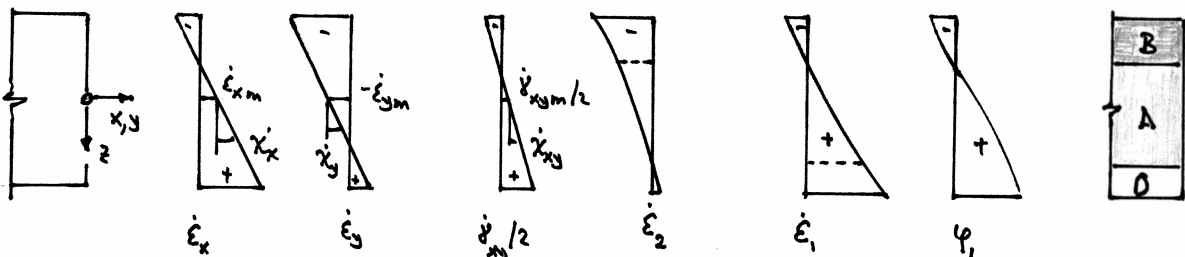
$$n_x = \frac{\partial \dot{D}}{\partial \dot{\epsilon}_{xm}}, \dots, m_x = \frac{\partial \dot{D}}{\partial \dot{\chi}_x}, \dots \quad (8.46)$$

Die Hauptwerte

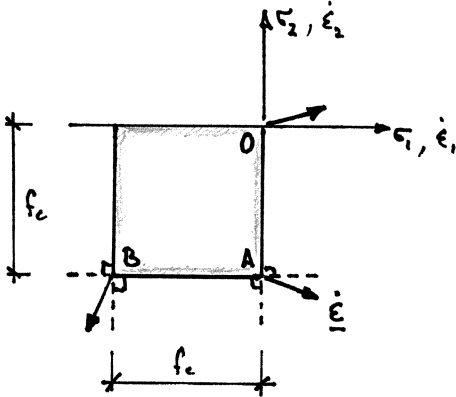
$$\dot{\epsilon}_{1,2} = \frac{\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y}{2}\right)^2 + \frac{\dot{\gamma}_{xy}^2}{4}} \quad (8.47)$$

der Verzerrungszinkremente variieren im allgemeinen hyperbolisch über die Plattendicke, und die Hauptrichtungen variieren gemäss

$$\tan(2\varphi_1) = \frac{\dot{\gamma}_{xy}}{\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y} \quad (8.48)$$



Aus der Bedingung $\dot{\epsilon}_x \dot{\epsilon}_y = (\dot{\gamma}_{xy}/2)^2$ für die Nullstellen von $\dot{\epsilon}_1$ und $\dot{\epsilon}_2$ ergibt sich eine quadratische Gleichung in z . Deshalb ergeben sich im allgemeinen höchstens zwei Niveaus z_1 und z_2 , für welche dieser Fall eintritt.



Arbeitet man beispielsweise mit der quadratischen Fließbedingung für Beton im ebenen Spannungszustand (vgl. Kapitel 4.5.2 a) können demgemäß über die Plattendicke verschiedene Zonen unterschieden werden, die den Regimes 0, A und B entsprechen.

Prinzipiell lässt sich die Fließfläche im Raum n_x, n_y, n_{xy} für verschwindende Normalkräfte punktweise bestimmen, indem für jeden angenommenen Satz $\dot{\chi}_x, \dot{\chi}_y, \dot{\chi}_{xy}$ die Größen $\dot{\epsilon}_{xm}, \dot{\epsilon}_{ym}, \dot{\gamma}_{xym}/2$ variiert werden, bis $n_x = n_y = n_{xy} = 0$ ist.

Im allgemeinen sind iterative numerische Lösungsverfahren erforderlich, um die zu einem Satz $\{n_x, \dots, n_x, \dots\}$ gehörigen verallgemeinerten Verzerrungen $\{\dot{\chi}_x, \dots, \dot{\epsilon}_{xm}, \dots\}$ zu bestimmen. Unter zusätzlichen Voraussetzungen (z.B. reine Drillung, obere und untere Bewehrung in x- bzw. y-Richtung identisch) sind auch analytische Lösungen möglich.

8.6 Gleichgewichtslösungen

8.6.1 Übersicht

Gleichgewichtslösungen beruhen auf dem statischen oder unteren Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie. Sie gehen von einem statisch zulässigen Spannungszustand (Gleichgewichtsbedingungen und statische Randbedingungen erfüllt) aus, der die Fließbedingungen nirgends verletzt.

Statisch zulässige Spannungszustände können auf verschiedene Weise gefunden werden:

- Das heute bei weitem am meisten verbreitete Vorgehen stützt sich auf die elastische Plattentheorie. Dazu stehen einerseits viele Lösungen in Lehrbüchern und Tabellenwerken für Fälle mit relativ einfacher Geometrie und Lastanordnung zur Verfügung. Andererseits gibt es eine Vielzahl von Computerprogrammen, mit denen nach der Methode der finiten Elemente Fälle mit beliebiger Geometrie und Belastung behandelt werden können. Dabei werden die Biegemomente (8.41) meist mit $k = k' = 1$ verwendet.

N.B.: Die nach der elastischen Platten Theorie z.B. bei konzentrierten Kräften sowie Diskontinuitäten der Platten Geometrie auftretenden Singularitäten (Momentenspitzen) werden in der Regel nicht voll abgedeckt, sondern über gewisse Plattenbreiten ausgemittelt. Damit verlässt man streng genommen die statische Methode der Plastizitätstheorie, da man den lokalen Spannungszustand nur angenähert betrachtet (solange keine sanftere elastisch-plastische Analyse durchgeführt wird bzw. ein korrekter Gleichgewichtszustand betrachtet wird).

- Eine zweite Methode verzichtet auf die Erfüllung der elastischen Verträglichkeitsbedingungen und geht von Ansätzen für die Momente aus.

a) Für einfache Geometrie und Lastanordnung existieren viele Ansätze, denen sich bei entsprechender Anordnung der Bemehrung verträgliche Bruchmechanismen zuordnen lassen und die within vollständigen Lösungen im Rahmen der Plastizitätstheorie entsprechen. Derartige Lösungen lassen sich näherungsweise auf kompliziertere Fälle anwenden und leisten eine sehr grosse Hilfe bei überschlägigen Berechnungen.

b) Die Streifenmethode nach HILLERBORG geht von der Betrachtung streifenförmiger Biegeelemente in zwei (orthogonalen oder schiefen) Richtungen aus \rightarrow sogenannte einfache Streifenmethode. Zur Behandlung von Einzelkräften kann diese durch Hinzunahme

entsprechender Momentenansätze für punktförmig gestützte Platten erweitert werden → sogenannte erweiterte Streifenmethode.

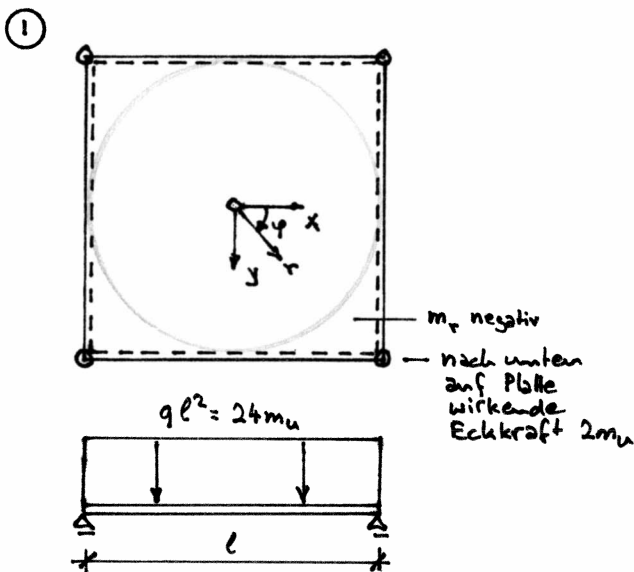
c) Die Methode der stellvertretenden Rahmen liefert lediglich eine globale Gleichgewichtslösung, da lokale Gleichgewichtsbedingungen nicht streng erfüllt werden. Es handelt sich um eine in der Praxis bewährte und beliebte Methode für Flach- und Pilzdecken.

8.6.2 Momentenfelder

In der Folge werden einige ausgewählte Momentenfelder vorgestellt.

