ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Prof. Dr. Peter Marti
Institut für Baustatik und Konstruktion
D-BAUG, Studiengang Bauingenieurwissenschaften
Herbstsemester

BAUSTATIK I – KOLLOQUIUM 6, Merkblatt 2

(101-0113)

Thema: Kern von allgemeinen Querschnitten

Kern von allgemeinen Querschnitten mit den Achsen η' und ζ' sowie den Hauptachsen *y* und *z*

<u>Definition:</u>

Greift die resultierende Längskraft N_x (Zug- oder Druckkraft) **innerhalb** des Kerns an, so haben alle Normalspannungen σ_x über den ganzen Querschnitt dasselbe Vorzeichen wie N_x (Zug- oder Druck).

Aus dieser Definition geht hervor, dass sich die neutrale Achse (Nulllinie) für Angriffspunkte $\mathrm{A}\,(y_\mathrm{A}, z_\mathrm{A})$ der resultierenden Längskraft N_x **innerhalb des Kerns** immer **ausserhalb des Querschnitts** befindet.
Liegt der Angriffspunkt $\mathrm{A}\,(y_\mathrm{A}, z_\mathrm{A})$ gerade auf dem Kernrand, gilt für den Querschnittsrand: $\sigma_x = 0$, d.h. die neutrale Achse (Nulllinie) liegt auf dem Querschnittsrand.

Merke:
Der Kern ist nicht von der Beanspruchung sondern nur von der Geometrie des Querschnitts abhängig.

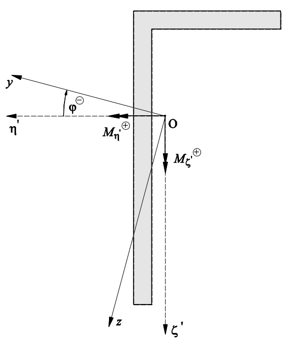
<u>Verallgemeinerte Spannungsformel nach Navier (bezogen auf die orthogonalen Achsen η' und ζ'durch den Schwerpunkt des Querschnitts):</u>

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} + M_{\eta'} \cdot \frac{I_{\zeta'} \cdot \zeta' - C_{\eta'\zeta'} \cdot \eta'}{I_{\eta'} \cdot I_{\zeta'} - C^2_{\eta'\zeta'}} - M_{\zeta'} \cdot \frac{I_{\eta'} \cdot \eta' - C_{\eta'\zeta'} \cdot \zeta'}{I_{\eta'} \cdot I_{\zeta'} - C^2_{\eta'\zeta'}} \qquad \text{(s. Autographie Seite 39)}$$

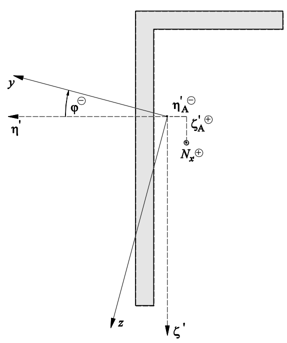
$$= N_x \cdot \left(\frac{1}{A} + \zeta'_\mathrm{A} \cdot \frac{I_{\zeta'} \cdot \zeta' - C_{\eta'\zeta'} \cdot \eta'}{I_{\eta'} \cdot I_{\zeta'} - C^2_{\eta'\zeta'}} + \eta'_\mathrm{A} \cdot \frac{I_{\eta'} \cdot \eta' - C_{\eta'\zeta'} \cdot \zeta'}{I_{\eta'} \cdot I_{\zeta'} - C^2_{\eta'\zeta'}} \right)$$

wobei:

$\eta'_\mathrm{A} = -\dfrac{M_{\zeta'}}{N}, \quad \zeta'_\mathrm{A} = \dfrac{M_{\eta'}}{N}$: Koordinaten des Angriffspunkts der statisch äquivalenten Normalkraft



$$M_{\eta'} = N_x \cdot \zeta'_\mathrm{A}$$
$$M_{\zeta'} = -N_x \cdot \eta'_\mathrm{A}$$



Gleichung für die neutrale Achse:

$$\sigma_x = 0 \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\frac{1}{A} + \frac{\eta'_A \cdot I_{\eta'} - \zeta'_A \cdot C_{\eta'\zeta'}}{I_{\eta'} \cdot I_{\zeta'} - C^2_{\eta'\zeta'}} \cdot \eta' + \frac{\zeta'_A \cdot I_{\zeta'} - \eta'_A \cdot C_{\eta'\zeta'}}{I_{\eta'} \cdot I_{\zeta'} - C^2_{\eta'\zeta'}} \cdot \zeta' = 0}$$

Ermittlung des Kerns:

Durch Abrollen der neutralen Achse (Nulllinie) entlang der konvexen Hülle des Querschnitts erhält man unter Anwendung der Gleichung für die neutrale Achse die Punkte $A\,(\eta'_A, \zeta'_A)$ des Kernrands.

