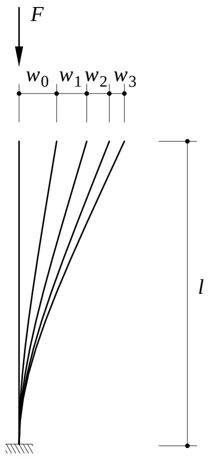
Prof. Dr. Peter Marti
Institut für Baustatik und Konstruktion
D-BAUG, Studiengang Bauingenieurwissenschaften
Frühjahrssemester

BAUSTATIK II – KOLLOQUIUM 9, Merkblatt

(101-0114)

Thema: Stabilität; Berechnungen 2. Ordnung
(Methode von Vianello; Energiemethode)

1. Methode Vianello



w_0 = Ansatz für die Verformung;Vorverformung
w_1 = Verformung infolge (F, w_0) d.h. infolge Moment 1. Ordnung
w_2 = Verformung infolge (F, w_1)
w_3 = Verformung infolge (F, w_2)
:
:
w_n = Verformung infolge (F, w_{n-1})

Falls w_0 und w_1 affin sind, gilt exakt:

$$\boxed{\frac{w_1}{w_0} = \frac{w_2}{w_1} = \frac{w_3}{w_2} = ... = \frac{w_n}{w_{n-1}} = ... = \frac{F}{F_{cr}} = \alpha}$$

(Falls w_0 und w_1 nicht genau affin sind, gilt die Formel als Näherung.)

Totale Auslenkung:

$$\begin{aligned} w_{tot} &= w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + ... + w_n + ... \\ &= w_0 + \alpha \cdot w_0 + \alpha^2 \cdot w_0 + \alpha^3 \cdot w_0 + ...\alpha^n \cdot w_0 + ... \\ &= w_0 \cdot (1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + ... + \alpha^n + ...) = w_0 \cdot \frac{1}{1-\alpha} \end{aligned}$$

$$\boxed{w_{tot} = w_0 \cdot \frac{1}{1-\alpha} = w_0 \cdot \frac{1}{1 - \frac{F}{F_{cr}}} = \mu \cdot w_0}$$

Vergrösserungsfaktor:

$$\boxed{\mu = \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{1 - \frac{F}{F_{cr}}}}$$

Merke:

Erreicht F den Wert der kritischen Kraft F_{cr}, wird $\alpha = 1$ und der Stab knickt aus: $w_{tot} \to \infty$.

$\boxed{\alpha = 1} \quad \to \quad$ Knickbedingung

$$\frac{w_1}{w_0} = \frac{F}{F_{cr}} = 1 \quad \to \quad \boxed{\begin{aligned} w_1 &= w_0 \\ F &= F_{cr} \end{aligned}}$$

Folgende Berechnungen sind mit der Methode Vianello möglich:

a) Ermittlung der Knickkraft

$$\boxed{w_1 = \frac{F}{F_{cr}} \cdot w_0 \quad \to \quad F_{cr} = \frac{w_0}{w_1} \cdot F}$$

Diese Formel ist exakt, wenn die Vorverformung resp. der Ansatz für die Verformung w_0 affin zur Knickfigur ist.

Bei nicht genau affiner Anfangsverformung kann die Knickkraft F_{cr} approximativ wie folgt bestimmt werden:

1. Annahme einer möglichst affinen Knickfigur $w_0(x)$, welche die Randbedingungen erfüllt (z.B. $w_0(x)$ als Biegelinie infolge einer verteilten Querbelastung $\overline{q}$ nach Theorie 1. Ordnung).
2. Berechnung der Verformung $w_1(x)$ infolge einer **frei gewählten** Druckkraft F am System mit der Verformung $w_0(x)$.
3. Berechnung des Verhältnisses $w_1(x_i) / w_0(x_i) = F / F_{cr}$ an ausgewählten Stellen x_i und daraus Ermittlung eines ersten Wertes von F_{cr}.
4. Wiederholen der Punkte 2. und 3. mit $w_1(x)$ anstelle von $w_0(x)$ (korrigierte Knickfigur). Die Iteration ist so lange zu wiederholen, bis sich F_{cr} praktisch nicht mehr verändert und somit als genügend genau betrachtet werden kann.

Im Allgemeinen kann die Berechnung mit genügender Genauigkeit auf den Verformungsvergleich in einem Schnitt beschränkt werden (z.B. an der Stelle, wo die Verformung maximal ist):

$$\boxed{w_{1max} = w_{0max} \to \ F = F_{cr}}\ .$$

Merke:

Mit der Methode von Vianello wird die exakte Knickkraft F_{cr} entweder **über- oder unterschätzt**.

b) Ermittlung der totalen Verformung w_{tot} bei einer gegebenen Vorverformung w_0 (ohne Querbelastung) und einer gegebenen Kraft $F < F_{cr}$

$$\boxed{w_{tot} = w_0 \cdot \frac{1}{1 - \frac{F}{F_{cr}}} = \mu \cdot w_0}$$

Diese Formel ist exakt, wenn die Vorverformung resp. der Ansatz für die Verformung w_0 affin zur Knickfigur ist. Im anderen Fall eignet sie sich gut für eine Näherungslösung.

Dabei ist F_{cr} nach a) einzusetzen,

oder: $F_{cr} = F_E = \frac{\pi^2 \cdot EI}{l_k^2}$ (trigonometrischer Ansatz für die Knickfigur)

$F_E =$ Eulersche Knickkraft

$l_k =$ Knicklänge des Stabes

c) Ermittlung der Knicklänge l_k bei einer gegebenen Vorverformung w_0 (ohne Querbelastung) und einer gegebenen Kraft $F < F_{cr}$

$$\frac{w_1}{w_0} = \alpha = \frac{F}{F_{cr}} = \frac{F}{F_E} = \frac{F \cdot l_k^2}{\pi^2 \cdot EI} \quad \rightarrow \quad \boxed{l_k = \pi \cdot \sqrt{\frac{\alpha \cdot EI}{F}}}$$

d) Ermittlung der totalen Verformung w_{tot} bei einer Querbelastung q (ohne Vorverformung w_0) und einer gegebenen Kraft $F < F_{cr}$

Moment 1. Ordnung infolge q: $M_1(q)$

Verformung infolge q: $w_1(q)$ (Arbeitsgleichung etc.)

$$\boxed{w_{tot} = w_1 \cdot \frac{1}{1 - \frac{F}{F_{cr}}} = \mu \cdot w_1}$$

$$\boxed{M_{tot} = M_1 + F \cdot w_{tot} = M_1 \cdot \frac{1}{1 - \frac{F}{F_{cr}}} = \mu \cdot M_1}$$

Diese Formel ist exakt, wenn der Verlauf der Querbelastung q eine zur Knickfigur affine Verformungslinie 1. Ordnung ergibt. Im anderen Fall eignet sie sich gut für eine Näherungslösung.

e) Ermittlung der totalen Verformung w_{tot} bei einer Querbelastung q, einer Vorverformung w_0 und einer gegebenen Kraft $F < F_{cr}$

Moment 1. Ordnung infolge q und w_0 : $M_1 = M_1(q) + M_1(w_0)$
Verformung infolge q und w_0 : $w_1 = w_1(q) + w_1(w_0)$ (Arbeitsgleichung etc.)