Quadratplatte unter $q = \text{const}$

Die Beispiele 8.1, 8.5 und 8.6 beschreiben zwei wichtige Fälle, nämlich die einfach gelagerte und die eckgestützte Quadratplatte unter $q = \text{const}$:

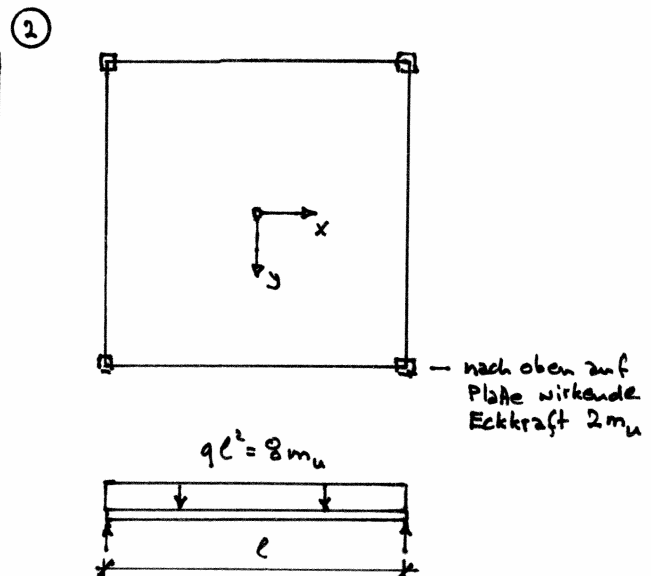


Einsetzen von (8.8) und (8.9) - mit negativem Vorzeichen für m_{xy} - in (8.40)₁ zeigt, dass die Fließbedingung für positive Momente in allen Punkten x, y gerade erfüllt ist, $Y \equiv 0$.

Einsetzen in (8.14) zeigt, dass die Hauptmomententrajektorien konzentrische Kreise und die dazu orthogonalen radialen Strahlen sind, und (8.15) bringt

$$m_1 = m_\varphi = m_u = \text{const}, \quad m_2 = m_r = m_u \left(1 - \frac{4r^2}{\rho^2}\right)$$

In den Eckspitzen ausserhalb des der Platte eingeschriebenen Kreises ist m_r negativ. Dort ist obere Bewehrung erforderlich.



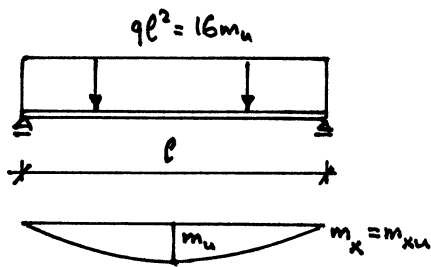
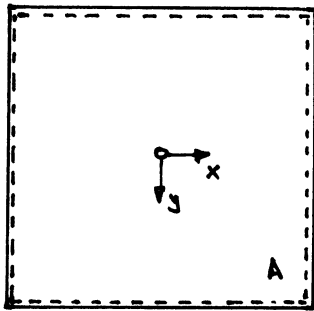
Wie im Fall ① gilt $Y \equiv 0$.

Die Hauptmomententrajektorien wurden in Beispiel 8.3 dargestellt (Hyperbeln $x^2 - y^2 = \text{const}$ und $xy = \text{const}$).

Es gilt $m_1 = m_u = \text{const}$ entlang $x^2 - y^2 = \text{const}$
 $m_2 = m_u \left(1 - \frac{4r^2}{\rho^2}\right)$ entlang $xy = \text{const}$

Wie bei ① ist m_2 in den Eckspitzen ausserhalb des der Platte eingeschriebenen Kreises negativ.

③



Nach dem Ansatz (B.8) in Verbindung mit $m_{xy} \equiv 0$ ist nur untere Bewehrung erforderlich und diese darf theoretisch den parabolischen Momentenverläufen entsprechend abgestuft werden, wenn der Ankerkräfteinfluss vernachlässigt wird.

Um die Lösungen ① und ③ miteinander zu vergleichen, wird das "Momentenvolumen"

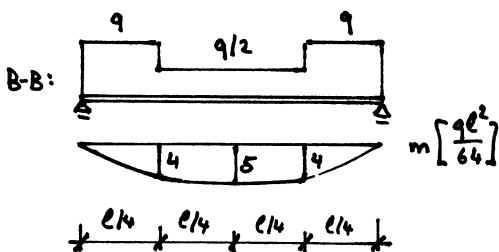
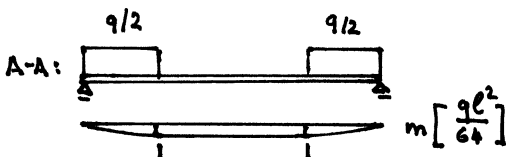
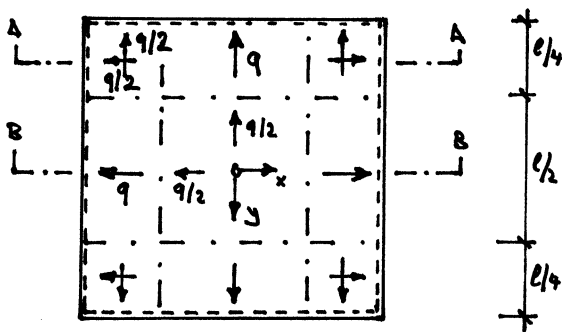
$$\mu = \int_A (m_{xu} + m_{yu}) dA \quad [Wm^2] \quad (8.49)$$

Vergleichen:

$$\mu^{③} = 2 \cdot \frac{2}{3} m_u \cdot \ell^2 = \frac{q\ell^4}{12}$$

Die Lösung ① erfordert eine durchgehende untere Bewehrung in x- und y-Richtung für je $q\ell^2/24$, was nach (8.49) bereits einem Momentenvolumen von $q\ell^4/12$ entspricht. Dazu kommt noch obere Bewehrung in den Eckspitzen, d.h. $\mu^{①} > \mu^{③}$?

④



Im Innenbereich und in den Eckbereichen wird q je hälftig den Tragrichtungen x und y zugewiesen. In den randnahen Mittelbereichen wird das volle q senkrecht zum nahen Rand abgetragen.

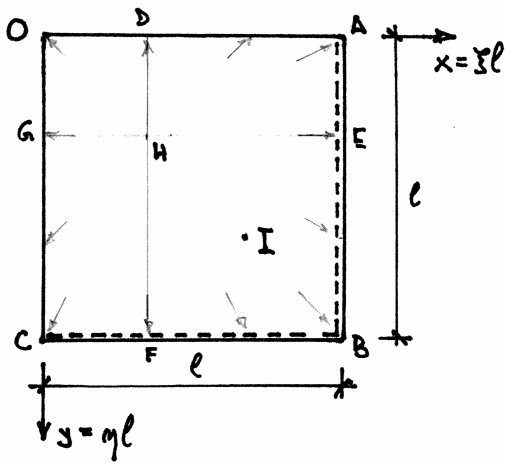
$$\mu^{④} = 4 \cdot q\ell^4 \cdot \left[\left(\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{64} + \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{64} \right) + \frac{1}{8} \left(4 + \frac{2}{3} \cdot 1 \right) \cdot \frac{1}{64} + \frac{1}{2} \int_0^{1/4} \left(\frac{3}{8} \xi - \frac{\xi^2}{2} \right) d\xi \right] = \frac{13q\ell^4}{192}$$

Im Vergleich zu ③ ergibt sich ein kleinerer Bewehrungsaufwand:

$$\mu^{①} / \mu^{③} = \frac{13}{16} \quad (81.25\%)$$

N.B. Die Lösungen ③ und ④ entsprechen Ansätzen nach der Streifenmethode. Wie man sieht, liefern diese Ansätze im Vergleich zu ① kleinere und einfacher anzunehmende Bewehrungen.

An zwei benachbarten Rändern einfach gelagerte Quadratplatte unter $q = \text{const}$



Ansatz: $m_x = \frac{3}{2} m_u \xi(1-\xi)$

$m_y = \frac{3}{2} m_u \eta(1-\eta)$

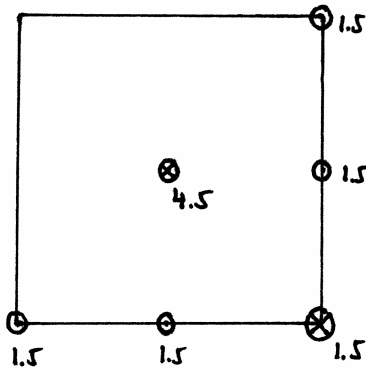
$m_{xy} = -\frac{3}{4} m_u (\xi + \eta - \xi\eta)$

(8.5) ... $v_x = \frac{3m_u}{4l} (1-3\xi), v_y = \frac{3m_u}{4l} (1-3\eta)$

(8.6) ... $q l^2 = \frac{9m_u}{2}$

(8.12) ... siehe Richtungspfeile für v_0
 Bereiche ODHG, HEBF, DAEN, HFCG
 H = Driftelpunkt ($\xi = \eta = 1/3$).

