Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

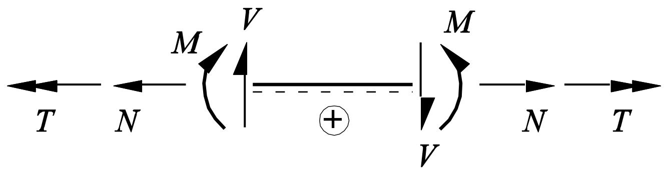
Prof. Dr. Peter Marti
Institut für Baustatik und Konstruktion
D-BAUG, Studiengang Bauingenieurwissenschaften
Herbstsemester

BAUSTATIK I – KOLLOQUIUM 1, Lösung

(101-0113)

Thema: Reaktionen und Schnittgrössen

Vorzeichenkonvention:

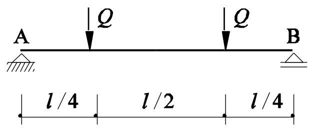


Aufgabe 1

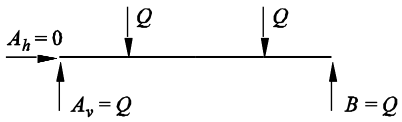
Gegeben: System und Einwirkung

Gesucht: Reaktionen (SKD) und Schnittgrössen (*N*, *V*, *M*)

Aufgabe 1a)



SKD:



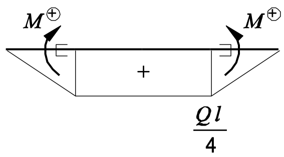
$$\sum F_v = 0 \quad \rightarrow \quad A_v + B = 2Q$$

$$\sum F_h = 0 \quad \rightarrow \quad A_h = 0$$

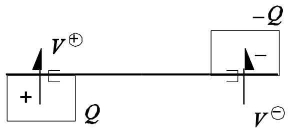
$$\sum M(\mathrm{A}) = 0 \quad \rightarrow \quad B \cdot l - Q \cdot \frac{l}{4} - Q \cdot \frac{3l}{4} = 0$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} B &= Q \\ A_v &= Q \\ A_h &= 0 \end{aligned}}$$

M:



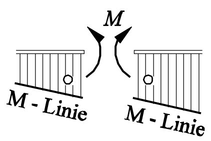
V:



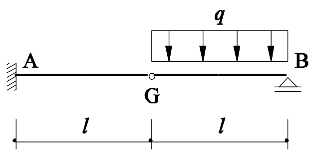
Merke:

- Bei Einzelkraft: - Knick in *M*-Linie
  - Sprung in *V*-Linie

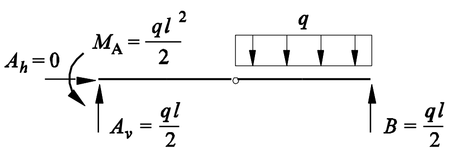
- Momentenpfeil: Dreht aus der *M*-„Fläche“ ums Stabende: Beim Bezeichnen der *M*-„Flächen“ Konvention beachten (siehe Merkblatt).



Aufgabe 1b)



SKD:



$$\sum F_v = 0 \rightarrow \quad A_v + B = ql$$

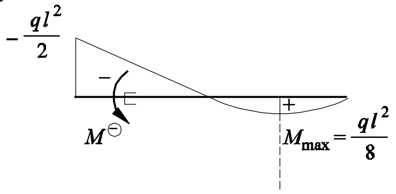
$$\sum F_h = 0 \rightarrow \quad A_h = 0$$

$$\sum M(\mathrm{A}) = 0 \quad \rightarrow \quad M_\mathrm{A} + B \cdot 2l - ql \cdot \frac{3l}{2} = 0$$

$$M_\mathrm{G} = 0 \quad \rightarrow \quad B \cdot l - ql \cdot \frac{l}{2} = 0$$

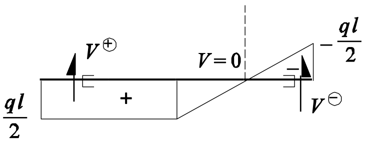
$$\rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} B &= \frac{ql}{2} \\ A_v &= \frac{ql}{2} \\ A_h &= 0 \\ M_\mathrm{A} &= \frac{ql^2}{2} \end{aligned}}$$

M:



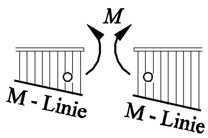
$$M_{max} \leftrightarrow V = 0$$

V:



Merke:

