Prof. Dr. Peter Marti
Institut für Baustatik und Konstruktion
D-BAUG, Studiengang Bauingenieurwissenschaften
Herbstsemester

BAUSTATIK I – KOLLOQUIUM 10, Merkblatt

(101-0113)

Thema: Reduktionssatz

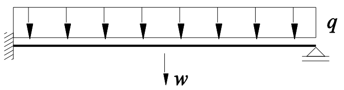
Reduktionssatz:

Bei der Berechnung von Verformungen an einem statisch unbestimmten System unter Anwendung der Arbeitsgleichung kann der Belastungszustand an einem beliebigen statisch bestimmten Grundsystem gewählt werden.
Bei der Wahl des GS sollte darauf geachtet werden, dass keine Reaktionen des BZ mit möglichen (noch unbekannten) Verformungen des VZ Arbeit leisten und dass der Rechenaufwand möglichst klein ist.

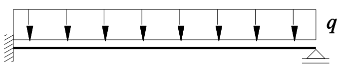
Erläuterung an einem Beispiel:

Gegeben: System und Einwirkung q

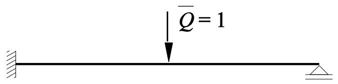
Gesucht: Verschiebung w



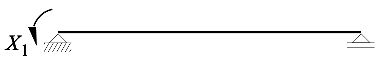
VZ:



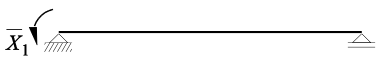
BZ: (am statisch unbestimmten Systen)



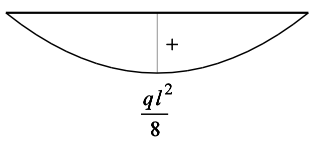
GS und ÜG:



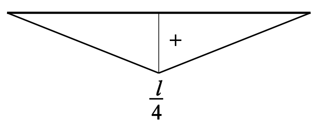
GS und ÜG:



$M_0(q)$ am GS:



$\overline{M_0}(\overline{Q} = 1)$:



$M_1(X_1 = 1)$ am GS:

$\overline{M_1}(\overline{X_1} = 1) = M_1(X_1 = 1)$:

$$\delta_{10} = \int M_1 \cdot \frac{M_0}{EI} \cdot dx = -\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{ql^2}{8EI} \cdot l = -\frac{ql^3}{24EI}$$

$$\delta_{11} = \int M_1 \cdot \frac{M_1}{EI} \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{EI} \cdot l = -\frac{l}{3EI}$$

$$\overline{\delta_{10}} = \int M_1 \cdot \frac{\overline{M_0}}{EI} \cdot dx = -\frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \frac{l}{4EI} \cdot l = -\frac{l^2}{16EI}$$

$$\overline{\delta_{11}} = \delta_{11} = \int M_1 \cdot \frac{M_1}{EI} \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{EI} \cdot l = -\frac{l}{3EI}$$

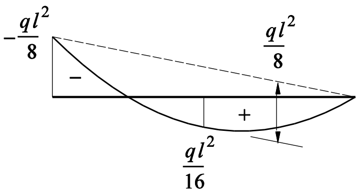
Prof. Dr. Peter Marti
Institut für Baustatik und Konstruktion
D-BAUG, Studiengang Bauingenieurwissenschaften
Herbstsemester

Verträglichkeitsbedingung:

$$\delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} = 0$$

$$\rightarrow X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \underline{\underline{\frac{ql^2}{8}}}$$

$M(q)$:

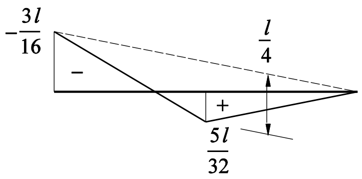


Verträglichkeitsbedingung:

$$\overline{\delta_{10}} + \overline{X_1} \cdot \delta_{11} = 0$$

$$\rightarrow \overline{X_1} = -\frac{\overline{\delta_{10}}}{\delta_{11}} = \underline{\underline{\frac{3l}{16}}}$$

$\overline{M}(\overline{Q}=1)$:



Verformung w mit der Arbeitsgleichung $(\overline{M_1} = M_1 \;;\; M = M_0 + X_1 \cdot M_1 \;;\; \overline{M} = \overline{M_0} + \overline{X_1} \cdot M_1)$:

$$w = \int \overline{M} \cdot \frac{M}{EI} \cdot \mathrm{d}x = \int \overline{M_0} \cdot \frac{M_0}{EI} \cdot \mathrm{d}x + X_1 \cdot \int \overline{M_0} \cdot \frac{M_1}{EI} \cdot \mathrm{d}x + \overline{X_1} \cdot \left[\int M_1 \cdot \frac{M_0}{EI} \cdot \mathrm{d}x + X_1 \cdot \int M_1 \cdot \frac{M_1}{EI} \cdot \mathrm{d}x \right]$$

Verträglichkeitsbedingung (siehe oben):

$$\int M_1 \cdot \frac{M_0}{EI} \cdot \mathrm{d}x + X_1 \cdot \int M_1 \cdot \frac{M_1}{EI} \cdot \mathrm{d}x = \delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} = 0$$

$$M = M_0 + X_1 \cdot M_1 \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\int M_1 \cdot \frac{M}{EI} \cdot \mathrm{d}x = 0}$$

Der Zwängungszustand M_1 des BZ resp. des VZ und der Lastspannungszustand M sind zueinander orthogonal. Die Kräfte des Zwängungszustands leisten deshalb keine Arbeit mit den Verformungen des Lastspannungszustands.

$$\boxed{\begin{array}{l} w = \int \overline{M} \cdot \frac{M}{EI} \cdot \mathrm{d}x = \int \overline{M_0} \cdot \frac{M_0}{EI} \cdot \mathrm{d}x + X_1 \cdot \int \overline{M_0} \cdot \frac{M_1}{EI} \cdot \mathrm{d}x = \int \overline{M_0} \cdot \frac{M}{EI} \cdot \mathrm{d}x \\ \rightarrow \text{VZ am statisch unbestimmten System} \\ \quad\;\; \text{BZ am statisch bestimmten Grundsystem} \end{array}}$$

Grosser Rechenaufwand für den BZ am statisch unbestimmten System:

$$w = \int \frac{\overline{M} \cdot M}{EI} \cdot \mathrm{d}x = +\frac{5}{12} \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{ql^2}{8EI} \cdot l - \frac{1}{4} \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{ql^2}{8EI} \cdot l - \frac{1}{3} \cdot \frac{3l}{16} \cdot \frac{ql^2}{8EI} \cdot l + \frac{1}{3} \cdot \frac{3l}{16} \cdot \frac{ql^2}{8EI} \cdot l = \underline{\underline{\frac{ql^4}{192EI}}}$$

Einfacher mit dem BZ am statisch bestimmten GS:

$$w = \int \frac{\overline{M_0} \cdot M}{EI} \cdot \mathrm{d}x = +\frac{5}{12} \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{ql^2}{8EI} \cdot l - \frac{1}{4} \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{ql^2}{8EI} \cdot l = \underline{\underline{\frac{ql^4}{192EI}}}$$