Resultierende Vertikalkräfte [m_u]



OA ... $m_y = 0, v_y + \frac{dm_{xy}}{dx} = 0$ } frei
 OC ... $m_x = 0, v_x + \frac{dm_{xy}}{dy} = 0$ }

AB ... $m_x = 0, v_x + \frac{dm_x}{dy} = -\frac{3m_u}{2l}$

BC ... $m_y = 0, v_y + \frac{dm_y}{dx} = -\frac{3m_u}{2l}$

B ... Eckkraft $\frac{3m_u}{2}$

A, C ... Eckkräfte $-\frac{3m_u}{2}$

} total $\frac{9m_u}{2}$

(8.40), ... $Y = m_u^2 \cdot \left[\frac{9}{16} (\xi + \eta - \xi\eta)^2 - \left(1 - \frac{3}{2}\xi + \frac{3}{2}\xi^2\right) \left(1 - \frac{3}{2}\eta + \frac{3}{2}\eta^2\right) \right]$

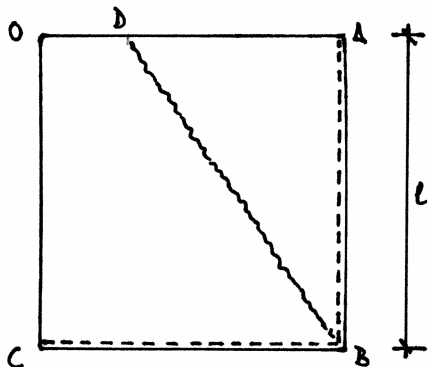
$= -m_u^2 \cdot \left\{ \left[1 - \frac{3}{4}(\xi + \eta)\right]^2 + \frac{3}{8}\xi^2 \left(1 - \frac{3}{2}\eta\right)^2 + \frac{3}{8}\eta^2 \left(1 - \frac{3}{2}\xi\right)^2 \right\}$

$Y = 0$ für $\xi = \eta = 2/3$... Punkt I

$Y < 0$ für alle andern ξ, η

N.B. $m_{xu} = m_{yu} = m_u$

Das extremste negative Moment tritt bei B auf, dort gilt $m_1 = -m_2 = \frac{3}{4} m_u$



Fließgelenklinienmechanismus mit Fließgelenklinie DB

$W = q \cdot l \cdot a \cdot \frac{1}{3} + q \cdot l \cdot (l-a) \cdot \frac{1}{2} = \frac{q l}{6} (3l - a)$

$D = m_u \cdot \left(\frac{l}{a} + \frac{a}{l} \right)$

$W = D \dots q = \frac{6m_u}{l^2} \cdot \frac{l^2 + a^2}{3l - a}$

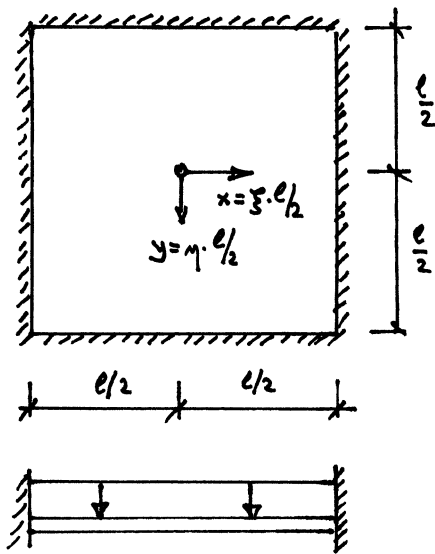
$q \rightarrow \text{Min!} \dots \frac{dq}{da} = 0 : 3a^2 + 2al - 3l^2 = 0$

$\rightarrow a_{\text{opt}} = \frac{\sqrt{10} - 1}{3} l \approx 0.72l$

$(q l^2)_{\text{opt}} \approx 5.55 m_u$

Der oben hergeleitete untere Grenzwert der Traglast von $4.5 m_u$ beträgt 81% des hier ermittelten oberen Grenzwerts von $5.55 m_u$.

Rundherum eingespannte Quadratplatte unter $q = \text{const}$



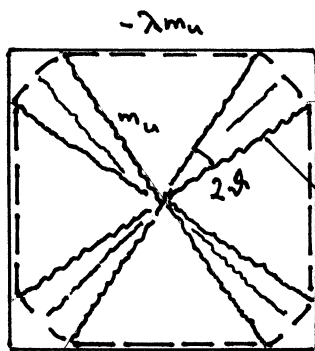
Ansatz: $m_x = m_u (1 - \xi^2 \cdot \alpha - \xi^4 \cdot \beta + \xi^2 \eta^2)$

$m_y = m_u (1 - \eta^2 \cdot \alpha - \eta^4 \cdot \beta + \xi^2 \eta^2)$

$m_{xy} = m_u [-\xi \eta \cdot \alpha + \xi \eta (\xi^2 + \eta^2) \cdot \gamma]$

mit $\alpha = \frac{4}{3} + \frac{\sqrt{5}}{9}$
 $\beta = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{5}}{9}$
 $\gamma = 1 - \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{9}$

(8.6)... $q l^2 = \left(32 + \frac{8\sqrt{5}}{3}\right) m_u \approx \underline{37.96 m_u}$



Fließgelenklinienmechanismus mit Einsenkung λ in Plattenmitte, Kreisfächer bei Diagonalen:

$\frac{1}{8} W = \frac{q l^2}{3} \left[\frac{\tan(\frac{\pi}{4} - \phi)}{8} + \frac{\lambda}{8 \cos^2(\frac{\pi}{4} - \phi)} \right]$

$\frac{1}{8} D = m_u (1 + \lambda) [\tan(\frac{\pi}{4} - \phi) + \lambda]$

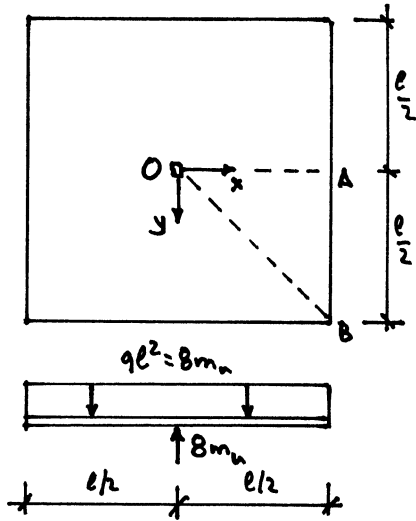
$W = D$ und $q \rightarrow \text{Min!} \dots \phi_{\text{opt}} = 14.3^\circ$

$(q l^2)_{\text{opt}} = \underline{21.75 \cdot (1 + \lambda) m_u}$

Der oben hergeleitete untere Grenzwert der Traglast von $37.96 m_u$ beträgt ($\lambda = 1$) 87% des hier ermittelten oberen Grenzwerts von $43.5 m_u$.

Für dieses Problem ist auch eine vollständige Lösung bekannt (FOX 1974)... $42.85 m_u$.

5



Ansatz für Bereich OAB:

$$m_x = 0, m_y = m_u \left(\frac{y^2}{x^2} - 1 \right), m_{xy} = m_u \frac{y}{x} \left(1 - \frac{4x^2}{l^2} \right) \quad (8.50)$$

$$(8.6) \dots q\epsilon^2 = 8m_u$$

$$(8.5) \dots v_x = \frac{m_u}{x} \left(1 - \frac{4x^2}{l^2} \right), v_y = v_x \cdot \frac{y}{x}$$

$$(8.12) \dots v_0 \text{ radial}$$

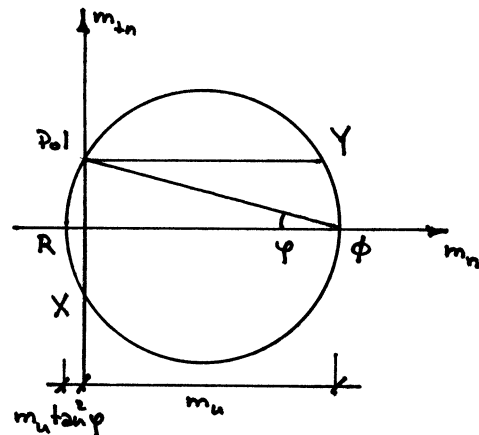
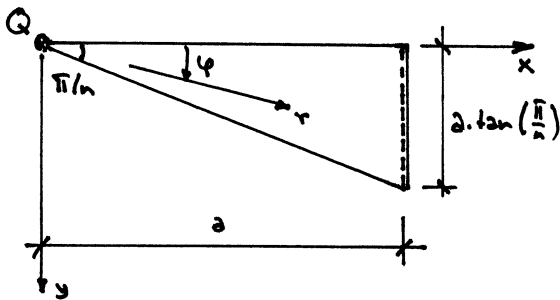
$$AB \dots m_x = 0, v_x + \frac{dm_{yx}}{dy} = 0 \dots \text{Rand ist frei}$$

Mit $m_{xu} = m_{yu} = m'_{xu} = m'_{yu} = m_u$ wird (8.40), nur für $x=y=0$ erfüllt, (8.40)₂ nur für $y=0$.

