BAUSTATIK I – KOLLOQUIUM 9, Lösung

(101-0113)

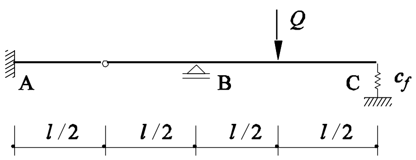
Thema: Kraftmethode

Aufgabe 1, Lösung

Gegeben: System (EI = konstant) und Einwirkung Q

$$c_f = \frac{l^3}{8EI}$$

Gesucht: Schnittkraftlinien

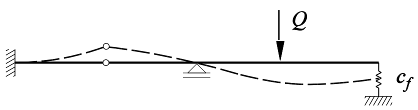


$\boxed{n = 1}$

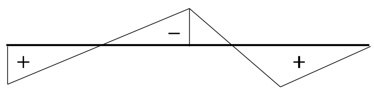
Abzählkriterium für ebene Rahmen:

$\boxed{n = r + 3s - 3k - g = 5 + 3 \cdot 2 - 3 \cdot 3 - 1 = 1}$

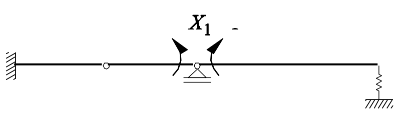
Verformungslinie qualitativ:



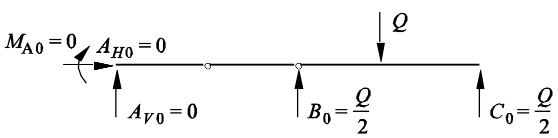
$M_{qualitativ}$:



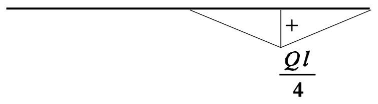
GS und ÜG:



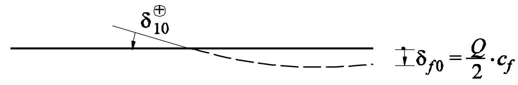
SKD infolge Q am GS:



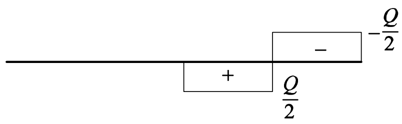
$M_0(Q)$ am GS:



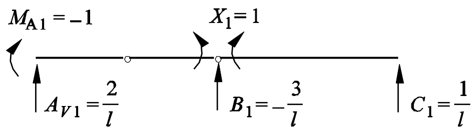
$w_0(Q)$:



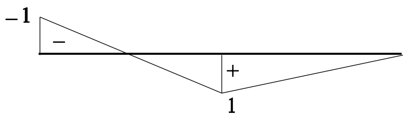
$V_0(Q)$ am GS:



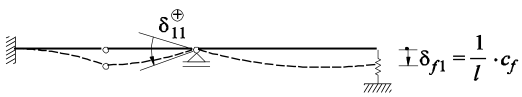
SKD infolge $X_1 = 1$:



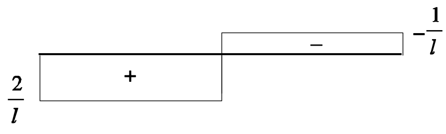
$M_1(X_1 = 1)$ am GS:



$w_1(X_1 = 1)$:



$V_1(X_1 = 1)$ am GS:



$\boxed{\delta_{10} = \text{Verformung am GS an der Stelle und in Richtung von } X_1 \text{ infolge äusserer Last:}}$

$$\delta_{10} = \int M_1 \cdot \frac{M_0}{EI} \cdot dx + C_1 \cdot C_0 \cdot c_f = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \frac{Ql}{4EI} \cdot l + \frac{1}{l} \cdot \frac{Q}{2} \cdot \frac{l^3}{8EI} = \underline{\underline{\frac{Ql^2}{8EI}}}$$

Merke: δ_{10} : 1. Index entspricht Ort und Richtung $\rightarrow$ massgebend dafür ist der BZ mit M_1, C_1 etc.
2. Index entspricht Ursache $\rightarrow$ massgebend dafür ist der VZ mit M_0, C_0 etc.