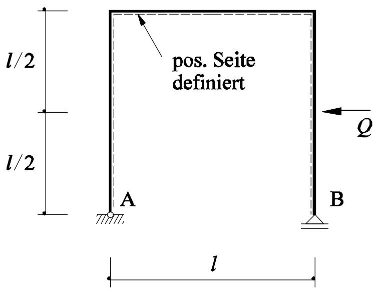
- Bei Gelenk: $M = 0$
  Kein Knick in *M*-Linie, sofern dort keine Einzelkraft angreift
- Max. Moment: $M = M_{max} \leftrightarrow V = 0$
- Momentenpfeil: Dreht aus der *M*-„Fläche" ums Stabende:
  Beim Bezeichnen der *M*-„Flächen"
  Konvention beachten (siehe Merkblatt).



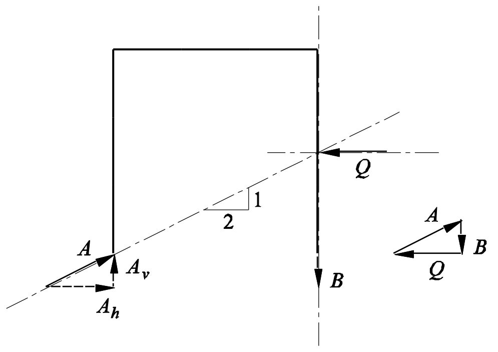
Aufgabe 2, Lösung

Gegeben: System und Einwirkung

Gesucht: Reaktionen (SKD) und Schnittgrössen (*N*, *V*, *M*)

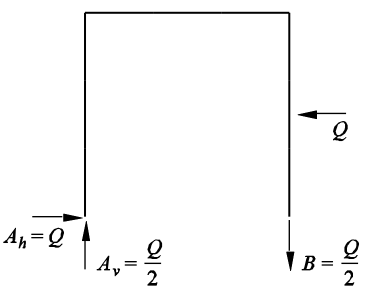


Grafische Lösung mit Hilfe eines Seilpolygons und eines Kräftepolygons:



Analytische Lösung:

SKD:



$$\sum F_v = 0 \quad \rightarrow \quad A_v - B = 0$$

$$\sum F_h = 0 \quad \rightarrow \quad A_h = Q$$

$$\sum M(\mathrm{A}) = 0 \quad \rightarrow \quad B \cdot l - Q \cdot \frac{l}{2} = 0$$

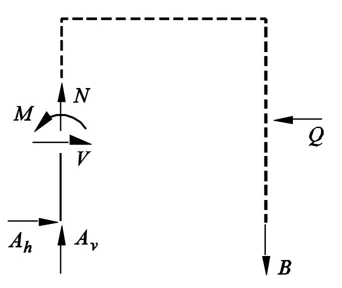
$$\rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} A_h &= Q \\ B &= \frac{Q}{2} \\ A_v &= \frac{Q}{2} \end{aligned}}$$

Normalkraft und Querkraft am linken Stab: (2 Berechnungsmöglichkeiten)

a) Gleichgewicht am abgetrennten Schnittkörper:

$$N + A_v = 0 \quad \rightarrow \quad N = -A_v = \underline{\underline{-\frac{Q}{2}}}$$

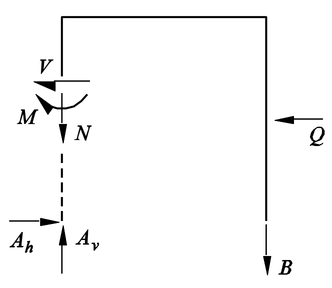
$$V + A_h = 0 \quad \rightarrow \quad V = -A_h = \underline{\underline{-Q}}$$



b) Oder Reduktion der angreifenden Kräfte auf den Schnittrand (ergibt natürlich die gleichen Werte wie bei der Vorgehensweise a)):

$$N = -A_v = \underline{\underline{-\frac{Q}{2}}}$$

$$V = -A_h = \underline{\underline{-Q}}$$

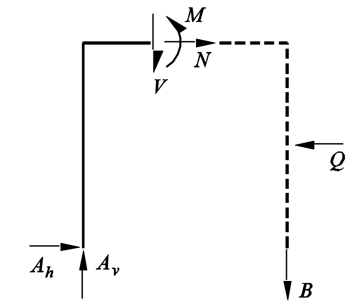


Normalkraft und Querkraft am horizontalen Stab: (2 Berechnungsmöglichkeiten)

a) Gleichgewicht am abgetrennten Schnittkörper:

$$N + A_h = 0 \quad \rightarrow \quad N = -A_h = \underline{\underline{-Q}}$$

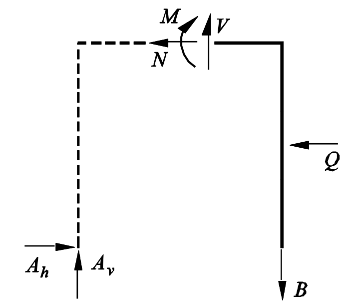
$$V - A_v = 0 \quad \rightarrow \quad V = A_v = \underline{\underline{\frac{Q}{2}}}$$



