

**BAUSTATIK I – KOLLOQUIUM 6, Lösung**

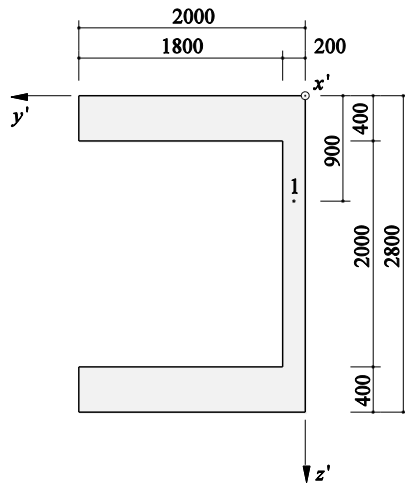
(101-0113)

Thema: Normal- und Schubspannungen, Kern

**Aufgabe 1, Lösung**

Gegeben: Holzquerschnitt (Masse in mm)  
 Schnittkraft:  $V_z = 0.3 \text{ MN}$

- Gesucht:
- a) Schubspannungen am Querschnitt infolge  $V_z$
  - b) Schubspannungen im Punkt 1 infolge  $V_z$
  - c) Schubmittelpunkt M



**a) Schubspannungen infolge  $V_z = 0.3 \text{ MN}$**

$$\tau = \frac{V_z \cdot S_y(z_s)}{b(z_s) \cdot I_y}$$

wobei:

$$I_y = \int_A z^2 \cdot dA = 2.459 \cdot 10^{12} \text{ mm}^4 :$$

Trägheitsmoment bezüglich y-Achse

(siehe Kolloquium 5, Aufgabe 3)

$$S_y(z_s) = \int_{z_s}^{z_u} z \cdot b(z) \cdot dz :$$

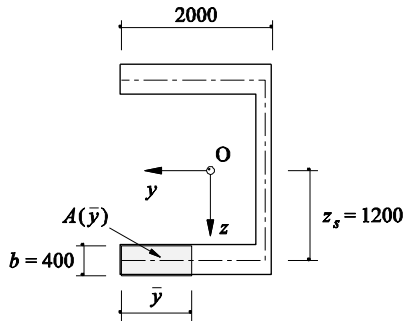
Statisches Moment bezüglich y-Achse

**Merke:**  $S_{y,max} = S_y(z_s = 0)$

**Annahme für die Berechnung der Schubspannungen:**

Dünnwandiger Querschnitt → Querschnitt durch Schwerlinien der Teilflächen idealisiert

Schubspannungen im Flansch:



$$\tau_{yx} = \frac{V_z \cdot S_y(z_s)}{b(z_s) \cdot I_y}$$

mit:

$$S_y(z_s) = 1200 \cdot (\bar{y} \cdot 400) \quad [\text{mm}^3]$$

$$b = 400 \text{ mm}$$

$$I_y = 2.459 \cdot 10^{12} \text{ mm}^4$$

Da  $b$  und  $z_s$  konstant → linearer Verlauf von  $\tau_{yx}$

Maximale Schubspannungen bei  $\bar{y} = 1900 \text{ mm}$   
 (im Schnittpunkt der Schwerlinien):

$$z_s = 1200 \text{ mm:}$$

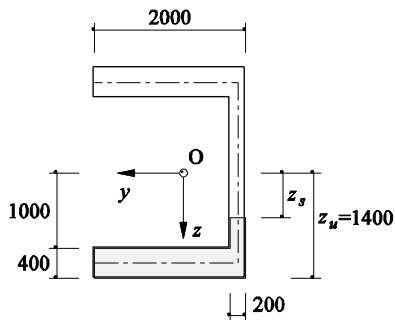
$$S_y(z_s) = 1200 \cdot (1900 \cdot 400) = 0.912 \cdot 10^9 \text{ mm}^3$$

$$b = 400 \text{ mm}$$

$$I_y = 2.459 \cdot 10^{12} \text{ mm}^4$$

$$\rightarrow \tau_{yx_{max}} = \frac{0.3 \cdot 10^6 \cdot 0.912 \cdot 10^9}{400 \cdot 2.459 \cdot 10^{12}} = \underline{\underline{0.278 \text{ N/mm}^2}}$$

Schubspannungen im Steg:



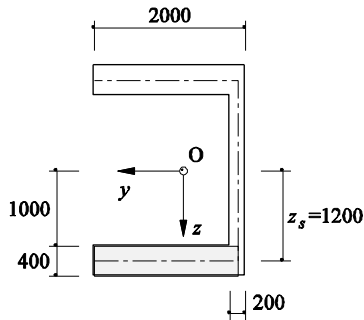
$$\tau_{zx} = \frac{V_z \cdot S_y(z_s)}{b(z_s) \cdot I_y}$$

mit:

$$I_y = 2.459 \cdot 10^{12} \text{ mm}^4$$

Idealisierter Verlauf von  $\tau_{zx}$  (ausgezogene Linie: s. S. 4):

- Schubspannungen  $\tau_{zx}$  im Schnittpunkt der Schwerlinien von Flansch und Steg



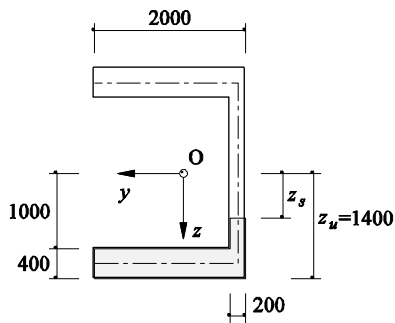
$z_s = 1200 \text{ mm}:$

$S_y(z_s) = 1200 \cdot (1900 \cdot 400) = 0.912 \cdot 10^9 \text{ mm}^3$

$b = 200 \text{ mm}$

$\rightarrow \tau_{zx} = \frac{0.3 \cdot 10^6 \cdot 0.912 \cdot 10^9}{200 \cdot 2.459 \cdot 10^{12}} = \underline{\underline{0.556 \text{ N/mm}^2}}$

- Schubspannungen  $\tau_{zx}$  im Steg:



allgemein für  $1000 \text{ mm} > z_s > 0$ :

$S_y(z_s) = 1200 \cdot (2000 \cdot 400)$

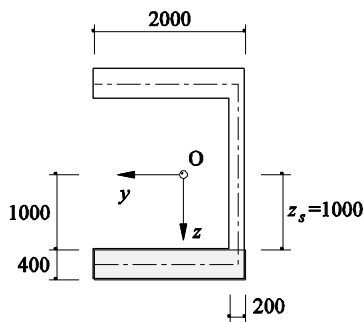
$+ \frac{1}{2} \cdot (z_s + 1000) \cdot (1000 - z_s) \cdot 200 \text{ [mm}^3\text{]}$

