Prof. Dr. Peter Marti
Institut für Baustatik und Konstruktion
D-BAUG, Studiengang Bauingenieurwissenschaften
Herbstsemester

BAUSTATIK I – KOLLOQUIUM 5, Lösung

(101-0113)

Thema: Ebener Spannungs- und Verzerrungszustand,
Normalspannungen in Stäben, Kern

Aufgabe 1, Lösung

Gegeben: Eine Stahlplatte ist wie folgt belastet:

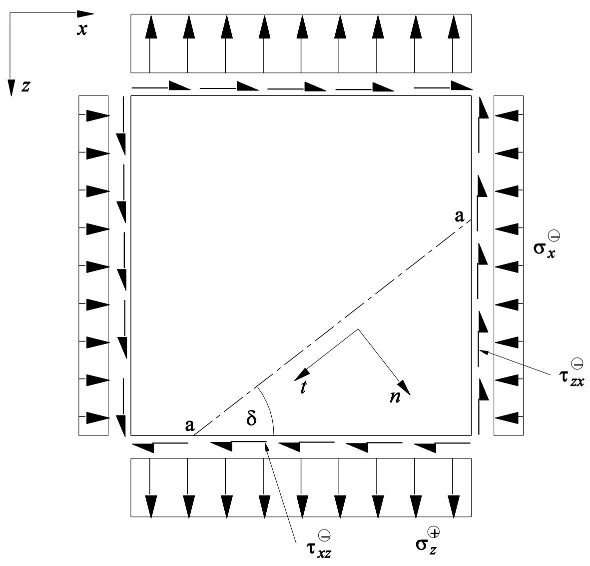
$\sigma_x = -20$ N/mm^2

$\sigma_z = 60$ N/mm^2

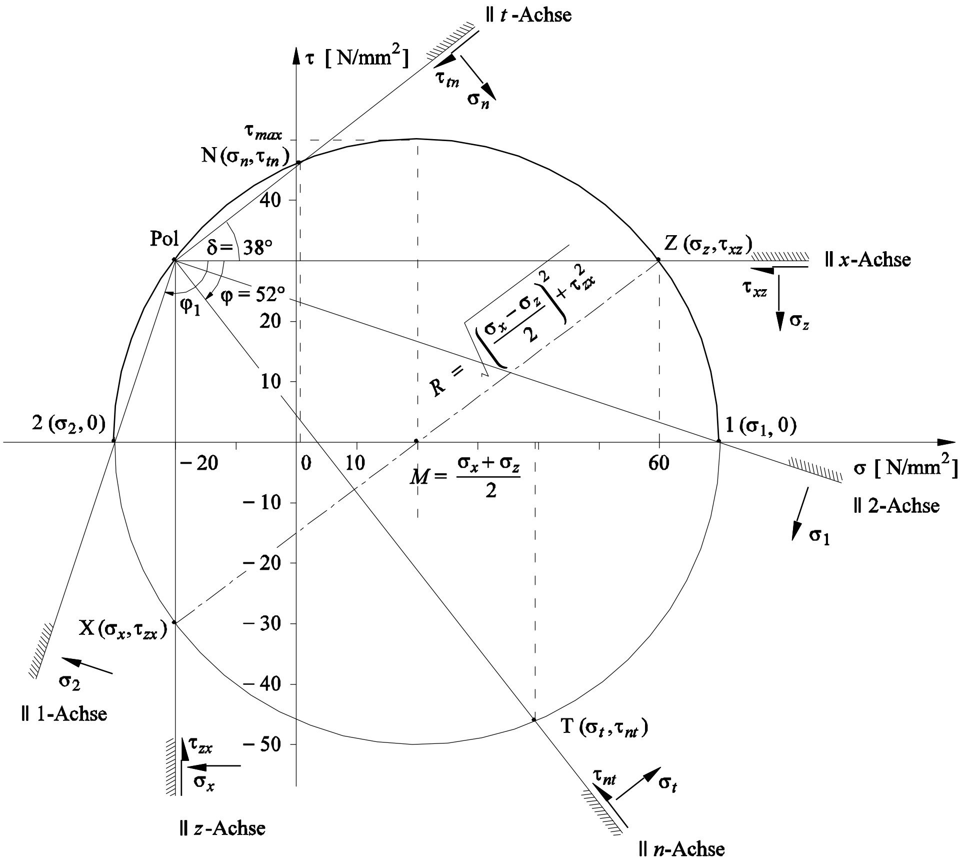
$\tau_{xz} = \tau_{zx} = -30$ N/mm^2

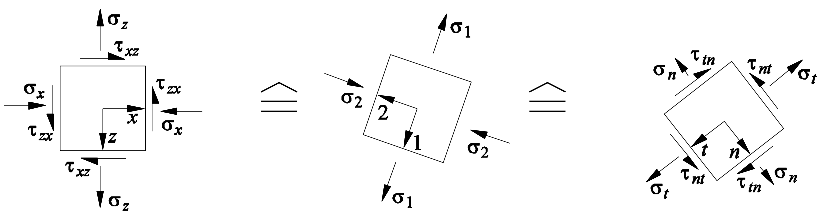
$\delta = 38°$

Gesucht:
a) Darstellung der Spannungsbildpunkte X und Z im Mohrschen Kreis
b) Hauptspannungen, Hauptspannungsrichtungen, maximale Schubspannungen
c) Spannungen in der Schweissnaht *a* - *a*.



a) Grafische Lösung: Mohrscher Spannungskreis





Aus Grafik gelesen: $\sigma_1 \approx 70 \text{ N/mm}^2,\ \sigma_2 \approx -30 \text{ N/mm}^2$

$\varphi_1 \approx 109^\circ$

$\sigma_n \approx 0.5 \text{ N/mm}^2,\ \sigma_t \approx 39 \text{ N/mm}^2,\ \tau_{tn} = \tau_{nt} \approx 46 \text{ N/mm}^2$

$\tau_{max} \approx 50 \text{ N/mm}^2$

b) Analytische Lösung

Hauptspannungen: $\sigma_1 > \sigma_2$:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2}$$

$$= \frac{-20 + 60}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-20 - 60}{2}\right)^2 + (-30)^2}$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{aligned} \sigma_1 &= 70 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_2 &= -30 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}}$$