Der Ansatz (8.50) entspricht einer im Zentrum gestützten, am Rand freien Quadratplatte unter $q = 8m_u/l^2 = \text{const}$

Am Rand einfach gelagerte, regulär polygonale Platten

6



$$\text{Ansatz} \quad m_\varphi = m_1 = m_u, \quad m_r = m_2 = -m_u \tan^2 \varphi \quad (8.51)$$

Diesem Ansatz entsprechen die Momente

$$m_x = 0, m_y = m_u \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \right), m_{xy} = -m_u \frac{y}{x}$$

$$(8.6) \dots q = 0$$

(8.5), ... $v_x = -\frac{m_u}{x}$... somit konzentrierte Kraft $Q = 2nm_u \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$ im Plattenzentrum

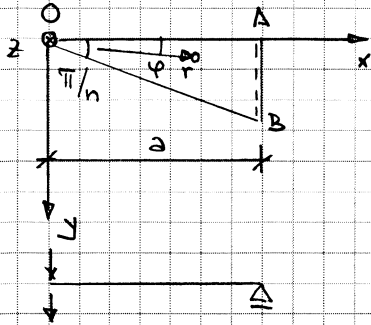
$$\text{Stützkkräfte am Plattenrand} \dots v_x + \frac{dm_{yx}}{dy} \Big|_{x=a} = -2m_u/a$$

$$\text{Eckkräfte} \dots n \cdot 2m_u \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\text{Vertikalgleichgewicht} \dots Q = \underbrace{2na \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot \frac{2m_u}{a}}_{\text{Stützkkräfte}} - \underbrace{n \cdot 2m_u \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}_{\text{Eckkräfte}} = 2nm_u \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Am Rand einfach gelagerte, regulär polygonale Platten unter zentraler Einzellast

Hinweise



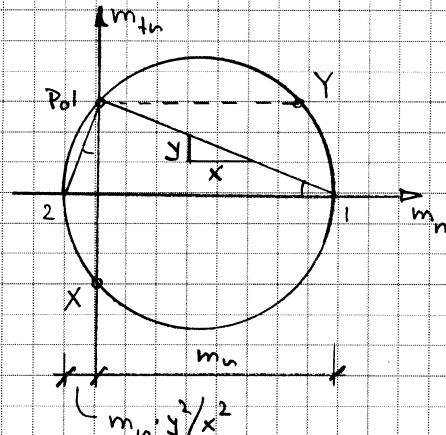
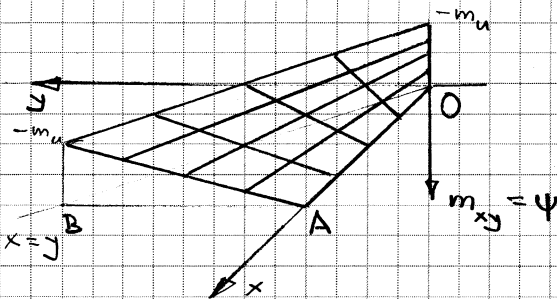
Der Ansatz

$$m_\varphi = m_1 = m_n, \quad m_r = m_2 = -m_n \cdot \tan^2 \varphi$$

ist zu

$$m_x = 0, \quad m_y = m_n \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right), \quad m_{xy} = -m_n \cdot \frac{y}{x^2}$$

äquivalent:



Querskräfte:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= m_{x,x} + m_{x,y} = -\frac{m_n}{x} = \psi_{,y} \\ v_y &= m_{y,x} + m_{y,y} = -\frac{m_n y}{x^2} = -\psi_{,x} \end{aligned} \right\} \psi = m_{xy}, \quad \underline{v} = \text{rot}(0, 0, \psi)$$

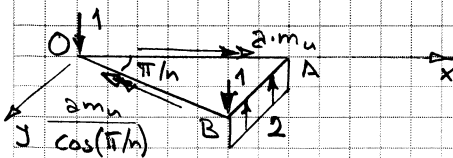
'Bänstahl' (2.4.2.9)

Die Querskräftvektoren sind radial gerichtet. Da das Querskräftfeld einem reinen Rotationsfeld entspricht, tritt keine Flächenlast auf, $q_z = 0$.

Randquerskräfte entlang AB: $v_x + m_{y,x,y} = -2m_n/a$

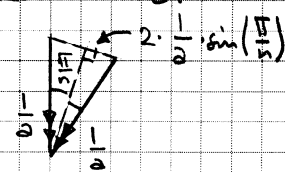
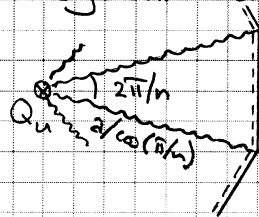
Eckkraft in B: $m_n \cdot \tan(\pi/n)$

Schnittkörperdiagramm [$m_n \tan(\pi/n)$]: Fließgelenklinienmechanismus:



Resultierende zentrale Einzellast

$$Q_u = 2n \cdot m_n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$



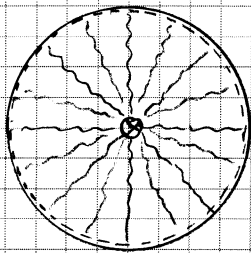
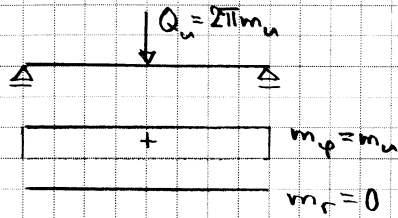
$$W = Q \cdot l$$

$$J = n \cdot \frac{a}{\cos(\pi/n)} \cdot m_n^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) = 2n m_n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Der Fließgelenklinienmechanismus ist mit dem angenommenen Spannungszustand verträglich: vollständige Lösung!

Spezialfall $n \rightarrow \infty$, Kreisplatte

Hinweise

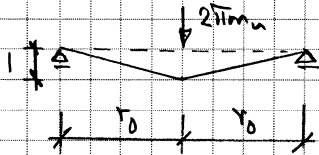


Die Radialmomente verschwinden, es treten nur $m_p = m_r = m_u$ auf.

Die Bruchlast beträgt $Q_u = 2\pi m_u$

Als mit dem Spannungszustand verträglicher Fließgelenklinienmechanismus resultiert ein Kreiskegelförmiger Mechanismus.

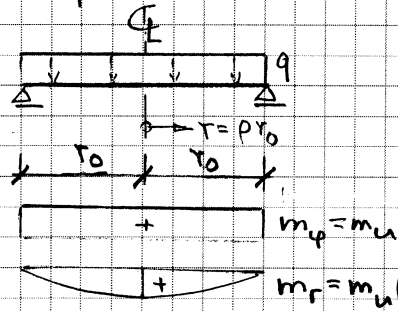
$$\left. \begin{aligned} W &= Q \cdot l \\ D &= 2\pi m_u \end{aligned} \right\} Q = 2\pi m_u$$



Das Resultat $D = 2\pi m_u$ für einen Kreiskegelmechanismus mit Spitzeneinsenkung l wird oft verwendet. Kenntnis dieses Ergebnisses erleichtert Fließgelenklinienberechnungen erheblich.

