

BAUSTATIK I – KOLLOQUIUM 8, Merkblatt

(101-0113)

Thema: Arbeitsgleichung

Arbeitsgleichung:

Mit der Arbeitsgleichung können beliebige Verschiebungsgrößen (Verschiebung, Durchbiegung, Auflagerverdrehung etc.) bestimmt werden. Die Arbeitsgleichung ist ein Spezialfall des Prinzips der virtuellen Arbeiten (PVA).

Prinzip:

Es werden zwei voneinander unabhängige Zustände betrachtet:

VZ: Verschiebungszustand = *realer* Bewegungszustand des gegebenen Systems mit den Schnittkräften M, N, V, T und den entsprechenden elastischen Formänderungen (und der gesuchten Verschiebung/Verdrehung δ).

BZ: Belastungszustand = passend gewählter, *virtueller* Gleichgewichtszustand mit einer Einzellast $\bar{Q} = 1$ (bzw. $\bar{M} = 1$) an der Stelle und in der Richtung der gesuchten Verschiebung/Verdrehung δ .

Vorgehen:

VZ: Ermittlung der elastischen Formänderungen infolge M, N, V, T , Temperatur, Eigenspannungen, Federn etc.: $\frac{M}{EI}$, $\frac{N}{EA}$, $\frac{V}{GA^*}$, $\frac{T}{GK}$, $\alpha_T \cdot \frac{T_u - T_o}{h}$, $\alpha_T \cdot \Delta T$, $F \cdot c_f$ (Auflagerreaktionen und Schnittkräfte müssen zuerst bestimmt werden.)

BZ: Ermittlung der Auflagerkräfte und Schnittkräfte $\bar{M}, \bar{N}, \bar{V}, \bar{T}$ infolge der virtuellen Belastung $\bar{Q} = 1$ (bzw. $\bar{M} = 1$)

In der **Arbeitsgleichung** werden Belastungs- und Verschiebungszustand verknüpft.

$$1 \cdot \delta + \sum \bar{R}_i \cdot r_i = \int \bar{M} \frac{M}{EI} dx + \int \bar{N} \frac{N}{EA} dx + \int \bar{V} \frac{V}{GA^*} dx + \int \bar{T} \frac{T}{GK} dx + \int \bar{M} \frac{\alpha_T (T_u - T_o)}{h} dx + \int \bar{N} \alpha_T \Delta T dx + \sum \bar{F} F c_f$$

Bemerkungen:

1. Auf der linken Seite der Gleichung steht die Arbeit der Lasten und Auflagerkräfte (äussere Arbeit = Kraft im BZ mal Verschiebung im VZ). Auf der rechten Seite steht die Formänderungsarbeit (innere Arbeit = Schnittkraft im BZ mal Formänderung im VZ, über das gesamte System integriert).
2. Bei Balkentragwerken ist die innere Arbeit infolge Biegung, Torsion, Federn und Temperatur zu berücksichtigen. Die Beiträge von Querkraft und Normalkraft sind in der Regel klein und können vernachlässigt werden (Ausnahmen: Anteil Querkraft bei dünnstegigen Stahlprofilträgern und

Sandwichquerschnitten, Anteil Normalkraft bei Fachwerken und bei Zuggliedern mit relativ geringer Querschnittsfläche).

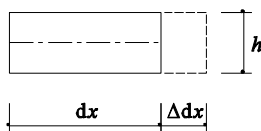
3. Die in der Arbeitsgleichung auftretenden Formänderungsintegrale werden im Allgemeinen mit Hilfe von Tabellen numerisch integriert.

Formänderungen des Stabelementes:

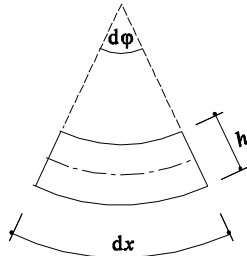
Jede Schnittkraft hat eine bestimmte Stabelementverformung zur Folge. Die Beziehungen zwischen den Schnittkräften und den Stabelementen beruhen auf folgenden Voraussetzungen:

- Material: homogen, isotrop
- Materialverhalten: linear elastisch (Hooke)
 $\sigma = \varepsilon \cdot E$
 $\tau = \gamma \cdot G$
- Ebenbleiben des Querschnittes (Bernoulli):
 Spannungsintegration \rightarrow Schnittkraft