Hauptspannungsrichtung: $\varphi_1 =$ Winkel zwischen x- und 1- Achse (im Uhrzeigersinn positiv drehend)

$$\tan 2\varphi_1 = \frac{2\tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_z} = \frac{2(-30)}{-20 - 60} = 0.75 \quad \rightarrow \varphi_1 = 18.4^\circ + 90^\circ = \underline{\underline{108.4^\circ}}$$

Maximale Schubspannungen:

$$\tau_{max} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2} = \sqrt{\left(\frac{-20 - 60}{2}\right)^2 + (-30)^2} = \underline{\underline{50 \text{ N/mm}^2}}$$

Spannungen in der Schweissnaht $a - a$: Winkel zwischen x- und n-Achse: $\varphi = 52^\circ$

$$\sigma_n = \sigma_x \cdot \cos^2\varphi + \sigma_z \cdot \sin^2\varphi + \tau_{xz} \cdot 2\sin\varphi\cos\varphi = \underline{\underline{0.6 \text{ N/mm}^2}}$$

$$\sigma_t = \sigma_x \cdot \sin^2\varphi + \sigma_z \cdot \cos^2\varphi - \tau_{xz} \cdot 2\sin\varphi\cos\varphi = \underline{\underline{39.4 \text{ N/mm}^2}}$$

$$\tau_{tn} = \tau_{nt} = (\sigma_z - \sigma_x) \cdot \sin\varphi\cos\varphi + \tau_{xz} \cdot \left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) = \underline{\underline{46.1 \text{ N/mm}^2}}$$

Aufgabe 2, Lösung

Gegeben: Gemessene Dehnungen in den Richtungen *a*, *b*, *c* auf einer Ebene:

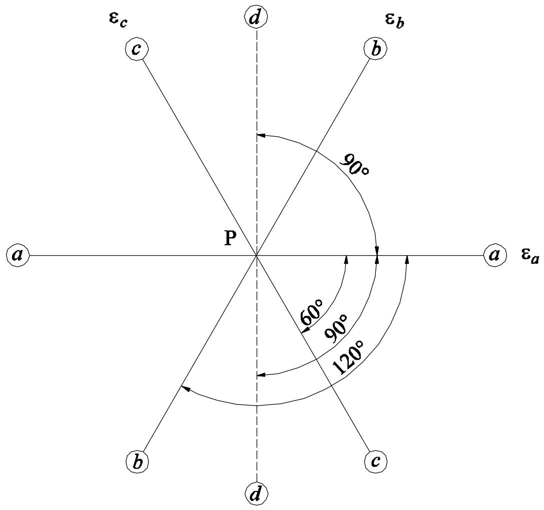
$\varepsilon_a = \quad 2.50‰$

$\varepsilon_b = -0.40‰$

$\varepsilon_c = \quad 0.40‰$

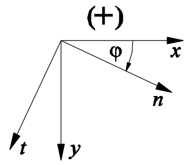
Gesucht: Hauptdehnungen, Hauptdehnungsrichtungen, Dehnung ε_d

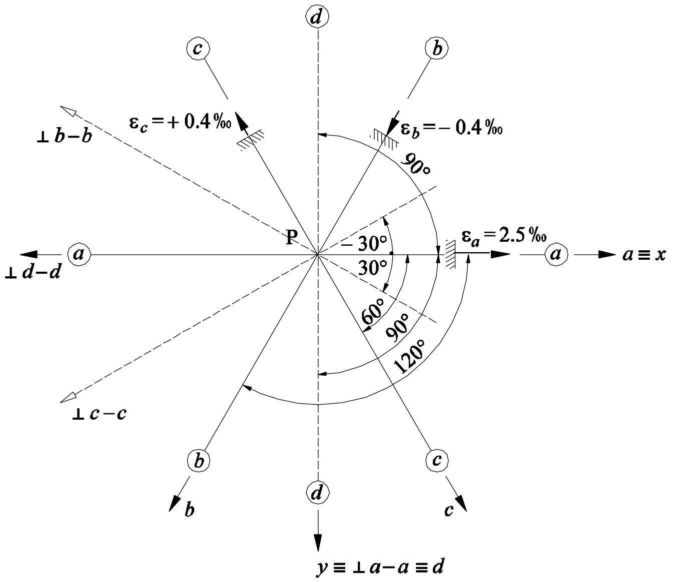
a) graphisch
b) analytisch



Hinweis:

Koordinatentransformation: $\varepsilon_n = \varepsilon_x \cos^2(\varphi) + \varepsilon_y \sin^2(\varphi) + \gamma_{xy} \sin(\varphi)\cos(\varphi)$





$\varepsilon_a = \quad 2.50‰ \qquad \varphi_a = 0^\circ$

$\varepsilon_b = -0.40‰ \qquad \varphi_b = 120^\circ$

$\varepsilon_c = \quad 0.40‰ \qquad \varphi_c = 60^\circ$

Koordinatentransformation: $\varepsilon_n = \varepsilon_x \cos^2(\varphi) + \varepsilon_y \sin^2(\varphi) + \gamma_{xy} \sin(\varphi)\cos(\varphi)$