$z_s = 1000 \text{ mm}:$

$S_y(z_s) = 1200 \cdot (2000 \cdot 400) = 0.960 \cdot 10^9 \text{ mm}^3$

$b = 200 \text{ mm}$

$\rightarrow \tau_{zx} = \frac{0.3 \cdot 10^6 \cdot 0.960 \cdot 10^9}{200 \cdot 2.459 \cdot 10^{12}} = \underline{\underline{0.586 \text{ N/mm}^2}}$



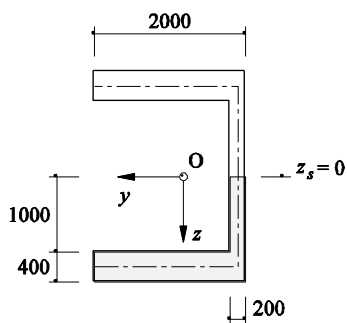
$z_s = 0:$

$S_y(z_s) = 1200 \cdot (2000 \cdot 400) + 500 \cdot (1000 \cdot 200)$

$= 1.060 \cdot 10^9 \text{ mm}^3$

$b = 200 \text{ mm}$

$\rightarrow \tau_{zx_{max}} = \frac{0.3 \cdot 10^6 \cdot 1.060 \cdot 10^9}{200 \cdot 2.459 \cdot 10^{12}} = \underline{\underline{0.647 \text{ N/mm}^2}}$





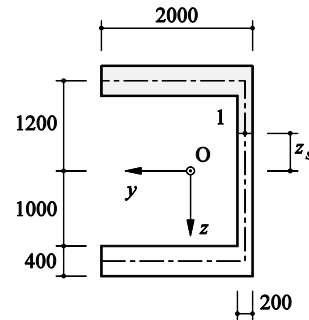
**b) Schubspannungen im Punkt 1 infolge  $V_z = 0.3 \text{ MN}$**

$$z_s = -500 \text{ mm}$$

$$S_y(z_s) = 1200 \cdot (2000 \cdot 400) + 750 \cdot (500 \cdot 200) = 1.035 \cdot 10^9 \text{ mm}^3$$

$$b = 200 \text{ mm}$$

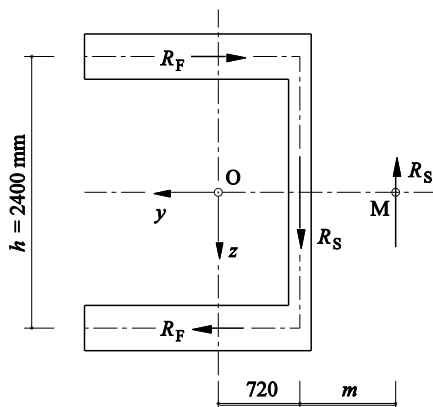
$$\rightarrow \tau_{zx} = \frac{0.3 \cdot 10^6 \cdot 1.035 \cdot 10^9}{200 \cdot 2.459 \cdot 10^{12}} = \underline{\underline{0.631 \text{ N/mm}^2}}$$



**Merke:**

Zur Ermittlung der Schubspannungen ist bei negativen  $z_s$  der Betrag von  $S_y$  einzusetzen. Es ergibt sich dadurch für die Berechnung von  $S_y$  aus der schraffierten Fläche der gleiche Wert, wie wenn der nicht schraffierte Teil betrachtet wird. Die Richtung der Schubspannungen ist jeweils qualitativ zu überlegen.

**c) Schubmittelpunkt M**



Die Kraft  $R_S$  durch den Schubmittelpunkt M stellt die Reaktion der Resultierenden aus  $R_S$  und  $R_F$  dar.

Resultierende aus Schubspannungen im Flansch:

$$R_F = \frac{1}{2} \cdot \tau_{yx_{max}} \cdot b_F \cdot t_F = \frac{1}{2} \cdot 0.278 \cdot 1900 \cdot 400 = 105.7 \cdot 10^3 \text{ N} = 0.1057 \cdot 10^6 \text{ N}$$

(lineare Zunahme von  $\tau_{yx}$ )

Resultierende aus Schubspannungen im Steg:

$$R_S = V_z = 0.3 \cdot 10^6 \text{ N}$$

( $R_S$  entspricht gerade  $V_z$  → keine Integration über Stegfläche nötig)

Schubmittelpunkt:

$$\begin{aligned} \sum M(M) = 0 & \quad \rightarrow \quad R_S \cdot m - R_F \cdot h = 0 \\ \rightarrow & \quad m = \frac{R_F \cdot h}{R_S} = \frac{2400 \cdot 0.1057 \cdot 10^6}{0.3 \cdot 10^6} = \underline{\underline{846 \text{ mm}}} \end{aligned}$$

Schubmittelpunkt  $M(y, z) = M(-1566, 0)$

**Merke:**

Der Einfluss von  $V_z$  kürzt sich in der Formel heraus

→ Die Lage des Schubmittelpunktes ist **nicht** von der Grösse der Querkraft abhängig!

**Aufgabe 2, Lösung**

Gegeben: Kreisringprofil ROR 219.1/6.3 ( $D = 219.1 \text{ mm}$ ,  $t = 6.3 \text{ mm}$ )

Stahl S235 (Fließgrenze  $f_y = 235 \text{ N/mm}^2$ )

Querschnittswerte:  $I_y = 23.86 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$

$A = 4.21 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$

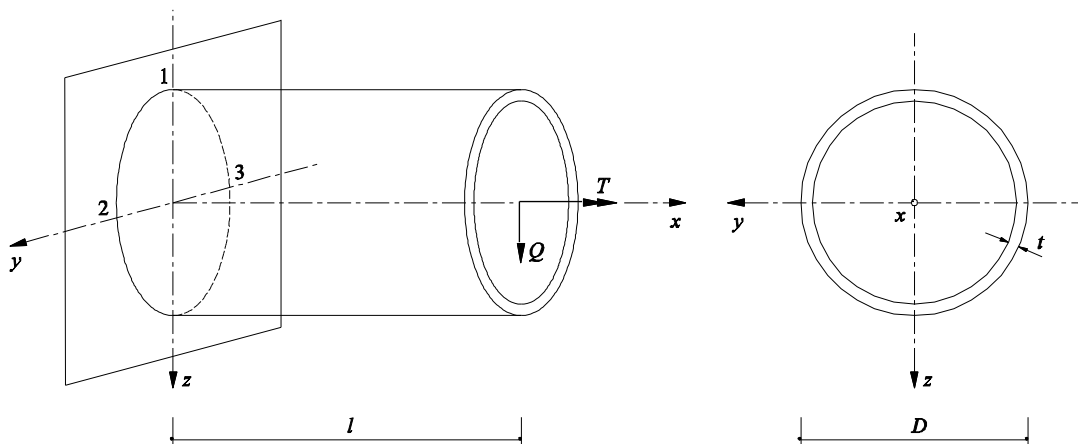
$S_{max} = 142.6 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$