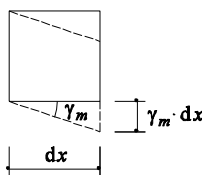
Stabelement:



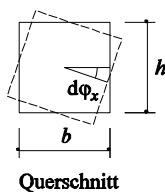
Dehnung: $\frac{\Delta dx}{dx} = \frac{N}{EA} + \alpha_T \cdot \Delta T$



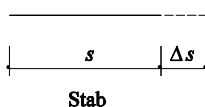
Krümmung: $\frac{d\phi}{dx} = \chi = \frac{M}{EI} + \alpha_T \cdot \frac{T_u - T_o}{h}$



Schiebung: $\frac{\gamma_m \cdot dx}{dx} = \frac{V}{GA^*}$

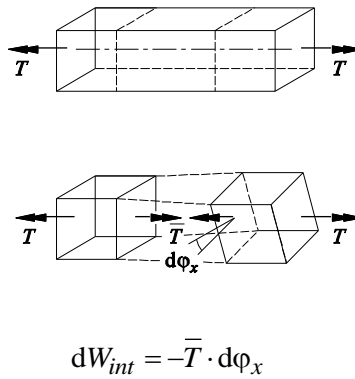
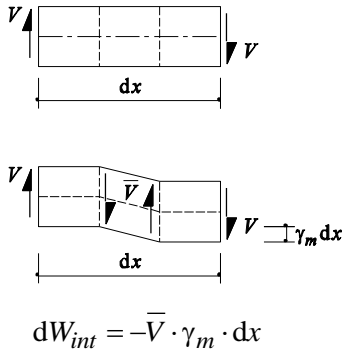
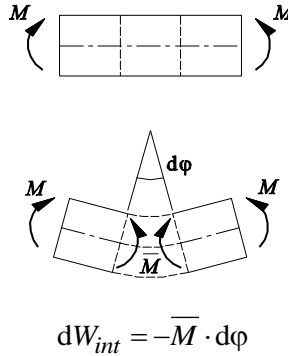
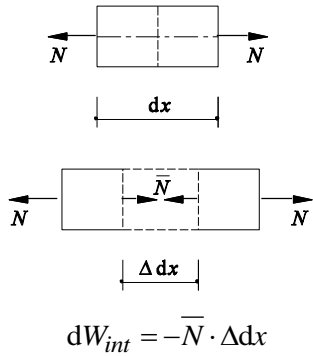


Verdrehung: $\frac{d\phi_x}{dx} = \frac{T}{GK}$



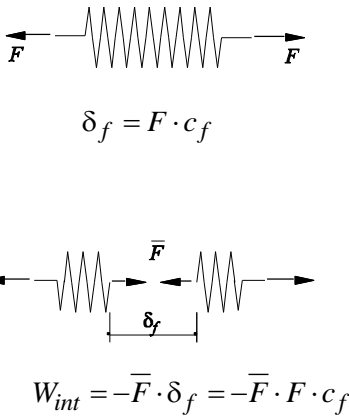
Stabverlängerung: $\frac{\Delta s}{s} = \frac{S}{EA} + \alpha_T \cdot \Delta T$

Innere Arbeit bei Stabelementen:

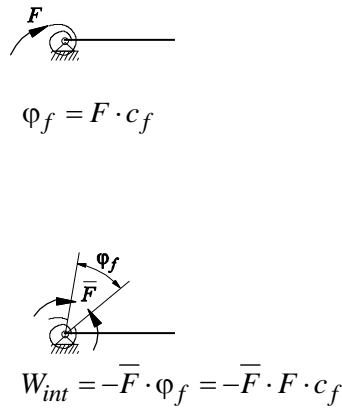


Innere Arbeit bei Federelementen:

Zug-Druckfeder:



Drehfeder:



Totale Arbeit:

$W_{ext} + W_{int} = 0 \rightarrow W_{ext} = -W_{int}$

$$1 \cdot \delta + \sum \bar{R}_i \cdot r_i = \int \bar{M} \frac{M}{EI} dx + \int \bar{N} \frac{N}{EA} dx + \int \bar{V} \frac{V}{GA^*} dx + \int \bar{T} \frac{T}{GK} dx + \int \bar{M} \frac{\alpha_T (T_u - T_o)}{h} dx + \int \bar{N} \alpha_T \Delta T dx + \sum \bar{F} F c_f$$