

**BAUSTATIK I – KOLLOQUIUM 9, Merkblatt 1**

(101-0113)

Thema: Kraftmethode

**Kraftmethode:**

Mit der Kraftmethode können die Reaktionen und die elastische Schnittkraftverteilung von statisch unbestimmten Systemen ermittelt werden.

**Prinzip:**

Am statisch unbestimmten System werden so viele Bindungen gelöst (keine Teile entfernt!), bis das System statisch bestimmt ist (Grundsystem GS). Die gelösten Bindungen werden durch die ihnen entsprechenden, unbekanntes Kraftgrößen ersetzt (überzählige Größen ÜG). Die ÜG werden derart bestimmt, dass sie zusammen mit der Einwirkung eine Systemverformung verursachen, welche bei den gelösten Bindungen die Verträglichkeitsbedingungen des statischen Systems erfüllt.

**Verträglichkeitsbedingung: (System  $n$ -fach statisch unbestimmt,  $X_j$  sind die ÜG)**

$$\delta_i = \delta_{i0} + \sum_{j=1}^n X_j \cdot \delta_{ij} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\delta_{i0} = \int M_i \cdot \frac{M_0}{EI} dx + \int N_i \cdot \frac{N_0}{EA} dx + \dots$$

= Verschiebung an der Stelle  $i$  infolge der Einwirkung, berechnet mit der Arbeitsgleichung

$$\delta_{ij} = \int M_i \cdot \frac{M_j}{EI} dx + \int N_i \cdot \frac{N_j}{EA} dx + \dots$$

= Verschiebung an der Stelle  $i$  infolge der ÜG  $X_j = 1$ , berechnet mit der Arbeitsgleichung

**Vorgehen:**

1. Bestimmung des Grades der statischen Unbestimmtheit ( $n$ )
2. Übergang zu einem stabilen, statisch bestimmten GS durch Lösen von  $n$  Bindungen und Einführen entsprechender ÜG  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) an den Stellen der gelösten Bindungen
3. Ermittlung der Verformungen  $\delta_{i0}$  an der Stelle und in der Richtung von  $X_i$  infolge äusserer Einwirkung (Belastung oder aufgezogene Verformung)
4. Ermittlung der Verformungen  $\delta_{ij}$  an der Stelle und in der Richtung von  $X_i$  infolge der ÜG  $X_j = 1$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ )

5. Aufstellen und Lösen der Verträglichkeitsbedingungen

$$\delta_i = \delta_{i0} + \sum_{j=1}^n X_j \cdot \delta_{ij} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

(Ermittlung der  $\delta_{i0}$  und  $\delta_{ij} = \delta_{ji}$  mit der Arbeitsgleichung)

Matrizenschreibweise der Verträglichkeitsbedingungen:

$$\{\delta_i\} = \{\delta_{i0}\} + [\delta_{ij}] \cdot \{X_j\} = \{0\} \quad \rightarrow \quad \{X_j\} = -[\delta_{ij}]^{-1} \cdot \{\delta_{i0}\}$$

$\{\delta_{i0}\}$ : Belastungsvektor ( $n \times 1$ ), pro Lastfall ein Belastungsvektor

$[\delta_{ij}]$ : Nachgiebigkeitsmatrix ( $n \times n$ ), symmetrisch

$\{X_j\}$ : Vektor der ÜG ( $n \times 1$ )

6. Ermittlung von Reaktionen, Schnittgrößen und Verformungen am ursprünglich statisch unbestimmten System durch Superposition:

$$R = R_0 + \sum_{j=1}^n R_j \cdot X_j \quad \text{Reaktionen}$$

$$S = S_0 + \sum_{j=1}^n S_j \cdot X_j \quad \text{Schnittgrößen}$$

$$w = w_0 + \sum_{j=1}^n w_j \cdot X_j \quad \text{Verformungen, z.B. Durchbiegungen}$$

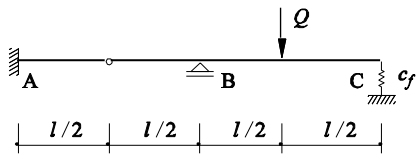
$R_0, S_0, w_0$ : Grössen am GS infolge äusserer Einwirkung

$R_j, S_j, w_j$ : Grössen am GS infolge  $X_j = 1$

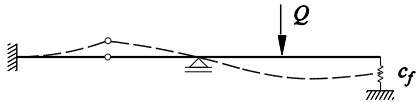
**Wahl des Grundsystems (GS):**

- Man unterscheidet zwischen äusserlich und innerlich statisch unbestimmten Systemen, je nachdem, ob die Auflagerreaktionen oder inneren Kräfte nicht allein mit Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden können. Meist sind die Systeme sowohl äusserlich als auch innerlich statisch unbestimmt.
- Aufpassen, dass das Grundsystem nicht instabil ist.
- Die Tragwirkung des GS sollte nicht wesentlich verschieden von derjenigen des statisch unbestimmten Systems sein (wenig fehlerempfindliches Gleichungssystem, Vermeiden von kleinen Differenzen grosser Zahlen bei der Superposition).
- GS so wählen, dass der Wirkungsbereich der ÜG möglichst klein ist, d.h. dass möglichst viele  $\delta_{ij}$  verschwinden (Vereinfachung der Berechnung).
- Ein einfaches und übersichtliches GS wählen und vorhandene Symmetrien nicht eliminieren.

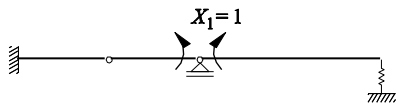
**Beispiel:**



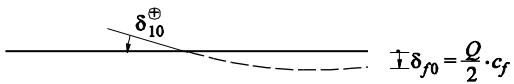
Verformungslinie qualitativ



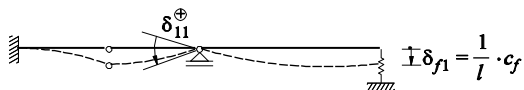
GS und ÜG:



$\delta_{10}(Q)$ :



$\delta_{11}(X_1 = 1)$ :



An der Stelle, wo die Bindung gelöst und  $X_1$  eingeführt wurde, darf es am effektiven System keinen Knick haben:

→ Verträglichkeitsbedingung:  $\delta_1 = \delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} = 0$

→ Ermittlung von  $X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}$

→ Schnittgrößen, Reaktionen etc. durch Superposition  $S = S_0 + X_1 \cdot S_1$