Stablänge:  $l = 2 \text{ m}$

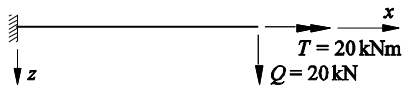
Last am Stabende:  $Q = 20 \text{ kN}$

$T = 20 \text{ kNm}$

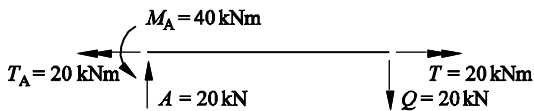
- Gesucht:
- Schnittkräfte am Stab
  - Spannungsermittlung für die Punkte 1, 2 und 3 an der Einspannstelle
  - Ermittlung der Hauptspannungen in den Punkten 1, 2 und 3: analytisch und grafisch (Mohrscher Kreis)



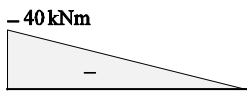
**a) Schnittkräfte am Stab (Eigengewicht vernachlässigt)**



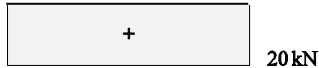
SKD:



$M_y$  :



$V_z$  :



$T_x$  :



$N_x = M_z = V_y = 0$

**b) Spannungsermittlung für die Punkte 1, 2 und 3 an der Einspannstelle**

Biegung:

y, z : Hauptachsen  
 Ebenbleiben des Querschnittes  
 Hooksches Gesetz (linear elastisches Verhalten)

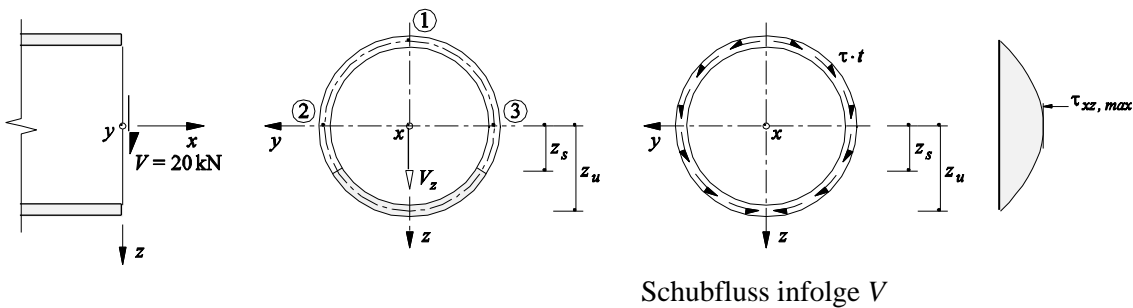
$N_x = M_z = 0 \rightarrow \sigma_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot z$

Punkt (1):  $z = -\frac{219}{2} \text{ mm} \rightarrow \sigma_x = \frac{-40 \cdot 10^6}{23.86 \cdot 10^6} \cdot \left(-\frac{219}{2}\right) = 183.7 \text{ N/mm}^2$

Punkt (2):  $z = 0 \rightarrow \sigma_x = 0$

Punkt (3):  $z = 0 \rightarrow \sigma_x = 0$

Querkraft:



$$\tau_{xz} = \frac{V_z \cdot S(z_s)}{b(z_s) \cdot I_y} = \tau_{zx}$$

$$S(z_s) = \int_{z_s}^{z_u} z \cdot b(z) \cdot dz$$

$z_s = 0 \rightarrow S(z_s) = S_{max} = 142.6 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$   
(siehe Aufgabenstellung)

Punkt (1):  $S(z_s = -\frac{219}{2} \text{ mm}) = 0 \rightarrow \tau_{xz} = 0$

Punkt (2):  $S(z_s = 0) = S_{max} = 142.6 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 \rightarrow \tau_{xz} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 142.6 \cdot 10^3}{(2 \cdot 6.3) \cdot 23.86 \cdot 10^6} = 9.5 \text{ N/mm}^2$

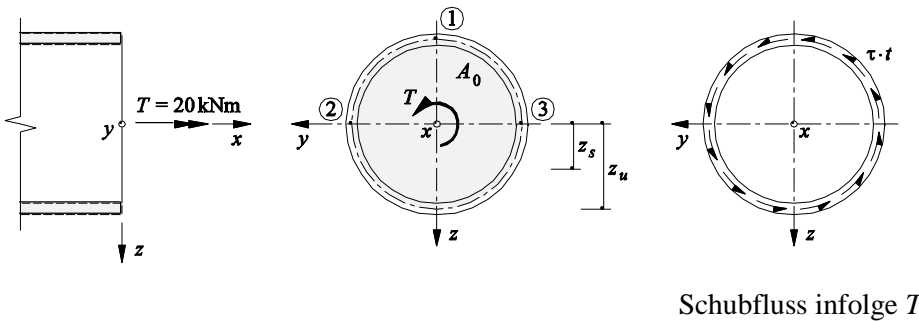
Punkt (3):  $S(z_s = 0) = S_{max} = 142.6 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 \rightarrow \tau_{xz} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 142.6 \cdot 10^3}{(2 \cdot 6.3) \cdot 23.86 \cdot 10^6} = 9.5 \text{ N/mm}^2$



Torsion:

Hohlquerschnitt: Aufnahme des Torsionsmomentes durch Umlauf-Schubfluss  
 (St. Venant-Umlauf torsion)

$t/D$  klein: dünnwandiger Querschnitt:  
 Annahme:  $\tau$  in Richtung Wandmittellinie wirkend und über Wandstärke  
 gleichmässig verteilt, infolge  $T$  nur  $\tau_T$ , kein  $\sigma_x$   
 → Schubfluss  $\tau \cdot t$  ist konstant  
 → Bredtsche Formel anwendbar



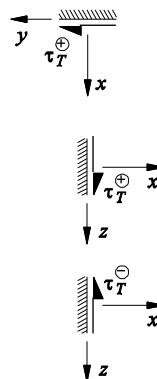
$$\tau_T = \frac{T}{2 \cdot A_0 \cdot t}$$

$$A_0 = \left(\frac{D-t}{2}\right)^2 \cdot \pi = \left(\frac{219.1-6.3}{2}\right)^2 \cdot \pi = 35.566 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$$

$$\text{Punkt (1): } \tau_T = \frac{20 \cdot 10^6}{2 \cdot 35.566 \cdot 10^3 \cdot 6.3} = 44.6 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{Punkt (2): } \tau_T = \frac{20 \cdot 10^6}{2 \cdot 35.566 \cdot 10^3 \cdot 6.3} = 44.6 \text{ N/mm}^2$$