$\boxed{\delta_{11} = \text{Verformung am GS an der Stelle und in Richtung von } X_1 \text{ infolge } X_1 = 1:}$

$$\delta_{11} = \int M_1 \cdot \frac{M_1}{EI} \cdot dx + C_1 \cdot C_1 \cdot c_f = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{EI} \cdot l + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{EI} \cdot \frac{l}{2} + \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{l} \cdot \frac{l^3}{8EI} = \underline{\frac{19l}{24EI}}$$

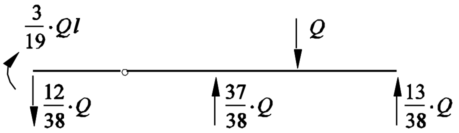
Merke: δ_{11} : 1. Index entspricht Ort und Richtung $\rightarrow$ massgebend dafür ist der BZ mit M_1, C_1 etc.
2. Index entspricht Ursache $\rightarrow$ massgebend dafür ist der VZ mit M_1, C_1 etc.

Verträglichkeitsbedingung:

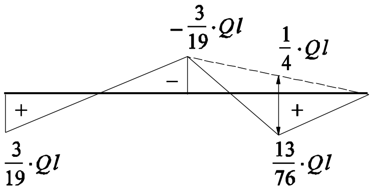
$$\delta_1 = \delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} = 0 \quad \rightarrow \quad X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{Ql^2}{8EI} \cdot \frac{24EI}{19l} = -\underline{\underline{\frac{3Ql}{19}}} \quad [\text{kNm}]$$

Auflagerkräfte und Schnittkräfte durch Superposition: $S = S_0 + X_1 \cdot S_1$

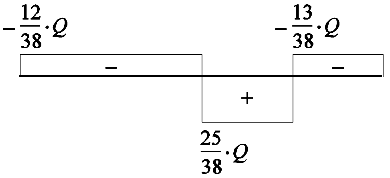
SKD:



$M = M_0 + X_1 \cdot M_1$:



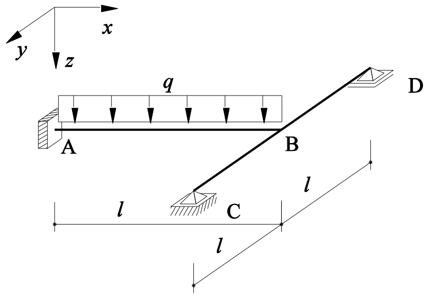
$V = V_0 + X_1 \cdot V_1$:



Aufgabe 2, Lösung

Gegeben: Räumliches System mit EI = konstant, Einwirkung q
(Balken C-D: Drehung um die Stabachse nicht behindert)

Gesucht: Momentenlinie infolge der Einwirkung q



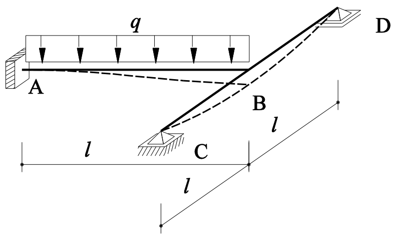
Abzählkriterium für räumliche Rahmen:

$$\boxed{n = r + 6s - 6k - g = 10 + 6 \cdot 3 - 6 \cdot 4 - 0 = 4}$$

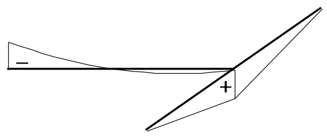
Aus Symmetriegründen: $M_z(\text{A}) = M_x(\text{A}) = 0$
$C_x = 0$

$\rightarrow \boxed{n = 1}$

Verformungslinie qualitativ:

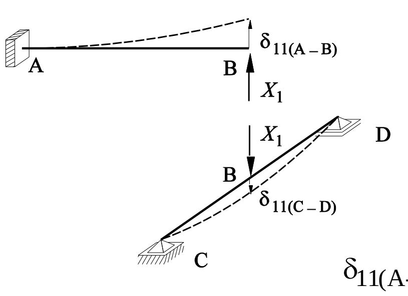


$M_{qualitativ}$:

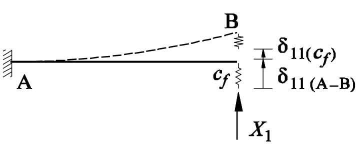


Balken A-B: indirekt gelagert →Balken C-D wirkt für Balken A-B wie ein elastisches Auflager mit c_f .

Verschiedene Möglichkeiten zur Ermittlung von X_1:



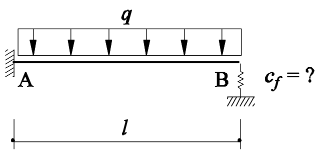
$\equiv$



$$\delta_{11(\text{A-B})} + \delta_{11(\text{C-D})} \equiv \delta_{11(\text{A-B})} + \delta_{11(c_f)}$$

Merke: Es ergibt sich für beide Rechnungsvarianten der gleiche Wert für X_1.

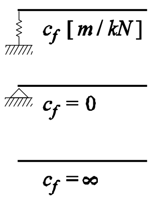
Wahl: Balken A-B → in B elastisch gelagerter Ersatzträger



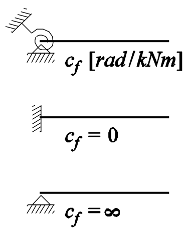
Merke:

c_f **=Federnachgiebigkeit** (Federsteifigkeit aus der Mechanik: $k = \frac{1}{c_f}$)

Zug-Druckfeder: c_f $[\text{m/kN}]$:
(Verformung pro Einheitskraft)



Drehfeder: c_f $[\text{rad/kNm}]$:
(Verdrehung pro Einheitsmoment)

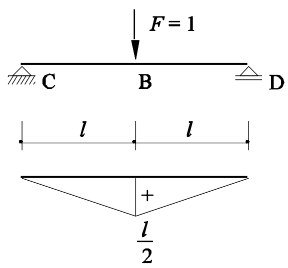


Ermittlung der Federnachgiebigkeit c_f für das vorliegende Beispiel:

Federnachgiebigkeit: $c_f = \dfrac{\text{Federverformung}}{\text{Federkraft}} = \dfrac{\delta_f}{F} \quad \left[\dfrac{\text{m}}{\text{kN}}\right]$

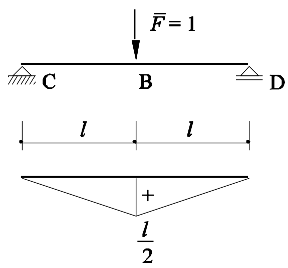
Für eine Einheitskraft $F = 1$ gilt: $c_f = \dfrac{\delta_f}{1} = \delta_f$ (= Verformung infolge $F = 1$)

VZ:



M :

BZ:

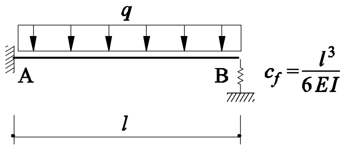


$\overline{M}$:

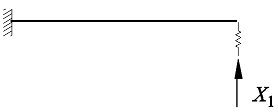
$$\delta_f = \int \overline{M} \cdot \frac{M}{EI} \cdot dx = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2EI} \cdot l = \frac{l^3}{6EI}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{c_f = \delta_f = \frac{l^3}{6EI}}$$

Ersatzträger und Einwirkung:

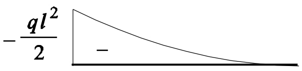


GS und ÜG:

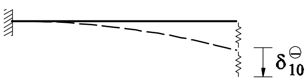


Merke: Feder darf nicht entfernt werden

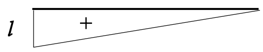
$M_0(q)$ am GS:



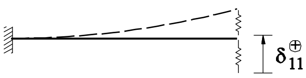
$w_0(q)$:



$M_1(X_1 = 1)$ am GS:



$w_1(X_1 = 1)$:



$\boxed{\delta_{10} = \text{Verschiebung am GS an der Stelle und in Richtung von } X_1 \text{ infolge äusserer Last:}}$

$$\delta_{10} = \int M_1 \cdot \frac{M_0}{EI} \cdot dx + F_1 \cdot F_0 \cdot c_f = \frac{1}{4} \cdot l \cdot \left(-\frac{ql^2}{2EI} \right) \cdot l + 0 = \underline{-\frac{ql^4}{8EI}}$$

Merke: δ_{10} : 1. Index entspricht Ort und Richtung $\rightarrow$ massgebend dafür ist der BZ mit M_1, F_1 etc.
2. Index entspricht Ursache $\rightarrow$ massgebend dafür ist der VZ mit M_0, F_0 etc.

$\boxed{\delta_{11} = \text{Verschiebung am GS an der Stelle und in Richtung von } X_1 \text{ infolge } X_1 = 1\text{:}}$

$$\delta_{11} = \int M_1 \cdot \frac{M_1}{EI} \cdot dx + F_1 \cdot F_1 \cdot c_f = \frac{1}{3} \cdot l \cdot \frac{l}{EI} \cdot l + 1 \cdot 1 \cdot \frac{l^3}{6EI} = \underline{\frac{l^3}{2EI}}$$

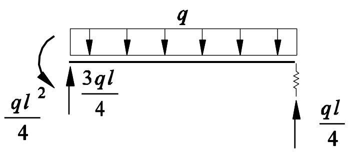
Merke: δ_{11} : 1. Index entspricht Ort und Richtung $\rightarrow$ massgebend dafür ist der BZ mit M_1, F_1 etc.
2. Index entspricht Ursache $\rightarrow$ massgebend dafür ist der VZ mit M_1, F_1 etc.

Verträglichkeitsbedingung:

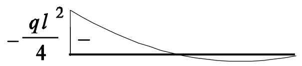
$$\delta_1 = \delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} = 0 \quad \rightarrow \qquad X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{ql^4}{8EI} \cdot \frac{2EI}{l^3} = \underline{\underline{\frac{ql}{4}}} \qquad [\mathrm{kN}]$$

Auflagerkräfte und Momente durch Superposition: $S = S_0 + X_1 \cdot S_1$

SKD für den Ersatzträger:



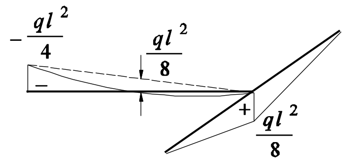
Momente am Ersatzträger A–B: $M = M_0 + X_1 \cdot M_1$:



$$M_{\mathrm{A}} = -\frac{ql^2}{2} + \frac{ql}{4} \cdot l = \underline{\underline{-\frac{ql^2}{4}}}$$

$$M_{\mathrm{B}_{(\mathrm{A-B})}} = 0$$

Momente am ganzen System:



$$M_{\mathrm{A}} = -\frac{ql^2}{2} + \frac{ql}{4} \cdot l = \underline{\underline{-\frac{ql^2}{4}}}$$

$$M_{\mathrm{B}_{(\mathrm{A-B})}} = 0$$

$$M_{\mathrm{B}_{(\mathrm{C-D})}} = \frac{ql}{4} \cdot \frac{l}{2} = \underline{\underline{\frac{ql^2}{8}}} \quad \left(= X_1 \cdot M_1 \text{ am Balken C - D}\right)$$