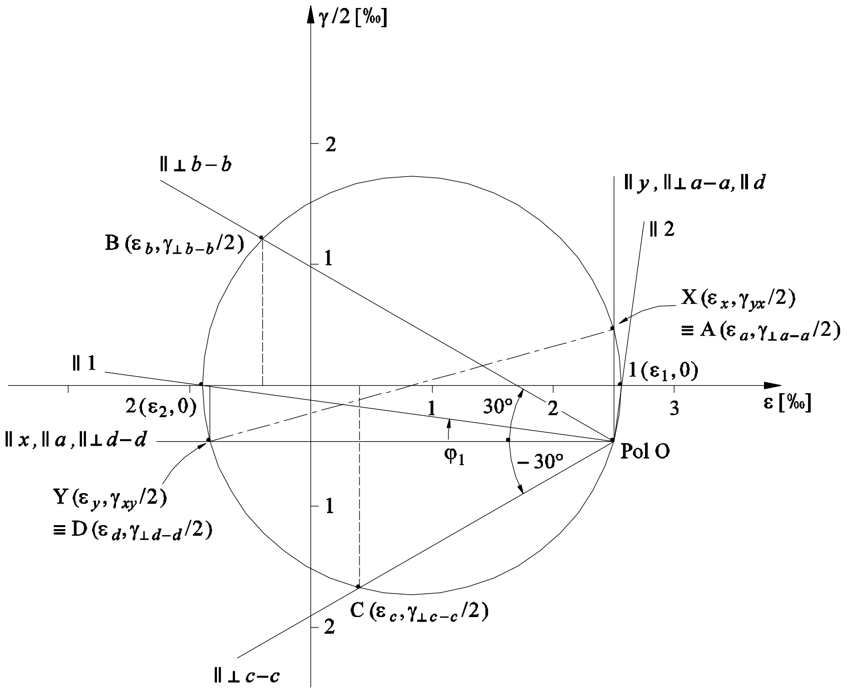
$\rightarrow$ 3 Gleichungen zur Ermittlung von ε_x, ε_y und γ_{xy}:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_a \\ \varepsilon_b \\ \varepsilon_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2(\varphi_a) & \sin^2(\varphi_a) & \sin(\varphi_a)\cos(\varphi_a) \\ \cos^2(\varphi_b) & \sin^2(\varphi_b) & \sin(\varphi_b)\cos(\varphi_b) \\ \cos^2(\varphi_c) & \sin^2(\varphi_c) & \sin(\varphi_c)\cos(\varphi_c) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 2.50 \\ -0.40 \\ 0.40 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.75 & -0.433 \\ 0.25 & 0.75 & 0.433 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{aligned} \varepsilon_x &= 2.500\,‰ \\ \varepsilon_y &= -0.833‰ \\ \gamma_{xy} &= 0.924\,‰ \end{aligned}} \qquad \rightarrow \text{ Verzerrungstensor: } \underline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \dfrac{\gamma_{xy}}{2} \\ \dfrac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.500 & 0.462 \\ 0.462 & -0.833 \end{pmatrix}$$

a) Grafische Lösung: Mohrscher Verzerrungskreis



Aus Grafik gelesen: $\varepsilon_1 \approx 2.55‰$, $\varepsilon_2 \approx -0.90‰$

$\varphi_1 \approx 7.7^\circ$

$\varepsilon_d = -0.83‰$, $(\gamma_{\perp d,d} / 2 = -0.46‰)$

b) Analytische Lösung

<u>Hauptdehnungen</u>: $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{2.50 - 0.833}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2.50 + 0.833}{2}\right)^2 + \left(\frac{0.924}{2}\right)^2}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 2.563‰ \\ \varepsilon_2 &= -0.896‰ \end{aligned}}$$

<u>Hauptdehnungsrichtung φ_1</u>: Winkel zwischen *x*- und 1- Achse (im Uhrzeigersinn positiv drehend)

$$\tan 2\varphi_1 = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{0.924}{2.50 + 0.833} = 0.277 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\varphi_1 = 7.75^\circ}}$$

<u>Dehnungen in Richtung *d* - *d*</u>:

Winkel zwischen x- und d-Achse: $\varphi_d = 90^\circ$

$$\varepsilon_d = \varepsilon_x \cdot \cos^2 \varphi_d + \varepsilon_y \cdot \sin^2 \varphi_d + \gamma_{xy} \cdot \sin\varphi_d \cos\varphi_d = \varepsilon_y = \underline{\underline{-0.833‰}}$$

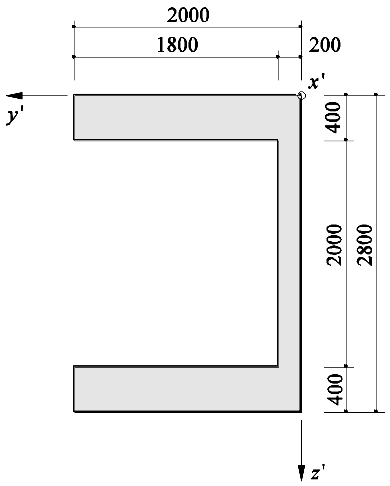
Kontrolle (siehe grafische Lösung):

$$\gamma_{\perp d,d} = \left(\varepsilon_y - \varepsilon_x\right) \cdot 2\sin\varphi_d \cos\varphi_d + \gamma_{xy} \cdot \left(\cos^2 \varphi_d - \sin^2 \varphi_d\right) = -\gamma_{xy} = \underline{\underline{-0.924‰}}$$