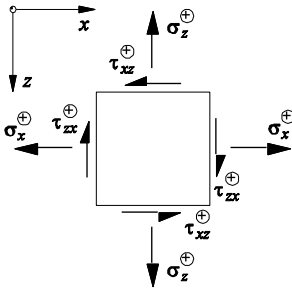
$$\text{Punkt (3): } \tau_T = -\frac{20 \cdot 10^6}{2 \cdot 35.566 \cdot 10^3 \cdot 6.3} = -44.6 \text{ N/mm}^2$$



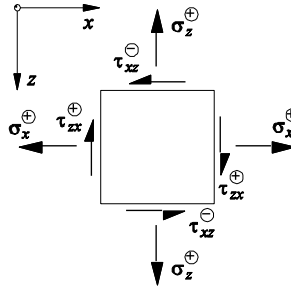
**c) Ermittlung der Hauptspannungen in den Punkten 1, 2 und 3**

Vorzeichenkonvention siehe Merkblatt Kolloquium 5:

Am Element:



Im Mohrschen Kreis:



**Beachte:**  $\tau_{xy}$  wird negativ

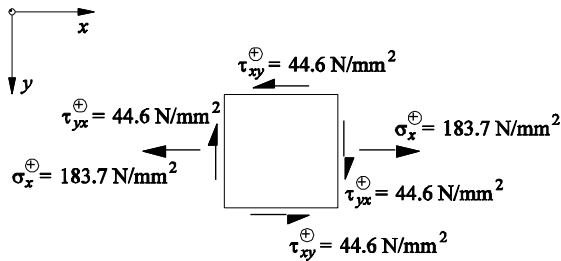
**Punkt (1):**

$$\sigma_x = 183.7 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_y = 0$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \tau_T = 44.6 \text{ N/mm}^2$$

**Darstellung am Element:**



**Analytische Lösung:**

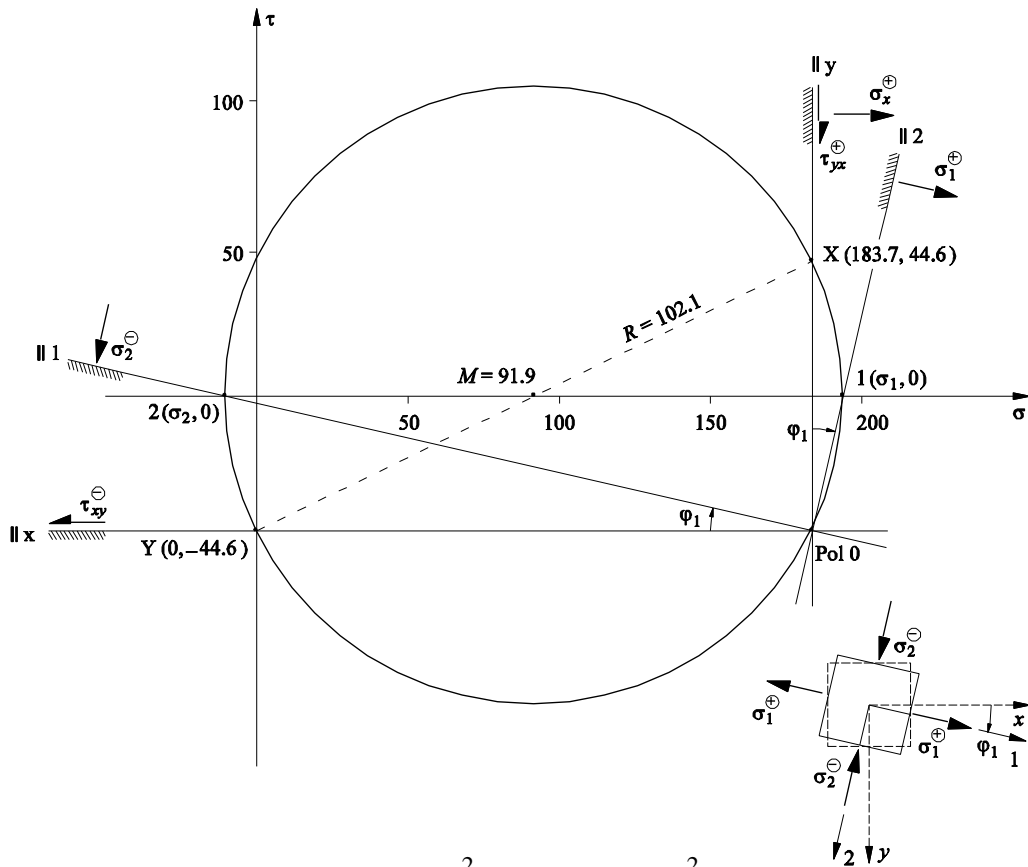
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{183.7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{183.7}{2}\right)^2 + 44.6^2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 194.0 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_2 = -10.3 \text{ N/mm}^2 \end{cases}$$

$$\tan 2\varphi_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 44.6}{183.7} = 0.486$$

$$\rightarrow \underline{\underline{\varphi_1 = 12.95^\circ}}$$

**Grafische Lösung:**



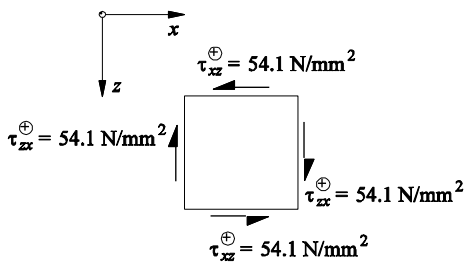
Aus Grafik gelesen:  $\sigma_1 \approx 194 \text{ N/mm}^2$ ,  $\sigma_2 \approx -10 \text{ N/mm}^2$   
 $\varphi_1 \approx 13^\circ$

**Punkt (2):**

$$\sigma_x = \sigma_z = 0$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \tau_{xz}(V) + \tau_T = 9.5 + 44.6 = 54.1 \text{ N/mm}^2$$

