

Stahlbeton I - Übung 6

- a) Beweise die Beziehung (5.7) für die gerissene Steifigkeit eines homogen bewehrten dünnwandigen Hohlquerschnitts unter reiner Torsion. Betrachte die Verformungen der Bügel, der Längsbewehrung und des diagonal gedrückten Betons einzeln und verwende WILLIOTSche Verschiebungspläne und/oder MOHRsche Verzerrungskreise.
- b) Diskutiere Beispiel 6.2 unter Zugrundelegung von (6.23) statt (6.24). Rechne mit  $E_s = 205 \text{ kN/mm}^2$  und  $E_c = 32 \text{ kN/mm}^2$ .
- c) Was ändert sich bei b), wenn (6.22) statt (6.23) benutzt wird?
- d) Schätze Rissabstände und Rissbreiten beim Fließbeginn der Bewehrung in y-Richtung gemäss b) ab.

a) Gleichung (5.7)

Die Beziehung lautet

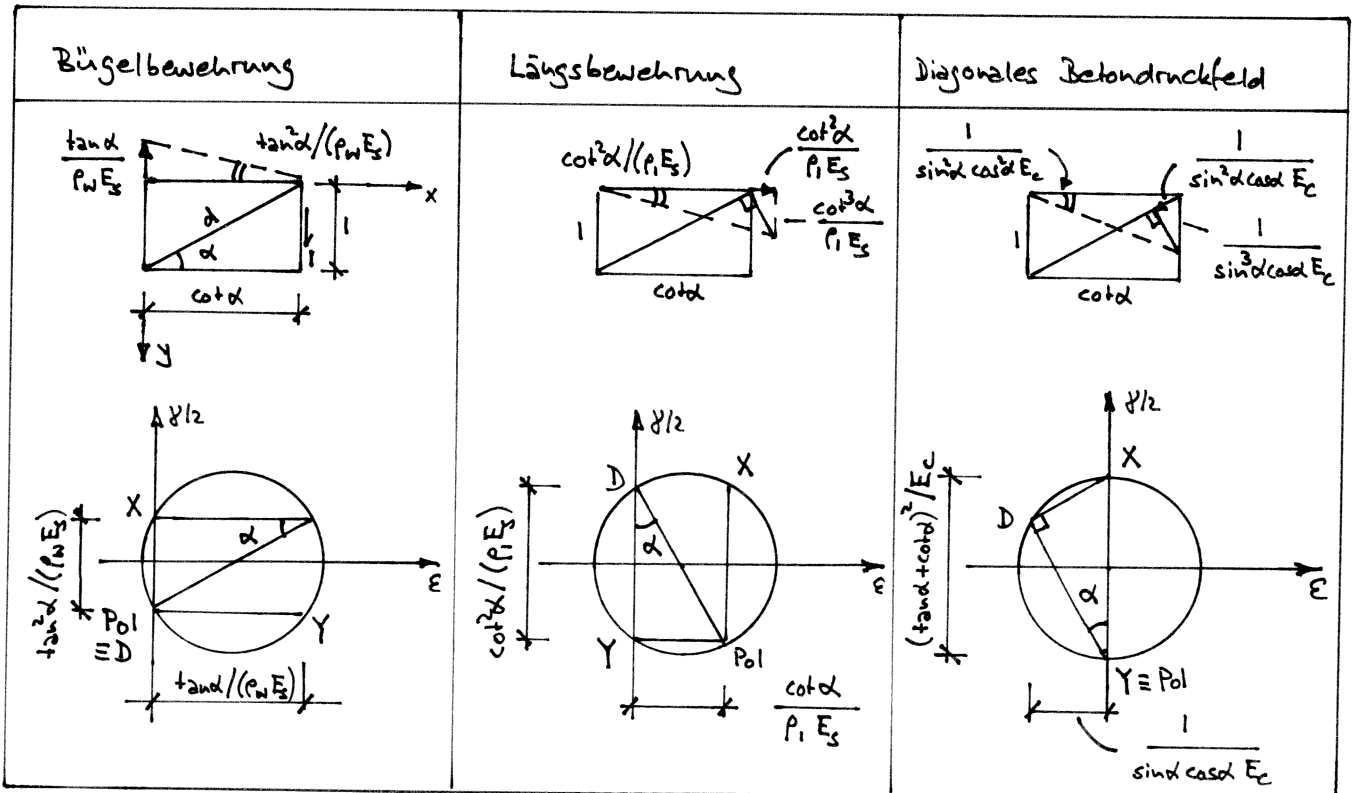
$$GK^{\text{II}} = \frac{4A_0^2 E_s t}{u \left[ \frac{\tan^2 \alpha}{\rho_w} + \frac{\cot^2 \alpha}{\rho_l} + n (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 \right]}$$