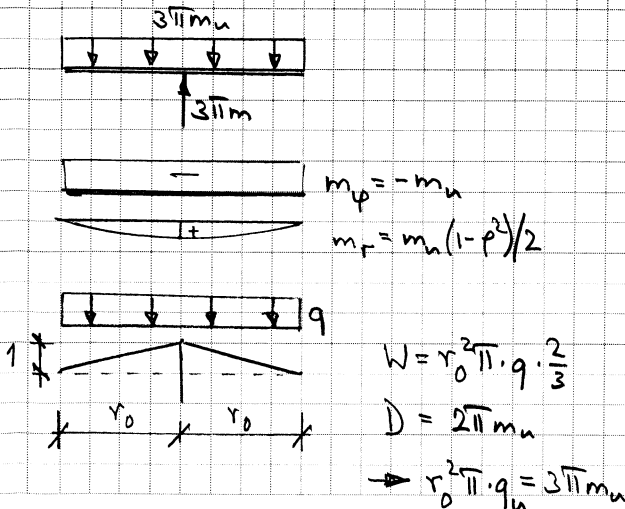
Zentrisch gestützte, gleichförmig belastete Kreisplatte

Gemäss ① erhält man für eine am Rand einfach gelagerte, gleichförmig belastete Kreisplatte Skript 8.22

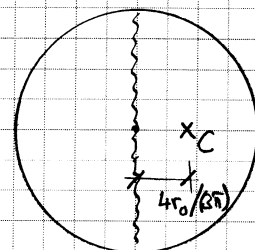


$$q \cdot r_0^2 \pi = 24 m_u \cdot \frac{r_0^2 \pi}{(2r_0)^2} = 6\pi m_u$$

Superponiert man die Hälfte dieser Momente mit $-3/2$ der Momente des oben dargestellten Spezialfalls, resultiert die Lösung für eine am Rand freie, zentrisch gestützte Platte unter gleichmässig verteilter Belastung:



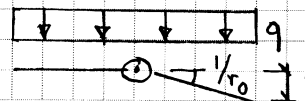
Alternativer Mechanismus mit einer einzigen Fließgelenklinie:



$$W = \frac{q r_0^2 \pi}{2} \cdot \frac{4r_0}{3\pi} \cdot \frac{1}{r_0}$$

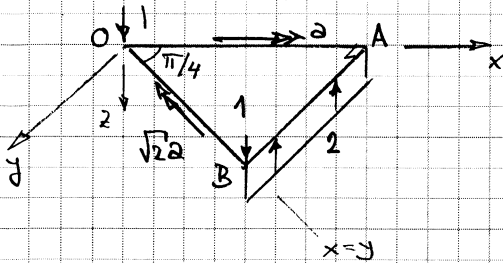
$$D = 2r_0 \cdot m_u \cdot \frac{1}{r_0}$$

$$\Rightarrow q r_0^2 \pi = 3\pi m_u$$



Spezialfall $n=4$, Quadratplatte

Schnittkörperdiagramm $[m_u]$



Dem (negativen) Spannungszustand entsprechend der vorbestehenden Darstellung wird

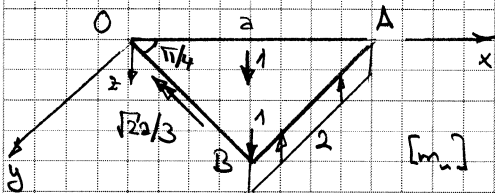
$$m_{xy} = -m_u \cdot xy/a^2$$

superponiert. Dieser Spannungszustand entspricht einer gleichmäßig verteilten Last $q = 2m_u/a^2$. Man erhält die Lösung für eine zentral gestützte gleichmäßig belastete Quadratplatte.

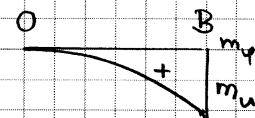
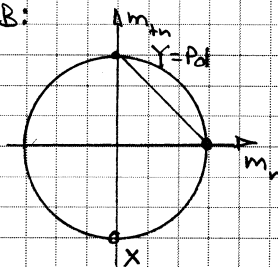
Skript (8.9), (8.6)

Resultierende zentrale Einzellast

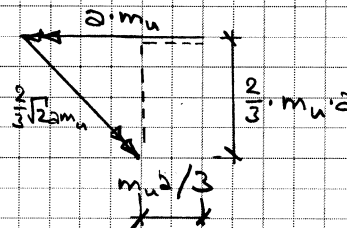
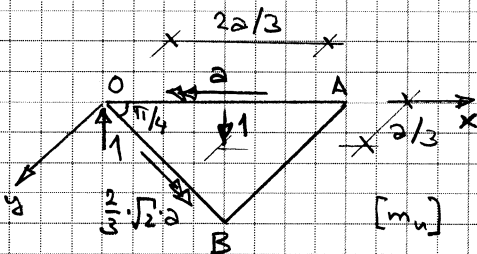
$$Q_u = 8m_u$$



OB:



$$m_{xy} = -m_u \cdot \frac{xy}{a^2}$$

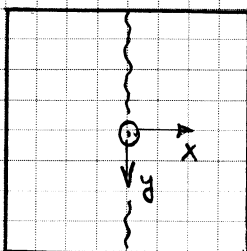


Aus der Superposition zum Oktanten resultiert

$$m_x = 0, \quad m_y = m_u \left(\frac{y^2}{x^2} - 1 \right), \quad m_{xy} = m_u \cdot \frac{y}{x} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)$$

Skript (8.10)

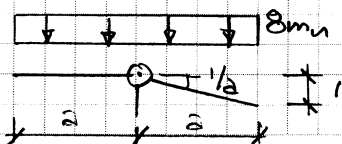
Mit Spannungszustand verträglicher Fließgelenklinienmechanismus:



$$\left. \begin{aligned} W &= 2a^2 \cdot q \cdot \frac{1}{2} \\ D &= 2a m_u \cdot \frac{1}{a} \end{aligned} \right\} 4a^2 q = 8 m_u$$

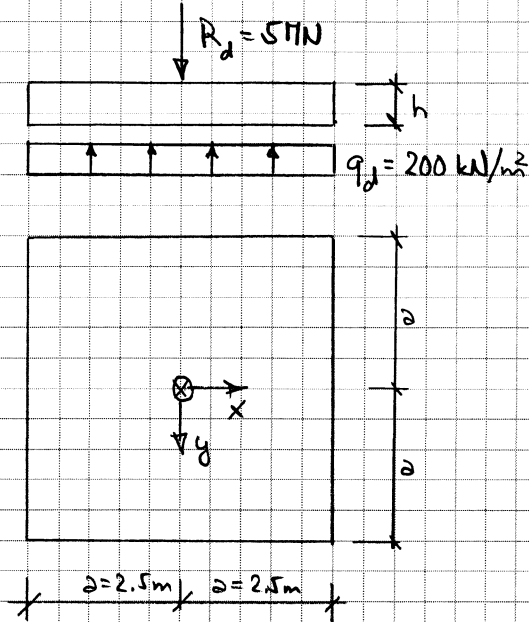
Die im Skript dargestellte Lösung ⑤ ist vollständig,

$$\text{Traglast} = 8 m_u.$$



Anwendungsbeispiel - Quadratisches Einzelfundament

Hinweise



$$m_{Rd, erf} = \frac{571 \text{ kN}}{8} = 71.375 \text{ kN/m}$$

Annahme $f_{cd} = 20 \text{ N/mm}^2$, $f_{ctd} = 4.35 \text{ N/mm}^2$

$$d \approx (2+5) \cdot \sqrt{\frac{71.375}{20}} = 0.35 \div 0.88 \text{ m}$$

Skript (2.6)

Wahl $d = 0.6 \text{ m}$

$$w = 1 - \sqrt{1 - \frac{2 \cdot 71.375}{0.6^2 \cdot 20}} = 0.0909$$

Skript (2.3)

$$a_s = 0.0909 \cdot 0.6 \cdot \frac{20}{4.35} = 2509 \text{ mm}^2/\text{m}$$

Skript (2.1)

Wahl $\phi 26 @ 200 \hat{=} 2655 \text{ mm}^2/\text{m}$

$$2655 \cdot 4.35 = 1155 \text{ kN/m}$$

$$1155 / 20 = 58 \text{ mm}$$

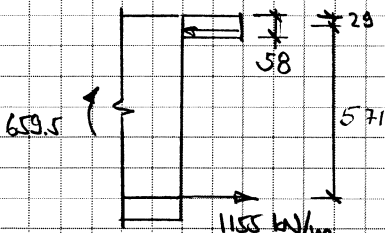
$$\rightarrow m_{Rd} = \left(600 - \frac{58}{2}\right) \cdot 1155 = 659.5 \text{ kNm/m, o.k.}$$

Mit $c_{nom} = 50 \text{ mm}$ und $d_m =$

600 mm resultiert wegen $\phi = 26 \text{ mm}$

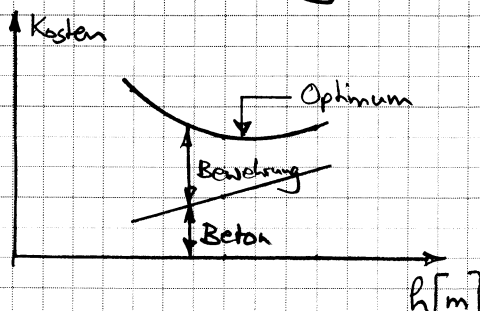
$$h = 600 + 50 + 26 = 676 \text{ mm}$$

Wahl $h = 0.7 \text{ m}$



Bemerkungen:

- Da R_d über eine endliche (Stützen-) Fläche einleitet wird, liegen die effektiven Beanspruchungen etwas tiefer.
- Die Kosten des Betons und der Randschotung steigen etwa proportional zur Plattendicke h , jene der Bewehrung nehmen näherungsweise umgekehrt proportional zu h ab:



Für die Gesamtkosten ergibt sich im Bereich des Optimums ein flacher Kurvenverlauf, d.h. die Kosten sind nicht sehr empfindlich abhängig von der Wahl von h .