**Darstellung am Element:**



### Analytische Lösung:

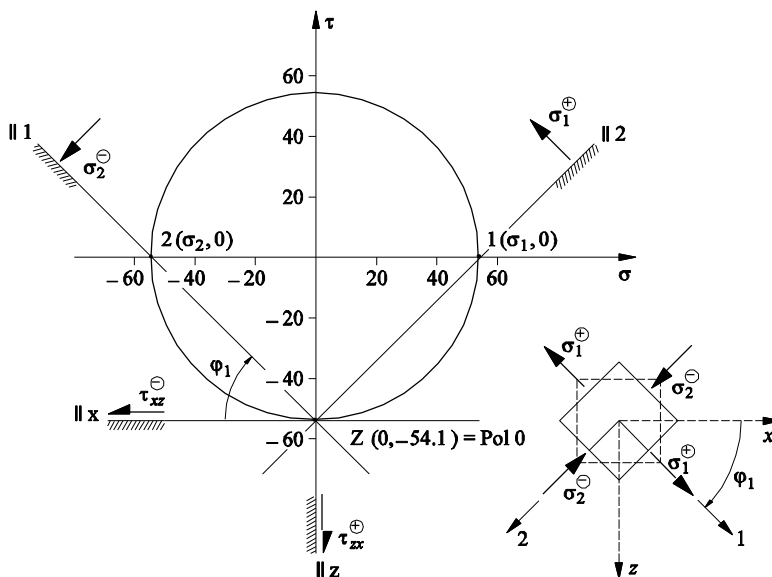
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \pm \sqrt{54.1^2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 54.1 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_2 = -54.1 \text{ N/mm}^2 \end{cases}$$

$$\tan 2\varphi_1 = \frac{2\tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_z} = \frac{2 \cdot 54.1}{0} = \infty$$

$$\rightarrow \underline{\underline{\varphi_1 = 45^\circ}}$$

### Grafische Lösung:



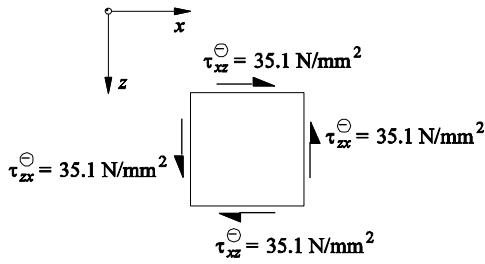
Aus Grafik gelesen:  $\sigma_1 = 54.1 \text{ N/mm}^2$ ,  $\sigma_2 = -54.1 \text{ N/mm}^2$   
 $\varphi_1 = 45^\circ$

### Punkt (3):

$$\sigma_x = \sigma_y = 0$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \tau_{xz}(V) + \tau_T = 9.5 - 44.6 = -35.1 \text{ N/mm}^2$$

**Darstellung am Element:**



**Analytische Lösung:**

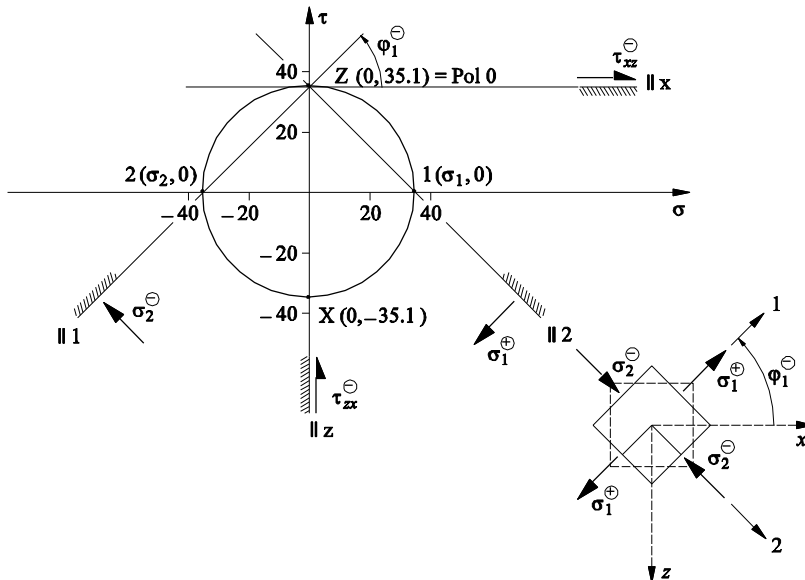
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \pm \sqrt{(-35.1)^2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 35.1 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_2 = -35.1 \text{ N/mm}^2 \end{cases}$$

$$\tan 2\varphi_1 = \frac{2\tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_z} = \frac{2 \cdot (-35.1)}{0} = -\infty$$

$$\rightarrow \underline{\underline{\varphi_1 = -45^\circ}}$$

**Grafische Lösung:**



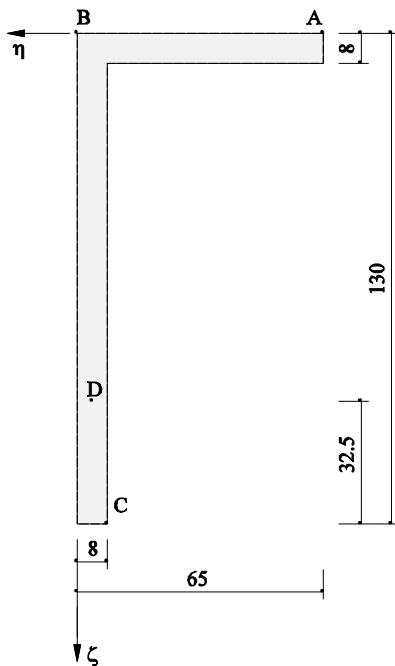
Aus Grafik gelesen:  $\sigma_1 = 35.1 \text{ N/mm}^2, \sigma_2 = -35.1 \text{ N/mm}^2$

$$\varphi_1 = -45^\circ$$

**Aufgabe 3, Lösung-**

Gegeben: Träger mit unsymmetrischem Querschnitt (Masse in mm)

- Gesucht:
- a) Lage des Schwerpunktes O und des Schubmittelpunktes M bezüglich der Bezugsachsen  $\eta$  und  $\zeta$
  - b) Flächenträgheitsmomente  $I_{\eta'}$  und  $I_{\zeta'}$ , sowie Deviationsmoment  $C_{\eta'\zeta'}$  bezüglich den zu  $\eta$  und  $\zeta$  parallelen, sich in O schneidenden Achsen  $\eta'$  und  $\zeta'$
  - c) Bestimmung der Richtung der Hauptschwerachsen  $y$  und  $z$  sowie der entsprechenden Flächenträgheitsmomente  $I_y$  und  $I_z$  analytisch und grafisch (mit Hilfe des Mohrschen Kreises für Trägheitsmomente)
  - d) Bestimmung des Kerns
  - e) Bestimmung der neutralen Achse infolge  $M_{\eta'} = 5 \text{ kNm}$
  - f) Spannungen  $\sigma_x$  in A, B und C infolge  $M_{\eta'} = 5 \text{ kNm}$
  - g) Schubspannungen  $\tau_{xy}$  in D infolge  $V_{\zeta'} = 25 \text{ kN}$
  - h) Moment  $M_{\eta'}$ , so dass die Fließspannung  $f_y = 235 \text{ N/mm}^2$  nirgends überschritten wird.



