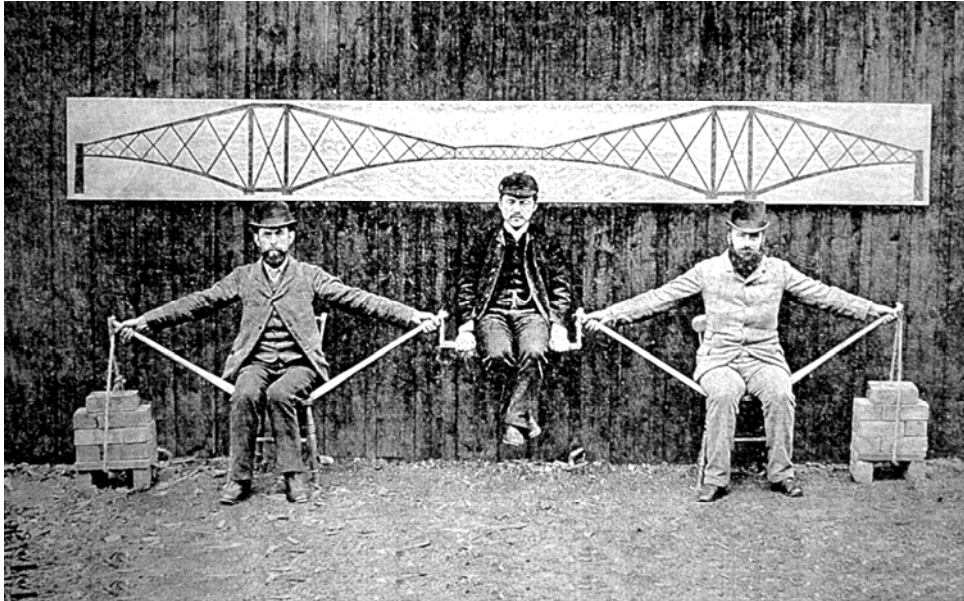


**BAUSTATIK I**

(101-0113)

**AUTOGRAPHIE-BLÄTTER**

Modell der Firth of Forth-Brücke (1882-90)

**BAUSTATIK I**

(101-0113)

**INHALT****Einführung****Reaktionen und Schnittgrößen**

- Kräfte und Momente
- Gleichgewichtsbedingungen
- Schnittgrößen
- Statische Unbestimmtheit
- Einfacher Balken
- Kragarm
- Dreigelenkbogen
- Bogen und Seile

**Fachwerke****Einflusslinien****Spannungen****Verformungen****Biegung und Achsialkraft****Querkraft und Torsion****Formänderungen – Ergänzungen****Biegelinien****Arbeitsgleichung****Prinzip der virtuellen Arbeiten**

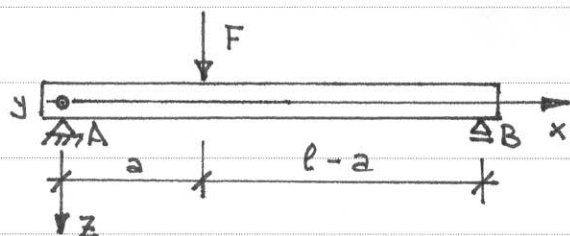
- Satz von Maxwell
- Satz von Castigliano
- Anwendung des ersten Satzes von Castigliano

**Statisch unbestimmte Systeme**

- Einführung
- Kraftmethode
- Deformationsmethode
- Statische Methode
- Kinematische Methode

Im Rahmen dieser Vorlesung werden Autographieblätter zur Ergänzung des Skripts "Baustatik" aus dem Wintersemester 1993/1994 abgegeben.

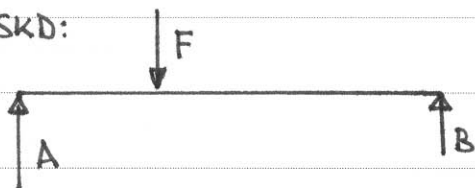
Als einführendes Beispiel betrachten wir einen einfachen Balken unter einer senkrecht zur Balkenachse wirkenden Einzellast:



Das Anlager A ist fest, das Anlager B verschieblich.

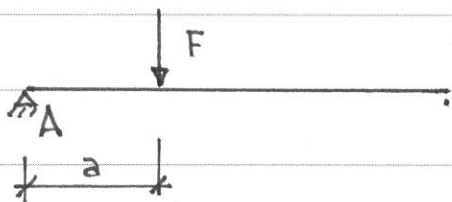
Bei A können Kräfte mit Komponenten in x- und z-Richtung auftreten, bei B nur solche in z-Richtung.

SKD:



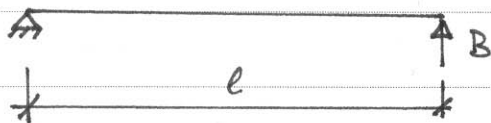
Befreit man den Balken von seinen Anlagern und führt man an ihrer Stelle die Reaktionen A und B ein, so erhält man das dargestellte Schnittkörperdiagramm (SKD).

Wie man leicht einsieht, muss die Kraftkomponente in x-Richtung bei A verschwinden, da sie die einzige in dieser Richtung wirkende Kraft wäre.



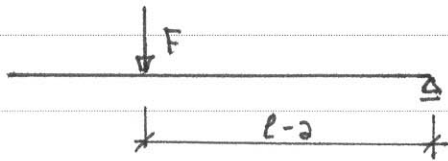
Belässt man das Anlager A und betrachtet man nur die Kraft F, so erkennt man, dass diese Kraft eine Verdrehung des Balkens im Uhrzeigersinn um die durch A gehende y-Achse bewirken würde.

Die Tendenz zur Verdrehung ist zu F und a proportional und kann durch das Moment  $Fa$  der Kraft F um A ausgedrückt werden.



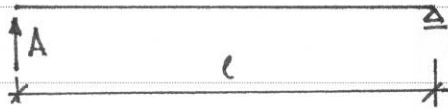
Damit der Balken sich nicht verdreht, ist offensichtlich ein im Gegenuhrzeigersinn drehendes Moment  $B \cdot l$  desselben Betrags erforderlich, mithin

$$B = Fa / l$$



Mit einer analogen Überlegung mit festgehaltenem Auflager B ergibt sich

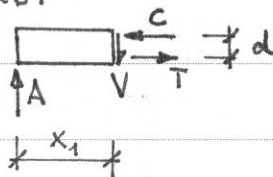
$$A = F(l-a)/l$$



Die Summe der beiden Ausdrücke beträgt

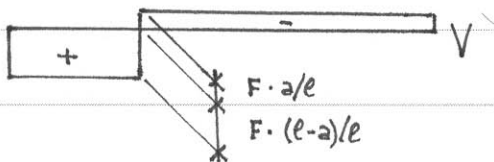
$$A + B = F \left( \frac{a}{l} + \frac{l-a}{l} \right) = F, \text{ i.O.}$$

SKD:



Mit einem Schnitt senkrecht zur x-Achse zwischen dem Auflager A und der Last F erhalten wir zwei Schnittkörper. Wir beschränken uns auf die Betrachtung des linken Teils ( $0 \leq x \leq x_1$ ).

Schnittgrössendiagramme:



Am Schnitt  $x = x_1$  muss offensichtlich eine Querkraft

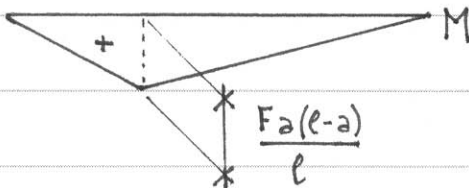
$$V = A$$

in z-Richtung wirken. Zusammen mit der Auflagerkraft A bildet V ein Kräftepaar mit einem entsprechenden, im Uhrzeigersinn wirkenden Moment  $Ax_1$ , das durch ein Paar horizontal wirkender Kräfte

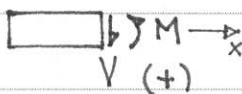
$$T = C$$

mit einem vorerst unbekanntem Hebelarm d ins Gleichgewicht gebracht werden muss:

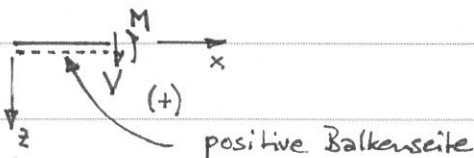
$$Ax_1 = Td = M$$



Vorzeichenregelung:



Wiederholt man diese Überlegungen für beliebige Schnitte entlang der Balkenachse, so erhält man durch Zusammenfassen die links dargestellten Diagramme für die Schnittgrößen V und M.



Statt eines horizontalen Kräftepaars  $T=C$  wird üblicherweise ein entsprechender Drehpfeil für  $M = Td$  verwendet.

Die Momente M entsprechen einer Verbiegung des Balkens und werden deshalb als Biegemomente bezeichnet.



Querkräfte V werden positiv gerechnet, wenn sie an einem Schnitt mit positiver (negativer) äusserer Normalenrichtung x in positiver (negativer) z-Richtung wirken, Biegemomente M dann, wenn sie auf der in z-Richtung positiven (negativen) Balkenseite Zugkräften T (Druckkräften C) entsprechen.

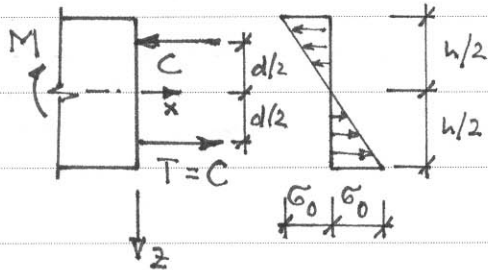


Um zu einer Aussage über die Verformungen des Balkens zu kommen, setzen wir voraus, dass ein linearer Zusammenhang zwischen den Spannungen  $\sigma$  (auf die Flächeneinheit bezogene, lokal wirkende Kräfte) und den entsprechenden Dehnungen  $\epsilon$  (Verlängerung bzw. Verkürzung eines Balkenelements der Länge 1) besteht:

$$\sigma = E \epsilon$$

Der Proportionalitätsfaktor  $E$  ist der Elastizitätsmodul.

Wir beschränken uns auf die Betrachtung der Verformungen infolge der Biegemomente; der Einfluss der Querkräfte wird vernachlässigt. Ferner setzen wir einen rechteckförmigen Balkenquerschnitt (Breite  $b$ , Höhe  $h$ ) voraus.



Die neutrale Achse ( $\sigma=0$ ) muss offensichtlich auf halber Balkenhöhe liegen. Darüber und darunter ergeben sich Druck- bzw. Zugspannungen, die mit  $z$  linear variieren:

$$\sigma = \sigma_0 \cdot \frac{2z}{h}$$

Dabei wird stillschweigend die im folgenden stets benutzte Konvention vorausgesetzt, wonach Zugspannungen (Druckspannungen) positiv (negativ) gerechnet werden.

Mit

$$T = C = \sigma_0 \cdot b \cdot h/4$$

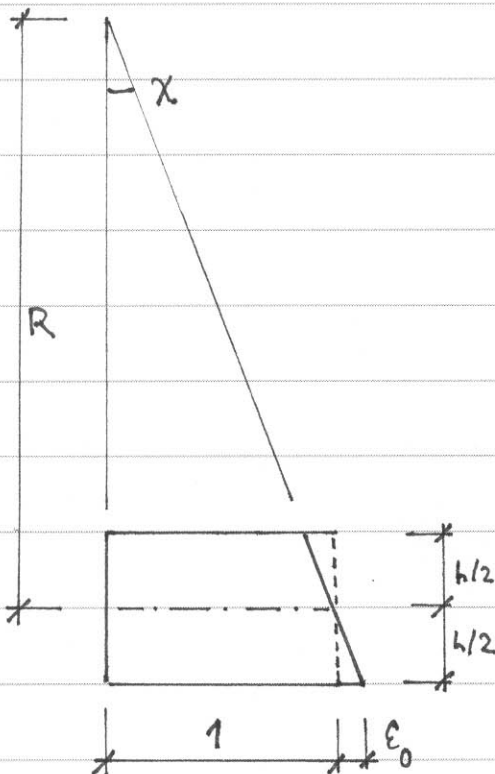
und

$$d = 2h/3$$

gilt

$$M = Td = \sigma_0 \cdot \frac{bh^2}{6} = \sigma_0 W$$

Die Grösse  $W = bh^2/6$  bezeichnet das sogenannte Widerstandsmoment, eine reine Querschnittsgrösse.



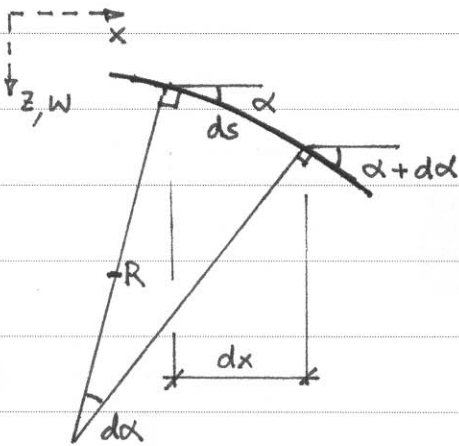
Aus der Betrachtung der Verformungen erhält man die Krümmung

$$\chi = \frac{1}{R} = \frac{2\epsilon_0}{h}$$

und mit  $\epsilon_0 = \sigma_0 / E$  und der oben angegebenen Beziehung für  $M$

$$M = \frac{bh^2}{6} \cdot E \cdot \frac{h\chi}{2} = \frac{bh^3}{12} E \chi = EI \chi$$

Die Grösse  $I = bh^3/12$ , das sogenannte Trägheitsmoment ist eine reine Querschnittsgrösse.  $R$  bezeichnet den Krümmungsradius.



Aus den Krümmungen  $\chi$  lassen sich Durchbiegungen  $w$  ermitteln. Es gilt

$$\tan \alpha = w' \quad , \quad \tan(\alpha + d\alpha) = w' + w'' dx$$

sowie

$$ds = R d\alpha = dx \sqrt{1 + w'^2}$$

Wegen

$$d\alpha \approx \tan(d\alpha) = \frac{w' + w'' dx - w'}{1 + (w' + w'' dx)w'}$$

ergibt sich unter Vernachlässigung der Grösse  $w'w'' dx$ , die im Vergleich zu  $w'^2$  von zweiter Ordnung klein ist

$$\chi = \frac{1}{R} = \frac{-w''}{(1+w'^2)^{3/2}} \approx -w''$$

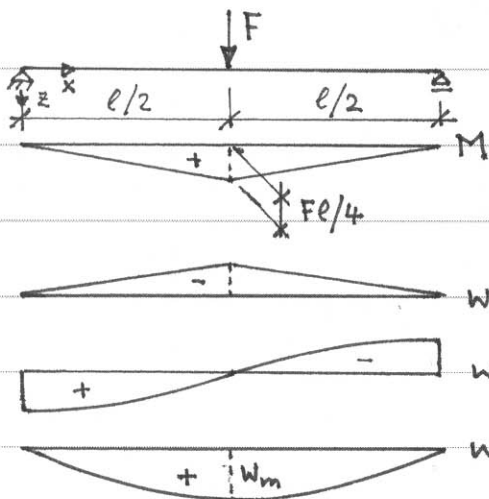
Positives  $w''$  bedeutet eine nach oben konvexe Biegelinie, wie in der Skizze oben dargestellt. Dies entspricht einem negativen Biegemoment (oben Zug) und somit im Rahmen unserer oben eingeführten Konventionen einer negativen Krümmung (und, wie eingezeichnet, einem negativen Krümmungsradius).

Die Näherung  $\chi \approx -w''$  ist für die in der Baupraxis üblichen Biegelinien ( $w'$  klein) sehr gut.

Durchbiegungen  $w$  lassen sich durch zweifache Integration der Funktion

$$w'' = \frac{-M}{EI}$$

ermitteln. Illustration für Balken unter mittig aufgebrachtener Einzellast  $F$ ,  $a = l/2$ :



Wegen der Symmetrie des Problems bezüglich der Ebene  $x = l/2$  kann man sich auf die Betrachtung des linken Balkenteils ( $0 \leq x \leq l/2$ ) beschränken:

$$w'' = \frac{-M}{EI} = \frac{-Fl}{4EI} \cdot \frac{2x}{l} = \frac{-Fx}{2EI}$$

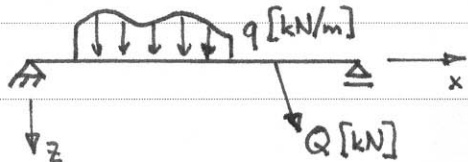
$$w' = \frac{-Fx^2}{4EI} + C_0 \quad , \quad C_0 = \frac{Fl^2}{16EI}$$

$$w = \frac{-Fx^3}{12EI} + \frac{Fl^2 x}{16EI}$$

$$w_m = \frac{Fl^3}{48EI}$$

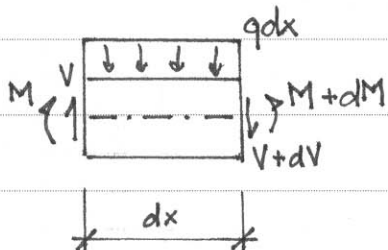


Ausser Einzellasten bzw. Einzelkräften sind im allgemeinen verteilte Lasten bzw. Kräfte zu betrachten:



Für ein Stabelement der Länge  $dx$  gilt

$$q dx + dV = 0, \quad -V dx + dM = 0$$



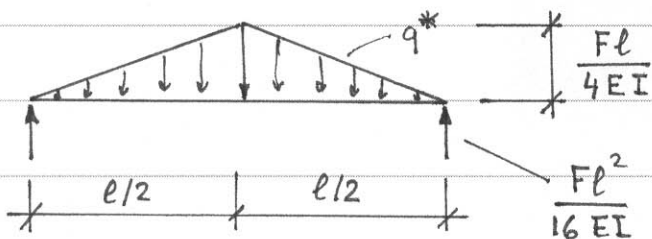
also

$$\frac{dV}{dx} = -q, \quad \frac{dM}{dx} = V$$

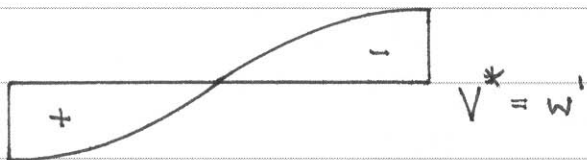
und somit

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q$$

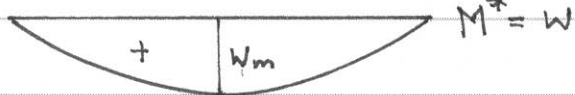
Die Differentialgleichung  $M'' = -q$  ist zu der oben hergeleiteten Differentialgleichung  $w'' = -\chi$  analog. Biegelinien können deshalb wie Biegemomente zur "Belastung"  $M/EI$  ermittelt werden (Mohrsche Analogie):



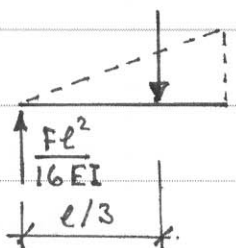
Belastung  $q^* = \frac{M}{EI}$



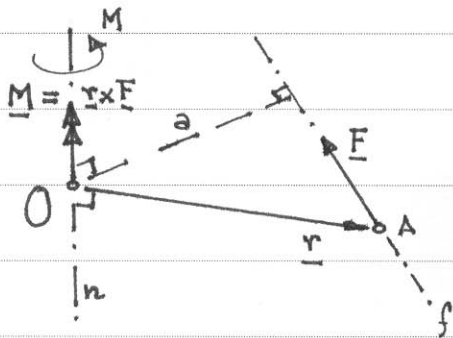
Querkraft  $V^* = V(q^*) = w'$



Biegemoment  $M^* = M(q^*) = w$



$$M_m^* = w_m = \frac{Fl^2}{16EI} \cdot \frac{l}{3} = \frac{Fl^3}{48EI} \quad (\text{wie vorher, i.O.})$$



Eine Kraft ist definiert durch ihren Angriffspunkt (A), ihren Betrag (F) und ihre Richtung (Wirkungslinie f). Sie ist mithin als Vektor  $\underline{F}$  aufzufassen.

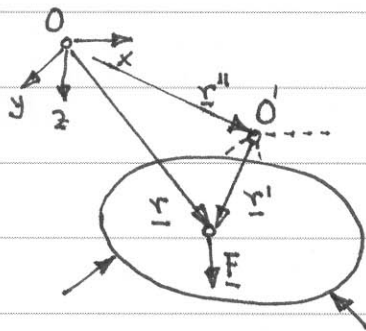
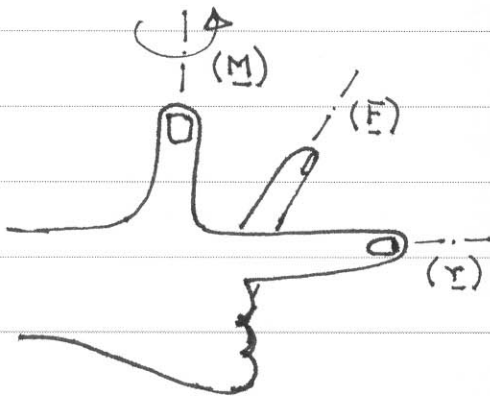
Die Wirkungslinie f und ein beliebiger Bezugspunkt O definieren eine Ebene. Denkt man sich einen mit dieser Ebene verbundenen Körper, so erkennt man, dass  $\underline{F}$  eine Verdrehung des Körpers um die zur Ebene senkrechte, durch O gehende Achse  $\underline{r}$  bewirken würde. Diese Tendenz zur Verdrehung ist zum Betrag F und zum Abstand a der Kraft  $\underline{F}$  von O proportional:

$$M = Fa$$

Wie man sieht, lässt sich mit dem Momentenvektor

$$\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F}$$

die Tendenz zur Verdrehung betrag- und richtungsmässig korrekt ausdrücken.  $|\underline{M}| = Fa$ , und die Vektoren  $\underline{M}$ ,  $\underline{r}$  und  $\underline{F}$  bilden eine Rechtsschraube.



Damit ein Körper im Gleichgewicht ist, müssen die auf ihn wirkenden Kräfte und Momente insgesamt verschwinden, d.h.

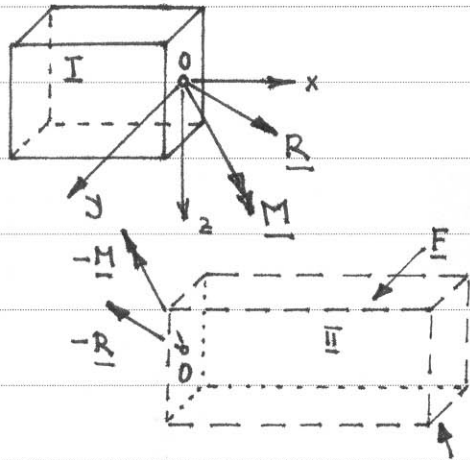
$$\sum_{SK} \underline{F} = \underline{0} \quad , \quad \sum_{SK} \underline{r} \times \underline{F} = \underline{0}$$

Die Gleichgewichtsbedingungen liefern im allgemeinen sechs Gleichungen.

Statt den Komponentenbedingungen  $\sum F_x = 0, \dots$  kann man Momentenbedingungen um O' verwenden, was aber nichts Neues liefert!

Die Summen sind dabei über den jeweils betrachteten Schnittkörper (SK) zu erstrecken. Diesen erhält man durch Isolation eines Körpers bzw. eines Systems (oder eines Körper- bzw. Systemteils) durch einen geschlossenen Rundschnitt. Durch Einführen aller Kräfte, die auf diesen Schnittkörper wirken, erhält man ein Schnittkörperdiagramm (SKD).

$$\sum_{SK} \underline{r}' \times \underline{F} = \sum (\underline{r} - \underline{r}'' ) \times \underline{F} = \underbrace{\sum_{SK} \underline{r} \times \underline{F}}_{\underline{0}} - \underbrace{\underline{r}'' \times \sum_{SK} \underline{F}}_{\underline{0}} = \underline{0}$$



Schnittkörper I und II :

$$-\underline{R} + \sum_{II} \underline{F} = \underline{0} \quad , \quad -\underline{M} + \sum_{II} \underline{r} \times \underline{F} = \underline{0}$$

Somit ergibt sich die Dynama

$$\underline{R} = \sum_{II} \underline{F} \quad , \quad \underline{M} = \sum_{II} \underline{r} \times \underline{F}$$

durch Reduktion der Kräfte am abgeschnittenen Teil II auf den Bezugspunkt O.

Schnittgrößen an Stäben:

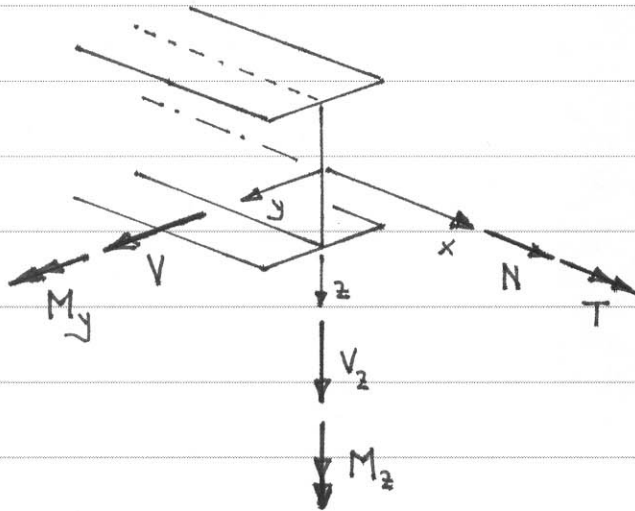
$$\underline{R} = (N, V_y, V_z) \quad , \quad \underline{M} = (T, M_y, M_z)$$

N ... Normalkraft [kN]

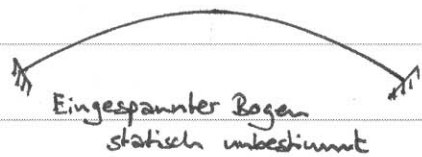
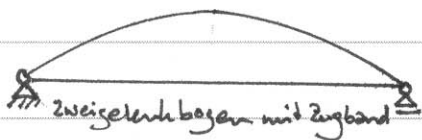
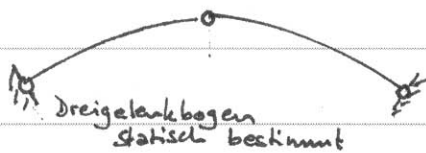
$V_y, V_z$  ... Querkräfte [kN]

T ... Torsionsmoment [kNm]

$M_y, M_z$  ... Biegemomente [kNm]



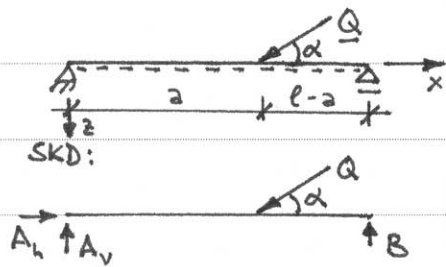
Reichen die Gleichgewichtsbedingungen zur Ermittlung der Reaktionen und Schnittgrößen aus, so spricht man von statisch bestimmten Systemen.



Der Zweigelenkbogen mit Zugband ist äusserlich statisch bestimmt, d.h. die Reaktionen können wie bei einem einfachen Balken bestimmt werden. Innerlich ist er hingegen statisch unbestimmt. Zur Ermittlung der Schnittgrößen sind ausser den Gleichgewichtsbedingungen Aussagen über die Verformungen heranzuziehen.



Einfacher Balken:



Gleichgewichtsbedingungen:

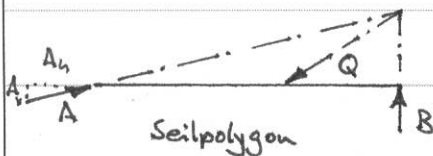
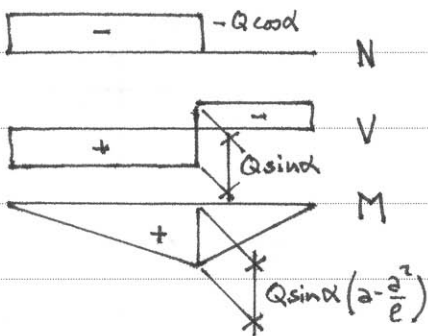
$$A_h - Q \cos \alpha = 0$$

$$B l - Q \sin \alpha \cdot a = 0$$

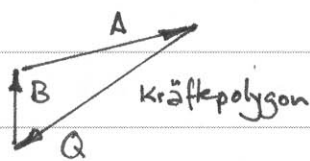
$$-A_v \cdot l + Q \sin \alpha \cdot (l-a) = 0$$

Reaktionen:

$$A_h = Q \cos \alpha, A_v = Q \sin \alpha \left(1 - \frac{a}{l}\right), B = Q \sin \alpha \cdot \frac{a}{l}$$

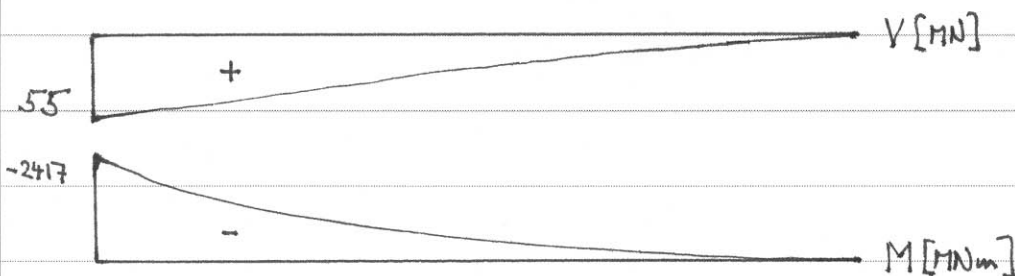
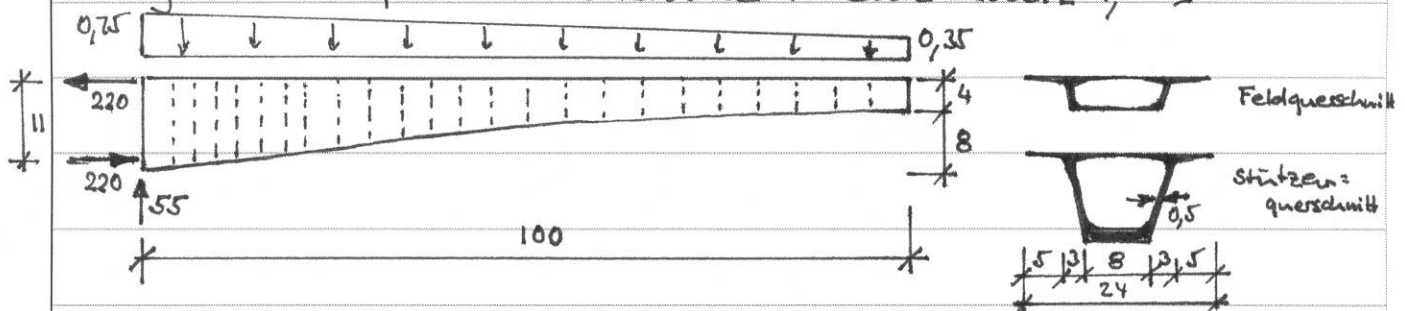


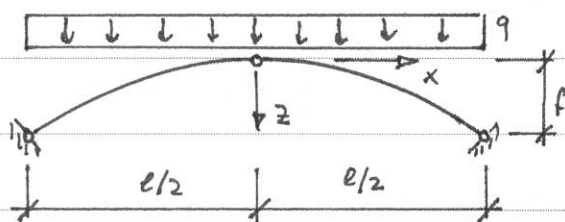
Graphische Ermittlung der Reaktionen mit Hilfe eines Seilpolygons und eines Kräftepolygons.



Die Kräfte A, B und Q müssen sich in einem Punkt schneiden.

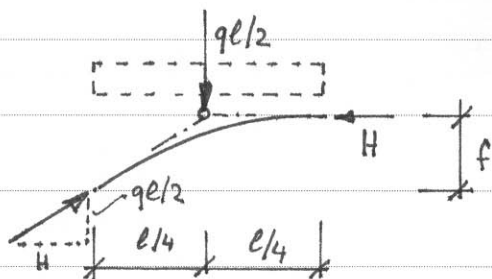
Kragarm — Beispiel Freivorbaubrücke im Bauzustand [m, MN]:





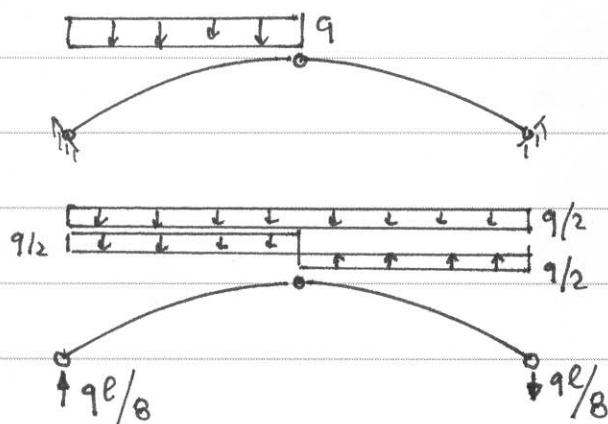
Bogenform parabolisch

$$z = f \cdot \frac{4x^2}{l^2}$$



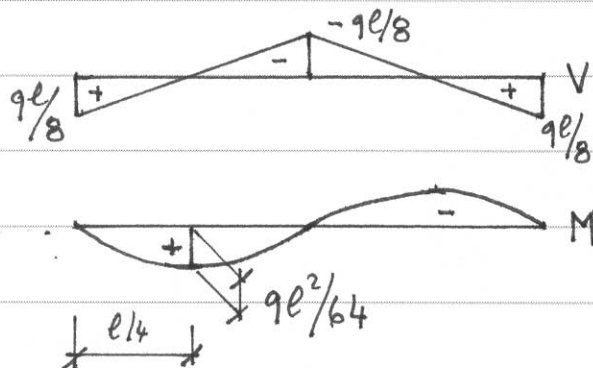
$$H \cdot f - \frac{qe}{2} \cdot \frac{l}{4} = 0 \Rightarrow H = \frac{qe^2}{8f}$$

Die Horizontalkomponente der Normalkraft im Bogen ist konstant. Unter gleichmässig verteilter Belastung ergeben sich lediglich Normalkräfte im Bogen, keine Querkräfte und Biegemomente.

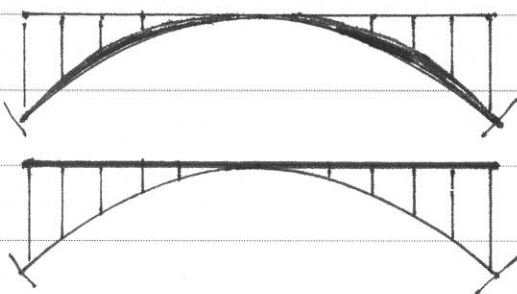


Aufteilung einer asymmetrischen Nutzlast in einen symmetrisch und einen antisymmetrisch wirkenden Anteil:

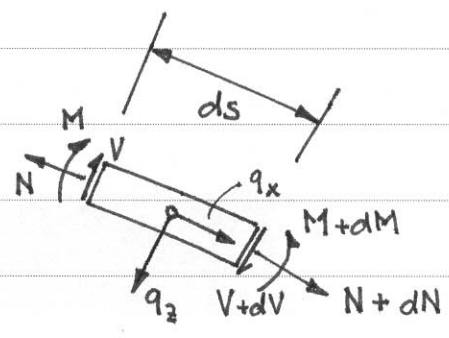
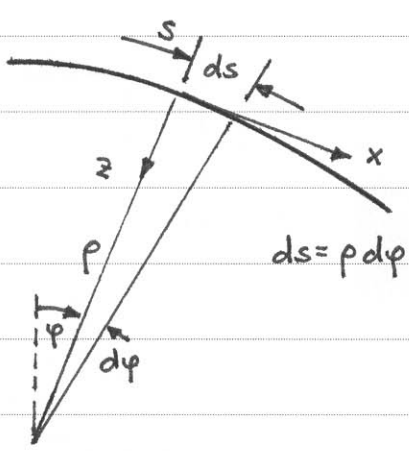
Der symmetrische Anteil bewirkt reine Normalkräfte (wie oben) mit einer Horizontalkomponente von  $H = qe^2/(16f)$ .



Der antisymmetrische Anteil bewirkt Querkräfte und Biegemomente, welche entweder dem Bogen oder dem Verstärkungsträger (verstärkter Stabbogen) zugewiesen werden können.







$$\left\{ \begin{aligned} dN - V d\varphi + q_x ds &= 0 \\ dV + N d\varphi + q_z ds &= 0 \\ dM - V ds &= 0 \end{aligned} \right.$$

Somit:  $\frac{dN}{ds} - \frac{V}{\rho} + q_x = 0, \frac{dV}{ds} + \frac{N}{\rho} + q_z = 0, \frac{dM}{ds} - V = 0$

Für eine gegebene Belastung ( $q_x, q_z$ ) kann eine Stabform gefunden werden, für die nur Normalkräfte, jedoch keine Querkräfte und Biegemomente auftreten. Diese Stabform nennt man Stützlinie.

Aus  $V = M = 0$  folgt mit den beiden ersten Differentialgleichungen

$$\frac{dN}{ds} + q_x = 0, \frac{N}{\rho} + q_z = 0$$

und somit

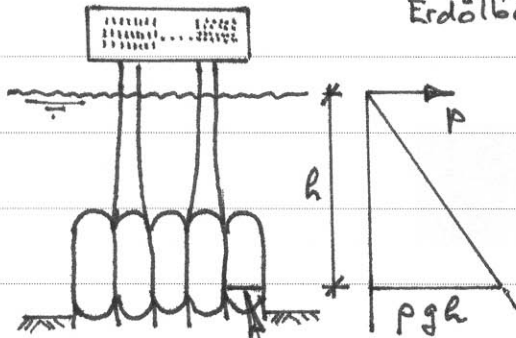
$$\frac{d\rho}{ds} \cdot q_z + \rho \cdot \frac{dq_z}{ds} = q_x$$

eine Differentialgleichung für den Krümmungsradius  $\rho(s)$  der Stützlinie.

Beispiel 1

$q_x = 0, q_z = \text{konstant} \rightarrow \rho = r = \text{konstant}, N = -q_z \cdot r = \text{konstant}$   
 (Kesselformel)

Anwendungsbeispiel ... leerer, kreiszylindrischer Tank einer Offshore-Erdölbohrplattform in 150 m Wassertiefe



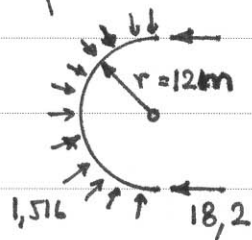
$$\rho \approx 1030 \text{ kg m}^{-3}$$

$$g \approx 9,81 \text{ m s}^{-2}$$

$$h = 150 \text{ m}$$

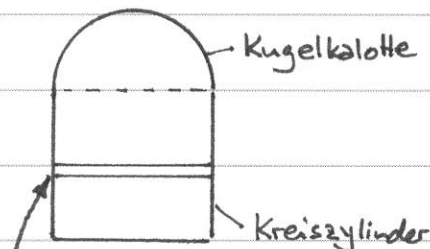
$$pgh = 1,516 \text{ N/mm}^2 \text{ (MN/m}^2\text{)}$$

$$pghr = \underline{\underline{18,2 \text{ MN/m}}}$$



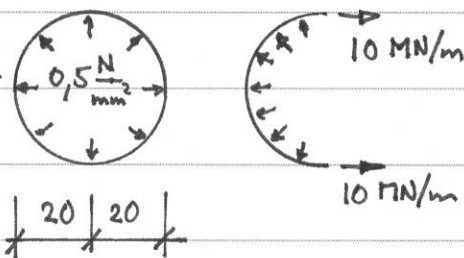
Unter der Annahme einer Wanddicke von 0,8m ergibt sich eine mittlere Druckspannung von  $18,2/0,8 = 22,7 \text{ N/mm}^2$ .

Anwendungsbeispiel ... Sicherheitsbehälter eines Kernkraftwerks unter Innendruck von  $0,5 \text{ N/mm}^2$



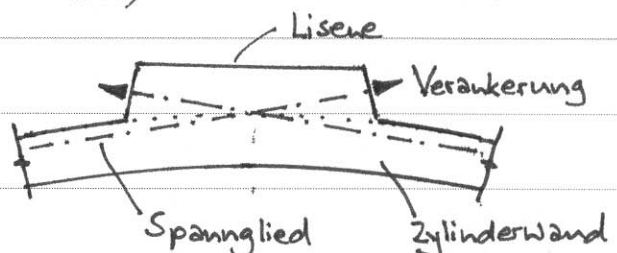
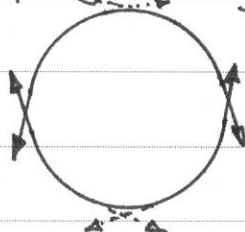
In der Zylinderwand entstehen Zugkräfte von

$$20 \cdot 0,5 = \underline{\underline{10 \text{ MN/m}}}$$



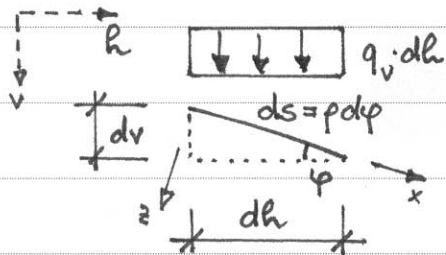
Diese werden durch die vorgespannte Betonkonstruktion aufgenommen. Die auf Zug hoch gespannten Spannglieder übrücken den Beton, so dass im Beton keine Zugspannungen (und Risse) entstehen können.

Prinzip der Spanngliederführung:



Beispiel 2

$q_{\text{vertikal}} = \text{konstant}$



$$dh = ds \cos \varphi = \rho \cos \varphi d\varphi$$

$$q_z = \frac{q_v dh \cos \varphi}{ds} = q_v \cdot \cos^3 \varphi$$

$$q_x = \frac{q_v dh \sin \varphi}{ds} = q_v \cdot \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\frac{dp}{ds} \cdot q_z + p \cdot \frac{dq_z}{ds} = q_x \rightarrow \frac{dp}{p} \cdot \cos^2 \varphi - 2 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi d\varphi = \sin \varphi \cos \varphi d\varphi$$

$$\rightarrow \frac{dp}{p} = 3 \cdot \tan \varphi d\varphi$$

$$\rightarrow \ln p = -3 \cdot \ln(\cos \varphi) + k$$

Also:

$$p \cdot (\cos \varphi)^3 = \text{konstant} \rightarrow p = \frac{p_0}{(\cos \varphi)^3}$$

$$\text{Mit } \cos \varphi = \frac{dh}{\sqrt{dh^2 + dv^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dh}\right)^2}} \Rightarrow p = p_0 \cdot \left[1 + \left(\frac{dv}{dh}\right)^2\right]^{3/2}$$

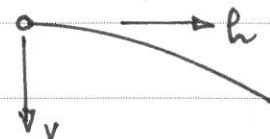
Mit der Beziehung  $\chi = 1/(-p) = -d^2v/dh^2 / \left[1 + (dv/dh)^2\right]^{3/2}$

(gemäß 24.10.02, p.4) erkennt man, dass  $d^2v/dh^2 = 1/p_0 = \text{konstant}$ , d.h. die Funktion  $v(h)$  ist eine quadratische Parabel:

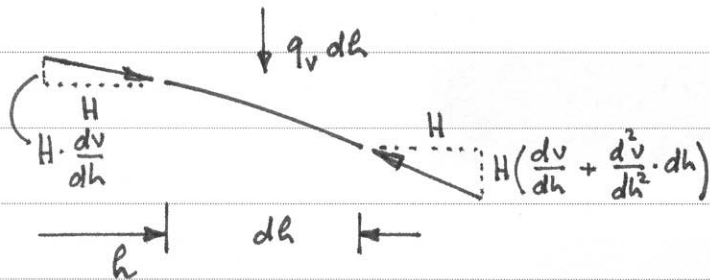
$$v = \frac{h^2}{2 \cdot p_0} + c_1 \cdot h + c_2$$

Legt man den Ursprung des Koordinatensystems  $(h, v)$  in den Scheitel der Parabel, so gilt

$$v = \frac{h^2}{2 \cdot p_0}$$



Das Ergebnis der quadratischen Parabelform der Stützlinie für  $q_v = \text{konstant}$  hätte direkt viel leichter gewonnen werden können:



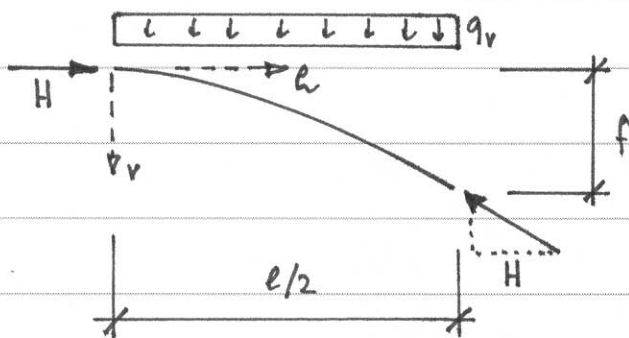
$$q_v dh = \frac{d^2v}{dh^2} dh \cdot H$$

$$\rightarrow v = \frac{q_v h^2}{2H} + c_1 h + c_2$$

Aus dem Vergleich mit der vorhergehenden Parabelgleichung erkennt man, dass

$$p_0 = \frac{H}{q_v}$$

Dieses Ergebnis wäre auch aus  $p = -N/q_z$  an der Stelle  $\varphi = 0$  ( $N = -H, q_z = q_v$ ) gefolgt.



$$v = \frac{4fl^2}{l^2}$$

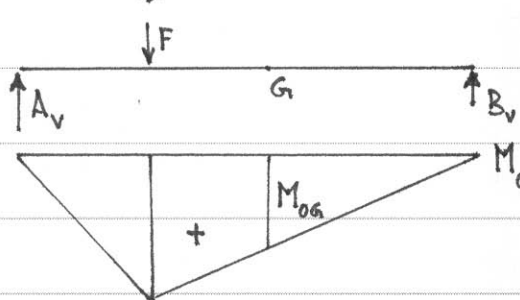
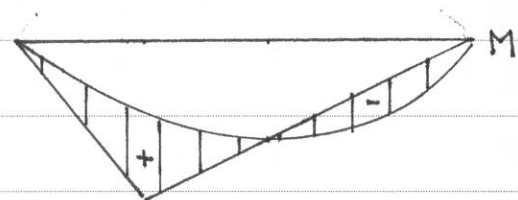
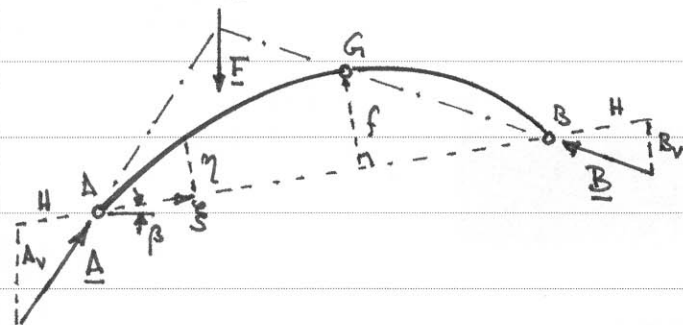
$$H = \frac{q_v \cdot l^2}{8 \cdot f}$$

$$v = \frac{q_v \cdot l^2}{2 \cdot H} = \frac{4fl^2}{l^2}, \text{ o.k.}$$

Anwendungsbeispiel ...  $l = 200 \text{ m}, f = 40 \text{ m}, q_v = 1 \text{ MN/m} \rightarrow H = 125 \text{ MN}$

In der Praxis wird man versuchen, die Konstruktionen derart zu formen, dass sie der Stützlinie für ständige Einwirkungen möglichst nahe kommen. Infolge veränderlicher Einwirkungen wird sich stets eine mehr oder minder grosse Querkraft- und Biegemomentenbeanspruchung ergeben. Um diese aufnehmen zu können, ist eine geeignete Systemversteifung vorzusehen.

Dreigelenkbogen mit lotrechten Lasten:



Die Vertikalkomponenten  $A_v$  und  $B_v$  der Reaktionen  $\underline{A}$  und  $\underline{B}$  ergeben sich wie beim einfachen Balken.

Aus dem Kräfteck kann der auf die Verbindungslinie der Kämpfer = gelenke  $\underline{A}$  und  $\underline{B}$  bezogene "Bogenshub"  $H$  abgelesen werden.

Die Biegemomente  $M$  im Bogen folgen aus der Superposition der Momente  $M_0$  am einfachen Balken und der Momente  $-H \cdot \eta$  infolge Bogenschub:  

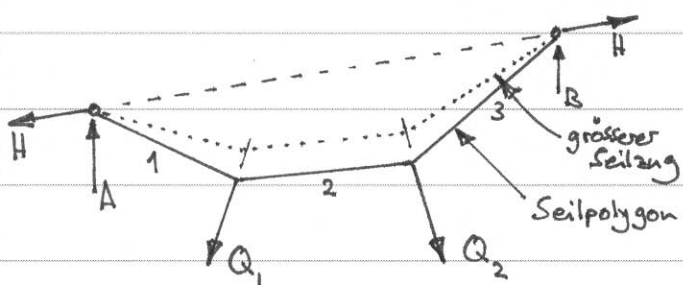
$$M = M_0 - H \cdot \eta(\xi)$$

Aus  $M_G = 0$  folgt

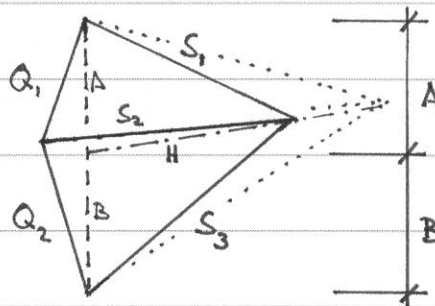
$$H = \frac{M_{0G}}{f}$$

Wie man sieht, wird  $M$  im Vergleich zum einfachen Balken durch die Gewölbewirkung des Bogens wesentlich reduziert.

Biegeweiches, gewichtsloses Seil:



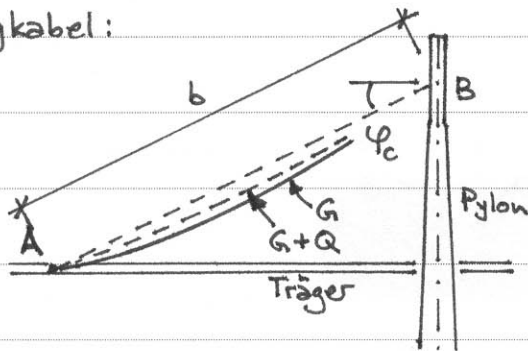
Kräftepolygon



Das Seilpolygon ist die Form eines biegeweichen, gewichtslosen Seils unter gegebenen Lasten.

Die Aneinanderreihung der einzelnen Kräftecke im Kräftepolygon veranschaulicht das Gleichgewicht in jedem Eckpunkt des Seilpolygons.

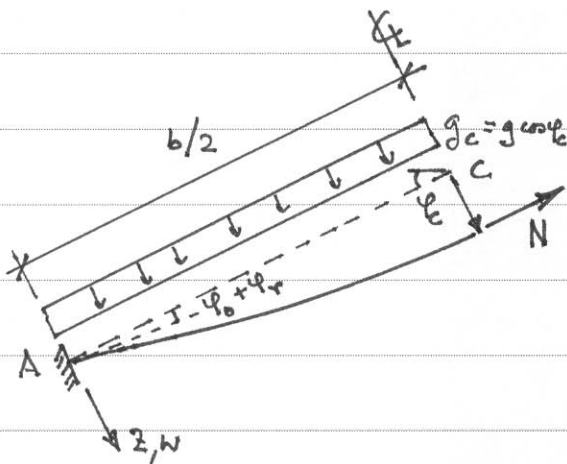
Schrägkabel:



Unter veränderlichen Einwirkungen ( $Q$ ) streckt sich das Kabel im Vergleich zur Form unter ständigen Einwirkungen ( $G$ ).

Wegen des natürlichen Durchhangs des Kabels ist es günstig, die Verankerung bei A im Vergleich zur Sehneneigung  $\varphi_0$  um einen kleinen Winkel  $\varphi_r$  flacher zu neigen.

Den Durchbiegungen des Trägers infolge  $Q$  entsprechen gewisse Verdrehungen bei A. Dies kann mit dem Winkel  $\varphi_r$  berücksichtigt werden, der zu  $\varphi_0$  hinzukommt.



Annahmen:

Biegesteifigkeit  $EI = \text{konstant}$

Eigenlast  $g = \text{konstant}$

Seilzugkraft  $N \approx \text{konstant}$

Durchbiegungen  $w \ll b$

Mit  $g_c = g \cdot \cos \varphi_c$  und  $M = -EI w''$  liefern die zweite und dritte Differentialgleichung für das Gleichgewicht gekrümmter Stäbe (siehe 7.11.02, S.1)

$$-\frac{d^4 w}{dx^4} \cdot EI + \frac{d^2 w}{dx^2} \cdot N + g_c = 0$$

Diese Differentialgleichung hat die Lösung

$$w = c_1 \cdot \operatorname{sh}(kx) + c_2 \cdot \operatorname{ch}(kx) + \frac{g_c x(b-x)}{2N} + c_3$$

wobei

$$k^2 = \frac{N}{EI}$$

Randbedingungen:  $x = 0 \rightarrow w = 0$ ,  $\frac{dw}{dx} = \varphi_0 + \varphi_r$

$x = \frac{b}{2} \rightarrow \frac{dw}{dx} = 0$

Daraus:  $c_1 = \frac{\varphi_0 + \varphi_r}{k} - \frac{g_c b}{2Nk}$ ,  $c_2 = -c_3 = -\frac{c_1}{\beta} = \frac{-c_1}{\operatorname{th}(bk/2)}$



Einspannmoment bei A:

$$M_A = -EI \cdot w''(0) = \frac{\sqrt{NEI}(\varphi_0 + \varphi_r)}{\beta} - \frac{g_c b}{2k} \left( \frac{1}{\beta} - \frac{2}{bk} \right) \approx \frac{\sqrt{NEI}(\varphi_0 + \varphi_r)}{\beta} - \frac{g_c b}{2k}$$

$$\approx \sqrt{NEI} \left( \varphi_0 + \varphi_r - \frac{g_c b}{2N} \right)$$

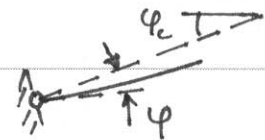
$\frac{bk}{2} \gg 1 \rightarrow \beta \rightarrow 1$

z.B.  $b = 100 \text{ m}$

$G = 540 \text{ N/mm}^2$	}	$\frac{bk}{2} = \frac{b}{2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma \cdot A}{E \cdot I}} = \frac{2b}{d} \cdot \sqrt{\frac{\sigma}{E}} = \frac{2 \cdot 100 \cdot \sqrt{540}}{0,016 \cdot \sqrt{200000}} = 649,5$
$E = 200 \text{ kN/mm}^2$		
$A = n \cdot d^2 \pi / 4$		
$I = n \cdot d^4 \pi / 64$		
$d = 16 \text{ mm}$		

Biegespannungen infolge  $M_A$ :

$$|\sigma_b(M_A)| = \frac{|M_A|}{I} \cdot \frac{d}{2} = 2 \sqrt{EG} \cdot (\varphi - \varphi_0 - \varphi_r) \quad \text{wobei } \varphi = \frac{g_c b}{2N}$$



N.B.:  $|\sigma_b|$  ist unabhängig von  $n$  und  $d$

Die Biegemomente  $M$  klingen für  $x > 0$  sehr rasch ab (abhängig von der sog. charakteristischen Länge  $1/k = \sqrt{EI/N} = d \sqrt{E/G} / 4$ ).

Biegespannungsamplitude bei A (ermüdungswirksam):

$$\Delta \sigma_b = 2(\varphi_g - \varphi_0 - \varphi_r) \sqrt{EG_g} - 2\left(\varphi_g \cdot \frac{\sigma_g}{\sigma_{g+q}} - \varphi_0 - \varphi_r\right) \cdot \sqrt{EG_{g+q}}$$

wobei  $\varphi_g = \frac{g_c b}{2A \sigma_g}$

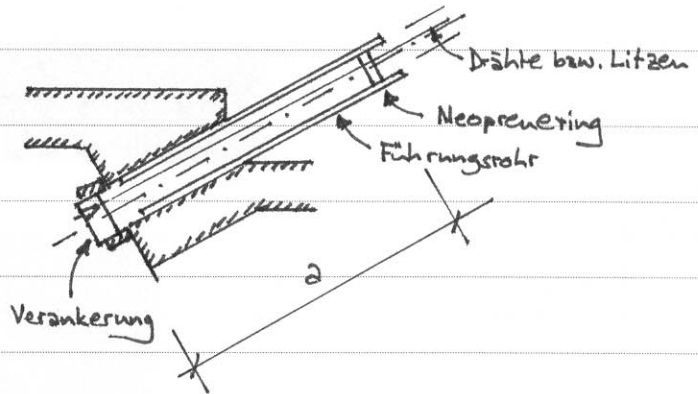
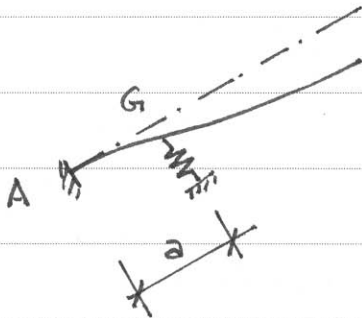
Spezialfall  $\varphi_0 = \varphi_g$  und  $\varphi_r = 0$ :  $\Delta \sigma_{b0} = \frac{g \cdot b \cdot \cos \varphi_c \cdot \sqrt{EG_{g+q}}}{A} \left( \frac{1}{\sigma_g} - \frac{1}{\sigma_{g+q}} \right)$

Beispiel:  $b = 200 \text{ m}$

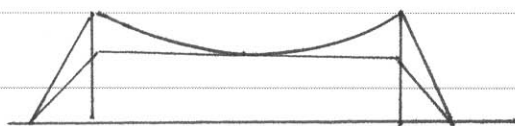
$\sigma_g = 540 \text{ N/mm}^2$	}	$\Delta \sigma_{b0} = 100 \text{ N/mm}^2$
$\sigma_{g+q} = 720 \text{ N/mm}^2$		
$E = 200 \text{ kN/mm}^2$		
$\frac{g \cos \varphi_c}{A} = 90 \text{ kN/m}^3$		

$$\Delta \sigma_{\text{tot}} = (\sigma_{g+q} - \sigma_g) + \sigma_{b0} = 280 \text{ N/mm}^2$$

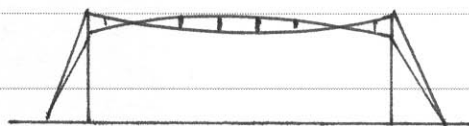
Durch Anordnen einer elastischen Stützung im Abstand  $a \approx (10 \div 20) \cdot d$  (mit  $d = \sqrt{4A/\pi}$ ) können die Biegespannungsamplituden wesentlich reduziert werden:



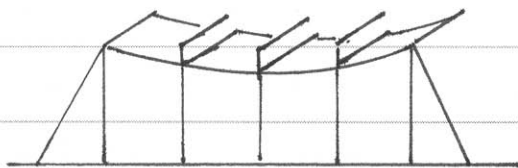
Möglichkeiten zur Aussteifung von Seilen (Bögen analog):



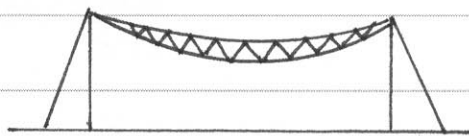
Horizontalkabel



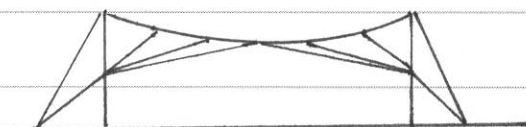
Vorspannung (Zug- und Druckpfosten)



Vertikalkabel + Dachträger



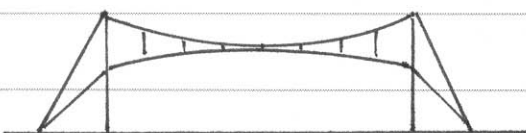
Fachwerk



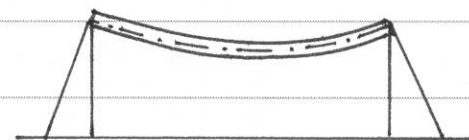
Geneigte Kabel



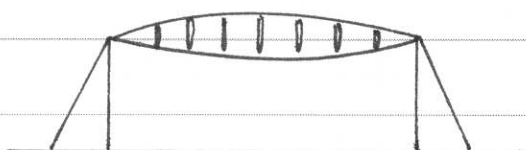
Balken (ev. Faltwerk)



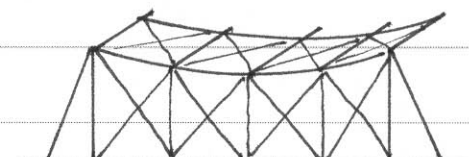
Vorspannung (Zugpfosten)



vorgespannte Schale



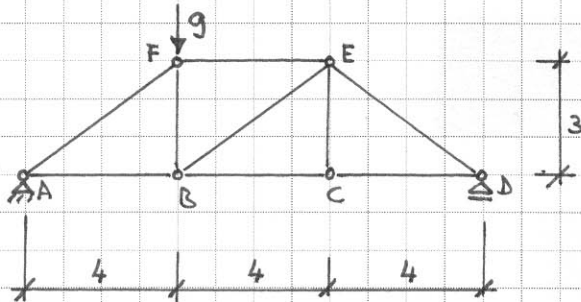
Vorspannung (Druckpfosten)



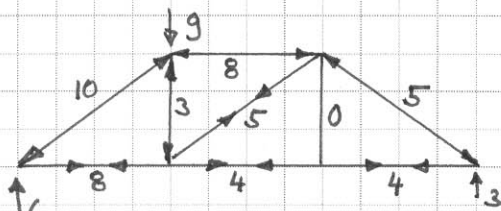
Scheibenwirkung durch Ausfachung



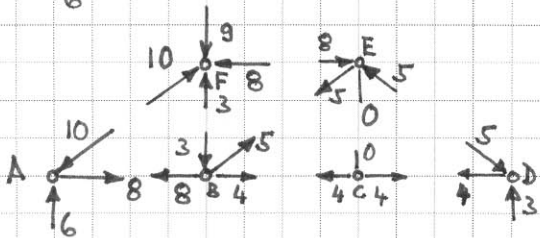
Ideales Fachwerk : gerade Stäbe  
 reibungsfreie Gelenke  
 zentrale Verbindungen  
 Einzelkräfte in Knoten angreifend } nur Normalkräfte in den Stäben



Nach der Bestimmung der Auflagerkräfte kann von Knoten zu Knoten fortgeschritten und das Gleichgewicht untersucht werden. Treten jeweils nur zwei unbekannte Stabkräfte auf, können diese z.B. graphisch leicht ermittelt werden.

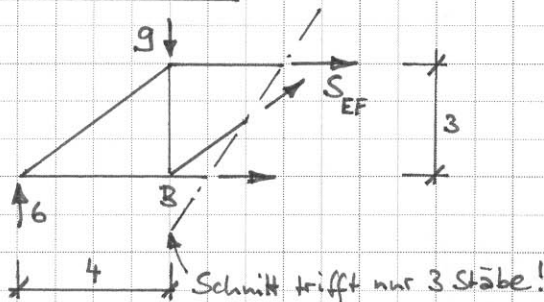


Die Stabkräfte sind mit Pfeilen so bezeichnet, wie sie auf die Knoten wirken:



Der Stab CF ist ein Nullstab.

Ritterscher Schnitt:



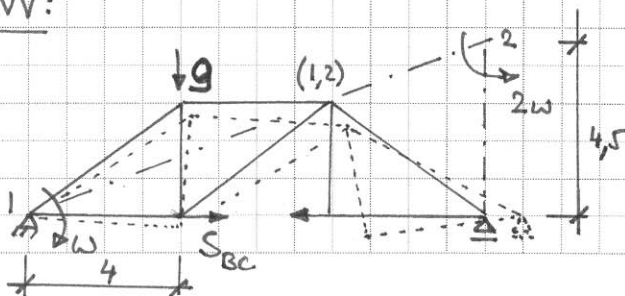
Interessieren nur einzelne Stabkräfte, führt ein Ritterscher Schnitt oder die Anwendung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen (PVV) schneller zum Ziel als die sukzessive Anwendung der Knoten-Gleichgewichtsbedingungen.

$$\sum M_B = 0 : -6 \cdot 4 - S_{EF} \cdot 3 = 0$$

$$\Rightarrow S_{EF} = -8 \text{ (Druck!)}$$

Der Rittersche Schnitt wird so gelegt, dass nur 3 Stäbe geschnitten werden. Momentengleichgewicht um die Stabschnittspunkte ergibt Gleichungen mit jeweils einer Unbekannten.

PVV:



virtuelle Rotation  $w$  bzw.  $2w$ :

$$w \cdot 4 \cdot 9 - S_{BC} \cdot 2w \cdot 4.5 = 0$$

$$\Rightarrow S_{BC} = 4$$

Abzählbedingung für statische Bestimmtheit:

a ... Anzahl unabhängige Auflagerreaktionen  
 s ... " Stabkräfte  
 k ... " Knoten

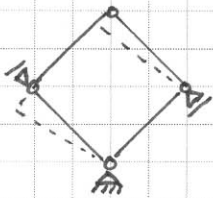
$a + s = 2k$  → System statisch bestimmt

$a + s > 2k$  → " " unbestimmt

$a + s < 2k$  → " unbrauchbar

N.B.: vorheriges Beispiel  $a=3, s=9, k=6$  → statisch bestimmt.

Die Abzählbedingung ist lediglich notwendig, aber nicht hinreichend für statische Bestimmtheit. Zusätzlich ist die kinematische Unverschieblichkeit sicherzustellen. Diese lässt sich durch Anschauung oder Kontrolle der Regularität der Systemmatrix überprüfen, z.B.

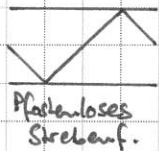
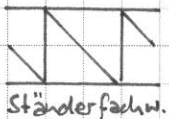


$a = 4$   
 $s = 4$   
 $k = 4$

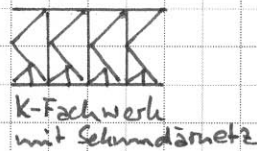
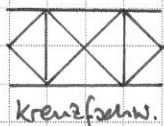
$a + s - 2k = 0$ , jedoch verschieblich → instabil!

Anfachungsarten:

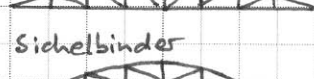
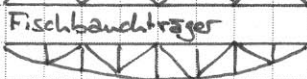
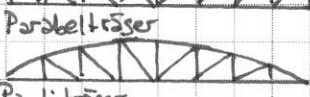
einfache Netze



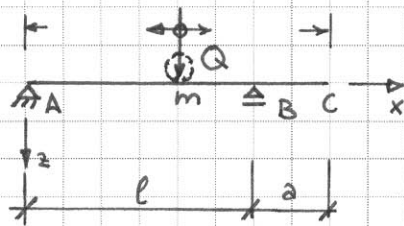
mehrfache Netze



Konstruktionsformen:



Einflusslinien zeigen den Einfluss einer wandernden Last auf eine bestimmte Zustandsgröße.



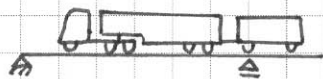
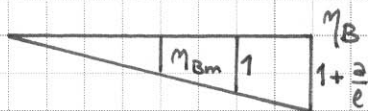
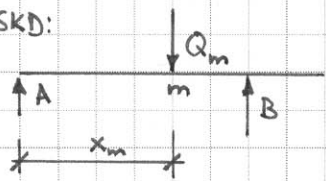
Beispiel: Einflusslinie für Auflagerkraft B des einfachen Balkens ABC:

Last  $Q_m$  an beliebiger Stelle  $m$  ( $0 \leq x_m \leq l+a$ )

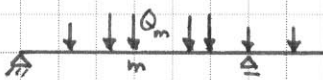
$$B = \frac{Q_m \cdot x_m}{l} = Q_m \cdot \eta_{Bm}$$

$$\eta_{Bm} = x_m/l = \text{Einflussordinate für B in m}$$

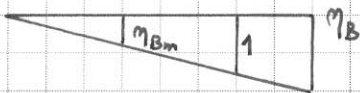
SKD:



Antwortung der Einflusslinie für einen Lastenzug durch Superposition:



$$B = \sum_m Q_m \cdot \eta_{Bm}$$



Allgemein beschreibt eine Einflussordinate  $\eta_{im}$  den funktionalen Verlauf des Einflusses einer Einzelkraft vom Betrag 1 in einer festgelegten Wirkungsrichtung an der beliebigen Stelle  $m$  auf eine bestimmte Zustandsgröße  $S_i$  an der Stelle  $i$ :

Einzellasten ... 
$$S_i = \sum_m Q_m \cdot \eta_{im}$$

verteilte Lasten ... 
$$S_i = \int q(x) \cdot \eta_i(x) dx$$

Durch Anwenden von Einflusslinien lassen sich ungünstigste Laststellungen, die bestimmte Zustandsgrößen extremal werden lassen, leicht erkennen.



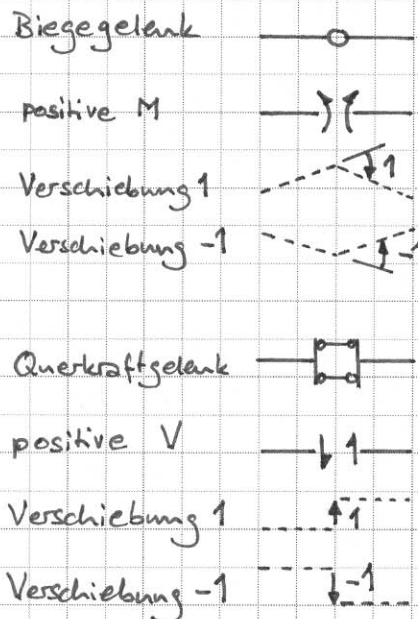
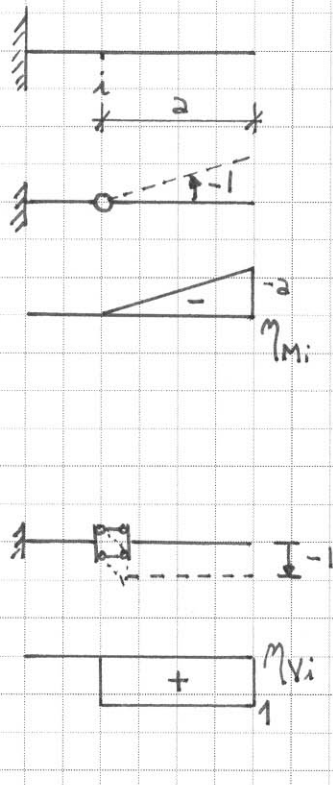
Führt man an der Stelle und in der Richtung von  $S_i$  eine entsprechende Verschiebemöglichkeit ein (Anlagerverschiebung, Biege-, Normalkraft- oder Querkraftgelenk), so wird das statisch bestimmte System zu einem Mechanismus. Wird an der Stelle und in der Richtung von  $S_i$  eine virtuelle Verschiebung  $-1$  aufgebracht, ist die Verschiebung  $\delta_x$  in der festgelegten Wirkungsrichtung der Einzellkraft  $1$  an jeder betriebigen Stelle  $m$  kinematisch festgelegt. Nach dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PVV) gilt

$$1 \cdot \delta_x + (-1) \cdot S_i = 0 \Rightarrow S_i = 1 \cdot \delta_x = \eta_{im}$$

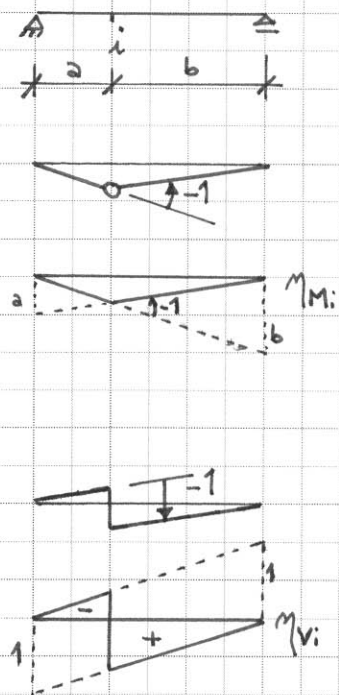
↑  
 $Q_m = 1$

und somit  $\eta_{im} = \delta_x$ . Damit hat man eine allgemeine Methode zur Gewinnung von Einflusslinien gewonnen, die nach Land benannt wird.

Kragarm:

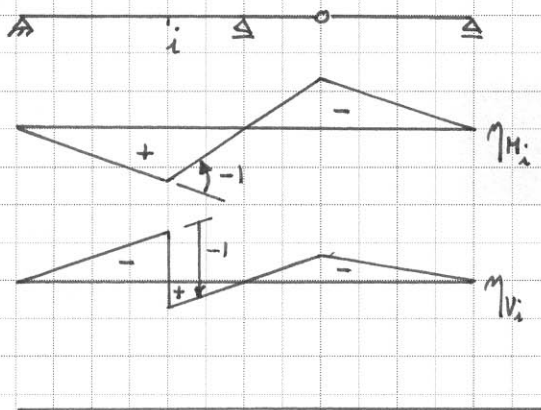


Einfacher Balken:

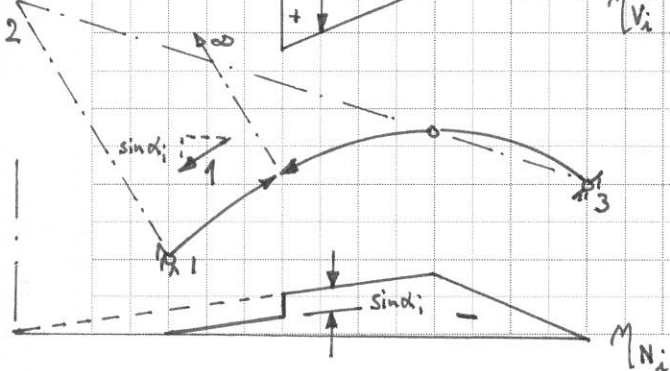
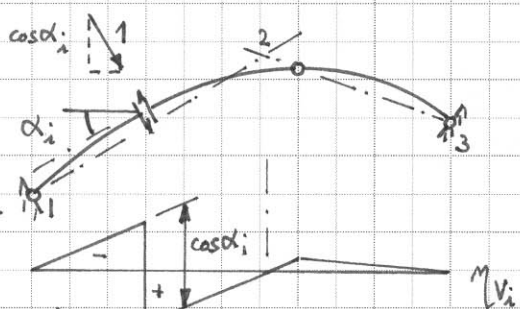
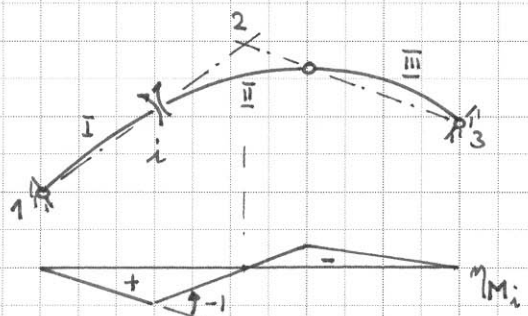


Die Methode Land kann auch auf statisch unbestimmte Systeme angewendet werden. Durch Einführen eines Gelenkes wird das System nicht zu einem Mechanismus, sondern es wird lediglich der Grad der statischen Unbestimmtheit um eins reduziert. Aufzwingen der virtuellen Verschiebung  $-1$  führt dementsprechend nicht zu stückweise geraden, sondern gekrümmten Einflusslinien.

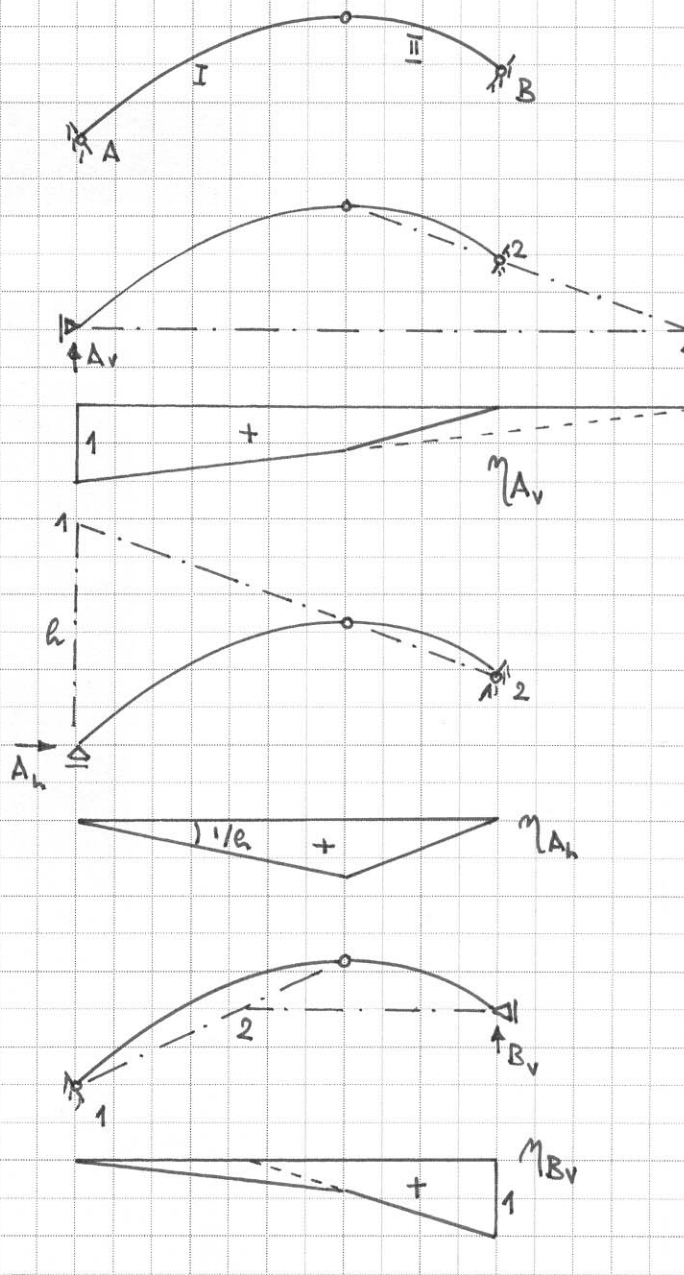
Gerberträger:



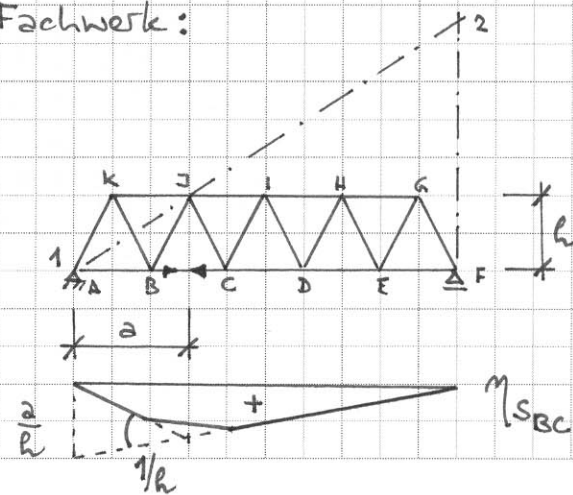
Den "Scheiben" I und II entsprechen die Momentanzentren 1 und 2, etc.



Dreigelenkbogen:



Fachwerk:



Einachsiger Spannungszustand

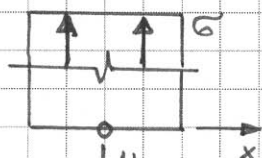
Prismatischer Stab in y-Richtung, Querschnittsfläche A, Normalkraft  $N = \sigma \cdot A = \text{konstant}$



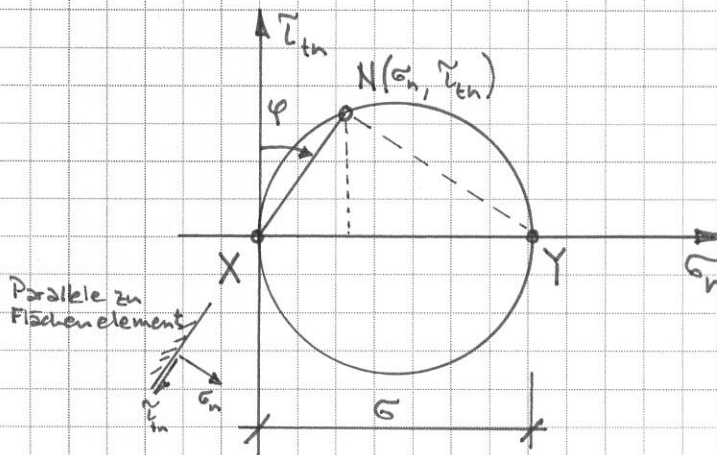
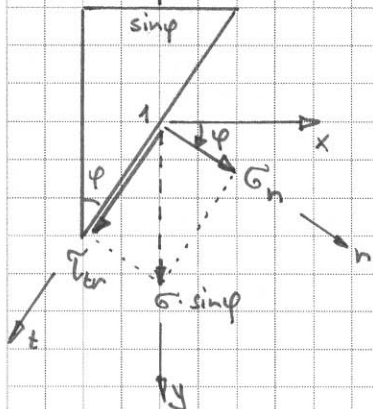
Schnitt unter dem Winkel  $\varphi$ :

Normalspannung  $\sigma_n = \sigma \cdot \sin^2 \varphi$

Schubspannung  $\tau_{tn} = \sigma \cdot \sin \varphi \cos \varphi$

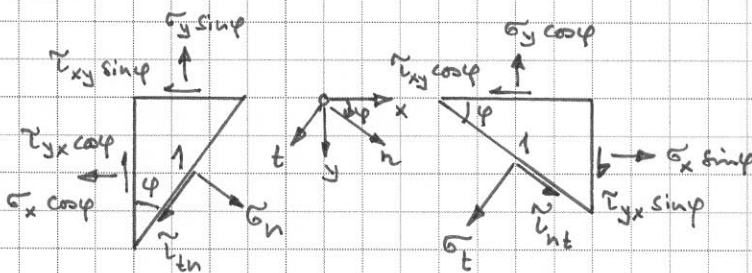
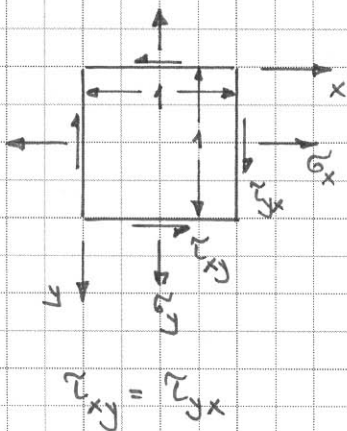


Geometrische Interpretation mit Mohrschem Kreis:



Der Punkt X spielt im obigen Kreis die Rolle des Pols. Parallelen zu Flächenelementen durch X schneiden sich mit dem Kreis im zugehörigen Punkt N.

Ebener Spannungszustand



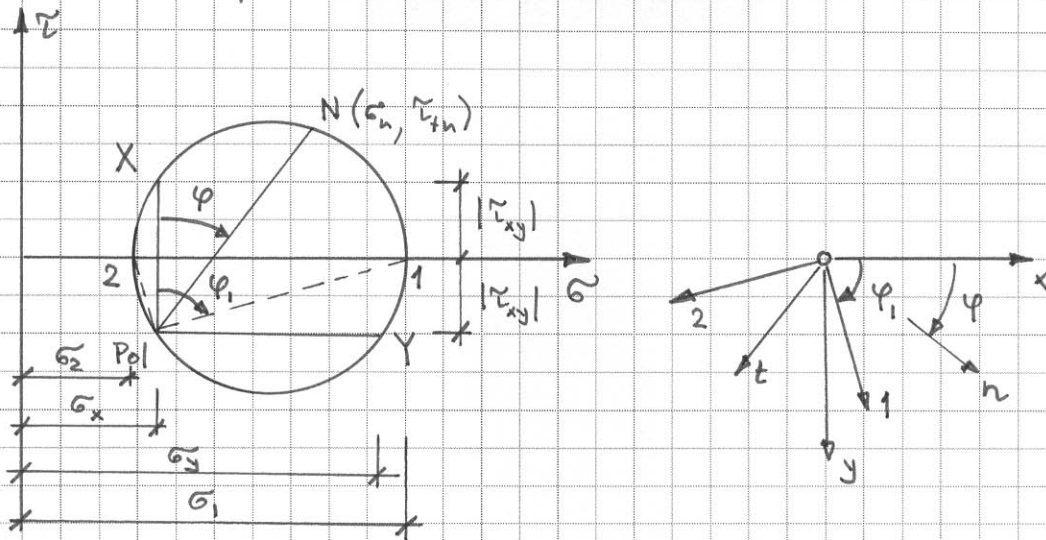
$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + \tau_{xy} \cdot 2 \sin \varphi \cos \varphi \\ \sigma_t &= \sigma_x \sin^2 \varphi + \sigma_y \cos^2 \varphi - \tau_{xy} \cdot 2 \sin \varphi \cos \varphi \\ \tau_{tn} &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \end{aligned} \right.$$



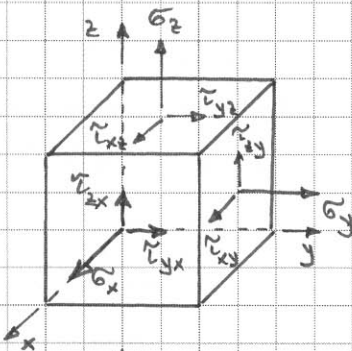
$\tau_{+n} = 0 \rightarrow$  Hauptrichtungen 1 und 2 :  $\tan(2\varphi_1) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$

Hauptspannungen  $\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

Geometrische Interpretation mit Mohrschem Kreis:

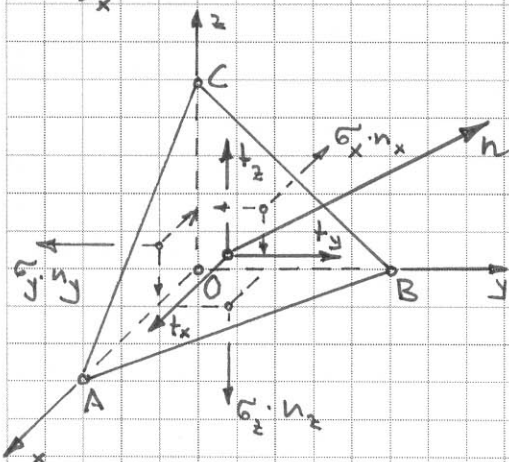


Räumlicher Spannungszustand



$\Delta_{OAC} = n_y$   
 $\Delta_{OAB} = n_z$   
 $\Delta_{OBC} = n_x$   
 $\Delta_{ABC} = 1 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$

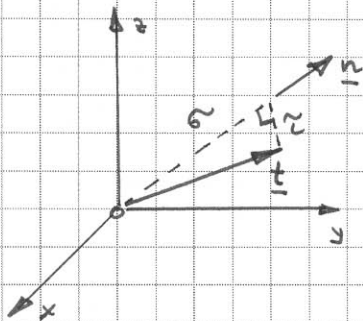
$\underline{n}$  = Einheitsnormalenvektor auf ABC



$$\left\{ \begin{aligned} t_x &= \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z \\ t_y &= \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z \\ t_z &= \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z \end{aligned} \right.$$

oder abgekürzt mit Summation über sog. stummen Index j :

$$t_i = \sigma_{ij} n_j$$



Normalspannung

$$\sigma = \underline{t} \cdot \underline{n} = t_x n_x + t_y n_y + t_z n_z$$

Schubspannung

$$\tau = \sqrt{\underline{t} \cdot \underline{t} - \sigma^2} = \sqrt{t_x^2 + t_y^2 + t_z^2 - \sigma^2}$$

Schubspannungsfreie Richtungen  $\rightarrow \underline{t} = \sigma \underline{n}$

homogene, lineare Gleichungen  $\rightarrow (\sigma_x - \sigma) n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z = 0, \dots$

charakteristische Gleichung  $\rightarrow \sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$

Invarianten  $\rightarrow I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2 \tau_{xy} \tau_{xz} \tau_{yz} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2$$

Die charakteristische Gleichung ergibt sich aus der Forderung nach einer nicht trivialen Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems (Determinante = 0).

Die Lösungen der charakteristischen Gleichung sind die Hauptspannungen  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ .

Die Hauptrichtungen  $\underline{n}_1, \underline{n}_2, \underline{n}_3$  folgen durch Einsetzen von  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  in die homogenen linearen Gleichungen. Es folgt:

$$n_{ix} = \frac{-c_{iy} c_{iz}}{\sqrt{c_{ix}^2 c_{iy}^2 + c_{ix}^2 c_{iz}^2 + c_{iy}^2 c_{iz}^2}}, \dots [c_{ix} = (\sigma_x - \sigma_i) \tau_{yz} - \tau_{xy} \tau_{xz}, \dots] \quad (i=1, 2, 3)$$

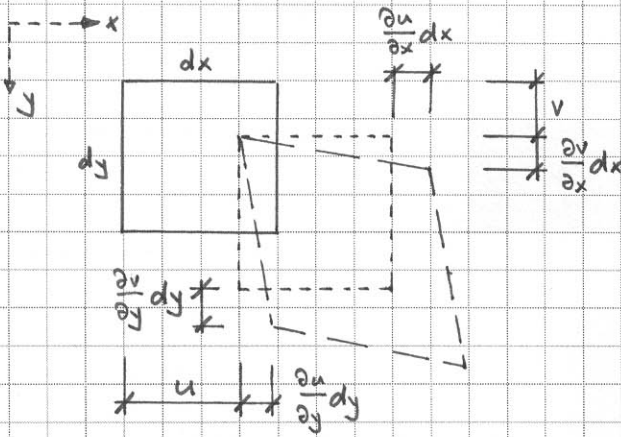
N.B. - Der Term  $I_2 \sigma$  in der charakteristischen Gleichung wird oft mit negativem Vorzeichen geschrieben. Entsprechend ist das Vorzeichen rechtsstehend im Ausdruck für  $I_2$  umzudrehen (siehe Skript).

- Zerlegung des Spannungstensors in einen hydrostatischen und einen deviatorischen Anteil siehe Skript. Geometrische Interpretation im Hauptachsensystem bzw. Hauptspannungsraum mit hydrostatischer Achse und deviatorischer Ebene, Oktahedernormalspannung und Oktahederschubspannung (siehe Skript).

- Anwendung auf orthogonal belastete Betonkörper siehe fib-CH-Publikation Osaka 2002.



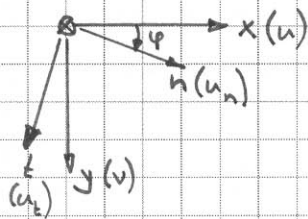
Ebener Verzerrungszustand



Verschiebungskomponenten  $u, v$   
 Dehnungen  $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$   
 Schiebung  $\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$

N.B.: Annahme kleine Verschiebungen

Koordinatentransformation:



$$\begin{Bmatrix} n \\ t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n \\ t \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_n \\ u_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial n} &= \cos\varphi, & \frac{\partial x}{\partial t} &= -\sin\varphi \\ \frac{\partial y}{\partial n} &= \sin\varphi, & \frac{\partial y}{\partial t} &= \cos\varphi \end{aligned} \right\}$$

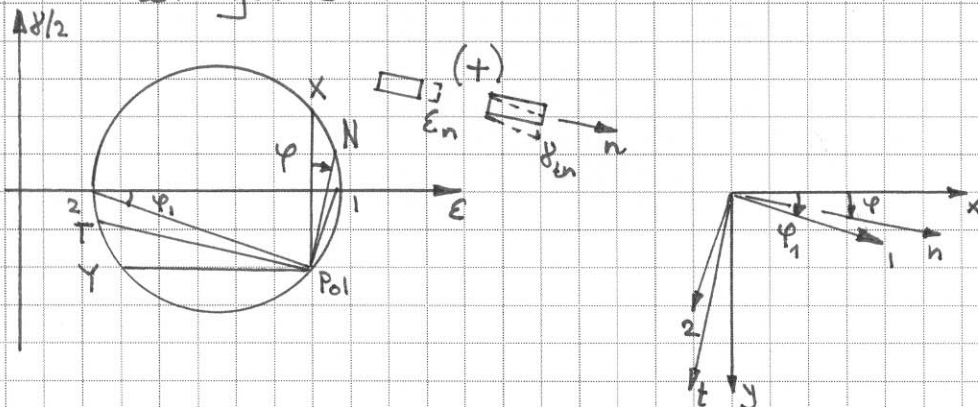
$$\begin{aligned} \epsilon_n = \frac{\partial u_n}{\partial n} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial n} \cdot \cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial n} \cdot \cos\varphi + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial n} \cdot \sin\varphi + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial n} \cdot \sin\varphi \\ &= \epsilon_x \cdot \cos^2\varphi + \gamma_{xy} \cdot \sin\varphi \cos\varphi + \epsilon_y \cdot \sin^2\varphi \end{aligned}$$

analog:

$$\epsilon_t = \epsilon_x \cdot \sin^2\varphi - \gamma_{xy} \cdot \sin\varphi \cos\varphi + \epsilon_y \cdot \cos^2\varphi$$

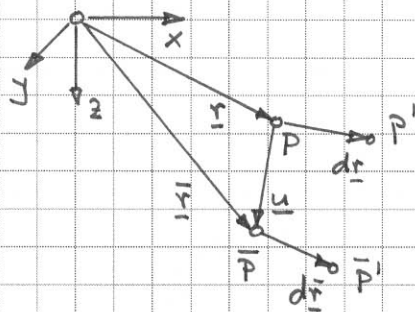
$$\gamma_{nt} = -\epsilon_x \cdot 2\sin\varphi \cos\varphi + \gamma_{xy} (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + \epsilon_y \cdot 2\sin\varphi \cos\varphi$$

Mohr'scher Verzerrungskreis:



N.B.: halbe Schiebungen auf Ordinate!

Dreiachsiger Verzerrungszustand



Punkt P und Punkt P' in seiner Nachbarschaft vor Verformung.

Entsprechende Punkte  $\bar{P}$  und  $\bar{P}'$  nach Verformung.

Verschiebung  $\underline{u} = \bar{\underline{r}} - \underline{r}$

Annahme  $\underline{u}$  stetig und differenzierbar

$$\rightarrow d\bar{\underline{r}} = \frac{\partial \bar{\underline{r}}}{\partial x} dx + \frac{\partial \bar{\underline{r}}}{\partial y} dy + \frac{\partial \bar{\underline{r}}}{\partial z} dz$$

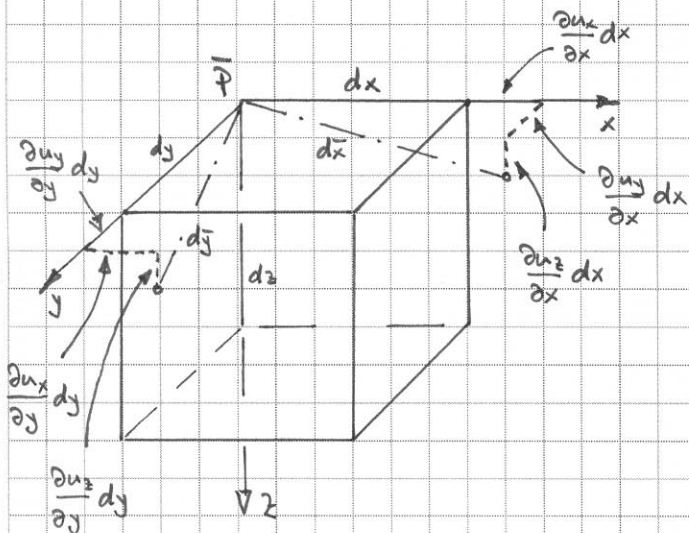
$$\text{bzw. } d\bar{x} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} dx + \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} dy + \frac{\partial \bar{x}}{\partial z} dz, \dots$$

Wegen  $\bar{x} = x + u_x, \dots$  folgt  $d\bar{x} = (1 + \frac{\partial u_x}{\partial x}) dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz, \dots$

Verschiebungsgradient

$$u_{k,e} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \underbrace{u_{(k,e)}}_{\text{symmetrisch}} + \underbrace{u_{[k,e]}}_{\text{antisymmetrisch}}$$

partielle Differentiation bezüglich  $x_e$



Dehnungen  $\epsilon_x = \frac{d\bar{x} - dx}{dx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \dots$

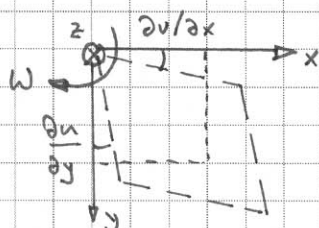
Schubungen  $\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \dots$

Die Dehnungen und die halben Schubungen bilden den Verzerrungstensor  $u_{(k,e)}$ .

Der zu  $u_{[k,e]}$  duale Vektor

$$\omega = \frac{1}{2} \text{rot } \underline{u} = \frac{1}{2} \nabla \times \underline{u}$$

entspricht einer Starrkörperrotation der Umgebung von P.



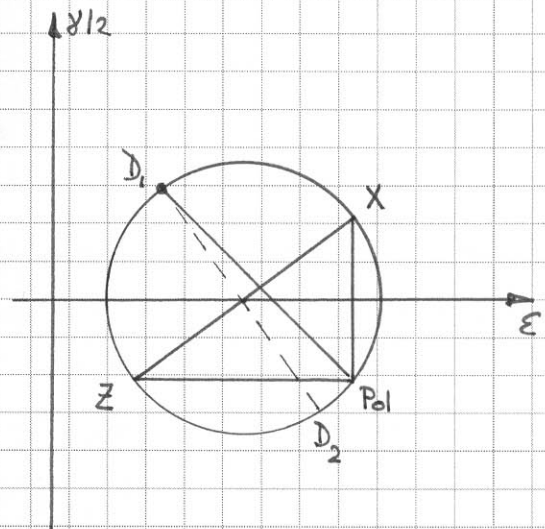
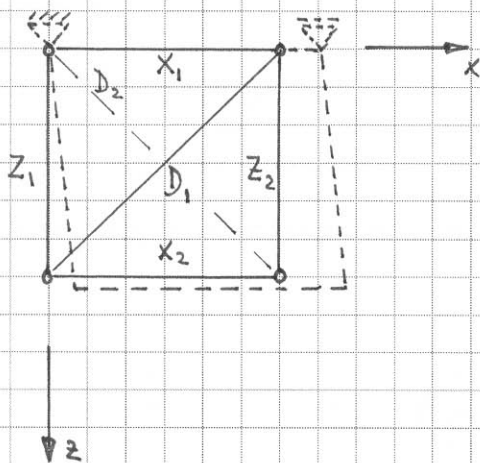
z. B. ebener Verschiebungszustand  $\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \omega$   
 $\omega_x = \omega_y = 0$

Zusammengefasst: Die Verformungen in der Nähe eines Punktes werden beschrieben durch die Verschiebung  $u$  des Punktes und den Verschiebungsgradienten  $\epsilon$ , einen Tensor, der in einen symmetrischen  $\epsilon^k_e$  Anteil (Verzerrungstensor) und einen antisymmetrischen Anteil ( $\rightarrow$  Starrkörperrotation) aufgespalten werden kann.

Hauptwerte und Hauptrichtungen des Verzerrungstensors ergeben sich ebenso wie die Grundinvarianten analog wie beim Spannungstensor (siehe Skript). Zerlegung in hydrostatischen und deviatorischen Anteil analog.

Anwendungsbeispiel:

Auf der Seitenfläche eines Prüfkörpers werden mit Seilzähnmessgeräten die Seiten und die Diagonale eines quadratischen Messnetzes ausgemessen:



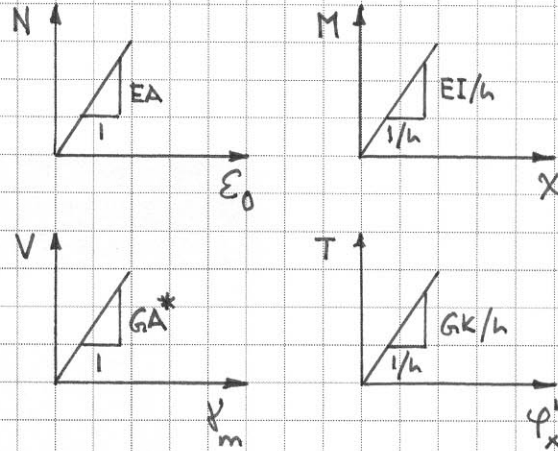
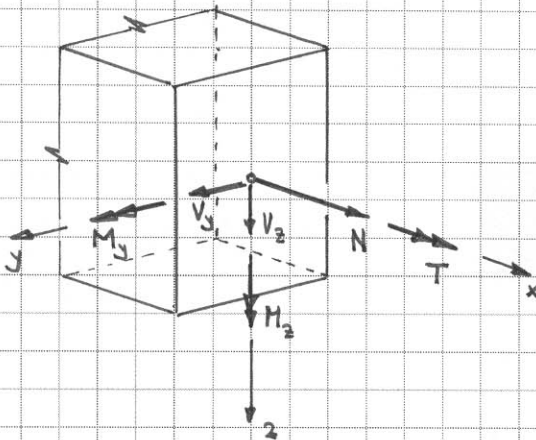
Aus den Messstrecken  $X_1$  und  $X_2$  ergibt sich  $\epsilon_x = 5,5\%$  (Mittelwert)  
 " " " "  $Z_1$  "  $Z_2$  " "  $\epsilon_z = 1,5\%$  (Mittelwert)  
 " der Messstrecke  $D_1$  " "  $\epsilon_d = 2\%$

In der Richtung  $D_2$  müsste sich eine Dehnung von 5% ergeben.

Werden beide Diagonalen ausgemessen, so ergibt sich eine überzählige Messung  $\rightarrow$  Nützlichkeit des Fehleransgleichs.

Interpretiert man das Messnetz als Fachwerk, so spielen die überzähligen Messungen die Rolle von Zwängungen. Dem Gewicht der Messung entspricht die Stabsteifigkeit, und der (minimalen) Summe der Fehlerquadrate entspricht die (minimale) Formänderungsenergie.

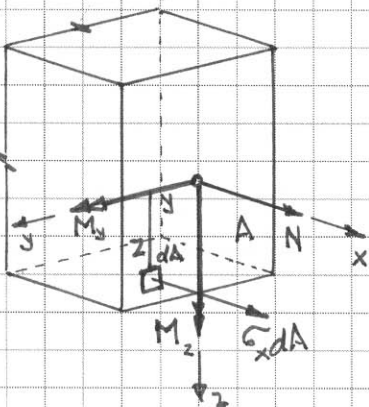




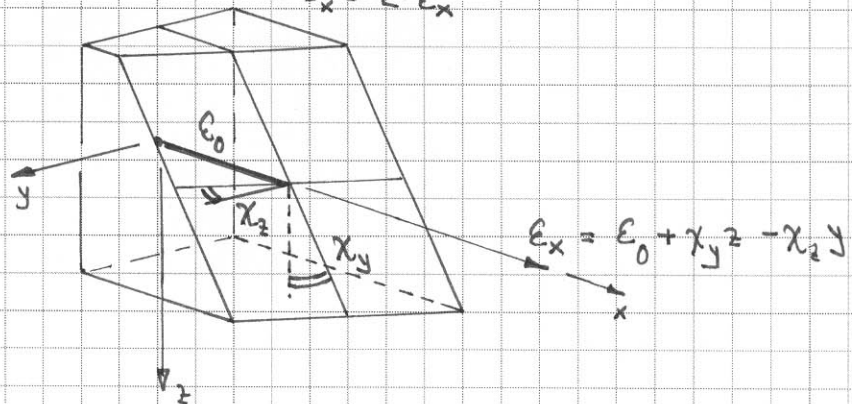
N	Normalkraft	[kN]	$\epsilon_0$	Dehnung der Stabachse	[-]
V	Querkraft	[kN]	$\gamma_m$	mittlere Schiebung	[-]
M	Biegemoment	[kNm]	$\chi$	Krümmung	[rad/m]
T	Torsionsmoment	[kNm]	$\varphi'_x$	Verwindung	[rad/m]
E	Elastizitätsmodul	[kN/mm <sup>2</sup> ]	A	Querschnittsfläche	[m <sup>2</sup> ]
G	Schubmodul	[kN/mm <sup>2</sup> ]	A*	reduzierte Querschnittsfläche	[m <sup>2</sup> ]
h	Bezugslänge	[m]	I	Flächenträgheitsmoment	[m <sup>4</sup> ]
			K	Torsionskonstante	[m <sup>4</sup> ]

Unter der Annahme eines linear elastischen Verhaltens des Werkstoffe werden die Beziehungen zwischen den Schnittgrößen (Spannungsergebnissen oder verallgemeinerten Spannungen) und den zugehörigen (verallgemeinerten) Verformungen linear.

Hier zunächst Beschränkung auf den Fall  $\{N, M_y, M_z\} - \{\epsilon_0, \chi_y, \chi_z\}$ :



- Annahmen:
- zur Stabachse normale Querschnitte bleiben eben und senkrecht zur Stabachse
  - keine gegenseitige Beeinflussung der Längsfasern
  - $\sigma_x = E \cdot \epsilon_x$



$$N = \int_A \sigma_x dA$$

$$M_y = \int_A \sigma_x z dA$$

$$M_z = - \int_A \sigma_x y dA$$

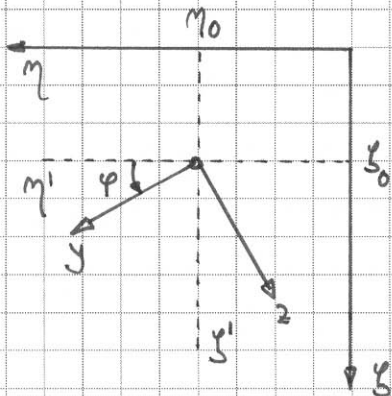
$$\begin{Bmatrix} N \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} \int_A dA & \int_A z dA & -\int_A y dA \\ \int_A z dA & \int_A z^2 dA & -\int_A yz dA \\ -\int_A y dA & -\int_A yz dA & \int_A y^2 dA \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_0 \\ \chi_y \\ \chi_z \end{Bmatrix}$$

Diagonalisierung der Matrix  $\rightarrow \int_A y dA = \int_A z dA = \int_A yz dA \rightarrow$  Hauptachsen  $y, z$ :

$$N = EA \epsilon_0, \quad M_y = EI_y \chi_y, \quad M_z = EI_z \chi_z$$

$$A = \int_A dA, \quad I_y = \int_A z^2 dA, \quad I_z = \int_A y^2 dA$$

Beliebige Ausgangskordinaten  $\eta, \xi$ :



$$y = (\eta - \eta_0) \cos \varphi + (\xi - \xi_0) \sin \varphi$$

$$z = -(\eta - \eta_0) \sin \varphi + (\xi - \xi_0) \cos \varphi$$

a)  $\int_A y dA = \int_A z dA = 0$ :

$$\begin{cases} [\int_A \eta dA - \eta_0 \cdot A] \cos \varphi + [\int_A \xi dA - \xi_0 \cdot A] \sin \varphi = 0 \\ -[\int_A \eta dA - \eta_0 \cdot A] \sin \varphi + [\int_A \xi dA - \xi_0 \cdot A] \cos \varphi = 0 \end{cases}$$

Multiplikation mit  $\tan \varphi$  bzw.  $\cot \varphi$  und Addition der beiden Gleichungen bringt:

$$\frac{1}{\cos \varphi} [\int_A \eta dA - \eta_0 \cdot A] = 0, \quad \frac{1}{\sin \varphi} [\int_A \xi dA - \xi_0 \cdot A]$$

und within die Schwerpunktskoordinaten

$$\underline{\underline{\eta_0 = \frac{\int_A \eta dA}{A}, \quad \xi_0 = \frac{\int_A \xi dA}{A}}}$$

b)  $\int_A yz dA = 0$ :

$$C_{yz} = \int_A yz dA = \int_A (\eta' \cos \varphi + \xi' \sin \varphi)(-\eta' \sin \varphi + \xi' \cos \varphi) dA = \sin \varphi \cos \varphi \int_A (\xi'^2 - \eta'^2) dA + (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \int_A \eta' \xi' dA = 0$$

Hauptrichtung  $\varphi_1 \rightarrow \underline{\underline{\tan(2\varphi_1) = \frac{-2 \cdot \int_A \eta' \xi' dA}{-\int_A \eta'^2 dA + \int_A \xi'^2 dA} = \frac{-2C_{\eta'\xi'}}{-I_{\xi'} + I_{\eta'}} = 0}}$

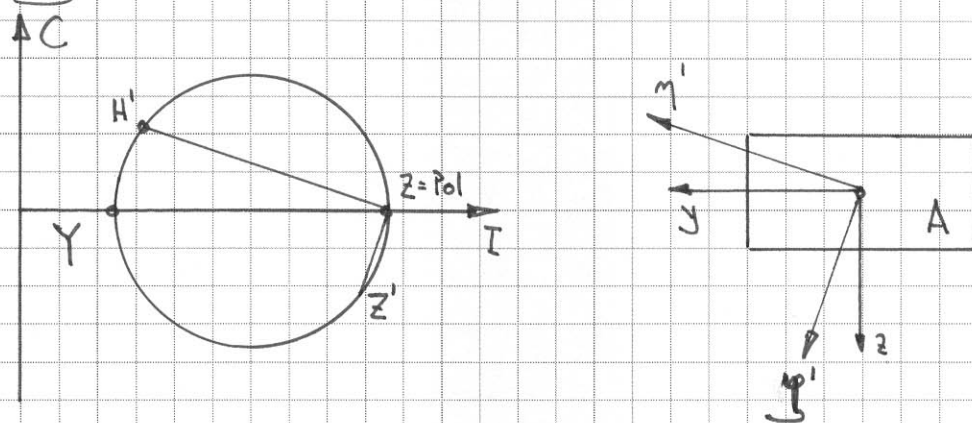
$$I_{\eta'} = \int_A \xi'^2 dA, \quad I_{\xi'} = \int_A \eta'^2 dA, \quad C_{\eta'\xi'} = \int_A \eta' \xi' dA$$

Die allgemeinen Transformationsformeln

$$\begin{Bmatrix} I_y \\ I_z \\ C_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\varphi & \sin^2\varphi & -2\sin\varphi\cos\varphi \\ \sin^2\varphi & \cos^2\varphi & 2\sin\varphi\cos\varphi \\ \sin\varphi\cos\varphi & -\sin\varphi\cos\varphi & \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} I_{y'} \\ I_{z'} \\ C_{y'z'} \end{Bmatrix}$$

sind bis auf das Vorzeichen der Deviationsmomente C analog zu jenen für die Transformation von Spannungen bzw. Verzerrungen.

Darstellung mit Mohrschem Kreis:



Normalspannungen

$$\begin{aligned} \sigma_x = E \epsilon_x &= E (\epsilon_0 + \chi_y \cdot z - \chi_z \cdot y) = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y \\ &= \frac{N}{A} \cdot \left( 1 + \frac{z z_A}{i_y^2} + \frac{y y_A}{i_z^2} \right) \end{aligned}$$

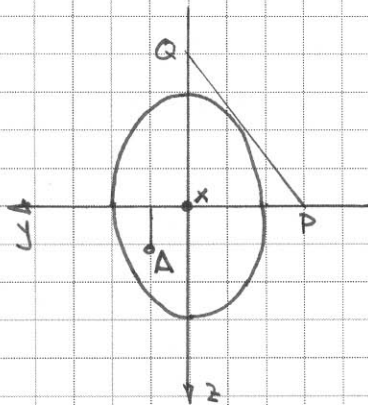
wobei  $y_A = -\frac{M_z}{N}$ ,  $z_A = \frac{M_y}{N}$  ... Angriffspunkt der statisch äquivalenten Normalkraft  $N$

$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$ ,  $i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$  ... Trägheitsradien

$\sigma_x = 0 \rightarrow$  neutrale Achse :  $y \cdot y_A / i_z^2 + z \cdot z_A / i_y^2 + 1 = 0$



Abrollen der neutralen Achse an der kleinsten konvexen Hülke des Querschnitts:

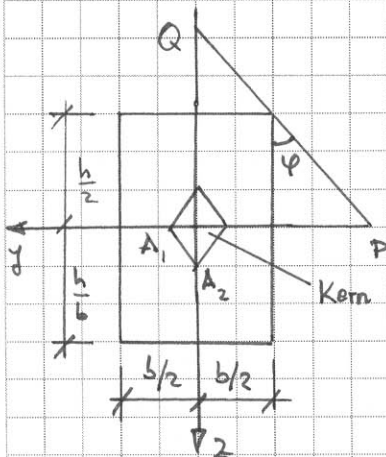


$$y_A = - \frac{i_z^2}{y_P} \quad , \quad z_A = - \frac{i_y^2}{z_Q}$$

Alle so definierten Punkte A beschreiben den Kern des Querschnitts.

Greift N immerhalb des Kerns an, so haben alle  $\sigma_x$  über den Querschnitt dasselbe Vorzeichen wie N (Zug oder Druck).

Rechteckquerschnitt:



$$A = bh$$

$$I_y = bh^3/12 \quad , \quad I_z = hb^3/12$$

$$i_y^2 = h^2/12 \quad , \quad i_z^2 = b^2/12$$

$$y_P = -(b + h \tan \varphi) / 2$$

$$z_Q = -(h + b \cot \varphi) / 2$$

$$y_A = \frac{b^2}{6(b + h \tan \varphi)} \quad , \quad z_A = \frac{h^2}{6(h + b \cot \varphi)}$$

$$A_1: \varphi = 0 \rightarrow y_{A_1} = b/6 \quad , \quad z_{A_1} = 0$$

$$A_2: \varphi = \frac{\pi}{2} \rightarrow y_{A_2} = 0 \quad , \quad z_{A_2} = h/6$$

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \rightarrow (2y_P + b)(2z_Q + h) = bh$$

$$4 \frac{i_y^2 \cdot i_z^2}{y_A^2 z_A} = + 2h \cdot \frac{i_z^2}{y_A} + 2b \cdot \frac{i_y^2}{z_A}$$

$$4 i_y^2 i_z^2 = 2h i_z^2 y_A + 2b i_y^2 z_A \dots \text{Gerade}$$

Querschnittsgeraden entsprechen einer geraden Begrenzung des Kerns.  
Geraden Begrenzungen des Querschnitts entsprechen Kernecken.

- Angenäherte Betrachtung der Verformungen infolge von Querkraften:

$$\sigma_x = \frac{M_y \cdot z}{I_y} \rightarrow \frac{d\sigma_x(z)}{dx} = \frac{dM_y}{dx} \cdot \frac{z}{I_y} = V_z \cdot \frac{z}{I_y}$$

$$\Rightarrow \tau_{xz}(z_s) = \frac{V_z \cdot S(z_s)}{b(z_s) \cdot I_y}$$

"Bisquit-Formel"

$$S(z_s) = \int_{z_s}^{z_u} z \cdot b(z) dz, \text{ statisches Moment [m}^3\text{]}$$

Beispiel Rechteckquerschnitt

$A = bh$   
 $I_y = \frac{bh^3}{12}$   
 $S = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right)$   
 $\tau_{zx} = \frac{V_z \cdot b \cdot \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \cdot 12}{2 \cdot b \cdot bh^3} = \frac{V_z}{b \cdot h} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left( 1 - \frac{4z^2}{h^2} \right)$

Beitrag der Schiebungen zur Formänderungsarbeit U

$U(\gamma_{xz}) = \int_x \int_A \frac{G}{2} \gamma_{xz}^2 dA dx = \int_x \int_A \frac{V_z^2 S^2}{2 G b^2 I_y^2} dA dx$   
 $= \int_x \frac{V_z^2}{2 G A^*} dx, \quad A^* = \frac{1}{\int_A \frac{S^2}{b^2 I_y^2} dA}$

Element

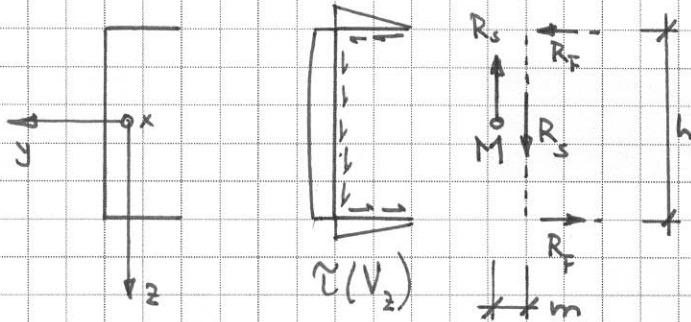
Querschnitt

$A^*$  = reduzierte Querschnittsfläche, z.B.  $5bh/6$  für Rechteckquerschnitt

- N.B. :- Im Vergleich zu  $\sigma$  (bzw.  $\epsilon$ ) ist der Beitrag von  $\tau$  (bzw.  $\gamma$ ) zu U i.a. vernachlässigbar, v.a. für schlanke Stäbe, siehe Skript.
- Genauere Spannungsverteilung nach Elastizitätstheorie siehe Skript.
  - Anwendung der Bisquitformel auch für dünnwandige Querschnitte möglich, siehe Skript.



• Träger mit C-Querschnitt:



Die Schubspannungen  $\tau_{yx}$  in den Flanschen resultieren in Flanchekräften  $R_F$ , die mit dem Hebelarm  $h$  das Kräftepaar  $R_F \cdot h$  bilden.

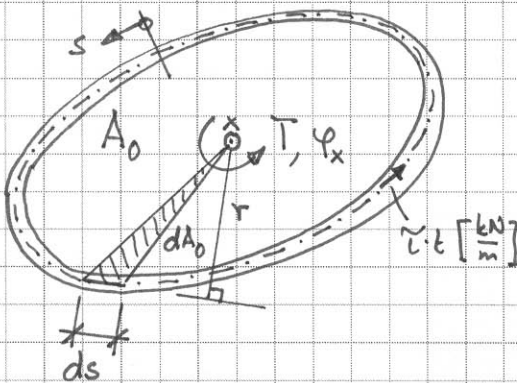
Die Schubspannungen  $\tau_{zx}$  im Steg entsprechen einer Stegkraft  $R_S = V_z$ .

Die Resultierende von  $R_F$  und  $R_S$  geht durch den Schubmittelpunkt M im Abstand  $m = R_F h / R_S$  von der Stegebene.

Nur wenn  $V_z$  im Schubmittelpunkt M angreift, ergibt sich verdrehungsfreie Biegung. Umgekehrt ist M Drehpunkt bei biegefreier Verdrehung.

N.B. Verallgemeinerung für andere Querschnittsformen siehe weiterführende Vorlesungen.

• Dünnwandiger Hohlquerschnitt:



Näherung nach Bredt:

$\tau$  in Richtung der Wandmittellinie wirkend, über Wanddicke  $t$  gleichmäßig verteilt, keine  $\sigma_x$  infolge T

→ Schubfluss  $\tau \cdot t = S = \text{konstant}$

$$T = \oint r \cdot S ds = S \cdot \oint r ds = 2S \oint dA_0 = \underline{\underline{2A_0 \cdot S}}$$

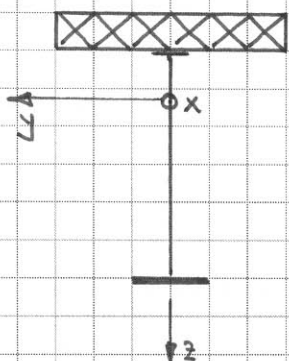
Verschiebung  $v = r \cdot \varphi_x$  infolge T in s-Richtung, Verschiebung  $u$  in x-Richtung

→ Schiebung  $\gamma_{xs} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial s} + r \cdot \frac{d\varphi_x}{dx} = \tau_{sx} = \frac{T}{2A_0 G t}$

$$\oint \gamma_{xs} ds = \oint \frac{\partial u}{\partial s} ds + \oint r \frac{d\varphi_x}{dx} ds = 2A_0 \cdot \frac{d\varphi_x}{dx}$$

$$\frac{T}{4A_0^2 G} \cdot \oint \frac{ds}{t} = \frac{d\varphi_x}{dx} \rightarrow \frac{d\varphi_x}{dx} = \frac{T}{G K}, \quad K = \frac{4A_0^2 G}{\oint \frac{ds}{t}}$$

- Inhomogene, elastische Stabquerschnitte unter Biegung und Achsialkraft:



Elastizitätsmodul  $E(y, z) = E_0 \cdot n(y, z)$

$E_0$  = Bezugswert für E-Modul

$n$  = Wertigkeit

Weiterhin gilt  $\epsilon_x = \epsilon_0 + \chi_y \cdot z - \chi_z \cdot y$

und  $\sigma_x = E \cdot \epsilon_x$

sowie  $N = \int_A \sigma_x dA, M_y = \int_A \sigma_x z dA, M_z = - \int_A \sigma_x y dA$

Somit:  $N = E_0 \cdot \left[ \epsilon_0 \int_A n dA + \chi_y \int_A n z dA - \chi_z \int_A n y dA \right]$

$M_y = E_0 \cdot \left[ \epsilon_0 \int_A n z dA + \chi_y \int_A n z^2 dA - \chi_z \int_A n y z dA \right]$

$M_z = E_0 \cdot \left[ -\epsilon_0 \int_A n y dA - \chi_y \int_A n y z dA + \chi_z \int_A n y^2 dA \right]$

Hauptachsen:  $\int_A y n dA = \int_A z n dA = \int_A y z n dA = 0$

$\Rightarrow N = E_0 A_i \epsilon_0, M_y = E_0 I_{y_i} \chi_y, M_z = E I_{z_i} \chi_z$

$A_i = \int_A n dA, I_{y_i} = \int_A z^2 n dA, I_{z_i} = \int_A y^2 n dA$

- Temperaturverformungen:

Temperaturverteilung  $T(y, z)$  ... bezogen auf einen bestimmten Grundwert, z.B. Umgebungstemperatur oder Ausgangswert der Temperatur

Temperaturausdehnungskoeffizient  $\alpha_T(y, z)$

Unbehinderte Faserdehnung  $\epsilon_{xT} = \alpha_T \cdot T$

Dehnung der Faser im Querschnitt:  $\epsilon_x = \epsilon_0 + \chi_y z - \chi_z y$

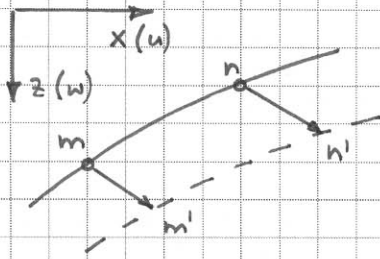
Eigenspannung in der Faser  $\underline{\underline{\sigma_{xr} = E (\epsilon_x - \epsilon_{xT}) = E_0 \cdot n \cdot (\epsilon_0 + \chi_y z - \chi_z y - \alpha_T \cdot T)}}$

wobei

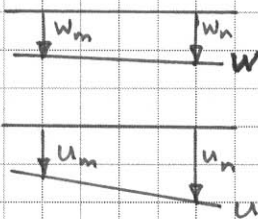
$\int_A \sigma_{xr} dA = \int_A \sigma_{xr} z dA = \int_A \sigma_{xr} y dA = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\epsilon_0 = \frac{\int_A \alpha_T T n dA}{A_i}, \chi_y = \frac{\int_A \alpha_T T z n dA}{I_{y_i}}, \chi_z = \frac{- \int_A \alpha_T T y n dA}{I_{z_i}}}}$

Falls  $\epsilon_0, \chi_y$  und  $\chi_z$  behindert sind, ergeben sich entsprechende Zwängungen.

- Bemerkung: Siehe Skript S. 42 - 49, hier Beschränkung auf Ergänzungen und Hervorhebungen



Biegelinien = Verbindungslinien der senkrecht zu einer Bezugsgeraden aufgetragenen Verschiebungs Komponenten der Stabachse in einer bestimmten Richtung.



Berechnungsmöglichkeiten:

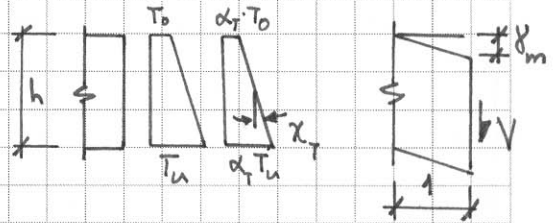
- Integration der Balkendifferentialgleichung
- Anwendung der Mohrschen Analogie
- Punktweise Ermittlung mit Arbeitsgleichung.

- Balkendifferentialgleichung:

$$\left. \begin{aligned} M'' + q &= 0 \\ M &= -EI \cdot w'' \end{aligned} \right\} \rightarrow -(EI w'')'' + q = 0 \rightarrow w^{IV} = \frac{q}{EI}$$

(EI = konstant)

Verallgemeinerung mit  $\chi_y = -w'' = \frac{M}{EI} + \alpha_T \cdot \frac{T_u - T_o}{h} - \left( \frac{V}{GA^*} \right)'$



$$\Rightarrow \underline{\underline{-(EI w'')'' - \left\{ EI \left[ \alpha_T \cdot \frac{T_u - T_o}{h} - \left( \frac{V}{GA^*} \right)' \right] \right\}'' + q = 0}}$$

Inhomogene Differentialgleichung vierter Ordnung mit variablen Koeffizienten, i.d. n.w. numerisch behandelbar.

- Mohrsche Analogie: siehe Einführung vom 24.10.02, S.6
- Arbeitsgleichung: siehe Vorlesung vom 23.1.03



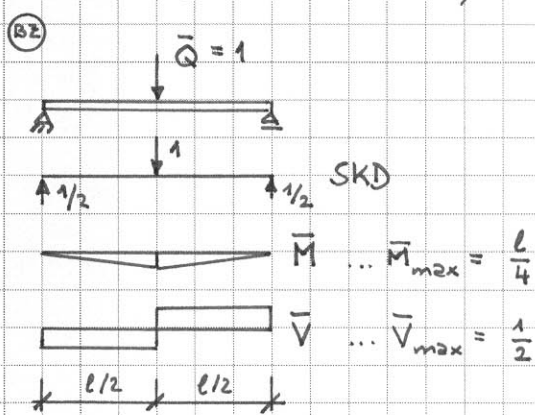
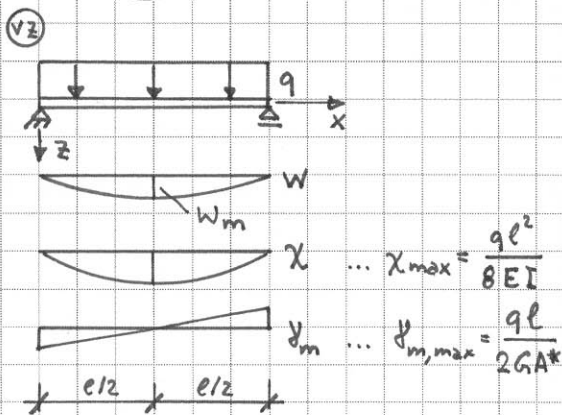
Gemäss dem Prinzip der virtuellen Arbeiten ist eine Kräftegruppe dann und nur dann im Gleichgewicht, wenn die virtuelle Gesamtarbeit für jeden zulässigen virtuellen Bewegungszustand verschwindet:

$$\delta A = \sum \underline{F} \cdot \delta \underline{u} = 0$$



Die Arbeitsgleichung geht von einem virtuellen Gleichgewichtszustand bzw. Belastungszustand (BZ) und einem realen Bewegungszustand bzw. Verschiebungszustand (VZ) aus.

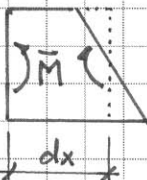
Erläuterung am Beispiel eines einfachen Balkens unter gleichmässig verteilter Belastung  $q$  mit konstanter Biege- und Schubsteifigkeit ( $EI = \text{konstant}$ ,  $GA^* = \text{konstant}$ ):



Die Kraft  $\bar{Q} = 1$  des BZ leistet an der Verschiebung  $w_m$  des VZ eine positive Arbeit von  $1 \cdot w_m$ .

Die Biegemomente  $\bar{M}$  und die Querkräfte  $\bar{V}$  entsprechen inneren Kräften des BZ die an den Krümmungen  $\chi = M/(EI)$  bzw. den mittleren Schiebungen  $y_m = V/(GA^*)$  des VZ negative Arbeit leisten:

$$d\varphi = \chi dx$$



$$dA_{\bar{M}} = -\bar{M} \cdot \chi dx$$



$$dA_{\bar{V}} = -\bar{V} \cdot y_m dx$$

Somit:

$$1 \cdot w_m - \int_0^l \bar{M} \cdot \frac{M}{EI} dx - \int_0^l \bar{V} \cdot \frac{V}{GA^*} dx = 0$$

$$\Rightarrow 1 \cdot w_m = \int_0^l \bar{M} \cdot \frac{M}{EI} dx + \int_0^l \bar{V} \cdot \frac{V}{GA^*} dx$$

Zur Berechnung der Integrale stehen Integrationsstabellen zur Verfügung.

Im Beispiel: 
$$\int_0^l \bar{M} \cdot \frac{M}{EI} dx = \frac{l}{4} \cdot \frac{ql^2}{8EI} \cdot l \cdot \frac{5}{12} = \frac{5ql^4}{384EI} = w_{mM}$$

$$\int_0^l \bar{V} \cdot \frac{V}{GA^*} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{ql}{2GA^*} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{ql^2}{8GA^*} = w_{mV}$$

Das Verhältnis  $w_{mV}/w_{mM}$  ist üblicherweise klein (Ausnahme: dünnstegige I-Profile oder Sandwichkonstruktionen mit weichem Kern), und deshalb werden die Verformungsanteile infolge Querkraft oft vernachlässigt:

$$\frac{w_{mV}}{w_{mM}} = \frac{ql^2 \cdot 384EI}{8GA^* \cdot 5ql^4} = \frac{19,2(1+\nu)I}{A^* \cdot l^2} = 1,92 \cdot (1+\nu) \cdot \left(\frac{h}{l}\right)^2$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$I = \frac{bh^3}{12}, A^* = \frac{5}{6}bh \text{ (Rechteckquerschnitt)}$$

z.B.  $\nu = 0,3, l/h = 10 : w_{mV}/w_{mM} \approx 2,5\%$ .

Verallgemeinerung der Beziehung unten auf S.1 mit Einbezug der Verformungsanteile infolge Normalkräften, Torsionsmomenten und Temperatureinwirkung bringt die Arbeitsgleichung:

$$1 \cdot S + \sum_i \bar{R}_i r_i = \int \bar{N} \cdot \frac{N}{EA} dx + \int \bar{M} \cdot \frac{M}{EI} dx + \int \bar{V} \cdot \frac{V}{GA^*} dx + \int \bar{T} \cdot \frac{T}{GK} dx + \int \bar{N} \cdot \alpha_T \cdot \Delta T dx + \int \bar{M} \cdot \alpha_T \cdot \frac{T_u - T_0}{h} dx$$

$S$  = Gesuchte Verschiebung (Verdrehung) an der Stelle und in der Richtung von  $\bar{Q} = 1$  ( $\bar{M} = 1$ ).

$\bar{R}_i$  = Reaktionen des BZ

$r_i$  = Verschiebungskomponente des VZ an der Stelle und in der Richtung von  $\bar{R}_i$

$\bar{N}, \bar{M}, \bar{V}, \bar{T}$  = Schnittgrößen des BZ

$N, M, V, T$  = Schnittgrößen des VZ

Der BZ sollte so gewählt werden, dass keine bzw. keine unbekanntes  $r_i$  auftreten.

Beispiele : siehe Skript



Betrachtet man einen VZ mit einer einzigen Kraft  $Q_k=1$  an der Stelle  $k$  so gilt nach der Arbeitsgleichung für die Verschiebung  $\delta_{ik}$  an der Stelle  $i$  und in der Richtung von  $Q_i$  infolge  $Q_k$ :

$$\delta_{ik} = \int M_i \frac{M_k}{EI} dx + \dots$$

Vertauscht man die Rolle von VZ und BZ, d.h. sucht man die Verschiebung  $\delta_{ki}$  an der Stelle  $k$  und in der Richtung von  $Q_k$  infolge  $Q_i$ , so gilt

$$\delta_{ki} = \int M_k \frac{M_i}{EI} dx + \dots$$

Offensichtlich ist

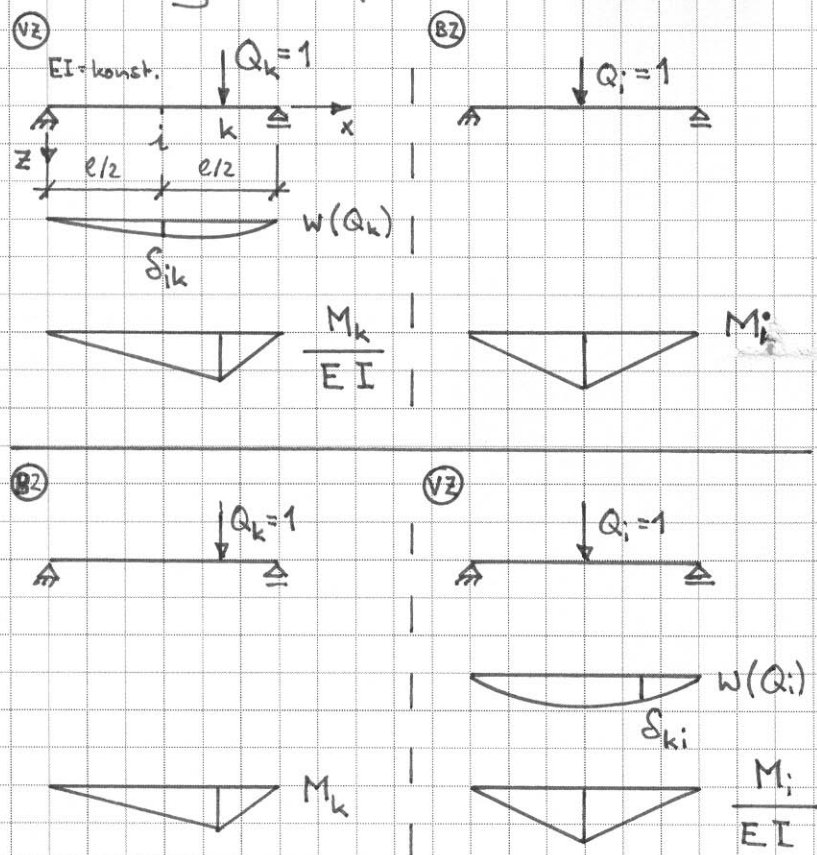
$$\delta_{ik} = \delta_{ki}$$

Diese Beziehung geht auf J. C. Maxwell (1831-1879) zurück.

Nach dem Satz von Maxwell zeigt die Biegelinie  $\delta_{ki}$  eines an der Stelle  $i$  mit der Kraft  $Q_i=1$  belasteten Balkens den Einfluss der an den Stellen  $k$  angebrachten Kräfte  $Q_k$  auf die Verschiebung  $\delta_i$ :

$$\delta_i = \sum_k Q_k \delta_{ki}$$

Erläuterung am Beispiel eines einfachen Balkens,  $i$  = Balkenmitte,  $k$  = beliebig:



Gemäss Skript S. 43, Gl. (11.13) gilt für  $0 \leq x \leq l/2$

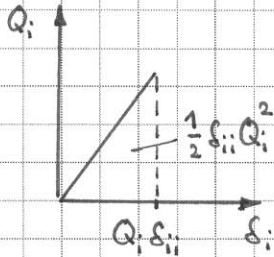
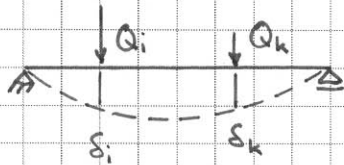
$$\delta_{ki} = \frac{3l^2x - 4x^3}{48EI}$$

Für eine gleichmässig auf dem Balken verteilte Streckenlast  $q$  ergibt sich somit beispielsweise

$$\begin{aligned} \delta_i &= 2 \cdot \int_0^{l/2} \frac{(3l^2x - 4x^3) q dx}{48EI} \\ &= \frac{2q}{48EI} \left( \frac{3l^2}{2} \cdot \frac{l^2}{4} - \frac{4}{4} \cdot \frac{l^4}{16} \right) \\ &= \frac{59ql^4}{384EI} \end{aligned}$$

Fazit: Einflusslinie für Durchbiegung an einem Punkt  $i$  = Biegelinie infolge  $Q_i = 1$ .

N. B.: Analog zur Methode Land: Einflusslinie für Moment an einem Punkt  $i$  = Biegelinie infolge  $q_i = -1$ , etc.



Linear elastischer Balken:

Belastung zuerst nur durch  $Q_i \rightarrow W_i = \frac{\delta_{ii}}{2} Q_i^2$

Anschließend Belastung durch  $Q_k$  bei festgehaltenem  $Q_i \rightarrow W_{ik} = Q_i \cdot \delta_{ik} Q_k$

$$W_k = \frac{\delta_{kk}}{2} Q_k^2$$

Insgesamt:  $W = \frac{\delta_{ii}}{2} Q_i^2 + \underbrace{\delta_{ik} Q_k Q_i}_{\text{"Ergänzungsarbeit"}} + \frac{\delta_{kk}}{2} Q_k^2$

Wird zuerst  $Q_k$  und dann  $Q_i$  aufgebracht, so erhält man

$$W = \frac{\delta_{kk}}{2} Q_k^2 + \delta_{ki} Q_i Q_k + \frac{\delta_{ii}}{2} Q_i^2$$

Da beide Ausdrücke für  $W$  gleich sein müssen, erhält man wieder  $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ . Die Gleichheit der Ergänzungsarbeiten  $\delta_{ik} Q_k Q_i = \delta_{ki} Q_i Q_k$  wird auch Satz von Betti (1823-1892) genannt (Verallgemeinerung von Maxwells Reziprozitätstheorem).

Leitet man den homogen-quadratischen Ausdruck für  $W$  nach  $Q_i$  ab, so folgt

$$\frac{\partial W}{\partial Q_i} = \delta_{ii} Q_i + \delta_{ik} Q_k = \delta_i$$

bzw.

$$\frac{\partial W}{\partial Q_k} = \delta_{ki} Q_i + \delta_{kk} Q_k = \delta_k$$

Die Beziehung  $\delta_i = \partial W / \partial Q_i$ , derzufolge die partielle Ableitung der Formänderungsarbeit nach einer Kraft gleich der Verschiebung des Kraftangriffspunktes in Richtung dieser Kraft ist, wird der erste Satz von Castigliano genannt (1847-1884)

Wird umgekehrt die Formänderungsarbeit  $W$  als Funktion der Verschiebungen angesehen ausgedrückt und einzig  $\delta_i$  um  $\Delta \delta_i$  verändert, so gilt

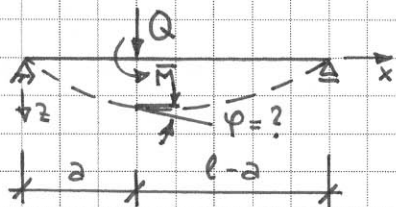
$$\Delta W = Q_i \Delta \delta_i = \frac{\partial W}{\partial \delta_i} \Delta \delta_i$$

und somit  $Q_i = \partial W / \partial \delta_i$ , der zweite Satz von Castigliano.

Die Sätze von Castigliano können für nichtlinear elastisches Verhalten verallgemeinert werden, siehe Skript.

In der Plastizitätstheorie entsprechen den beiden Sätzen von Castigliano das Fließgesetz  $\dot{\epsilon}_{ij} = \partial Y / \partial \sigma_{ij}$  bzw. die Beziehung  $\sigma_{ij} = \partial D / \partial \dot{\epsilon}_{ij}$ , wobei  $Y$  = Fließfunktion und  $D$  = Dissipationsfunktion.

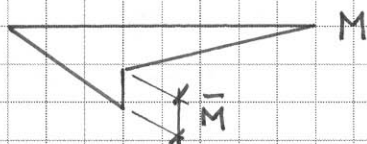
- Der erste Satz von Castigliano eignet sich zur Bestimmung von Verschiebungen (Verdrehungen), meist führt aber die Arbeitsgleichung zu einfacheren Ausdrücken.



Führe  $\bar{M}$  an der Stelle und in der Richtung der gesuchten Verdrehung  $\varphi$  ein

$$M = Q \left(1 - \frac{a}{l}\right)x + \bar{M} \cdot \frac{x}{l} \quad \dots 0 \leq x < a$$

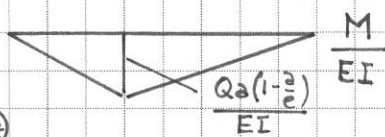
$$M = Qa \left(1 - \frac{x}{l}\right) - \bar{M} \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad \dots a < x \leq l$$



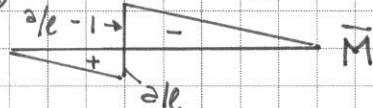
$$W = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \lim_{\bar{M} \rightarrow 0} \frac{\partial W}{\partial \bar{M}} = \lim_{\bar{M} \rightarrow 0} \frac{1}{EI} \cdot \left[ \int_0^a \left( Q \left(1 - \frac{a}{l}\right)x + \bar{M} \frac{x}{l} \right) \frac{x}{l} dx \right. \\ &\quad \left. - \int_a^l \left( Qa \left(1 - \frac{x}{l}\right) - \bar{M} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \right) \left(1 - \frac{x}{l}\right) dx \right] \\ &= \frac{1}{EI} \cdot \left[ \int_0^a Q \left(1 - \frac{a}{l}\right) \cdot \frac{x^2}{l} dx - \int_a^l Qa \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 dx \right] \\ &= \frac{Qa(l-a)(2a-l)}{3EI} \end{aligned}$$

(V2)

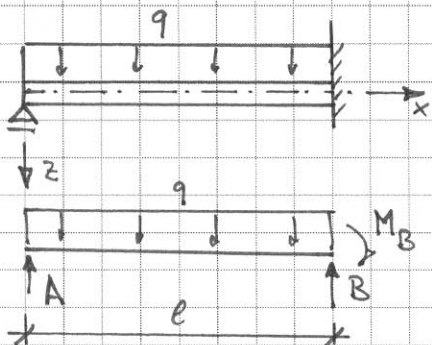


(B2)



$$\begin{aligned} 1. \varphi &= \frac{a}{l} \cdot \frac{Qa \left(1 - \frac{a}{l}\right)}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot a + \left(\frac{a}{l} - 1\right) \cdot \frac{Qa \left(1 - \frac{a}{l}\right)}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot (l-a) \\ &= \frac{Qa(l-a)}{3EI} \cdot \left[ \frac{a^2}{l^2} - \left(1 - \frac{a}{l}\right)^2 \right] = \frac{Qa(l-a)(2a-l)}{3EI} \end{aligned}$$

- Der erste Satz von Castigliano eignet sich auch zur Berechnung statisch unbestimmter Systeme:



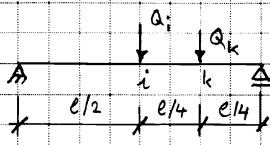
$$M = Ax - \frac{qx^2}{2}$$

$$W = \frac{1}{2EI} \int_0^l \left( Ax - \frac{qx^2}{2} \right)^2 dx$$

$$\frac{\partial W}{\partial A} = \frac{1}{EI} \int_0^l \left( Ax - \frac{qx^2}{2} \right) x dx = \frac{1}{EI} \cdot \left( A \frac{l^3}{3} - \frac{ql^4}{8} \right) = 0$$

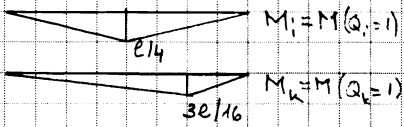
$$\Rightarrow A = \frac{3}{8} ql ; B = \frac{5}{8} ql, M_B = \frac{ql^2}{8}$$





$\delta_{ik}$  = Verschiebung an der Stelle und in der Richtung von  $Q_i$  infolge  $Q_k=1$ :

$$\delta_{ii} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{e}{4}\right)^2 \cdot \frac{e}{EI} = \frac{e^3}{48EI} = 16 \cdot \frac{e^3}{768EI}$$



$$\delta_{ik} = \delta_{ki} = \frac{1}{3} \cdot \frac{e}{4} \cdot \frac{e}{8} \cdot \frac{e}{2EI} + \frac{1}{6} \left[ \frac{e}{4} \left( 2 \cdot \frac{e}{8} + \frac{3e}{16} \right) + \frac{e}{8} \left( \frac{e}{8} + 2 \cdot \frac{3e}{16} \right) \right] \frac{e}{4EI}$$

$$+ \frac{1}{3} \cdot \frac{e}{8} \cdot \frac{3e}{16} \cdot \frac{e}{4EI} = 11 \cdot \frac{e^3}{768EI}$$

$$\delta_{kk} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3e}{16}\right)^2 \cdot \frac{e}{EI} = \frac{3e^3}{256EI} = 9 \cdot \frac{e^3}{768EI}$$

Wird zuerst  $Q_i$  angebracht, entstehen die Verschiebungen  $\delta_{ii} Q_i$  und  $\delta_{ki} Q_i$ . Die Kraft  $Q_i$  leistet an ihrem eigenen Verschiebungsweg die Arbeit  $Q_i \delta_{ii} Q_i / 2$ .

Wird anschliessend bei festgehaltenem  $Q_i$  die Kraft  $Q_k$  angebracht, entstehen die Zusatzverschiebungen  $\delta_{ik} Q_k$  und  $\delta_{kk} Q_k$ . Die Kraft  $Q_i$  leistet dabei die Arbeit  $Q_i \delta_{ik} Q_k$ , und die Kraft  $Q_k$  leistet an ihrem eigenen Verschiebungsweg  $Q_k \delta_{kk} Q_k / 2$ .

Umkehrung des Vorgehens (zuerst  $Q_k$ , dann  $Q_i$  anbringen) muss das gleiche totale Arbeit entsprechen, d.h.

$$Q_i \delta_{ii} Q_i / 2 + Q_i \delta_{ik} Q_k + Q_k \delta_{kk} Q_k / 2 = Q_k \delta_{kk} Q_k / 2 + Q_k \delta_{ki} Q_i + Q_i \delta_{ii} Q_i / 2 \quad (1)$$

Woraus folgt

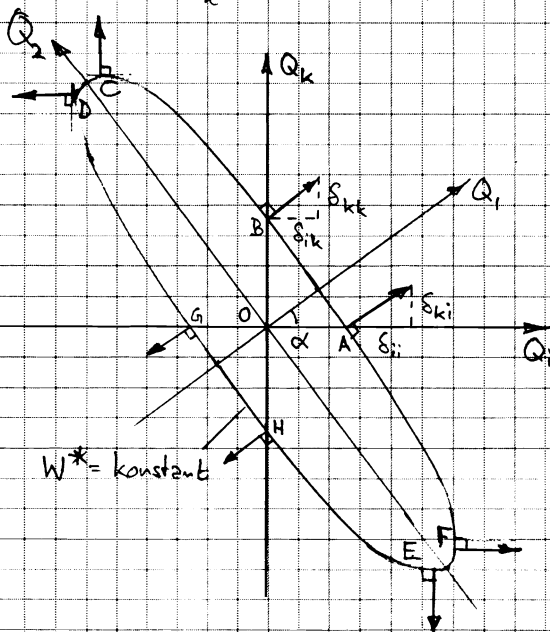
$$Q_i \delta_{ik} Q_k = Q_k \delta_{ki} Q_i \quad (2)$$

Eine Kraft  $Q_i$  leistet an der Verschiebung  $\delta_{ik} Q_k$  infolge einer zweiten Kraft  $Q_k$  dieselbe Arbeit wie  $Q_k$  an der Verschiebung  $\delta_{ki} Q_i$  infolge  $Q_i$  (Satz von Betti).

Für das oben angegebene Beispiel kann der quadratische Ausdruck (1) wie folgt geschrieben werden:

$$W^* = \frac{e^3}{1536EI} (16 Q_i^2 + 2 \cdot 11 Q_i Q_k + 9 Q_k^2) \geq 0 \quad (3)$$

In der  $Q_i$ - $Q_k$ -Ebene entspricht  $W^* = \text{konstant}$  einer Ellipse:



$$W^* = \frac{e^3}{1536EI} (c_1 Q_1^2 + c_2 Q_2^2) \quad (4)$$

$$c_{1,2} = \frac{16+9}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{16-9}{2}\right)^2 + 11^2} = \{24, 043\} \quad (5)$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \cdot 11}{16-9} \rightarrow \alpha = 36,175^\circ \quad (6)$$

Die Ableitung von  $W^*$  nach  $Q_i$  entspricht der Verschiebung  $\delta_i$  (1. Satz von Castigliano):

$$\frac{\partial W^*}{\partial Q_i} = \delta_{ii} Q_i + \delta_{ik} Q_k = \delta_i \quad (7)$$

Den Punkten F und D bzw. C und E entsprechen reine  $\delta_i$  bzw.  $\delta_k$  ( $Q_k/Q_i = -11/9$  bzw.  $-16/11$ ).

Die Gradienten von  $W^*$  in A und B haben Komponenten mit Verhältnissen  $\delta_k / \delta_i$  bzw.  $\delta_{kk} / \delta_{ik}$ .

Statt nacheinander die Kräfte  $Q_i$  und  $Q_k$  (bzw.  $Q_k$  und  $Q_i$ ) aufzubringen, können dem System nacheinander die Verformungen  $\delta_i$  und  $\delta_k$  (bzw.  $\delta_k$  und  $\delta_i$ ) aufgezwungen werden.

Aufzwingen von  $\delta_i$  erfordert Kräfte  $Q_{ii}$ ,  $S_i$  und  $Q_{ki}$ ,  $S_k$ . Dabei wird die Arbeit  $\delta_i Q_{ii} \delta_i / 2$  geleistet.

Wird anschliessend bei festgehaltenem  $\delta_i$  die Verschiebung  $\delta_k$  aufgezwungen, so sind dazu Kräfte  $Q_{kk}$ ,  $S_k$  sowie  $Q_{ki}$ ,  $S_k$  erforderlich. Dabei wird die Arbeit  $\delta_k Q_{kk} \delta_k / 2 + \delta_k Q_{ki} \delta_i + \delta_i Q_{ki} \delta_k / 2$  geleistet.

Insgesamt ergibt sich, wenn das Vorgehen anschliessend umgekehrt wird

$$\delta_i Q_{ii} \delta_i / 2 + \delta_k Q_{ki} \delta_i + \delta_k Q_{kk} \delta_k / 2 = \delta_k Q_{kk} \delta_k / 2 + \delta_i Q_{ki} \delta_k + \delta_i Q_{ii} \delta_i / 2 \quad (8)$$

Woraus die zu (2) analoge Beziehung

$$\delta_k Q_{ki} \delta_i = \delta_i Q_{ik} \delta_k \quad (9)$$

folgt. Die Festhaltekräfte  $Q_{ki}$ ,  $S_i$  an der Stelle und in der Richtung von  $\delta_k$  infolge  $\delta_i$  leisten an der Verschiebung  $\delta_k$  dieselbe Arbeit wie die Festhaltekräfte  $Q_{ik}$ ,  $S_k$  an der Stelle und in der Richtung von  $\delta_i$  infolge  $\delta_k$  an der Verschiebung  $\delta_i$ .

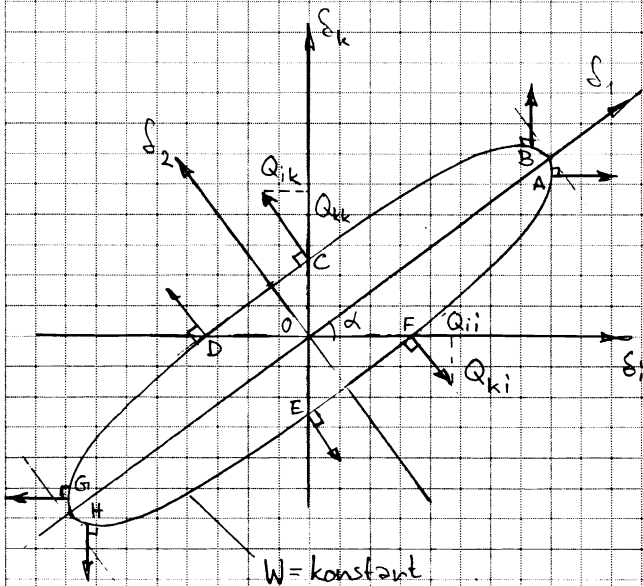
Für  $Q_{ik}$  = Kraft an der Stelle und in der Richtung von  $\delta_i$  infolge  $\delta_k = 1$  erhält man im Beispiel:

$$Q_{ii} = \frac{768EI}{e^3} \cdot \frac{9}{23}, \quad Q_{ik} = Q_{ki} = -\frac{768EI}{e^3} \cdot \frac{11}{23}, \quad Q_{kk} = \frac{768EI}{e^3} \cdot \frac{16}{23} \quad (10)$$

Für den quadratischen Ausdruck (8) gilt

$$W = \frac{384EI}{23e^3} (9 \delta_i^2 - 2 \cdot 11 \delta_i \delta_k + 16 \delta_k^2) \geq 0 \quad (11)$$

In der  $\delta_i$ - $\delta_k$ -Ebene entspricht W einer Ellipse:



$$W = \frac{384EI}{23e^3} (c_1^2 \delta_1^2 + c_2^2 \delta_2^2) \quad (12)$$

$$c_{1,2} = \frac{9+16}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{9-16}{2}\right)^2 + 11^2} = \begin{cases} 20,857 \\ 24,043 \end{cases} \quad (13)$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{-2 \cdot 11}{9-16} \rightarrow \alpha = 36,125^\circ \quad (14)$$

Die Ableitung von W nach  $\delta_i$  entspricht der Kraft  $Q_i$  (2. Satz von Castigliano):

$$\frac{\partial W}{\partial \delta_i} = Q_{ii} \delta_i + Q_{ik} \delta_k = Q_i \quad (15)$$

Die Punkte A bis H entsprechen jenen der Ellipse  $W^* = \text{konstant}$ .

Offensichtlich gilt

$$\begin{bmatrix} Q_{ii} & Q_{ik} \\ Q_{ki} & Q_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{ki} & \delta_{kk} \\ \delta_{ki} & \delta_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

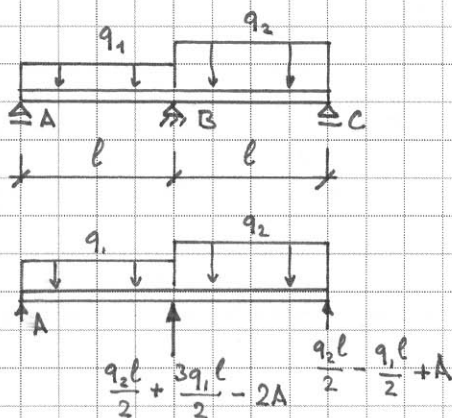
$[Q_{ik}]$  und  $[\delta_{ik}]$  sind quadratisch, symmetrisch, regulär (Det  $\neq 0$ ) und positiv definit ( $W > 0$  bzw.  $W^* > 0$  für nicht verschwindende  $\delta$  bzw.  $Q$ ).

d.h. die Matrizen  $[Q_{ik}]$  und  $[\delta_{ik}]$  sind invers.



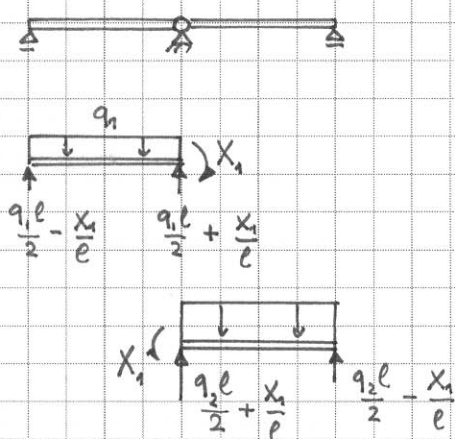
Beispiel: Durchlaufträger über zwei gleich lange Felder (Spannweiten  $l$ ) mit konstanter Biegesteifigkeit ( $EI$ ) und konstantem Biegevermögen ( $\pm M_u$ ) unter feldweise konstanter Streckenlast ( $q_1$  bzw.  $q_2$ ).

Behandlung nach Elastizitätstheorie (Kraftmethode bzw. Deformationsmethode) und nach Plastizitätstheorie (statische bzw. kinematische Methode)



Das System ist einfach statisch unbestimmt. Durch Entfernen des Anlagers A (oder C) erhält man einen statisch bestimmten einfachen Balken mit einseitigem Kragarm. Die vertikale Auflagerreaktion bei A (oder C) bliebe dabei unbestimmt, sie könnte nicht aufgrund der Gleichgewichtsbedingungen allein bestimmt werden.

GS:



Statt durch Entfernen eines Anlagers kann das System auch durch Einführen eines Biegegetrenks über dem mittleren Auflager B in ein statisch bestimmtes Grundsystem (GS) verwandelt werden. Statisch unbestimmt bleibt dann das Biegemoment  $X_1$  an der Stelle der gelösten Bindung. Allgemein werden derartige Größen  $X_1$  als überzählige Größen (ÜG) bezeichnet.

Die Bestimmung der ÜG erfolgt nach der Kraftmethode aufgrund einer Verträglichkeitsbedingung:

$$\delta_{10} + X_1 \delta_{11} = 0$$

$\delta_{10}$  = Verdrehung an der Stelle und in der Richtung von  $X_1$  infolge äußerer Lasten am GS

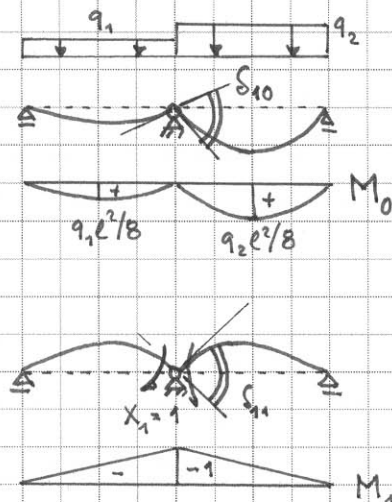
$\delta_{11}$  = Verdrehung an der Stelle und in der Richtung von  $X_1$  infolge  $X_1 = 1$  am GS

Bestimmung von  $\delta_{10}$  und  $\delta_{11}$  mit Arbeitsgleichung:

$$\delta_{10} = -1 \cdot \frac{q_1 l^2}{8EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot l - 1 \cdot \frac{q_2 l^2}{8EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot l = \frac{-(q_1 + q_2) l^3}{24EI}$$

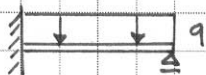
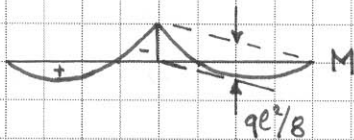
$$\delta_{11} = -1 \cdot \frac{-1}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot l \cdot 2 = \frac{2l}{3EI}$$

$$\Rightarrow X_1 = \frac{-\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{(q_1 + q_2) \cdot l^2}{16}$$

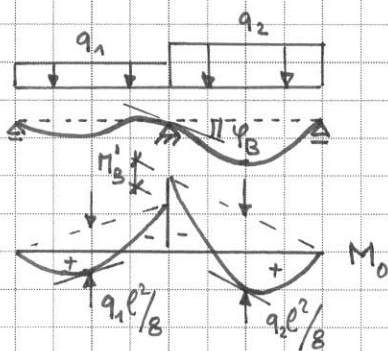
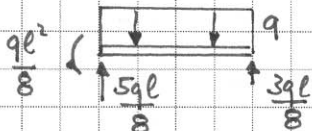




$$q_1 = q_2 = q \rightarrow X_1 = ql^2/8$$

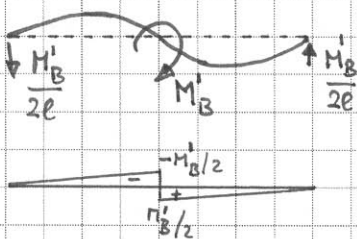


Für einen einseitig eingespannten, am anderen Ende einfach gelagerten Balken unter gleichmässig verteilter Belastung erhält man dieselbe Lösung



Die ungleiche Belastung verursacht bei B eine Verdrehung  $\varphi_B$ .

Blockiert man den Knoten B, so ergibt sich bei B ein Momentensprung vom Betrag  $(q_2 - q_1)l^2/8$ .

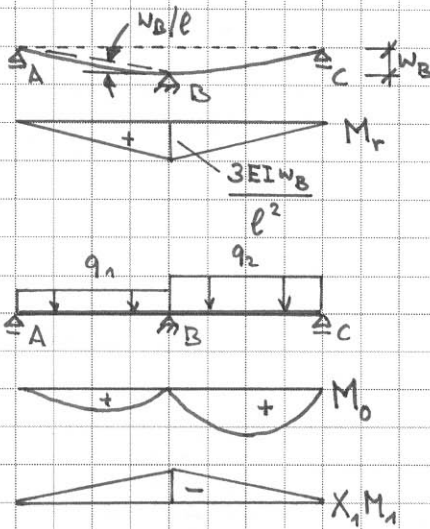


Um die Gleichgewichtsverletzung bei B zu eliminieren wird in einem zweiten Schritt ein Moment  $M_B'$  angebracht, das gemäss der Berechnung für  $S_{11}$  einer Verdrehung  $\varphi_B = \frac{M_B'}{2} \cdot \frac{l}{3EI}$  entspricht.

Die unbekannt Verdrehung  $\varphi_B$  ergibt sich also nach der Deformationsmethode aufgrund der Gleichgewichtsbedingung

$$M_B = -q_1 \frac{l^2}{8} - \varphi_B \cdot \frac{3EI}{l} = -q_2 \frac{l^2}{8} + \varphi_B \cdot \frac{3EI}{l}$$

$$\Rightarrow \varphi_B = \frac{(q_2 - q_1)l^3}{48EI}, \quad -M_B = (q_1 + q_2) \frac{l^2}{16}$$



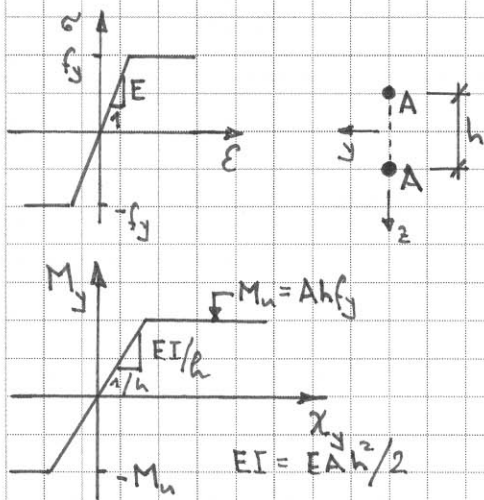
In statisch unbestimmten Systemen wirken im unbelasteten Zustand im allgemeinen gewisse Zwangsschnittgrößen.

Beispielsweise verursacht eine relative Setzung  $w_B$  des Auflagers B ein Moment  $M_r$  mit dem Größtwert

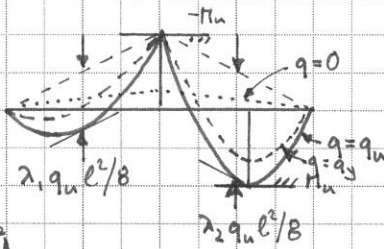
$$M_r = \frac{3EI}{l} \cdot \frac{w_B}{l}$$

Die Zwangsschnittgrößen sind mit den Schnittgrößen des Lastspannungszustandes zu superponieren:

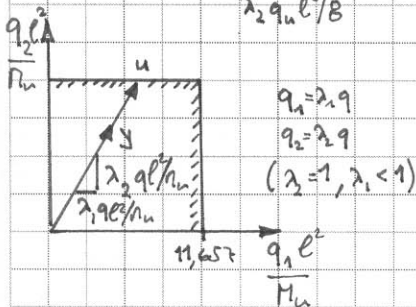
$$M = \underbrace{M_r}_{\text{Zwangsmoment}} + \underbrace{M_0 + X_1 M_1}_{\text{Lastspannungszustand}}$$



Setzt man ein linear elastisch-ideal plastisches Verhalten des Werkstoffs gemäss nebenstehen: dem Spannungs-Dehnungsdiagramm voraus und betrachtet man einen reinen Stringer = Querschnitt (Stegfläche  $A_w \rightarrow 0$ , Stringer mit Querschnittsflächen A im Abstand h), so ergibt sich auch ein linear elastisch-ideal plastisches Momenten-Krümmungsdiagramm.

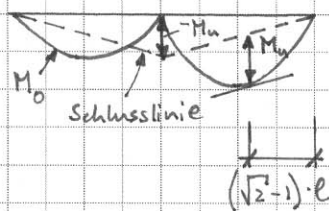


Steigert man  $q_1$  und  $q_2$  von Null ausgehend proportional zueinander, so wird je nach  $M_r$  bei einer bestimmten Belastung entweder bei B oder im Feld BC das plastische Moment  $-M_u$  bzw.  $M_u$  erreicht. Anschliessend kann die Belastung noch weiter gesteigert werden, bis das plastische Moment an einer zweiten Stelle auftritt, d.h. sich ein zweites plastisches Gelenk bildet.



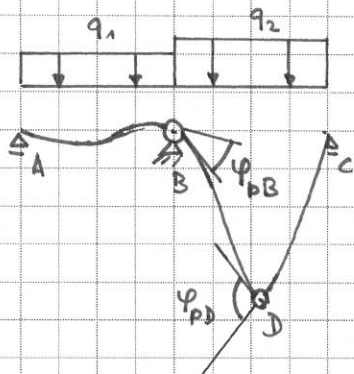
Die Flieslast  $q_y$  wird von  $M_r$  beeinflusst, hingegen die Traglast  $q_u$  nicht.

Nach der statischen Methode der Plastizitätstheorie reduziert sich die Aufgabe der Bestimmung der Traglast im vorliegenden Fall auf das Einpassen der Schlusslinie des  $M_0$ -Diagramms, d.h. dass  $M_u$  nirgends überschritten wird.



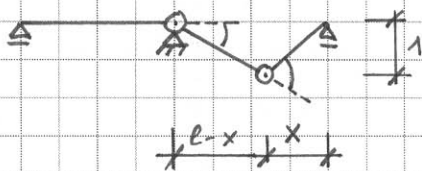
$$\Rightarrow \lambda_2 \cdot q_u = \frac{2 M_u}{(\sqrt{2}-1)^2 \cdot l^2} = 11,657 \cdot \frac{M_u}{l^2}$$





Mit dem Auftreten des ersten plastischen Gelenks (bei B) wird das System statisch bestimmt. Das zweite plastische Gelenk (bei D) macht es zum Mechanismus.

Nach dem Auftreten des zweiten plastischen Gelenks bleibt die Belastung konstant. Die (elastischen) Trägersegmente AB, BD und DC verformen sich nicht weiter, sie bleiben elastisch verkrümmt. Alle Zusatzdeformationen treten in den plastischen Gelenken auf (Rotationen  $\varphi_{PB}$  und  $\varphi_{PD}$ ).