mit

$$\tan \alpha = \sqrt[4]{\frac{\frac{1}{\rho_l} + n}{\frac{1}{\rho_w} + n}}, \quad \rho_l = \frac{A_l}{u \cdot t}, \quad \rho_w = \frac{A_w}{s \cdot t}, \quad n = \frac{E_s}{E_c}$$

wobei

- $A_0$  ... vom Schubfluss umflossene Fläche
- $A_l$  ... Querschnittsfläche der Längsbewehrung
- $A_w$  ... Querschnittsfläche einer Bügeleinheit
- $E_c$  ... Elastizitätsmodul des Betons
- $E_s$  ... Elastizitätsmodul des Betonstahls
- $GK^{\text{II}}$  ... geissene Steifigkeit
- $n$  ... Verhältnis der Elastizitätsmoduln
- $s$  ... Bügelabstand
- $t$  ... Wanddicke
- $u$  ... Umfang von  $A_0$
- $\alpha$  ... Neigung des diagonalen Druckfelds
- $\rho_l$  ... geometrischer Bewehrungsgehalt der Längsbewehrung
- $\rho_w$  ... geometrischer Bewehrungsgehalt der Bügelbewehrung



Mit den hier hergeleiteten Schiebungen sind die drei Summanden in der eckigen Klammer im Nenner des Ausdrucks für  $GK^{\text{II}}$  begründet.

Schubfluss ...  $v = T / (2A_0)$

Schubspannung...  $\tau = T / (2A_0 t)$

Verdrillung ...  $\phi = T / (GK^{\bar{II}}) = \tilde{\nu} \cdot 2A_0 t / (GK^{\bar{II}}) = \gamma \cdot u / (2A_0)$

Somit  $GK^{\bar{II}} = \frac{4A_0^2 \cdot (t/u)}{\gamma / \tilde{\nu}} = \frac{4A_0^2 E_s t}{u \left[ \frac{\tan^2 \alpha}{\rho_w} + \frac{\cot^2 \alpha}{\rho_l} + n (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 \right]}$  q.e.d.

N.B.  $\gamma = \oint \cdot r$ ,  $\oint \gamma ds = \oint \phi r ds \rightarrow \phi = \gamma \cdot u / (2A_0)$

Die in der Tabelle S. U6.2 hergeleiteten Ausdrücke beziehen sich auf  $\tilde{\nu} = 1$ .

b) Beispiel 6.2 mit (6.23) statt (6.24)

$\rho_x = 3\rho_y = 1.696\%$ ,  $n = 205/32$ ;  $1 + n\rho_x = 1.108679$ ,  $1 + n\rho_y = 1.036226$

$\sigma_x / \tilde{\epsilon}_{xy} = \tilde{\epsilon}_{xy} / \epsilon_y = \sqrt{3}$ .

(6.23):  $\tan^4 \alpha_r (1 + n\rho_y) + \tan^2 \alpha_r / \sqrt{3} = \tan^2 \alpha_r / \sqrt{3} + (1 + n\rho_x) / 3 \rightarrow \underline{\alpha_r = 39.9915^\circ}$

Fließbeginn:  $\sigma_{iy} h = \frac{4\rho_y f_{ct} h}{1 + \sqrt{3} \cdot \tan \alpha_r} = \frac{4 \cdot 492}{1 + \sqrt{3} \cdot 0.839} = \underline{802 \text{ kN/m}}$