- Zusätzlich Durchstanzen zu berücksichtigen \rightarrow Querkraftbewehrung & evtl. h grösser!

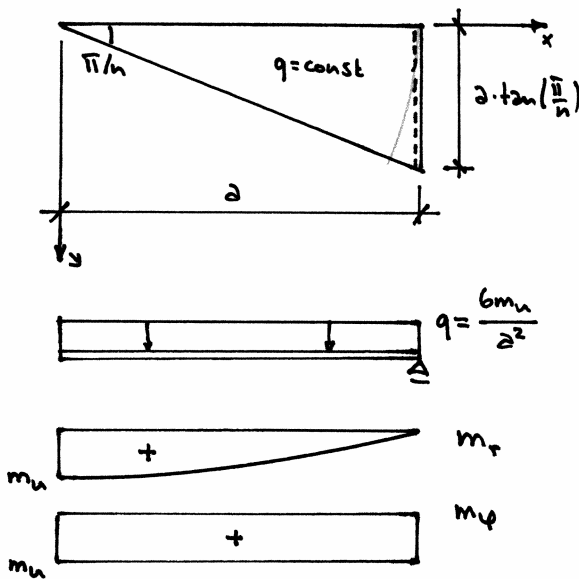
⑦ Der in ① verwendete Ansatz

$$m_\varphi = m_1 = m_u, \quad m_r = m_2 = m_u \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \quad (8.52)$$

(mit a statt $l/2$) liefert die Lösung

$$q = \frac{6m_u}{a^2}$$

für regulär polygonale Platten unter einer gleichmässig verteilten Flächenlast, die am Rand einfach gelagert sind:



Die totale auf der Platte aufgebrachte Last beträgt

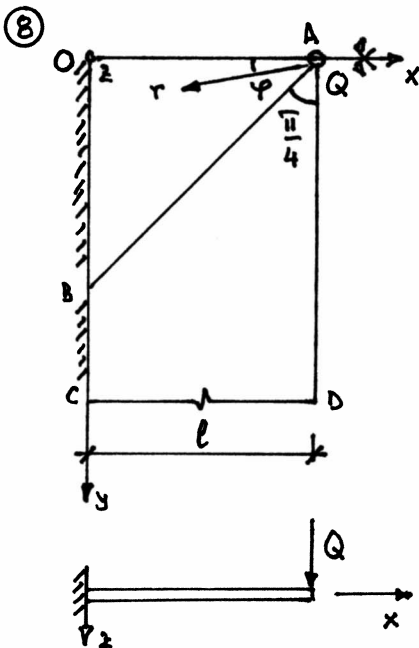
$$6n m_u \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

d.h. das Dreifache des Werts einer im Plattenzentrum aufgebrachten Einzellast.

Ausserhalb des der Platte einbeschriebenen Kreises ist m_r negativ und somit obere Bewehrung erforderlich.

Für $n \rightarrow \infty$ (Kreisplatte) resultiert eine Gesamtlast von $6\pi m_u$.

Kragplatten unter Einzellasten



In y -Richtung unendlich lange Kragplatte der Breite l mit Einzellast Q in A.

Ansatz

$$OAB \dots m_\varphi = m_1 = m_u, \quad m_r = m_2 = -m_u$$

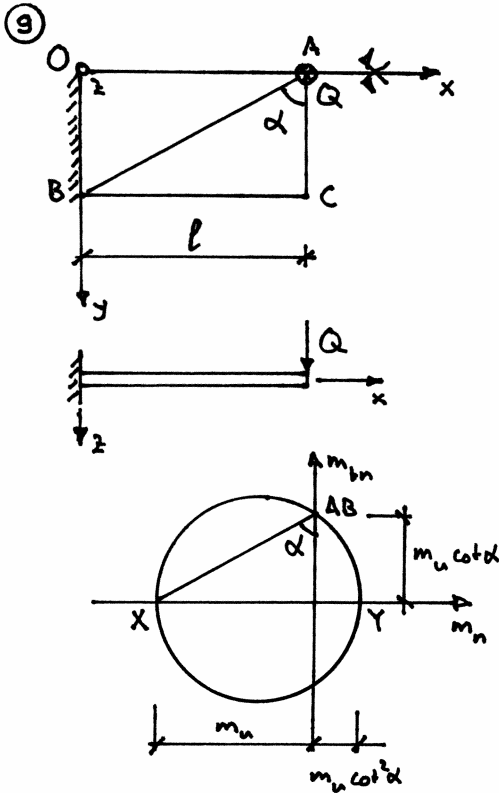
$$ABCD \dots m_x = m_y = 0, \quad m_{xy} = m_u$$

$$(8.26) \dots v_r = -\frac{2m_u}{r} \quad \text{in OAB}$$

$$(8.16)_3 \dots V_y = -m_u \quad \text{entlang AD}$$

Somit

$$Q = 2 \cdot \left(\frac{2m_u}{r} \cdot r \cdot \frac{\pi}{4} + m_u \right) = \underline{\underline{(2 + \pi)m_u}}$$



Kurze Kragplatte mit $\alpha \geq \pi/4$

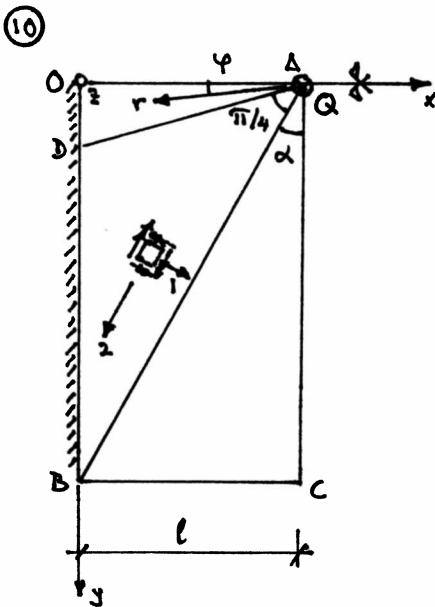
OAB ... $m_x = -m_u, m_y = m_u \cot^2 \alpha, m_{xy} = 0$

ABC ... Spannungsfrei

Drillmoment entlang Diskontinuitätslinie = $m_u \cdot \cot \alpha$

→ entlang AB wird $m_u \cot \alpha$ abgetragen

→ wegen Symmetrie ... $Q = \underline{2 m_u \cot \alpha}$



Lange Kragplatte mit $\alpha < \pi/4$

ABC ... Spannungsfrei

ABD ... Reine Drillung $m_1 = -m_2 = m_u$

OAD ... $m_p = m_1 = m_u, m_r = m_2 = -m_u$

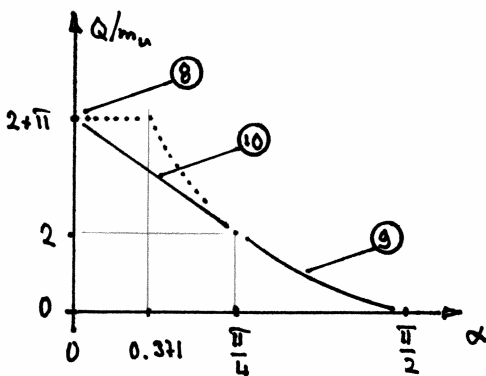
Querkraftabtragung:

m_u entlang Diskontinuitätslinie AB

$2 \cdot (\frac{\pi}{4} - \alpha) m_u$ radial in OAD

Insgesamt ... $Q = \underline{(2 + \pi - 4\alpha) m_u}$

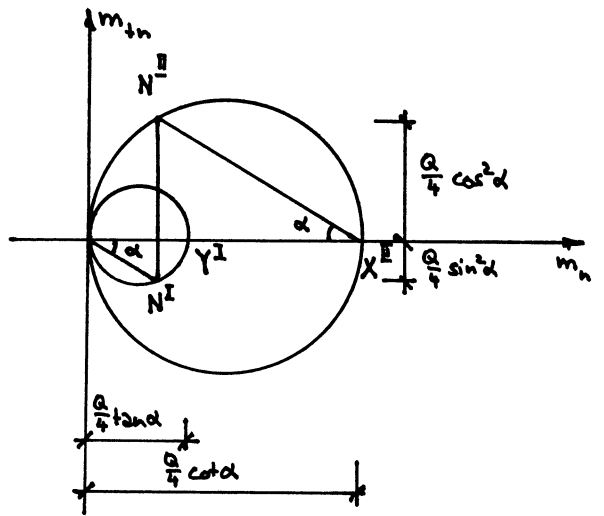
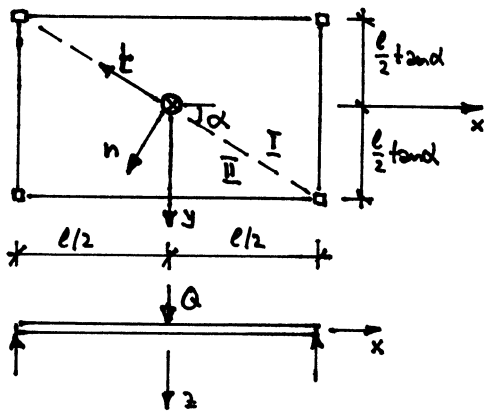
Vergleich der Lösungen 9 bis 10:



Die punktierte Linie entspricht später diskutierten Fließgelenklinienmechanismen (obere Grenzweite der Traglast). Für $\alpha = 0$ und $\pi/4 \leq \alpha \leq \pi/2$ sind die dargestellten Momentenfelder mit kinematisch zulässigen Fließgelenklinienmechanismen verträglich, d.h. es handelt sich um vollständige Lösungen im Rahmen der Plastizitätstheorie.

Weitere Beispiele mit Diskontinuitätslinien im Platteninneren

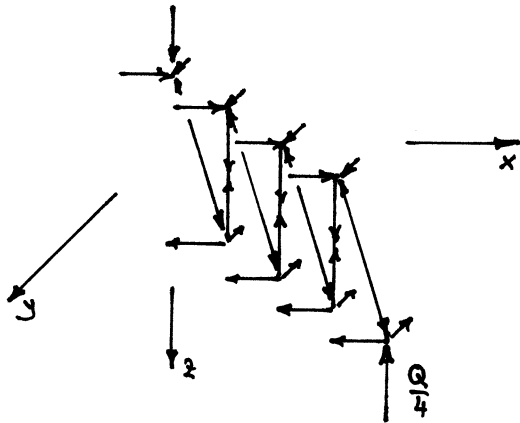
11



Die mittig auf die eckgestützte Rechteckplatte aufgebraute Einzellast Q wird entlang den als Diskontinuitätslinien wirkenden Plattendagonalen zu den Plattenecken abgetragen. Dies erfordert einachsige Momentenfelder

$$m_y^I = \frac{Q}{4} \tan \alpha, \quad m_x^{II} = \frac{Q}{4} \cot \alpha$$

in den Bereichen I und II. Die Drillmomente m_{tn} weisen an den Diagonalen einen Sprung $V = Q/4$ auf, vgl. (8.16)₃.

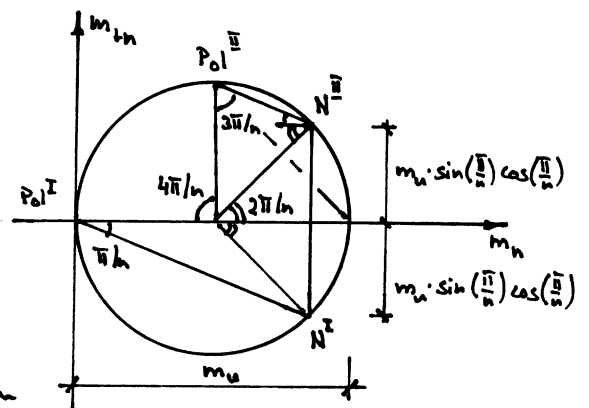
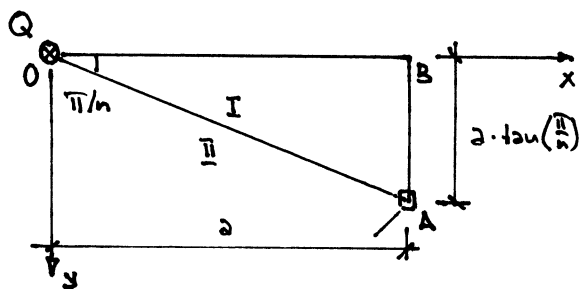


Der Kraftfluss entlang der Diagonalen lässt sich mit einem räumlichen Fachwerkmodell veranschaulichen.

Die Zugkräfte in den vertikalen Pfosten des Fachwerkmodells können beispielsweise über Dübelleisten aufgenommen werden:



12



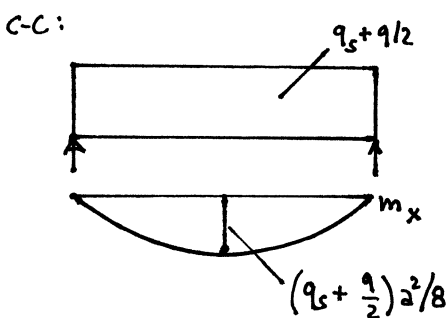
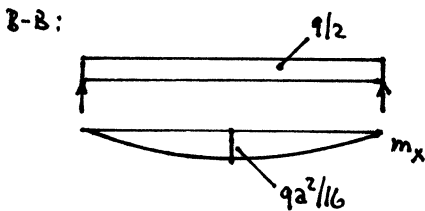
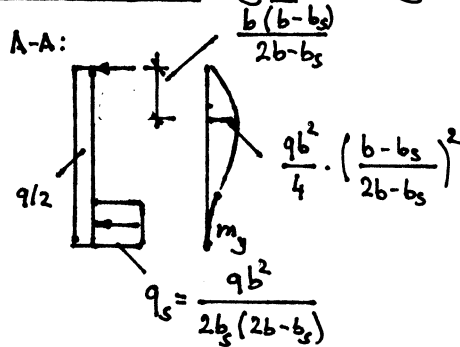
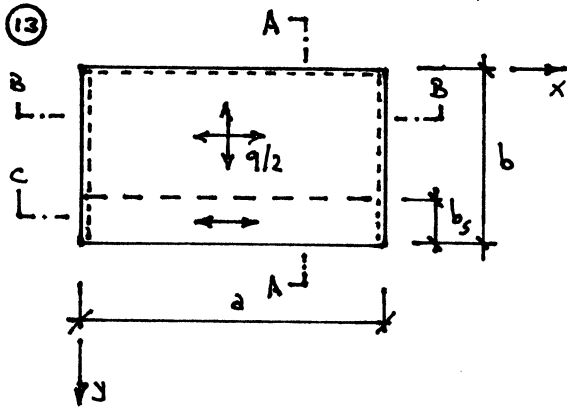
Alternativ zu ⑥ wird ein einachsiges Momentenfeld $m_y = m_u$ betrachtet. Dies entspricht entlang OA zu den Plattenecken abgetragenen Kräften $2m_u \cdot \sin(\pi/n) \cdot \cos(\pi/n)$, d.h.

$$Q = n m_u \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \quad n \rightarrow \infty: Q \rightarrow 2\pi m_u$$

8.6.3 Streifenmethode

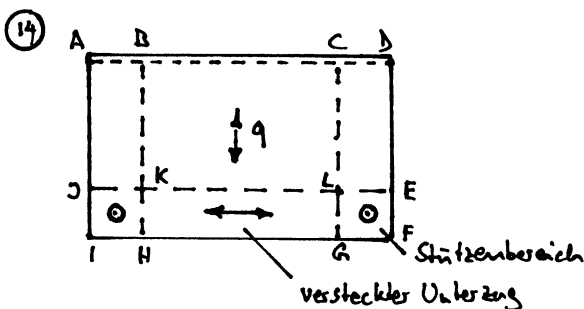
Die sogenannte "einfache Streifenmethode" wurde mit den Beispielen ③ und ④ in Kapitel 8.6.2 bereits erläutert.

Oft ist es zweckmässig, von versteckten Unterzügen (strong bands) auszugehen:



Versteckter Unterzug der Breite b_s entlang des freien Plattenrands.