Aufgabe 3, Lösung

Gegeben: Holzquerschnitt (Masse in mm)
Schnittkräfte:
- $N_x = -8$ MN
- $M_y = 12$ MNm
- $M_z = -2$ MNm

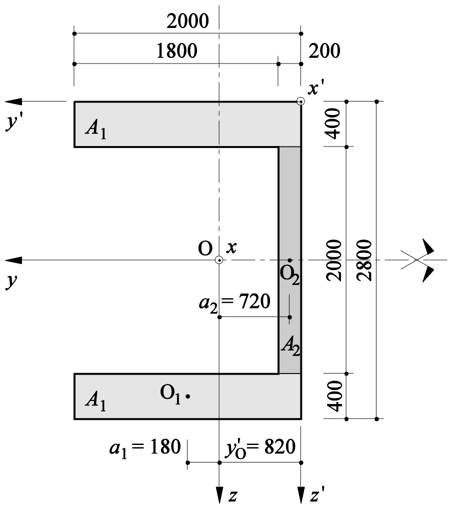
Gesucht:
a) Querschnittswerte (Querschnittsfläche, Schwerpunkt, Hauptträgheitsmomente)
b) Kern
c) Nullinie
d) maximale/minimale Spannungen infolge N_x, M_y und M_z



a) Querschnittswerte

<u>Querschnittsfläche *A*</u>:

$$A = 2 \cdot A_1 + A_2 = 2 \cdot 2000 \cdot 400 + 2000 \cdot 200 = \underline{\underline{2 \cdot 10^6 \text{ mm}^2}}$$



Schwerpunkt O:

$$z'_O = \frac{\sum z'_i \cdot A_i}{\sum A_i} = \underline{\underline{1400 \text{ mm}}} \qquad (y = \text{Symmetrieachse} = \text{Hauptachse})$$

$$y'_O = \frac{\sum y'_i \cdot A_i}{\sum A_i} = \frac{2 \cdot 1000 \cdot 2000 \cdot 400 + 2 \cdot 100 \cdot 1000 \cdot 200}{2 \cdot 10^6} = \underline{\underline{820 \text{ mm}}}$$

Schwerpunkt O(y',z') = O(820,1400)

Flächenträgheitsmomente I_y und I_z:

Da y eine Symmetrieachse ist, sind y und z Hauptachsen und somit I_y und I_z Hauptträgheitsmomente

$$I_y = \frac{2000 \cdot 2800^3}{12} - \frac{1800 \cdot 2000^3}{12} = \underline{\underline{2.459 \cdot 10^{12} \text{ mm}^4}}$$

Unter Anwendung des Satzes von Steiner, $I_z = \sum\left(I_{z_{i0}} + a_i^2 \cdot A_i\right)$, ergibt sich:

$$I_z = 2 \cdot \left(\frac{400 \cdot 2000^3}{12} + 180^2 \cdot 2000 \cdot 400\right) + \left(\frac{2000 \cdot 200^3}{12} + 720^2 \cdot 2000 \cdot 200\right) = \underline{\underline{0.794 \cdot 10^{12} \text{ mm}^4}}$$

b) Kern (siehe Merkblatt 2, Kolloquium 5)

Gleichung für die neutrale Achse:

$$\sigma_x = 0 \quad \rightarrow \qquad \boxed{1 + \frac{z_A}{i_y^2} \cdot z + \frac{y_A}{i_z^2} \cdot y = 0}$$

mit:

y_A, z_A : Punkte des Kernrands

y, z : Punkte der neutralen Achse

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{2.459 \cdot 10^{12}}{2.0 \cdot 10^6} = 1.229 \cdot 10^6 \text{ mm}^2$$

$$i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{0.794 \cdot 10^{12}}{2.0 \cdot 10^6} = 0.397 \cdot 10^6 \text{ mm}^2$$

Neutrale Achse *n*-*n* parallel zur *y*-Achse:

- Schnittpunkt mit der *y*-Achse: $\mathrm{P}\ (y_\mathrm{P} = \pm\infty, 0) \quad \rightarrow \quad y_\mathrm{A} = -\frac{i_z^2}{y_\mathrm{P}} = 0$
- Schnittpunkt mit der *z*-Achse: $\mathrm{Q}\ (0, z_\mathrm{Q}) \quad \rightarrow \quad z_\mathrm{A} = -\frac{i_y^2}{z_\mathrm{Q}}$

Neutrale Achse *n*-*n* parallel zur *z*-Achse:

- Schnittpunkt mit der *y*-Achse: $\mathrm{P}\ (y_\mathrm{P}, 0) \quad \rightarrow \quad y_\mathrm{A} = -\frac{i_z^2}{y_\mathrm{P}}$
- Schnittpunkt mit der *z*-Achse: $\mathrm{Q}\ (0, z_\mathrm{Q} = \pm\infty) \quad \rightarrow \quad z_\mathrm{A} = -\frac{i_y^2}{z_\mathrm{Q}} = 0$

Neutrale Achse entlang Rand 1 - 1 :

$$\mathrm{P}: (y_\mathrm{P}, 0) = (\pm\infty, 0) \quad \rightarrow y_{\mathrm{A}_{(1)}} = -\frac{i_z^2}{y_\mathrm{P}} = -\frac{0.397\cdot 10^6}{\pm\infty} = \underline{\underline{0}}$$

$$\mathrm{Q}: (0, z_\mathrm{Q}) = (0, -1400) \quad \rightarrow z_{\mathrm{A}_{(1)}} = -\frac{i_y^2}{z_\mathrm{Q}} = -\frac{1.229\cdot 10^6}{-1400} = \underline{\underline{878\ \mathrm{mm}}}$$

Neutrale Achse entlang Rand 2 - 2 :

$$\mathrm{P}: (y_\mathrm{P}, 0) = (\pm\infty, 0) \quad \rightarrow y_{\mathrm{A}_{(2)}} = -\frac{i_z^2}{y_\mathrm{P}} = -\frac{0.397\cdot 10^6}{\pm\infty} = \underline{\underline{0}}$$

$$\mathrm{Q}: (0, z_\mathrm{Q}) = (0, 1400) \quad \rightarrow z_{\mathrm{A}_{(2)}} = -\frac{i_y^2}{z_\mathrm{Q}} = -\frac{1.229\cdot 10^6}{1400} = \underline{\underline{-878\ \mathrm{mm}}}$$

Neutrale Achse entlang Rand 3 - 3 :

$$\mathrm{P}: (y_\mathrm{P}, 0) = (-820, 0) \quad \rightarrow y_{\mathrm{A}_{(3)}} = -\frac{i_z^2}{y_\mathrm{P}} = -\frac{0.397\cdot 10^6}{-820} = \underline{\underline{484\ \mathrm{mm}}}$$

$$\mathrm{Q}: (0, z_\mathrm{Q}) = (0, \pm\infty) \quad \rightarrow z_{\mathrm{A}_{(3)}} = -\frac{i_y^2}{z_\mathrm{Q}} = -\frac{1.229\cdot 10^6}{\pm\infty} = \underline{\underline{0}}$$

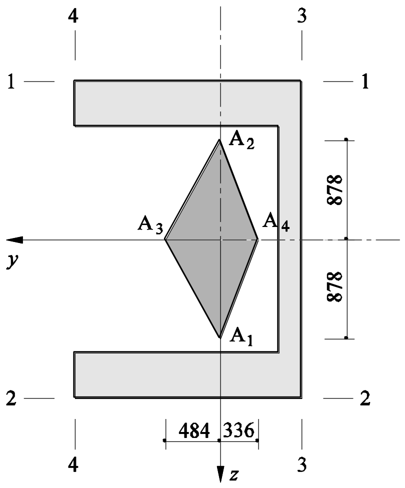
Neutrale Achse entlang Rand 4 - 4 :

$$\mathrm{P}: (y_\mathrm{P}, 0) = (1180, 0) \quad \rightarrow y_{\mathrm{A}_{(4)}} = -\frac{i_z^2}{y_\mathrm{P}} = -\frac{0.397\cdot 10^6}{1180} = \underline{\underline{-336\ \mathrm{mm}}}$$

$$\mathrm{Q}: (0, z_\mathrm{Q}) = (0, \pm\infty) \quad \rightarrow z_{\mathrm{A}_{(4)}} = -\frac{i_y^2}{z_\mathrm{Q}} = -\frac{1.229\cdot 10^6}{\pm\infty} = \underline{\underline{0}}$$

Greift also N_x in (1) an, so liegt die neutrale Achse am oberen Querschnittsrand 1 - 1 etc.