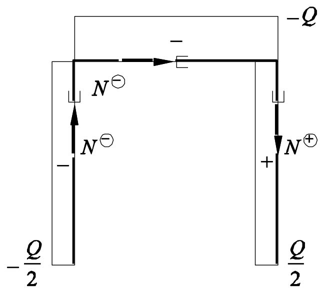
b) Oder Reduktion der angreifenden Kräfte auf den Schnittrand:

$$N = -A_h = \underline{\underline{-Q}}$$

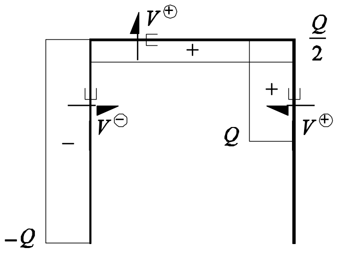
$$V = A_v = \underline{\underline{\frac{Q}{2}}}$$



N:



V:



Momente am linken Stab: (mit *x* in lokaler Stabachsenrichtung)

a) Gleichgewicht am abgetrennten Schnittkörper:

$$M(x) + A_h \cdot x = 0$$

$$\rightarrow \; M(x) = -A_h \cdot x = \underline{\underline{-Q \cdot x}}$$

$$\rightarrow \; M(l) = \underline{\underline{-Q \cdot l}}$$

b) Oder Reduktion der angreifenden Kräfte auf den Schnittrand:

$$M(x) = -A_h \cdot x = \underline{\underline{-Q \cdot x}}$$

$$\rightarrow \; M(l) = \underline{\underline{-Q \cdot l}}$$

Momente am horizontalen Stab: (mit *x* in lokaler Stabachsenrichtung)

a) Gleichgewicht am abgetrennten Schnittkörper:

$$M(x) - A_v \cdot x + A_h \cdot l = 0$$

$$\rightarrow \; M(x) = A_v \cdot x - A_h \cdot l = \underline{\underline{-Q \cdot l + \frac{Q}{2} \cdot x}}$$

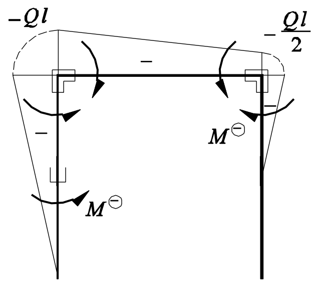
$$\rightarrow \; M(l) = \underline{\underline{-\frac{Q \cdot l}{2}}}$$

b) Oder Reduktion der angreifenden Kräfte auf den Schnittrand:

$$M(x) = A_v \cdot x - A_h \cdot l = \underline{\underline{-Q \cdot l + \frac{Q}{2} \cdot x}}$$

$$\rightarrow \; M(l) = \underline{\underline{-\frac{Q \cdot l}{2}}}$$

M:



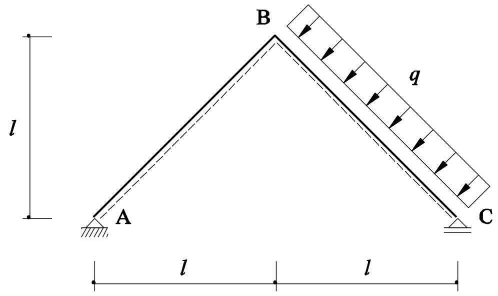
Merke:

In jedem Punkt eines Systems, also auch in den Eckpunkten, muss gelten: $\boxed{\Sigma M = 0}$

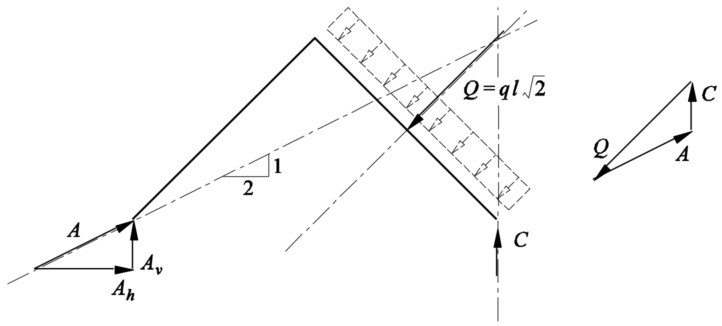
Aufgabe 3, Lösung

Gegeben: System und Einwirkung

Gesucht: Reaktionen (SKD) und Schnittgrössen (N, V, M)