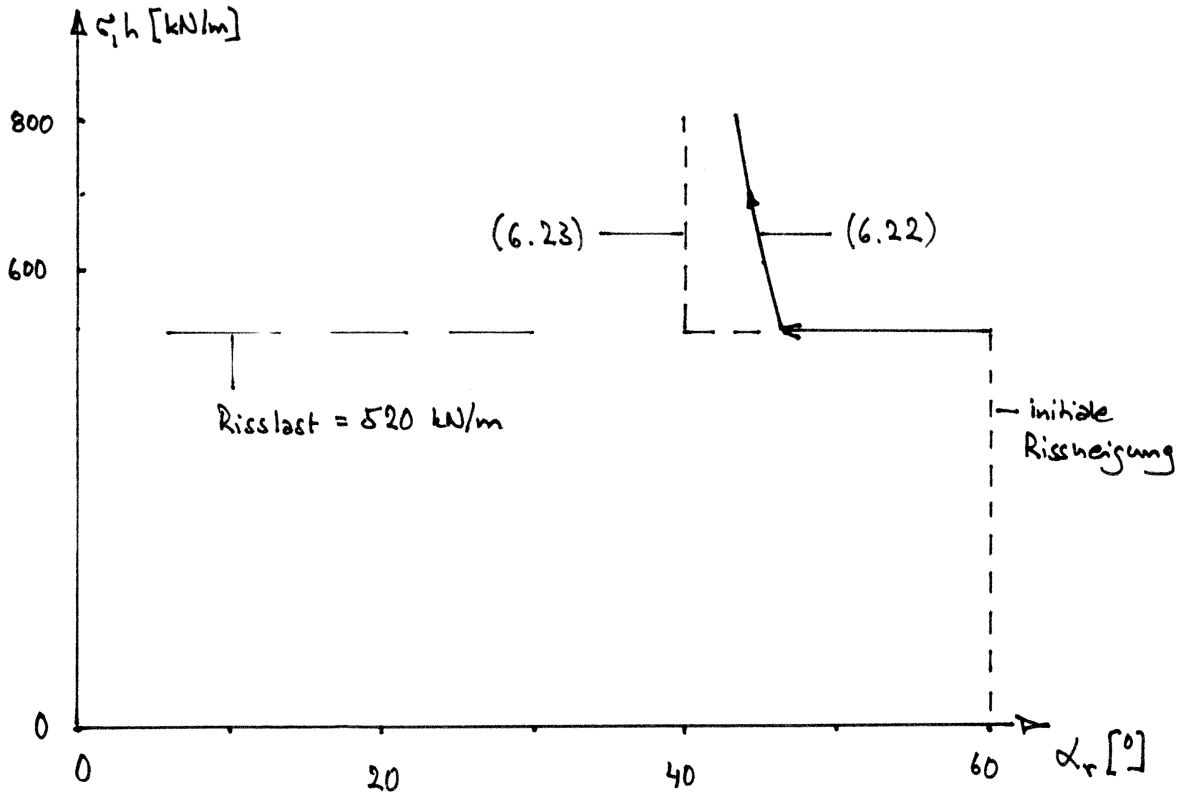
Die Berücksichtigung der Betonverzerrungen resultiert in einer geringen Verminderung der Umlagerung der Kräfte beim Reißen ( $\alpha_r = 39.99^\circ$  statt  $39.78^\circ$ ) sowie in einer etwas kleineren Belastung beim Fließbeginn der Bewehrung in y-Richtung ( $\sigma_{iy} h = 802 \text{ kN/m}$  statt  $806 \text{ kN/m}$ ).

c) (6.22) statt (6.23)

Mit den unter b) angegebenen Größen sowie  $f_{ct} = 2.6 \text{ N/mm}^2$  erhält man die in der folgenden Tabelle angegebenen Werte:

$\sigma_{1h}$ [kN/m]	520	600	700	800
$\tilde{\tau}_{xy}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	1.126	1.299	1.516	1.732
$\alpha_r$ [°]	46.231	45.006	44.007	43.337

Im Vergleich zu b) ist die Umlagerung etwas geringer, und  $\alpha_r$  ist variabel:



d) Rissabstände und Rissbreiten

$$(6.17): s_{rx0} = \frac{18}{4} \left( \frac{1}{0.01696} - 1 \right) = 260.8 \text{ mm}, \quad s_{ry0} = \frac{12}{4} \left( \frac{1}{0.00565} - 1 \right) = 527.5 \text{ mm}$$

$$(6.16): s_{r0} = \frac{1}{\frac{\sin 39.9915}{260.8} + \frac{\cos 39.9915}{527.5}} = \underline{\underline{255 \text{ mm}}}$$

$$(6.14)_3: \sigma_{ct} = -\tilde{\tau}_{xy} (\tan \alpha_r + \cot \alpha_r) = -1.737 \cdot (0.839 + 1.192) = -3.528 \text{ N/mm}^2$$

↑  
bei Fließbeginn

$$\rightarrow \epsilon_2 = \sigma_{ct} / E_c = -3.528 / 32 = \underline{\underline{-0.110 \%}}$$

Die Dehnung in y-Richtung beträgt  $\epsilon_y = 435/205 = \underline{2.122\%}$

Somit

$$\epsilon_1 = (\epsilon_y - \epsilon_2) \tan^2 \alpha_r + \epsilon_y = (2.122 + 0.110) \cdot 0.839^2 + 2.122 = \underline{3.693\%}$$

Die Rissbreite beträgt etwa

$$w_r = s_{r0} \left( \epsilon_1 - \frac{f_{ct}}{2 \cdot E_c} \right) = 255 \cdot \left( 0.003693 - \frac{2.6}{2 \cdot 32000} \right) = \underline{\underline{0.93 \text{ mm}}}$$

↑  
Abzug wegen Mitwirkung des Betons  
auf Zug zwischen den Rissen  
(mittlere Spannung  $f_{ct}/2$ )

N.B.