Kern:



c) Neutrale Achse für die gegebene Beanspruchung: $N_x = -8$ MN, $M_y = 12$ MNm, $M_z = -2$ MNm

Für die neutrale Achse (Nulllinie) gilt:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y = 0$$

$$\rightarrow \quad \frac{-8 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^6} + \frac{12 \cdot 10^9}{2.459 \cdot 10^{12}} \cdot z - \frac{-2 \cdot 10^9}{0.794 \cdot 10^{12}} \cdot y = 0$$

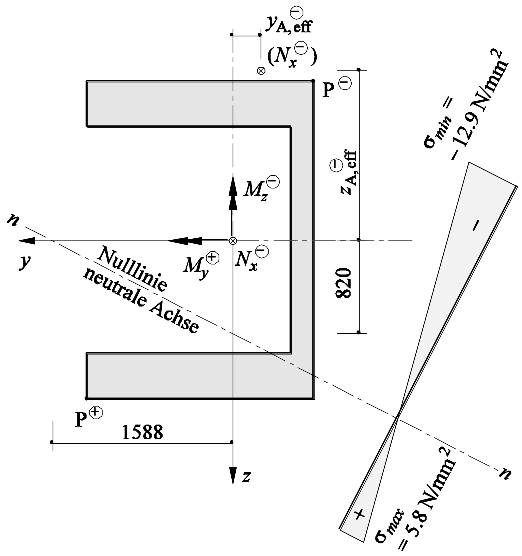
Gleichung für die neutrale Achse:

$$\boxed{-4 + 4.880 \cdot 10^{-3} \cdot z + 2.519 \cdot 10^{-3} \cdot y = 0} \qquad \text{wobei} \quad y, z \quad \text{in} \quad [\text{mm}]$$

Schnittpunkte mit der z- bzw. y-Achse:

$y = 0 \quad \rightarrow \quad z = 820$ mm

$z = 0 \quad \rightarrow \quad y = 1588$ mm



d) Maximale / minimale Spannungen infolge $N_x = -8$ MN, $M_y = 12$ MNm, $M_z = -2$ MNm

$$M_y = N_x \cdot z_{A_{eff}} \quad \rightarrow \quad z_{A_{eff}} = -1500 \text{ mm}$$

$$M_z = -N_x \cdot y_{A_{eff}} \quad \rightarrow \quad y_{A_{eff}} = -250 \text{ mm}$$

<u>maximale Spannung = maximale Zugspannung:</u>

Massgebender Punkt: P^+ (grösste positive Entfernung von der neutralen Achse)

$$P^+(y,z) = (1180{,}1400)$$

$$\rightarrow \qquad \sigma_x(P^+) = \frac{-8\cdot 10^6}{2\cdot 10^6} + \frac{12\cdot 10^9}{2.459\cdot 10^{12}}\cdot 1400 - \frac{-2\cdot 10^9}{0.794\cdot 10^{12}}\cdot 1180 = \underline{\underline{5.80 \text{ N/mm}^2}}$$

<u>minimale Spannung = maximale Druckspannung:</u>

Massgebender Punkt: P**-** (grösste negative Entfernung von der neutralen Achse)

$$P^-(y,z) = (-820,-1400)$$

$$\rightarrow \qquad \sigma_x(P^-) = \frac{-8\cdot 10^6}{2\cdot 10^6} + \frac{12\cdot 10^9}{2.459\cdot 10^{12}}\cdot(-1400) - \frac{-2\cdot 10^9}{0.794\cdot 10^{12}}\cdot(-820) = \underline{\underline{-12.90 \text{ N/mm}^2}}$$