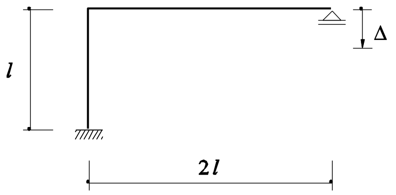
Merke: - Falls Träger C – D unendlich steif (starres Auflager in B für Ersatzträger), ergibt sich $X_1 = \frac{3ql}{8} \quad (> \frac{ql}{4})$

- Feder bedeutet weicheres Auflager → Umlagerung der Last zur Einspannung
→ Prinzip der Partnerschaft in der Statik

Aufgabe 3, Lösung

Gegeben: System mit EI = konstant, Auflagersenkung Δ

Gesucht: Schnittkraftlinien

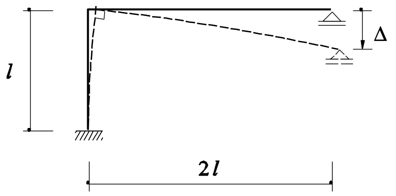


$\boxed{n=1}$

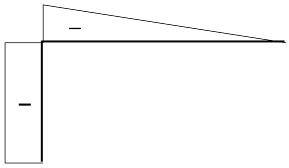
Abzählkriterium für ebene Rahmen:

$\boxed{n = r + 3s - 3k - g = 4 + 3\cdot 2 - 3\cdot 3 - 0 = 1}$

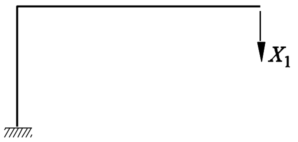
Verformungslinie qualitativ:



$M_{qualitativ}$:

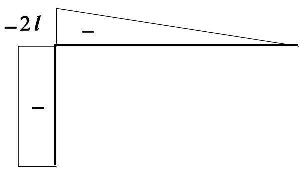


GS und ÜG:

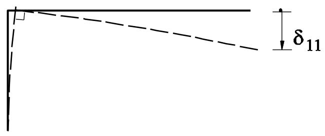


$M_0(\Delta) = V_0(\Delta) = N_0(\Delta) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \delta_{10} = 0$

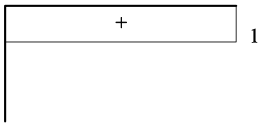
$M_1(X_1 = 1)$:



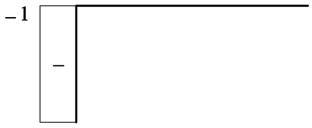
$w_1(X_1 = 1)$:



$V_1(X_1 = 1)$:



$N_1(X_1 = 1)$:



$\delta_{10} = 0$

$$\delta_{11} = \int M_1 \cdot \frac{M_1}{EI} \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot 2l \cdot \frac{2l}{EI} \cdot 2l + 2l \cdot \frac{2l}{EI} \cdot l = \underline{\underline{\frac{20l^3}{3EI}}}$$

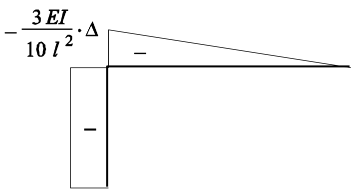
Verträglichkeitsbedingung:

$\delta_1 = \delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} = \Delta$

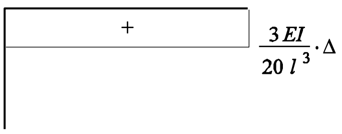
$\delta_{10} = 0 \quad \rightarrow \quad X_1 = \frac{\Delta}{\delta_{11}} = \underline{\underline{\frac{3EI}{20l^3} \cdot \Delta}} \quad [\mathrm{kN}]$

Schnittkräfte durch Superposition: $S = S_0 + X_1 \cdot S_1 = X_1 \cdot S_1 \quad (S_0 = 0)$

$M = X_1 \cdot M_1$:



$V = X_1 \cdot V_1$:



$N = X_1 \cdot N_1$: