

**BAUSTATIK II – KOLLOQUIUM 9, Lösung**

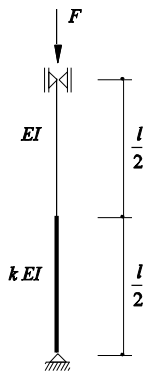
(101-0114)

Thema: Stabilität; Berechnungen 2. Ordnung  
 (Methode von Vianello; Energiemethode)

**Aufgabe 1**

Gegeben: Statisches System; Länge  $l$   
 Biegesteifigkeit:  $EI$ ,  $k \cdot EI$  ( $k \geq 1$ )  
 ( $EI$  unabhängig von  $M$ )  
 Einwirkung:  $F$

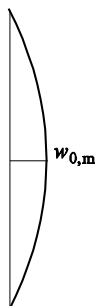
Gesucht: a) Knickkraft  $F_{cr}$  mit der Methode von Vianello  
 b) Kontrolle des Resultats mit der Energiemethode



**a) Knickkraft  $F_{cr}$  mit der Methode von Vianello**

1. Ansatz:  $w_0 = w_{0,m} \cdot \left( -\frac{4}{l^2} \cdot x^2 + \frac{4}{l} \cdot x \right)$  (= quadratische Parabel)

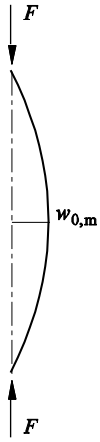
$w_0$ :



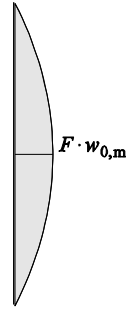
Berechnung der maximalen Verformung  $w_{1,m}$  in Stützenmitte mit der Arbeitsgleichung:

**VZ:**

$F, w_0$ :

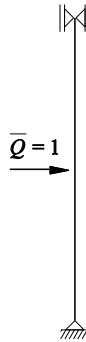


$M(F, w_0)$ :

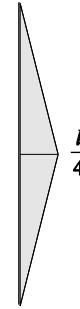


**BZ:**

$\bar{Q} = 1$



$\bar{M}(\bar{Q} = 1)$ :



$$w_{1,m} = \int \bar{M} \cdot \frac{M(F, w_0)}{EI} \cdot dx = \frac{5}{12} \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{F \cdot w_{0,m}}{EI} \cdot \frac{l}{2} + \frac{5}{12} \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{F \cdot w_{0,m}}{k \cdot EI} \cdot \frac{l}{2}$$

$$= \frac{5 \cdot F \cdot w_{0,m} \cdot l^2}{96 \cdot EI} \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

Für $F = F_{cr(1)}$ : $w_{1,m} = w_{0,m}$
---

$$\frac{5 \cdot F_{cr(1)} \cdot w_{0,m} \cdot l^2}{96 \cdot EI} \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right) = w_{0,m}$$

$$\rightarrow F_{cr(1)} = \frac{96}{5} \cdot \frac{EI}{l^2} \cdot \frac{k}{k+1} = 19.2 \cdot \frac{EI}{l^2} \cdot \frac{k}{k+1}$$

Vergleich von  $F_{cr(1)}$  für  $k = 1$  mit exakter Lösung ( $F_E =$  Eulersche Knickkraft):

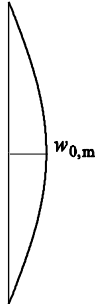
$$F_{cr(1)} = 9.6 \cdot \frac{EI}{l^2} = 0.973 \cdot \frac{\pi^2 \cdot EI}{l^2}$$

$$F_E = \frac{\pi^2 \cdot EI}{l^2}$$

$$\rightarrow \frac{F_{cr(1)} - F_E}{F_E} = -2.7\%$$

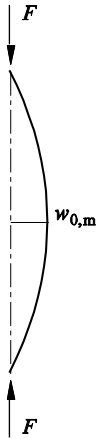
2. Ansatz:  $w_0 = w_{0,m} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right)$  (= exakte Knickfigur für  $k=1$ )

$w_0$ :

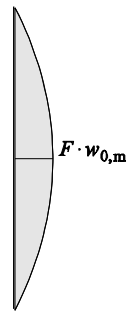


**VZ:**

$F, w_0$ :



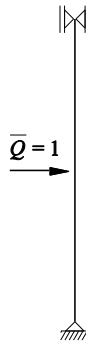
$M(F, w_0)$ :



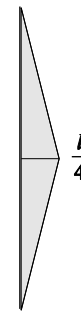
$$M = F \cdot w_{0,m} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right)$$

**BZ:**

$\bar{Q} = 1$



$\bar{M}(\bar{Q} = 1)$ :



$$\bar{M} = \frac{x}{2} \quad (0 \leq x \leq l/2)$$

Da die Momente infolge  $F$  und  $\bar{Q}$  auf beiden Stabhälften symmetrisch verlaufen, gilt:

$$\begin{aligned} w_{1,m} &= \int \bar{M} \cdot \frac{M(F, w_0)}{EI} \cdot dx = \int_0^{l/2} \frac{x}{2} \cdot \frac{F \cdot w_{0,m} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right)}{k \cdot EI} \cdot dx + \int_0^{l/2} \frac{x}{2} \cdot \frac{F \cdot w_{0,m} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right)}{EI} \cdot dx \\ &= \frac{F \cdot w_{0,m}}{2 \cdot k \cdot EI} \left[ \frac{\sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right)}{\left(\frac{\pi}{l}\right)^2} - \frac{x \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right)}{\frac{\pi}{l}} \right]_0^{l/2} + \frac{F \cdot w_{0,m}}{2 \cdot EI} \left[ \frac{\sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right)}{\left(\frac{\pi}{l}\right)^2} - \frac{x \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right)}{\frac{\pi}{l}} \right]_0^{l/2} \\ &= \frac{F \cdot w_{0,m} \cdot l^2}{2 \cdot EI \cdot \pi^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Für } F = F_{cr(2)} : w_{1,m} = w_{0,m}}$$

$$\frac{F_{cr(2)} \cdot w_{0,m} \cdot l^2}{2 \cdot EI \cdot \pi^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right) = w_{0,m}$$

$$\rightarrow F_{cr(2)} = \frac{2 \cdot \pi^2 \cdot EI}{l^2} \cdot \frac{k}{k+1} = 19.74 \cdot \frac{EI}{l^2} \cdot \frac{k}{k+1}$$

Vergleich von  $F_{cr(2)}$  für  $k=1$  mit exakter Lösung ( $F_E =$  Eulersche Knickkraft):

$$F_{cr(2)} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{l^2}$$

$$F_E = \frac{\pi^2 \cdot EI}{l^2}$$

$$\rightarrow F_{cr(2)}(\text{Vianello}) = F_E$$

Die angenommene Ansatz für die Verformung ist für  $k=1$  wirklich affin zur Knickfigur.

Die Näherung für  $k \gg 1$  muss schlechter sein, da die Knickfigur immer weniger affin zu einer quadratischen Parabel resp. einem sinus-förmigen Verlauf wird:



Für  $k = \infty$ :

$$F_{cr(1)}(\text{Vianello}) = 19.2 \cdot \frac{EI}{l^2} \cdot \frac{k}{k+1} = 19.2 \cdot \frac{EI}{l^2}$$

$$F_{cr(2)}(\text{Vianello}) = 19.74 \cdot \frac{EI}{l^2} \cdot \frac{k}{k+1} = 19.74 \cdot \frac{EI}{l^2}$$

$$F_{cr}(\text{exakt}) = 16.4 \cdot \frac{EI}{l^2} \quad (\text{Computerberechnung})$$

$$\rightarrow \frac{F_{cr(1)} - F_{cr}(\text{exakt})}{F_{cr}(\text{exakt})} = 17.1\%$$

$$\rightarrow \frac{F_{cr(2)} - F_{cr}(\text{exakt})}{F_{cr}(\text{exakt})} = 20.4\%$$

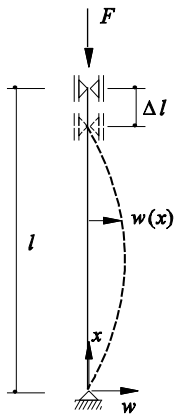
Der Fehler bei  $k = \infty$  ist also bedeutend grösser, wenn als Ansatz für die Verformung  $w_0$  eine quadratische Parabel oder ein sinusförmiger Verlauf gewählt wird.

Da im Stahlbeton die Grösse von  $EI$  (gerissen/ungerissen) nie genau bekannt ist, lohnt es sich im Allgemeinen nicht, eine „genauere“ Knicklastberechnung durchzuführen.

Falls doch eine genaue Berechnung durchgeführt wird, ist die Methode von Vianello zur Kontrolle hilfreich.

Bei einem beliebigen Verlauf von  $EI$  über die Stützenlänge kann die Knickkraft nur mit numerischen Verfahren ermittelt werden; dies gilt auch bei analytisch schwierig zu erfassenden Rand- und Lagerungsbedingungen.

**b) Kontrolle des Resultats für  $k = 1$  mit der Energiemethode**



**1. Ansatz:  $w(x) = w_0 \cdot f(x) = \text{quadratische Parabel}$**

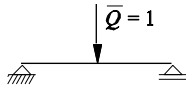
$$w(x) = w_0 \cdot \left( \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right), \quad w'(x) = w_0 \cdot \left( \frac{1}{l} - \frac{2 \cdot x}{l^2} \right), \quad w''(x) = w_0 \cdot \frac{-2}{l^2} = -\frac{2 \cdot w_0}{l^2}$$

$$\int_0^l (w'')^2 \cdot dx = \int_0^l \left( -\frac{2 \cdot w_0}{l^2} \right)^2 \cdot dx = \frac{4 \cdot w_0^2}{l^3}$$

$$\int_0^l (w')^2 \cdot dx = \int_0^l w_0^2 \cdot \left( \frac{1}{l} - \frac{2 \cdot x}{l^2} \right)^2 \cdot dx = \frac{w_0^2}{3 \cdot l}$$

$$\rightarrow F_{cr} = R(w) = \frac{\int_0^l EI \cdot (w'')^2 \cdot dx}{\int_0^l (w')^2 \cdot dx} = \frac{12 \cdot EI}{l^2} = 1.216 \cdot \frac{\pi^2 \cdot EI}{l^2}$$

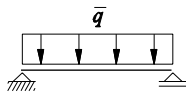
**2. Ansatz:  $w(x) = w_0 \cdot f(x) = \text{Funktion 3. Grades (z.B. Biegelinie infolge } \bar{Q}=1)$**



$$w(x) = w_0 \cdot \left( \frac{3 \cdot x}{l} - \frac{4 \cdot x^3}{l^3} \right) \text{ für } 0 \leq x \leq l/2$$

$$\rightarrow F_{cr} = R(w) = \frac{\int_0^l EI \cdot (w'')^2 \cdot dx}{\int_0^l (w')^2 \cdot dx} = \frac{10 \cdot EI}{l^2} = 1.013 \cdot \frac{\pi^2 \cdot EI}{l^2}$$

**3. Ansatz:  $w(x) = w_0 \cdot f(x) = \text{Funktion 4. Grades (z.B. Biegelinie infolge } \bar{q}=1)$**



$$w(x) = w_0 \cdot \left( \frac{x}{l} - \frac{2 \cdot x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right) \text{ für } 0 \leq x \leq l/2$$

$$\rightarrow F_{cr} = R(w) = \frac{\int_0^l EI \cdot (w'')^2 \cdot dx}{\int_0^l (w')^2 \cdot dx} = \frac{168 \cdot EI}{17 \cdot l^2} = 1.001 \cdot \frac{\pi^2 \cdot EI}{l^2}$$

**4. Ansatz:  $w(x) = w_0 \cdot f(x) = \text{sinusförmiger Verlauf}$**

$$w(x) = w_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right)$$

$$\rightarrow F_{cr} = R(w) = \frac{\int_0^l EI \cdot (w'')^2 \cdot dx}{\int_0^l (w')^2 \cdot dx} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{l^2} = F_{cr,eff} = F_E$$

→ Ein einfacher Ansatz liefert akzeptable Resultate; ein den Randbedingungen angepasster Ansatz verbessert die Genauigkeit enorm.

**Merke:**

$Q_{cr}$  wird mit der Energiemethode **überschätzt**.