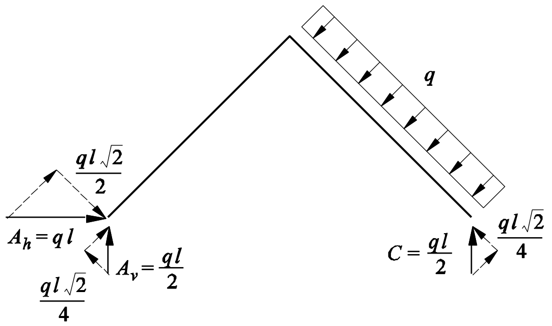


Grafische Lösung mit Hilfe eines Seilpolygons und eines Kräftepolygons (Ersatzkraft $Q = ql\sqrt{2}$):



Analytische Lösung:

SKD:



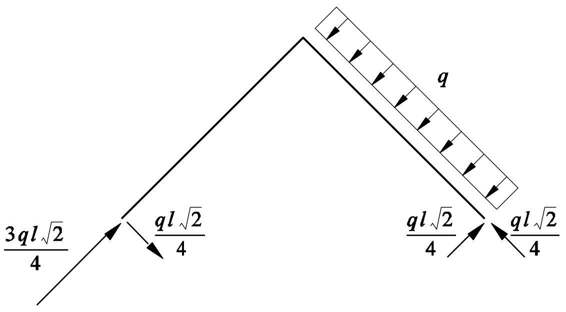
$$\sum F_v = 0 \quad \rightarrow \quad A_v + C - \frac{ql\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\sum F_h = 0 \quad \rightarrow \quad A_h - \frac{ql\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 0$$

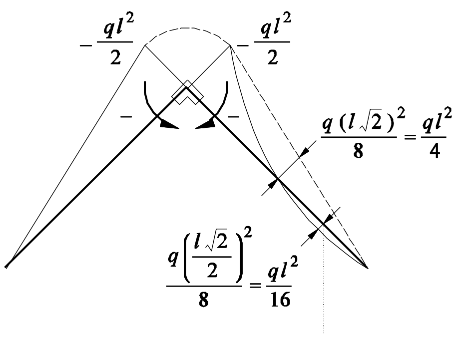
$$\sum M\,(\mathrm{A}) = 0 \quad \rightarrow \quad ql\sqrt{2} \cdot \frac{l\sqrt{2}}{2} - C \cdot 2l = 0$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} A_h &= ql \\ C &= \frac{ql}{2} \\ A_v &= \frac{ql}{2} \end{aligned}}$$

Andere Darstellung des SKD:

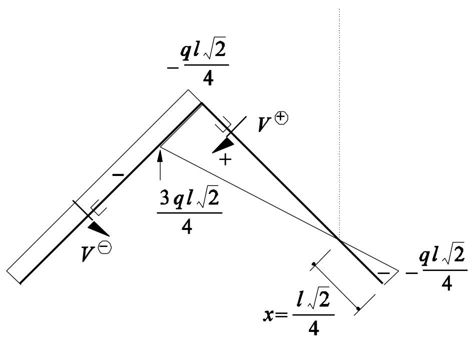


M:



$$M_{max} \leftrightarrow V = 0$$

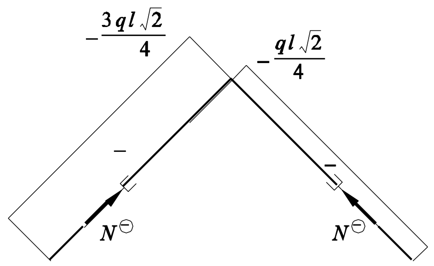
V:

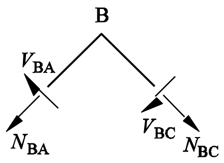


Merke:

- Max. Moment: $M = M_{max} \leftrightarrow V = 0$
- Falls mit Ersatzkraft $Q = ql\sqrt{2}$ gerechnet wurde: Nicht vergessen, dass die Momentenlinie infolge q parabelförmig verläuft.