**a) Lage des Schwerpunktes O und des Schubmittelpunktes M**

Querschnittsfläche:

$$A = 8 \cdot 130 + 8 \cdot 57 = \underline{\underline{1496 \text{ mm}^2}}$$

Schwerpunkt O:

$$\eta_O = \frac{8 \cdot 130 \cdot (-4) + 8 \cdot 57 \cdot (-36.5)}{8 \cdot 130 + 8 \cdot 57} = \underline{\underline{-13.9 \text{ mm}}}$$

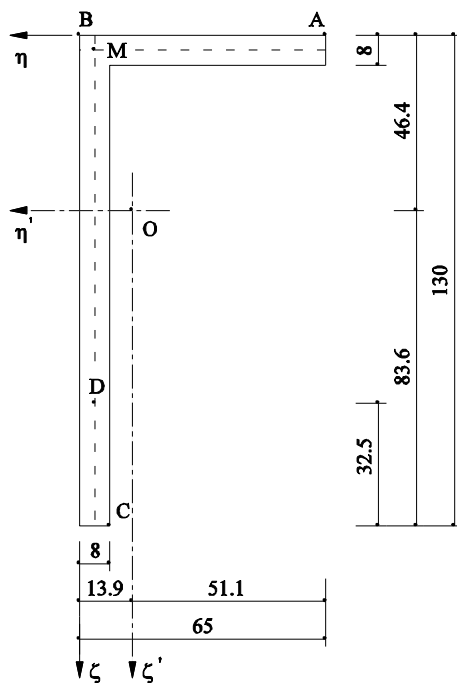
$$\zeta_O = \frac{8 \cdot 130 \cdot 65 + 8 \cdot 57 \cdot 4}{8 \cdot 130 + 8 \cdot 57} = \underline{\underline{46.4 \text{ mm}}}$$

$$\rightarrow \boxed{O(\eta, \zeta) = O(-13.9, 46.4)}$$

Schubmittelpunkt M:

Bei Winkelprofilen liegt der Schubmittelpunkt im Schnittpunkt der Achsen:

$$\rightarrow \boxed{M(\eta, \zeta) = M(-4, 4)}$$



**b) Flächenträgheitsmomente  $I_{\eta'}$  und  $I_{\zeta'}$ , Deviationsmoment  $C_{\eta'\zeta'}$**

$$I_{\eta'} = \int \zeta'^2 \cdot dA = 57 \cdot 8 \cdot (-46.4 + 4)^2 + \frac{57 \cdot 8^3}{12} + 130 \cdot 8 \cdot (-46.4 + 65)^2 + \frac{8 \cdot 130^3}{12} = \underline{\underline{2.647 \cdot 10^6 \text{ mm}^4}}$$

$$I_{\zeta'} = \int \eta'^2 \cdot dA = 57 \cdot 8 \cdot (13.9 - 36.5)^2 + \frac{8 \cdot 57^3}{12} + 130 \cdot 8 \cdot (13.9 - 4)^2 + \frac{130 \cdot 8^3}{12} = \underline{\underline{0.464 \cdot 10^6 \text{ mm}^4}}$$

$$C_{\eta'\zeta'} = \int \eta' \cdot \zeta' \cdot dA = 57 \cdot 8 \cdot (-46.4 + 4) \cdot (13.9 - 36.5) + 130 \cdot 8 \cdot (-46.4 + 65) \cdot (13.9 - 4) = \underline{\underline{0.628 \cdot 10^6 \text{ mm}^4}}$$

c) Hauptachsen  $y$  und  $z$ , Hauptträgheitsmomente  $I_y$  und  $I_z$

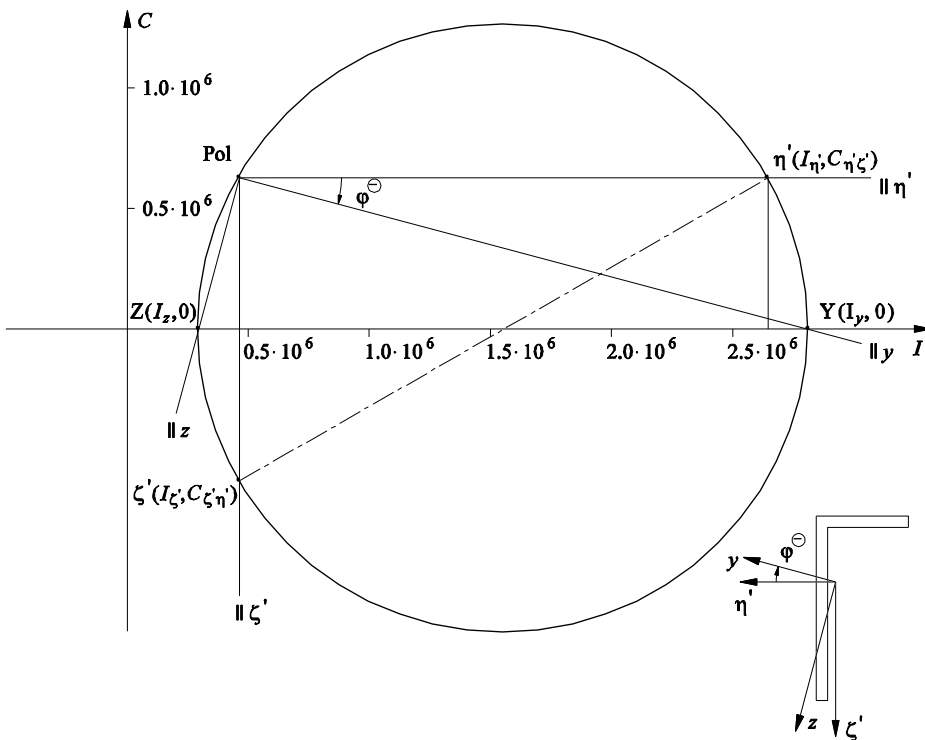
$$I_{y,z} = \frac{I_{\eta'} + I_{\zeta'}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{\eta'} - I_{\zeta'}}{2}\right)^2 + C_{\zeta'\eta'}^2} =$$

$$= 10^6 \cdot \left( \frac{2.647 + 0.464}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2.647 - 0.464}{2}\right)^2 + 0.628^2} \right) = 1.555 \cdot 10^6 \pm 1.259 \cdot 10^6$$