Merke: η'_A, ζ'_A : Punkte des Kernrands
$\eta\,,\,\zeta$: Punkte der neutralen Achse

Spezielle Punkte der neutralen Achse:

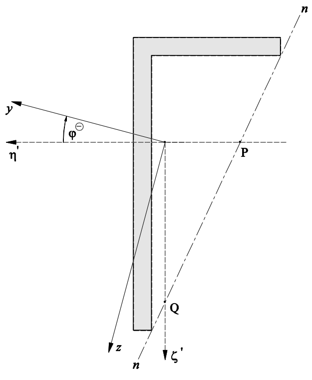
Idealerweise werden für die Berechnung der unbekannten Kernpunkte $A\,(\eta'_A, \zeta'_A)$ die Schnittpunkte $P\,(\eta'_P, 0)$ und $Q\,(0, \zeta'_Q)$ der neutralen Achsen *n* - *n* mit den Hauptachsen η' und ζ' verwendet:

- Schnittpunkt mit der η'-Achse: P $(\eta'_P, 0)$ $\rightarrow$ $\eta'_A \cdot I_{\eta'} - \zeta'_A \cdot C_{\eta'\zeta'} = -\dfrac{I_{\eta'} \cdot I_{\zeta'} - C^2_{\eta'\zeta'}}{\eta'_P \cdot A}$
- Schnittpunkt mit der ζ'-Achse: Q $(0, \zeta'_Q)$ $\rightarrow$ $\zeta'_A \cdot I_{\zeta'} - \eta'_A \cdot C_{\eta'\zeta'} = -\dfrac{I_{\eta'} \cdot I_{\zeta'} - C^2_{\eta'\zeta'}}{\zeta'_Q \cdot A}$

→ 2 Gleichungen für 2 Unbekannte: η'_A und ζ'_A

Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} -C_{\eta'\zeta'} & I_{\zeta'} \\ I_{\eta'} & -C_{\eta'\zeta'} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \eta'_A \\ \zeta'_A \end{pmatrix} = \frac{1}{A} \cdot \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\zeta'_Q} \\ -\dfrac{1}{\eta'_P} \end{pmatrix} \cdot \left(I_{\eta'} \cdot I_{\zeta'} - C^2_{\eta'\zeta'} \right)$$



Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Prof. Dr. Peter Marti
Institut für Baustatik und Konstruktion
D-BAUG, Studiengang Bauingenieurwissenschaften
Herbstsemester

Falls die neutrale Achse **parallel** zu den orthogonalen Achsen η’ und ζ’ durch den Schwerpunkt verläuft, sind folgende Fälle zu unterscheiden:

a) Neutrale Achse *n-n* parallel zur η’-Achse:

- Schnittpunkt mit der η'-Achse: $\mathrm{P}:(\eta'_\mathrm{P}=\pm\infty, 0) \quad\rightarrow\quad \eta'_\mathrm{A}\cdot I_{\eta'}-\zeta'_\mathrm{A}\cdot C_{\eta'\zeta'}=0$
- Schnittpunkt mit der ζ'-Achse: $\mathrm{Q}:(0,\zeta'_\mathrm{Q}) \quad\rightarrow\quad \zeta'_\mathrm{A}\cdot I_{\zeta'}-\eta'_\mathrm{A}\cdot C_{\eta'\zeta'}=-\dfrac{I_{\eta'}\cdot I_{\zeta'}-C^2_{\eta'\zeta'}}{\zeta'_\mathrm{Q}\cdot A}$

$$\rightarrow\quad \eta'_\mathrm{A}=-\frac{C_{\eta'\zeta'}}{\zeta'_\mathrm{Q}\cdot A}$$

$$\zeta'_\mathrm{A}=-\frac{I_{\eta'}}{\zeta'_\mathrm{Q}\cdot A}$$

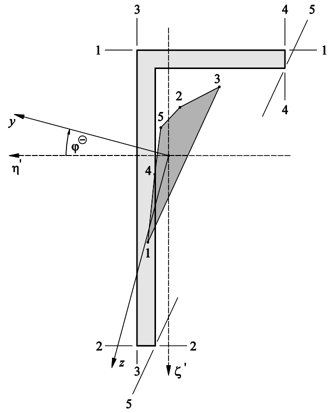
b) Neutrale Achse *n-n* parallel zur ζ’-Achse:

- Schnittpunkt mit der η'-Achse: $\mathrm{P}:(\eta'_\mathrm{P}, 0) \quad\rightarrow\quad \eta'_\mathrm{A}\cdot I_{\eta'}-\zeta'_\mathrm{A}\cdot C_{\eta'\zeta'}=-\dfrac{I_{\eta'}\cdot I_{\zeta'}-C^2_{\eta'\zeta'}}{\eta'_\mathrm{P}\cdot A}$
- Schnittpunkt mit der ζ'-Achse: $\mathrm{Q}:(0,\zeta'_\mathrm{Q}=\pm\infty) \quad\rightarrow\quad \zeta'_\mathrm{A}\cdot I_{\zeta'}-\eta'_\mathrm{A}\cdot C_{\eta'\zeta'}=0$

$$\rightarrow\quad \eta'_\mathrm{A}=-\frac{I_{\zeta'}}{\eta'_\mathrm{P}\cdot A}$$

$$\zeta'_\mathrm{A}=-\frac{C_{\eta'\zeta'}}{\eta'_\mathrm{P}\cdot A}$$

<u>Aufgabe 3 aus Kolloquium 6</u>



Merke:

Neutrale Achse	Kernbegrenzung
berührt Querschnitt in Punkt	Gerade
berührt Querschnitt längs Seite	Kernecke