N:





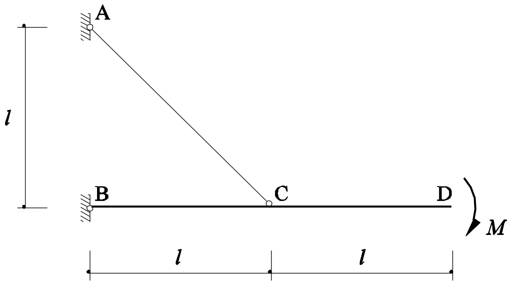
$$N_{BA} + V_{BC} = 0 \rightarrow N_{BA} = -V_{BC} = \underline{\underline{-\frac{3ql\sqrt{2}}{4}}}$$

$$V_{BA} - N_{BC} = 0 \rightarrow N_{BC} = V_{BA} = \underline{\underline{-\frac{ql\sqrt{2}}{4}}}$$

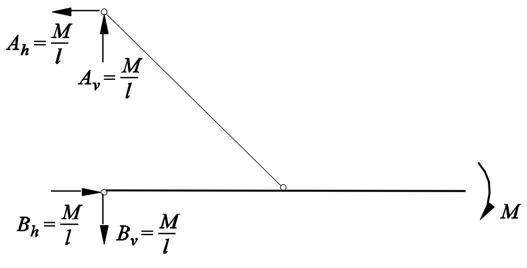
Aufgabe 4, Lösung

Gegeben: System und Einwirkung

Gesucht: Reaktionen (SKD) und Schnittgrössen (N, V, M)



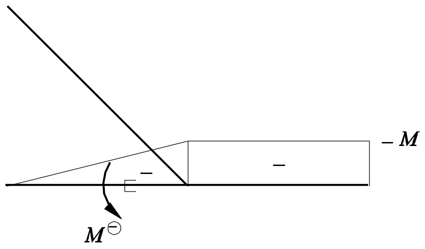
SKD:



$$\sum F_v = 0 \quad \rightarrow \; A_v - B_v = 0$$
$$\sum F_h = 0 \quad \rightarrow \; A_h = B_h$$
$$\sum M(\text{A}) = 0 \quad \rightarrow \; B_h \cdot l - M = 0$$
$$M_{G_{(\text{C})}} = 0 \quad \rightarrow \; A_v \cdot l - A_h \cdot l = 0$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} B_h &= \frac{M}{l} \\ A_h &= \frac{M}{l} \\ A_v &= \frac{M}{l} \\ B_v &= \frac{M}{l} \end{aligned}}$$

M:



Moment am linken Stab:

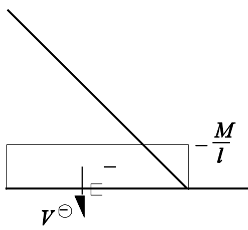
$$M(x) = -B_v \cdot x = \underline{\underline{-\frac{M}{l} \cdot x}}$$

$$x = l \quad \rightarrow \quad M(l) = M_{CB} = \underline{\underline{-M}}$$

Moment am rechten Stab:

$$M(l) = \underline{\underline{-M}}$$

V:



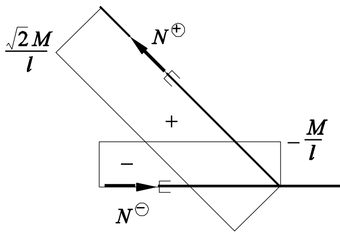
Querkraft am linken Stab:

$$V = -B_v = \underline{\underline{-\frac{M}{l}}}$$

Querkraft am rechten Stab:

$$M = \text{konstant} \quad \leftrightarrow \quad V = 0$$

N:



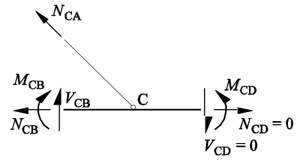
Normalkraft am linken Stab:

$$N = -B_h = \underline{\underline{-\frac{M}{l}}}$$

Normalkraft am schrägen Stab:

$$N = \frac{A_h}{\sqrt{2}} + \frac{A_v}{\sqrt{2}} = \frac{M}{\sqrt{2}l} + \frac{M}{\sqrt{2}l} = \underline{\underline{\frac{M\sqrt{2}}{l}}}$$

Kontrolle mit Gleichgewicht im Knoten C:



$$V_{CB} + \frac{N_{CA}}{\sqrt{2}} = 0 \qquad \rightarrow \qquad V_{CA} = -\frac{N_{CA}}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{-\frac{M}{l}}}$$

$$N_{CB} + \frac{N_{CA}}{\sqrt{2}} = 0 \qquad \rightarrow \qquad N_{CA} = -\frac{N_{CA}}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{-\frac{M}{l}}}$$