→  $I_y = 2.815 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$   
 $I_z = 0.296 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$

$$\tan 2\varphi = \frac{-2 \cdot C_{\zeta'\eta'}}{I_{\eta'} - I_{\zeta'}} = \frac{-2 \cdot 0.628}{2.647 - 0.464} = -0.5758$$

→  $\varphi = -14.97^\circ \approx -15^\circ$



Aus Grafik gelesen:  $I_y \approx 2.8 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$ ,  $I_z \approx 0.3 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$   
 $\varphi \approx -15^\circ$



**d) Kern (siehe Merkblatt 2, Kolloquium 6)**

Gleichung für die neutrale Achse:

$$\sigma_x = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{A} + \frac{\eta'_A \cdot I_{\eta'} - \zeta'_A \cdot C_{\eta'\zeta'}}{I_{\eta'} \cdot I_{\zeta'} - C_{\eta'\zeta'}^2} \cdot \eta' + \frac{\zeta'_A \cdot I_{\zeta'} - \eta'_A \cdot C_{\eta'\zeta'}}{I_{\eta'} \cdot I_{\zeta'} - C_{\eta'\zeta'}^2} \cdot \zeta' = 0}$$

mit:  $\eta'_A, \zeta'_A$  Punkte des Kernrands  
 $\eta', \zeta'$  : Punkte der neutralen Achse

Neutrale Achse  $n-n$  allgemein:

- Schnittpunkt mit der $\eta'$ -Achse: P ( $\eta'_P, 0$ ) $\rightarrow \eta'_A \cdot I_{\eta'} - \zeta'_A \cdot C_{\eta'\zeta'} = -\frac{I_{\eta'} \cdot I_{\zeta'} - C_{\eta'\zeta'}^2}{\eta'_P \cdot A}$
- Schnittpunkt mit der $\zeta'$ -Achse: Q ( $0, \zeta'_Q$ ) $\rightarrow \zeta'_A \cdot I_{\zeta'} - \eta'_A \cdot C_{\eta'\zeta'} = -\frac{I_{\eta'} \cdot I_{\zeta'} - C_{\eta'\zeta'}^2}{\zeta'_Q \cdot A}$

$\rightarrow$  2 Gleichungen für 2 Unbekannte:  $\eta'_A$  und  $\zeta'_A$

Neutrale Achse  $n-n$  parallel zur  $\eta'$ -Achse:

$P(\eta'_P = \pm\infty, 0) ; Q(0, \zeta'_Q)$ $\rightarrow \eta'_A = -\frac{C_{\eta'\zeta'}}{\zeta'_Q \cdot A}$ $\zeta'_A = -\frac{I_{\eta'}}{\zeta'_Q \cdot A}$
---

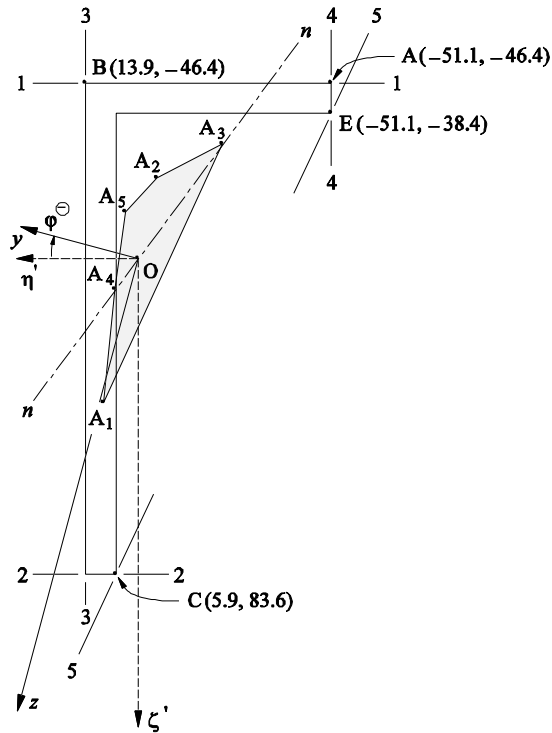
Neutrale Achse  $n-n$  parallel zur  $\zeta'$ -Achse:

$P(\eta'_P, 0) ; Q(0, \zeta'_Q = \pm\infty)$ $\rightarrow \eta'_A = -\frac{I_{\zeta'}}{\eta'_P \cdot A}$ $\zeta'_A = -\frac{C_{\eta'\zeta'}}{\eta'_P \cdot A}$
--

Für den vorliegenden Querschnitt ergeben sich folgende Punkte des Kern:

- Neutrale Achse entlang oberem Rand 1 - 1 :  $P: (\eta'_P, 0) = (\pm\infty, 0)$   
 $Q: (0, \zeta'_Q) = (0, -46.4)$   
 $\rightarrow \eta'_{A_1} = -\frac{0.628 \cdot 10^6}{(-46.4) \cdot 1.496 \cdot 10^3} = \underline{\underline{9.1 \text{ mm}}}$   
 $\zeta'_{A_1} = -\frac{2.647 \cdot 10^6}{(-46.4) \cdot 1.496 \cdot 10^3} = \underline{\underline{38.1 \text{ mm}}}$
- Neutrale Achse entlang unterem Rand 2 - 2 :  $P: (\eta'_P, 0) = (\pm\infty, 0)$   
 $Q: (0, \zeta'_Q) = (0, 83.6)$   
 $\rightarrow \eta'_{A_2} = -\frac{0.628 \cdot 10^6}{83.6 \cdot 1.496 \cdot 10^3} = \underline{\underline{-5.0 \text{ mm}}}$   
 $\zeta'_{A_2} = -\frac{2.647 \cdot 10^6}{83.6 \cdot 1.496 \cdot 10^3} = \underline{\underline{-21.2 \text{ mm}}}$
- Neutrale Achse entlang linkem Rand 3 - 3 :  $P: (\eta'_P, 0) = (13.9, 0) \rightarrow$   
 $Q: (0, \zeta'_Q) = (0, \pm\infty)$   
 $\rightarrow \eta'_{A_3} = -\frac{0.464 \cdot 10^6}{13.9 \cdot 1.496 \cdot 10^3} = \underline{\underline{-22.3 \text{ mm}}}$   
 $\zeta'_{A_3} = -\frac{0.628 \cdot 10^6}{13.9 \cdot 1.496 \cdot 10^3} = \underline{\underline{-30.2 \text{ mm}}}$
- Neutrale Achse entlang rechtem Rand 4 - 4 :  $P: (\eta'_P, 0) = (-51.1, 0)$   
 $Q: (0, \zeta'_Q) = (0, \pm\infty)$   
 $\rightarrow \eta'_{A_4} = -\frac{0.464 \cdot 10^6}{(-51.1) \cdot 1.496 \cdot 10^3} = \underline{\underline{6.1 \text{ mm}}}$   
 $\zeta'_{A_4} = -\frac{0.628 \cdot 10^6}{(-51.1) \cdot 1.496 \cdot 10^3} = \underline{\underline{8.2 \text{ mm}}}$
- Neutrale Achse = Verbindung C(5.9, 83.6) und E(-51.1, -38.4):  
Geradengleichung:  $\zeta' = 2.1404 \cdot \eta' + 70.9405$   
 $P: (\eta'_P, 0) = (-33.14, 0)$   
 $Q: (0, \zeta'_Q) = (0, 70.94)$   
 $\eta'_{A_5} \cdot 2.647 - \zeta'_{A_5} \cdot 0.628 = -\frac{(2.647 \cdot 0.464 - 0.628^2) \cdot 10^3}{(-33.14) \cdot 1.496}$   
 $\zeta'_{A_5} \cdot 0.464 - \eta'_{A_5} \cdot 0.628 = -\frac{(2.647 \cdot 0.464 - 0.628^2) \cdot 10^3}{70.94 \cdot 1.496}$   
 $2.647 \cdot \eta'_{A_5} - 0.628 \cdot \zeta'_{A_5} = 16.7934$   
 $-0.628 \cdot \eta'_{A_5} + 0.464 \cdot \zeta'_{A_5} = -7.8461$   
 $\rightarrow \eta'_{A_5} = \underline{\underline{3.4 \text{ mm}}}$   
 $\zeta'_{A_5} = \underline{\underline{-12.3 \text{ mm}}}$