Vernachlässigt man die elastischen gegenüber den plastischen Verformungen, so bleiben die Trägersegmente beim Mechanismus gerade. Mit einer Einsenkung vom Betrag 1 bei D gilt:

- $x = 0,35l \rightarrow q_2 = 11,868 M_u/l^2$
- $x = 0,4l \rightarrow q_2 = 11,667 M_u/l^2$
- $x = 0,45l \rightarrow q_2 = 11,717 M_u/l^2$
- $x = 0,5l \rightarrow q_2 = 12,000 M_u/l^2$

$$\varphi_{PB} = \frac{1}{l-x}, \quad \varphi_{PD} = \frac{1}{l-x} + \frac{1}{x}$$

Nach dem Prinzip der virtuellen Arbeiten gilt

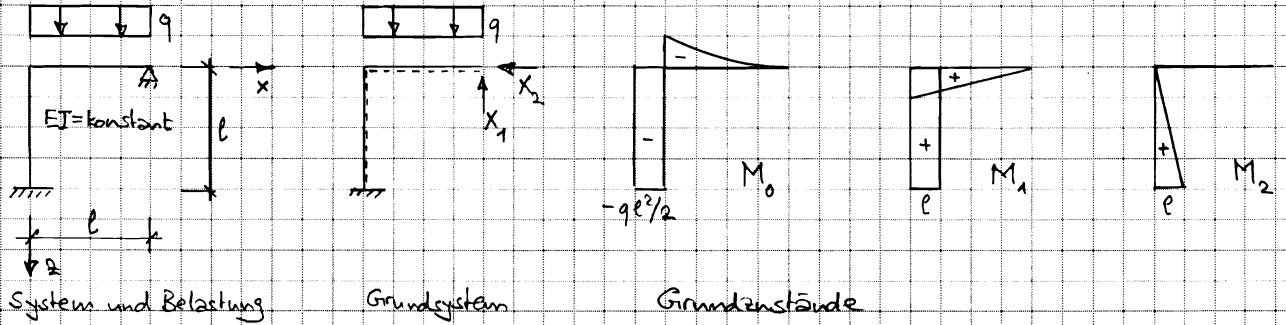
$$q_2 \cdot l \cdot \frac{1}{2} - M_u \cdot \left( \frac{2}{l-x} + \frac{1}{x} \right) = 0$$

Variation von x bringt den Minimalwert  $q_2 \cdot l^2 / M_u = 11,657$  an der Stelle  $x = 0,414 l$ .

Wie man sieht, ergibt sich in der Umgebung des optimalen Werts x ein flacher Funktionsverlauf. Bereits eine grobe Schätzung von x liefert eine gute Näherung für die Traglast.

- N.B. :- Die statische Methode liefert untere Grenzwerte für die Traglast  $q_u$ .
- " kinematische " " obere " " " " "
  - Im allgemeinen sind die plastischen Widerstände  $M_u$  variabel, und es sind mehrere Lastfälle zu betrachten. An dem hier gezeigten Vorgehen ändert sich grundsätzlich nichts.

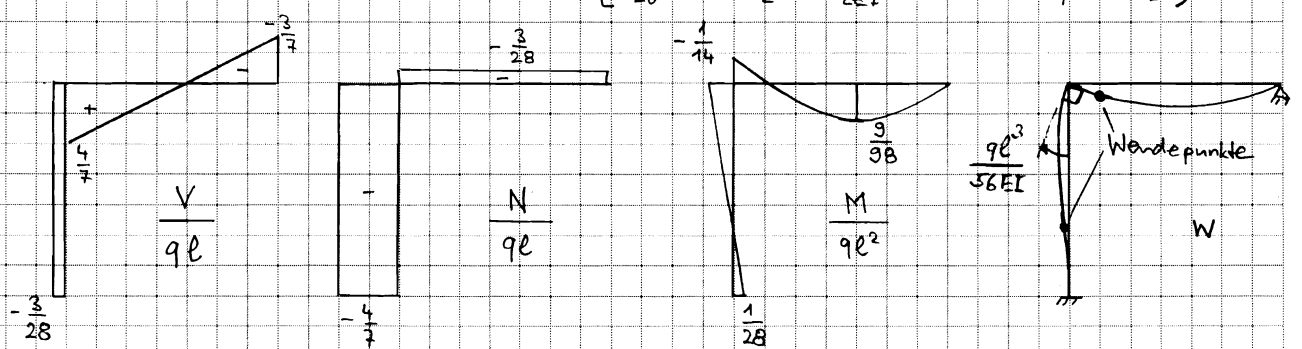
Elastisches Verhalten - Behandlung mit Kraftmethode



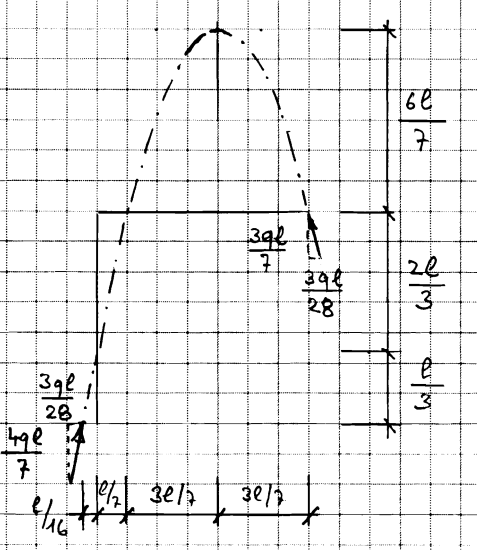
$$\begin{cases} \delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 = 0 \\ \delta_2 = \delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} q l \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 39ql/7 \\ X_2 = 39ql/28 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta_{10} = (1 + \frac{1}{4}) \cdot l \cdot \frac{-ql^2}{2EI} \cdot l = -\frac{5}{8} \cdot \frac{ql^4}{EI} \\ \delta_{11} = (1 + \frac{1}{2}) \cdot l \cdot \frac{l}{EI} \cdot l = \frac{4}{3} \cdot \frac{l^3}{EI} \\ \delta_{12} = \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{l}{EI} \cdot l = \frac{1}{2} \cdot \frac{l^3}{EI} \\ \delta_{22} = \frac{1}{3} \cdot l \cdot \frac{l}{EI} \cdot l = \frac{1}{3} \cdot \frac{l^3}{EI} \\ \delta_{20} = \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{-ql^2}{2EI} \cdot l = -\frac{1}{4} \cdot \frac{ql^4}{EI} \end{cases}$$



Zustandslinien



Stützelinie

N.B. Beim Querkraftnullpunkt ergibt sich das maximale Moment  $39ql^2/98$ , und die parabolische Stützelinie hat dort ihren Scheitelpunkt.

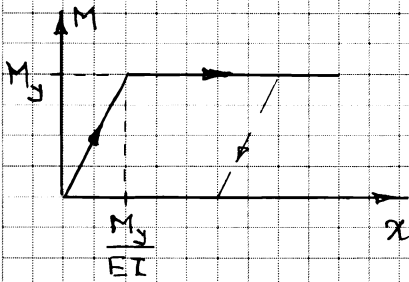
Die Exzentrizität der Stützelinie von der Stabachse ist gleich dem Biegemoment  $M$  geteilt durch die Normalkraft  $N$ :

$$\begin{aligned} x=0 &\rightarrow M = -ql^2/14 \rightarrow e = 2l/3 \\ x=l/7 &\rightarrow M = 0 \rightarrow e = 0 \\ x=3l/7 &\rightarrow M = 39ql^2/98 \rightarrow e = -6l/7 \\ x=l &\rightarrow M = 0 \rightarrow e = 0 \end{aligned}$$

( $N = -39ql/28$ )



Elastisch-plastisches Verhalten

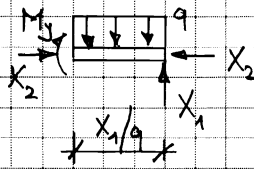


Annahme eines linear elastisch-ideal plastischen Momenten-Krümmungsverhaltens.

Wenn das maximale Moment  $9qe^2/98 = M_y$  wird, beginnt das System sich plastisch zu verformen (Fließbeginn). Die entsprechende Belastung

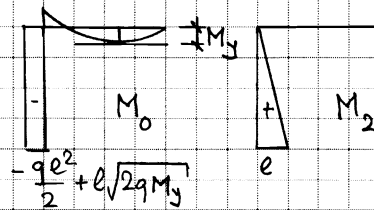
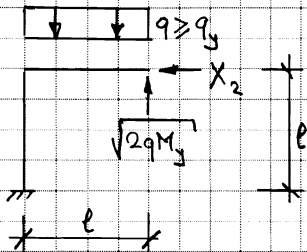
$$q_y = \frac{98 M_y}{9 e^2} = 10,889 M_y/e^2$$

ist die Fließlast des Systems.



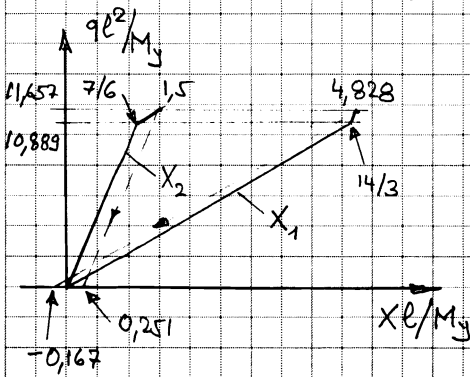
Da  $M_y$  nicht überschritten werden kann, ist  $X_1$  in Abhängigkeit von  $q$  bekannt, d.h. der Grad der statischen Unbestimmtheit wird um eins reduziert:

$$M_y = \frac{X_1^2}{2q} \Rightarrow X_1 = \sqrt{2qM_y}$$



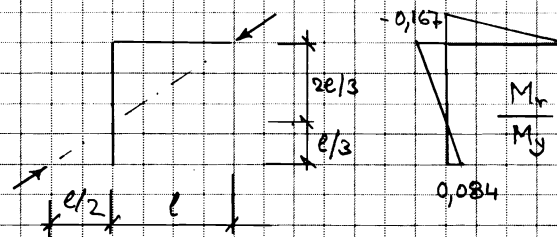
$$X_2 = \frac{-\delta_{20}}{\delta_{22}} = \frac{\left(\frac{qe^2}{2} - l\sqrt{2qM_y}\right) \cdot \frac{e^2}{2EI}}{e^3/(3EI)} = \frac{3ql}{4} \left(1 - \sqrt{\frac{8M_y}{9e^2}}\right)$$

Wenn das Eckmoment gleich  $-M_y$  wird, ist die Traglast  $q_u$  erreicht:

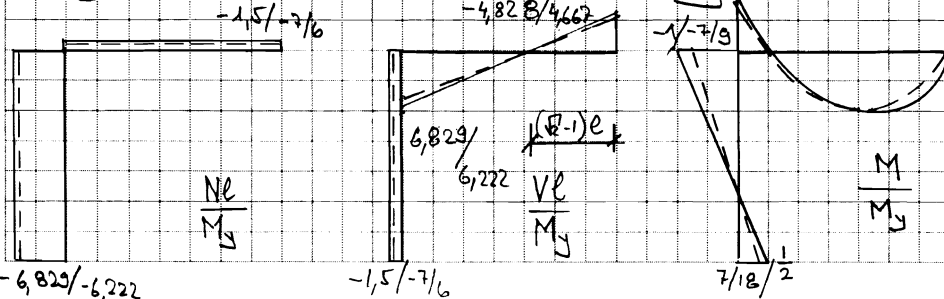


$$q_u = \frac{(6+4\sqrt{2})M_y}{e^2} = 11,657 M_y/e^2$$

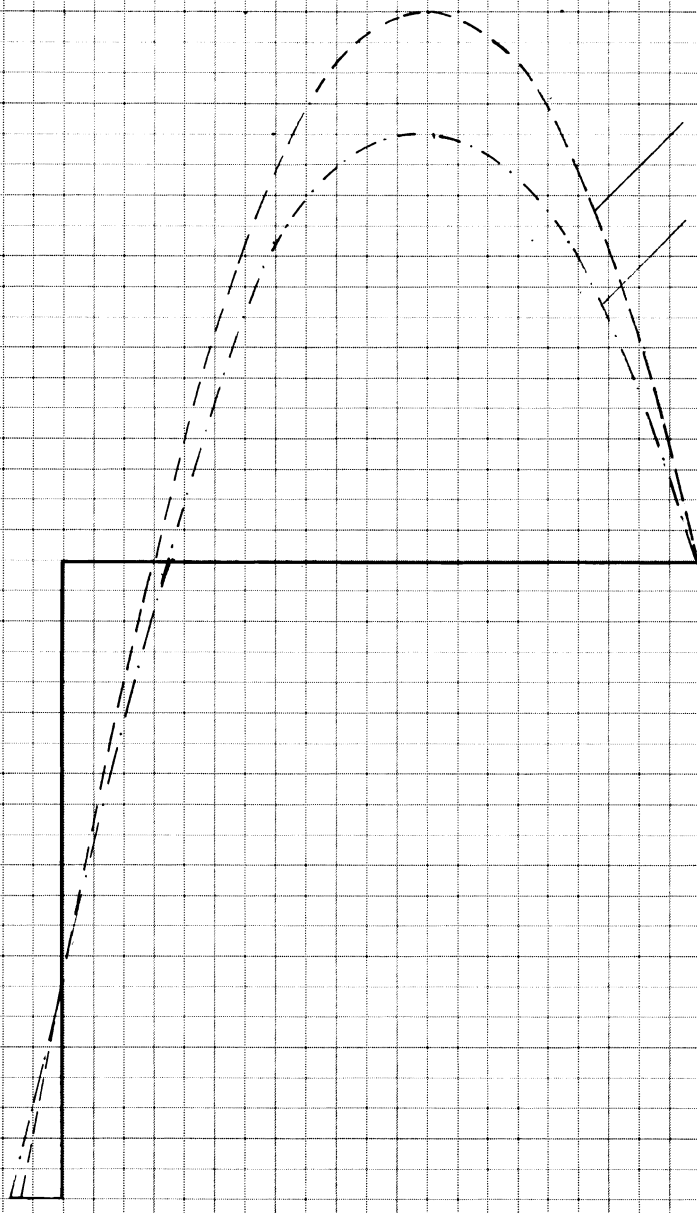
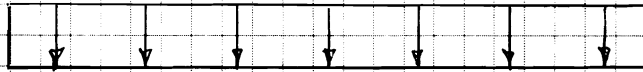
Wird das System nach Erreichen der Traglast vollständig entlastet, verbleibt ein Eigenspannungszustand, der durch  $X_{2T} = -1,5 X_{21} = 0,251 M_y/e^2$  charakterisiert ist:



Vergleich der Zustandslinien beim Fließbeginn und beim Erreichen der Traglast:



Der Querkraftnullpunkt wandert vom  $x = 0,571 e$  beim Fließbeginn nach  $x = 0,586 e$  beim Erreichen der Traglast.



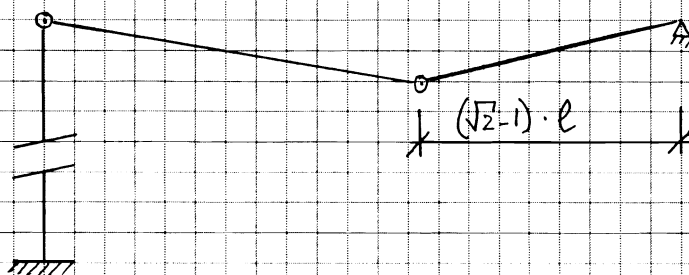
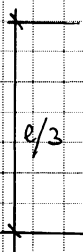
Fließbeginn  $q_y e^2 = 10,889 M_y$

Traglast  $q_u e^2 = 11,657 M_y$

Druckkräfte im Riegel:

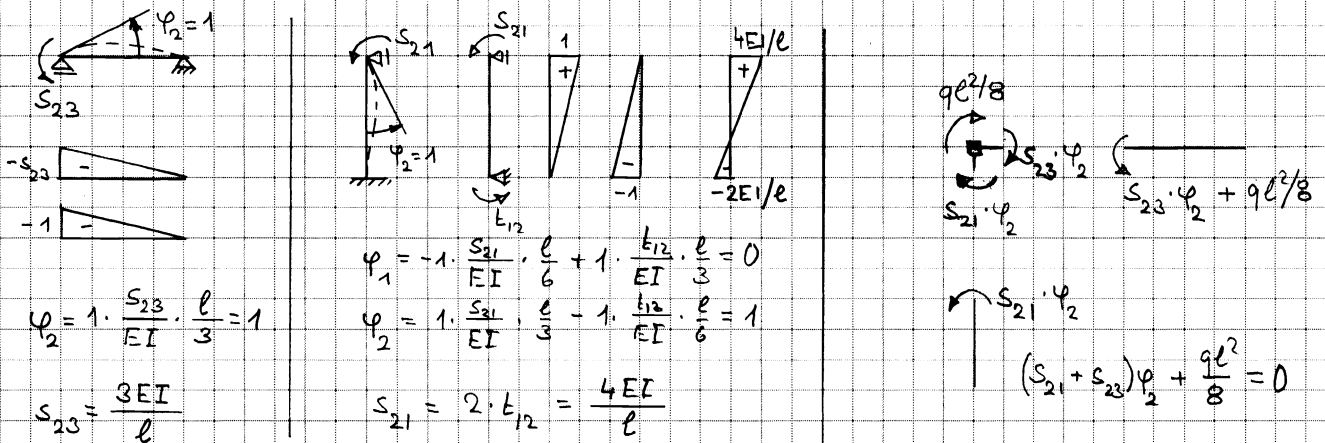
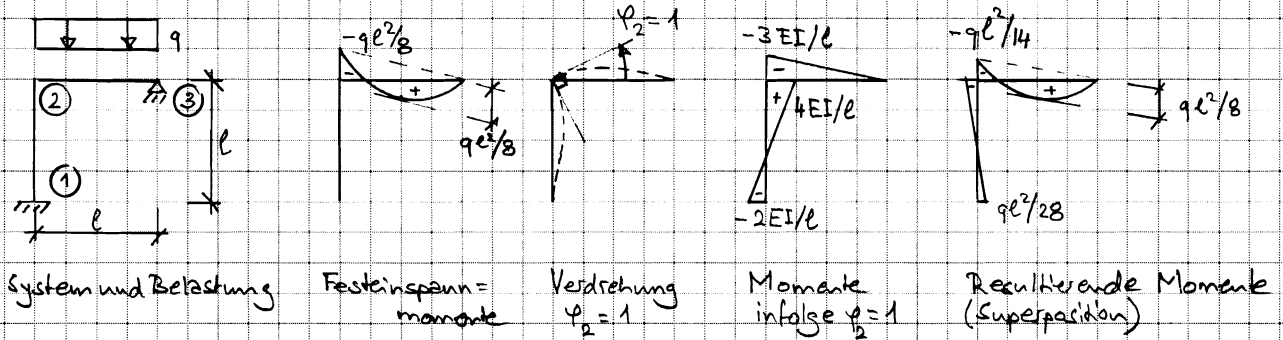
Fließbeginn  $N = -7 M_y / (6e)$

Traglast  $N = -9 M_y / (6e)$



Bruchmechanismus

Elastisches Verhalten — Behandlung mit Verformungsmethode



Bestimmung des Stabendmomente infolge  $\varphi_2 = 1$

Gleichgewicht am Knoten 2

In einem ersten Schritt wird der Knoten 2 blockiert. Die Blockierung erfordert am Knoten ein Festeinspannmoment vom Betrag  $ql^2/8$ .

In einem zweiten Schritt wird dem System die Verdrehung  $\varphi = 1$  aufgezwingen. Dies erfordert Stabendmomente  $s_{23} = 3EI/l$  und  $s_{21} = 4EI/l$  sowie ein Festhaltenmoment  $t_{12} = 2EI/l$  bei der Einspannung 1.

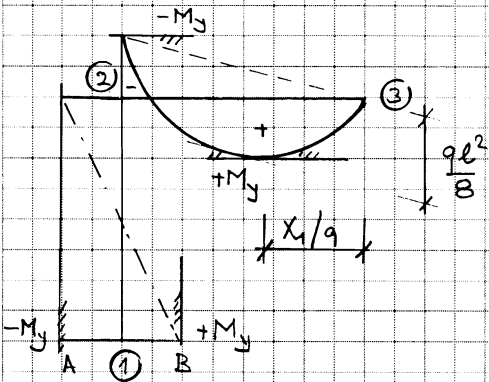
Schließlich wird die Gleichgewichtsbedingung für die am Knoten 2 angreifenden Momente formuliert:

$$(s_{21} + s_{23})\varphi_2 + \frac{ql^2}{8} = 0 \Rightarrow \varphi_2 = \frac{-\frac{ql^2}{8}}{\frac{4EI}{l} + \frac{3EI}{l}} = \frac{-ql^3}{56EI}$$

Die resultierenden Momente ergeben sich aus der Superposition der Festeinspannmomente und der Momente infolge  $\varphi_2$ :

$$M_2 = -\frac{ql^2}{8} - \frac{ql^3}{56EI} \cdot \left(\frac{-3EI}{l}\right) = -\frac{ql^2}{56EI} \cdot \frac{4EI}{l} = -\frac{ql^2}{14}$$

Statische Methode



Die überzählige Größe  $X_1$  wird so gewählt, dass bei 2 und im Feld 2-3 gerade  $M_y$  erreicht ist:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{ql^2}{2} + X_1 \cdot l &= -M_y \\ X_1 \cdot \frac{X_1}{q} \cdot \frac{1}{2} &= M_y \end{aligned} \right\} X_1 = ql(\sqrt{2}-1)$$

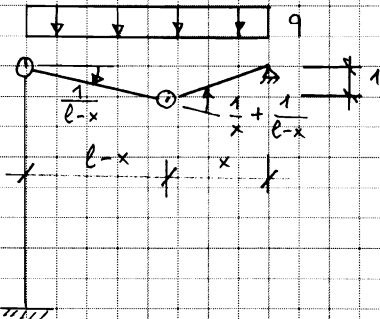
Die überzählige Größe  $X_2$  bleibt innerhalb der für  $M_1$  gesetzten Grenzen A und B unbestimmt:

$$\left. \begin{aligned} A: M_1 &= -M_y \rightarrow X_2 = 0 \\ B: M_1 &= M_y \rightarrow X_2 = 2M_y/l \end{aligned} \right\} 0 \leq X_2 \leq \frac{2M_y}{l}$$

Die Traglast ergibt sich zu

$$q_u = \frac{2M_y}{(3-2\sqrt{2})l^2} = 11,657 M_y/l^2$$

Kinematische Methode



Einführen je eines plastischen Gelenks bei 2 und im Feld 2-3 und Formulieren des Prinzips der virtuellen Arbeiten:

$$\begin{aligned} W &= \text{Arbeit der äusseren Kräfte} = q \cdot l \cdot \frac{\delta}{2} \\ D &= \text{Dissipationsarbeit} = M_y \left( \frac{1}{l-x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{l-x} \right) \\ W=D: \frac{ql}{2} &= M_y \left( \frac{1}{x} + \frac{2}{l-x} \right) = M_y \cdot \frac{l+x}{x(l-x)} \end{aligned}$$

$$\text{mit } \xi = x/l \rightarrow q = \frac{2M_y}{l^2} \cdot \frac{1+\xi}{\xi(1-\xi)}$$

$$\frac{dq}{d\xi} = \frac{2M_y}{l^2} \cdot \frac{\xi(1-\xi) - (1+\xi)(1-2\xi)}{\xi^2(1-\xi)^2}$$

$$\frac{dq}{d\xi} = 0 \rightarrow \xi_{opt} = \sqrt{2}-1$$

$$\begin{aligned} q_{opt} = q_u &= \frac{M_y}{l^2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-4} \\ &= 11,657 M_y/l^2 \end{aligned}$$

$\xi$	$qe^2/M_y$
0,25	13,333
0,3	12,381
0,35	11,868
0,4	11,667
$\sqrt{2}-1$	11,657
0,45	11,717
0,5	12,000

Optimum (Minimum)