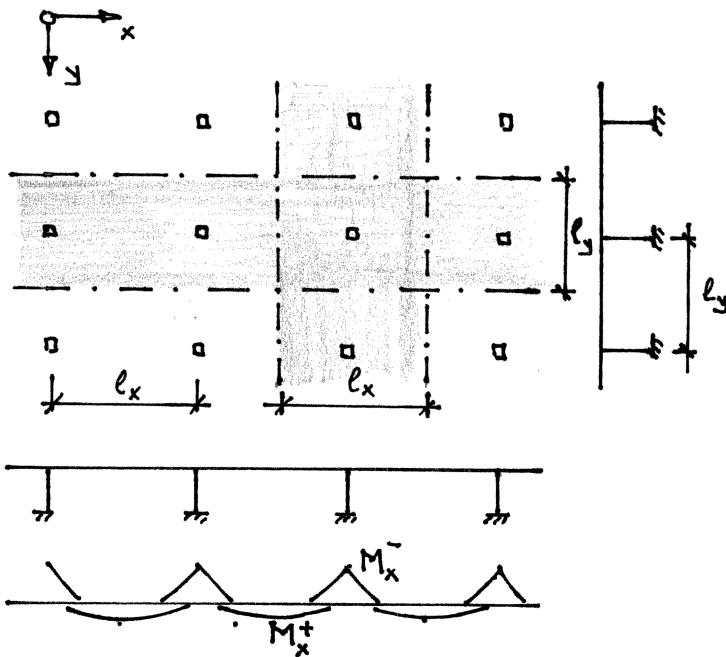
Mit der "erweiterten Streifenmethode" können auch Punktlasten oder Punktstützungen behandelt werden. Man kann dies beispielsweise durch Kombination versteckter Unterzüge mit der Lösung ⑤ von Kapitel 8.6.2 erreichen:



Im Innenbereich BCGH sowie in den Randbereichen ABHI und CDFG erfolgt die Lastabtragung (für q) zum versteckten Unterzug JEFI wie oben im Beispiel ⑬. Der versteckte Unterzug wird von den Flächenlagern JKHI und LEFG gestützt, für welche zusätzliche Momente gemäss (8.50) zu berücksichtigen sind.

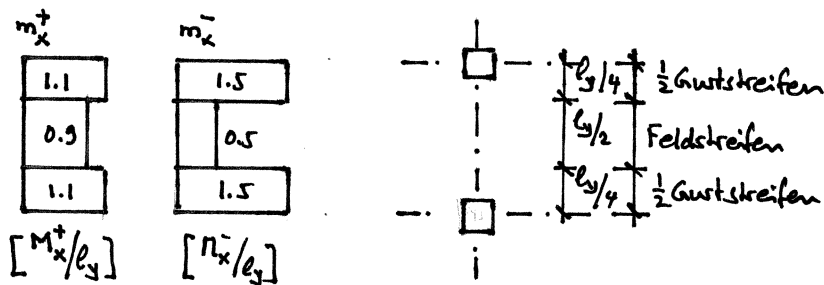
Weiteres siehe Marti et al., "Tragverhalten von Stahlbeton", IBK Publikation SP-008, 1999.

8.6.4 Methode der stellvertretenden Rahmen

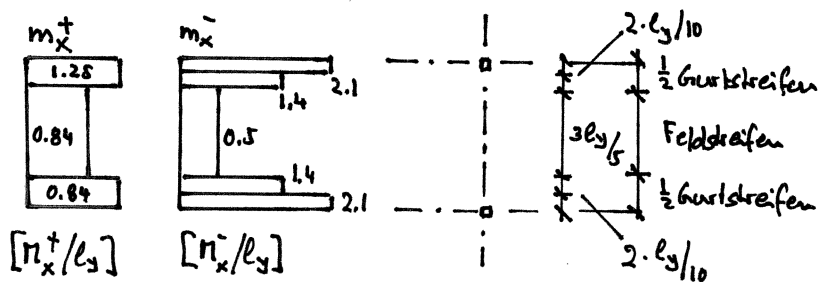


1. Durch Schnitte in der Mitte zwischen benachbarten Stützen =
reihen werden Rahmen in x- und y-Richtung definiert, die je für Vollast (bzw. Eigenlasten und Nutzlasten in ungünstigster Stellung) analysiert werden $\rightarrow M_x^+, M_x^-; M_y^+, M_y^-$
2. Die Momente M_x^+, M_x^- werden über die Gurt- und Feldstreifen gemäss nebenstehendem Schema verteilt.

Pilzdecken:



Flachdecken:



N.B. Berechnung in y-Richtung analog

Mit der Methode der stellvertretenden Rahmen wird im Stützenbereich eine beträchtliche Umverteilung der elastisch ermittelten Momente vorgenommen. Der Kraftfluss wird nicht vollständig untersucht; es liegt kein strenger unterer Grenzwert der Traglast vor, sondern lediglich eine globale Gleichgewichtslösung.

Für eine unendlich grosse Pilzdecke unter $q = \text{const}$ und mit $l_x = l_y = l$ resultiert ein über den Stützen zunehmendes Moment von $(q l^3 / 12) \cdot (1.5 / l) = q l^2 / 8$.
Weitere Bemerkungen siehe "Tragverhalten von Stahlbeton", S. 8.28 unten.

8.7 Flie遝gelenklinienmethode

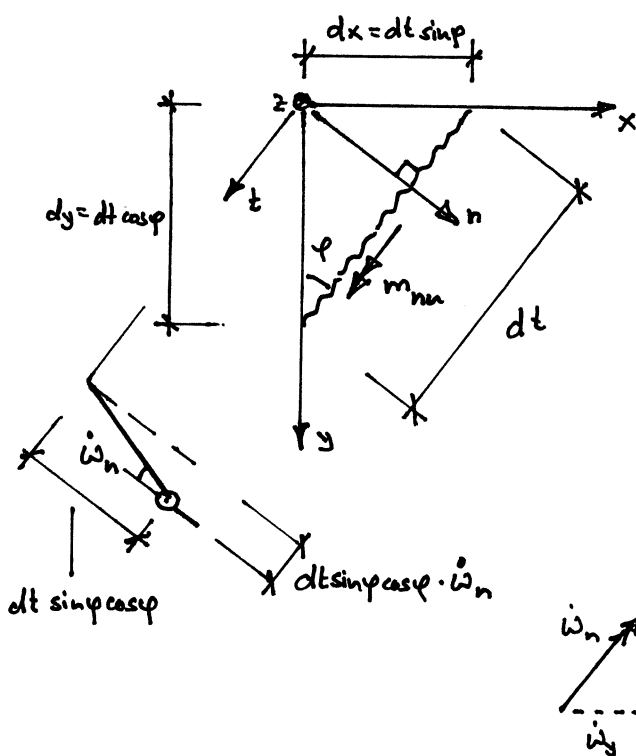
8.7.1 Allgemeines

Die von JOHANSEN propagierte Flie遝gelenklinienmethode entspricht der Anwendung der kinematischen Methode der Plastizitätstheorie auf Stahlbetonplatten, wobei die in Kapitel 8.5.1 diskutierte Normalmomenten-Flie遝bedingung vorausgesetzt wird.

Anders als bei Stabtragwerken ist eine Plastizitatskontrolle wegen der hochgradigen statischen Unbestimmtheit der einzelnen als starr vorausgesetzten Plattenanteile im Allgemeinen nicht möglich.

8.7.2 Berechnung der Dissipationsarbeit

a) Diskrete Flie遝gelenklinie



Orthogonale Bewehrung in x- und y-Richtung ... m_{xu}, m_{yu}

Rotation $\dot{\omega}_n$ entlang Flie遝gelenklinie

Biegewiderstand

$$m_{nn} = m_{xu} \cdot \cos^2 \varphi + m_{yu} \cdot \sin^2 \varphi$$

→ elementare Dissipationsarbeit

$$\dot{D} = m_{nn} dt \cdot \dot{\omega}_n \quad (8.53)$$

Rotationen in x- und y-Richtung:

$$\dot{\omega}_x = \frac{dt \dot{\omega}_n \sin \varphi \cos \varphi}{dx} = \dot{\omega}_n \cos \varphi$$

$$\dot{\omega}_y = \frac{dt \dot{\omega}_n \sin \varphi \cos \varphi}{dy} = \dot{\omega}_n \cdot \sin \varphi$$

Somit

$$\begin{aligned} \dot{D} &= m_{xu} \cos^2 \varphi \dot{\omega}_n dt + m_{yu} \sin^2 \varphi \dot{\omega}_n dt \\ &= m_{xu} \cdot \dot{\omega}_x \cdot dy + m_{yu} \cdot \dot{\omega}_y \cdot dx \end{aligned} \quad (8.54)$$

\dot{D} kann gemäss (8.54) direkt aus den Biegewiderstanden und Rotationen in den Bewehrungsrichtungen ermittelt werden.

→ Anwendungsbeispiele siehe S. 8.23 A und B.