Kern:



e) Neutrale Achse für  $M_{\eta'} = 5 \text{ kNm}$

$$N_x = M_{\zeta'} = 0:$$

$$\rightarrow \sigma_x = M_{\eta'} \cdot \frac{I_{\zeta'} \cdot \zeta' - C_{\eta' \zeta'} \cdot \eta'}{I_{\eta'} \cdot I_{\zeta'} - C_{\eta' \zeta'}^2}$$

Neutrale Achse:

$$\sigma_x = M_{\eta'} \cdot \frac{I_{\zeta'} \cdot \zeta' - C_{\eta' \zeta'} \cdot \eta'}{I_{\eta'} \cdot I_{\zeta'} - C_{\eta' \zeta'}^2} = 0$$

$$\rightarrow I_{\zeta'} \cdot \zeta' - C_{\eta' \zeta'} \cdot \eta' = 0$$

$$\zeta' = \frac{C_{\eta' \zeta'}}{I_{\zeta'}} \cdot \eta' = \frac{0.628}{0.464} \cdot \eta' \rightarrow \boxed{\zeta' = 1.355 \cdot \eta'}$$

**f) Spannungen in den Punkten A, B und C infolge  $M_{\eta'} = 5 \text{ kNm}$**

$$A(-51.09, -46.41): \quad \sigma_x = 5 \cdot 10^6 \cdot \frac{0.464 \cdot 10^6 \cdot (-46.4) - 0.628 \cdot 10^6 \cdot (-51.1)}{2.647 \cdot 10^6 \cdot 0.464 \cdot 10^6 - (0.628 \cdot 10^6)^2} = \underline{\underline{63.5 \text{ N/mm}^2}}$$

$$B(13.91, -46.41): \quad \sigma_x = 5 \cdot 10^6 \cdot \frac{0.464 \cdot 10^6 \cdot (-46.4) - 0.628 \cdot 10^6 \cdot (13.9)}{2.647 \cdot 10^6 \cdot 0.464 \cdot 10^6 - (0.628 \cdot 10^6)^2} = \underline{\underline{-181.8 \text{ N/mm}^2}}$$

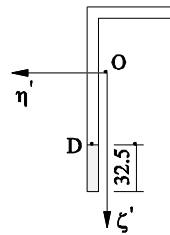
$$C(5.91, 83.59): \quad \sigma_x = 5 \cdot 10^6 \cdot \frac{0.464 \cdot 10^6 \cdot (83.6) - 0.628 \cdot 10^6 \cdot (5.9)}{2.647 \cdot 10^6 \cdot 0.464 \cdot 10^6 - (0.628 \cdot 10^6)^2} = \underline{\underline{210.5 \text{ N/mm}^2}}$$

**g) Schubspannungen in D infolge  $V_{\zeta'} = 25 \text{ kN}$**

$$\tau = \frac{V_{\zeta'} \cdot \frac{I_{\zeta'} \cdot S_{\eta'} - C_{\eta'\zeta'} \cdot S_{\zeta'}}{I_{\eta'} \cdot I_{\zeta'} - C_{\eta'\zeta'}^2}}{t} \quad (\text{s. Skript Seite 39})$$

$$S_{\eta'} = 32.5 \cdot 8 \cdot (83.6 - 16.25) = 17.5084 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

$$S_{\zeta'} = 32.5 \cdot 8 \cdot (13.9 - 4) = 2.5766 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

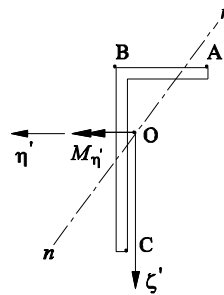


$$\tau = \frac{25 \cdot 10^3}{8} \cdot \frac{0.464 \cdot 10^6 \cdot 17.5084 \cdot 10^3 - 0.628 \cdot 10^6 \cdot 2.5766 \cdot 10^3}{2.647 \cdot 10^6 \cdot 0.464 \cdot 10^6 - (0.628 \cdot 10^6)^2} = \underline{\underline{24.4 \text{ N/mm}^2}}$$

**h) Moment  $M_{\eta'}$ , so dass die Fließspannung  $f_y = 235 \text{ N/mm}^2$  nirgends überschritten wird**

$$\sigma_x = M_{\eta'} \cdot \frac{I_{\zeta'} \cdot \zeta' - C_{\eta'\zeta'} \cdot \eta'}{I_{\eta'} \cdot I_{\zeta'} - C_{\eta'\zeta'}^2} = \pm 235 \text{ N/mm}^2$$

$$\rightarrow \boxed{M_{\eta'} = \pm 235 \cdot \frac{I_{\eta'} \cdot I_{\zeta'} - C_{\eta'\zeta'}^2}{I_{\zeta'} \cdot \zeta' - C_{\eta'\zeta'} \cdot \eta'}}$$



Punkt	$\eta'$	$\zeta'$	$M_{\eta'}$
A	-51.1	-46.4	18.57 kNm
B	13.9	-46.4	6.47 kNm
C	5.9	83.6	5.59 kNm

→ Punkt C wird massgebend:  $M_{\eta'_{max}} = \underline{\underline{5.59 \text{ kNm}}}$