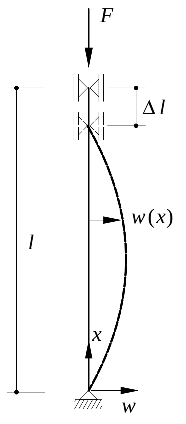
$$\boxed{w_{tot} = w_0 + w_1 \cdot \frac{1}{1-\frac{F}{F_{cr}}} = w_0 + \mu \cdot w_1}$$

Moment 2. Ordnung infolge q und w_0 : $M_2 = F \cdot (w_1(q) + w_1(w_0)) \cdot \frac{1}{1-\frac{F}{F_{cr}}} = F \cdot \mu \cdot w_1$

$$\boxed{M_{tot} = M_1 + M_2 = M_1 + F \cdot (w_1(q) + w_1(w_0)) \cdot \frac{1}{1-\frac{F}{F_{cr}}} = M_1 + F \cdot \mu \cdot w_1}$$

Diese Formel ist exakt, wenn der Verlauf der Querbelastung q eine zur Knickfigur affine Verformungslinie 1. Ordnung ergibt. Im anderen Fall eignet sie sich gut für eine Näherungslösung.

2. Energiemethode



$\boxed{\Phi = U + V \to \min}$ (siehe Skript)

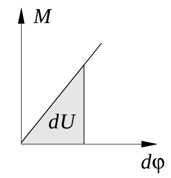
wobei:

$\Phi =$ potentielle Energie
$U =$ elastisches Potential (Formänderungsarbeit)
$V =$ Potential der äusseren Kräfte

<u>Elastisches Potential (Formänderungsarbeit):</u>

$$\boxed{U = \frac{1}{2} \cdot \int_0^l \frac{M^2}{EI} \cdot \mathrm{d}x}$$

U ist positiv, weil das Arbeitsvermögen der zugeordneten inneren Schnittgrössen in Form von gespeicherter Formänderungsenergie anwächst.

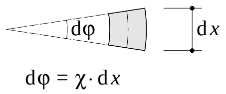


Elementare Formänderungsarbeit:

$$\mathrm{d}U = \frac{1}{2} \cdot M \cdot \mathrm{d}\varphi$$

Formänderungsarbeit:

$$U = \int_0^l \mathrm{d}U = \frac{1}{2} \cdot \int_0^l M \cdot \mathrm{d}\varphi$$



$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \chi = \frac{M}{EI} \qquad \rightarrow \qquad U = \frac{1}{2} \cdot \int_0^l \frac{M^2}{EI} \cdot \mathrm{d}x$$

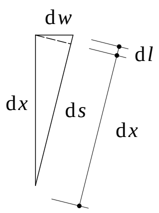
$$\frac{M}{EI} = \chi \approx -w'' \qquad \rightarrow \qquad U = \frac{1}{2} \cdot \int_0^l EI \cdot (w'')^2 \cdot \mathrm{d}x$$

$$\rightarrow \qquad \boxed{U = \frac{1}{2} \cdot \int_0^l \frac{M^2}{EI} \cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \int_0^l EI \cdot (w'')^2 \cdot \mathrm{d}x}$$

<u>Potential der äusseren Kräfte:</u>

$$\boxed{V = -F \cdot \Delta l}$$

V ist negativ, weil die äussere Kraft F auf ihrem Verschiebungsweg potentielle Energie verliert.



$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}w^2} = \mathrm{d}x \cdot \sqrt{1 + (w')^2}$$

$$\mathrm{d}l = \mathrm{d}s - \mathrm{d}x$$

$$\Delta l = \int_0^l \mathrm{d}l = \int_0^l \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} - 1 \right) \cdot \mathrm{d}x = \int_0^l \left(\sqrt{1 + (w')^2} - 1 \right) \cdot \mathrm{d}x$$

Taylor: $\sqrt{1 + (w')^2} \approx 1 + \frac{(w')^2}{2}$

$$\rightarrow \qquad \Delta l = \int_0^l \frac{(w')^2}{2} \cdot \mathrm{d}x$$

$$\rightarrow \qquad \boxed{V = -F \cdot \Delta l = -\frac{F}{2} \cdot \int_0^l (w')^2 \cdot \mathrm{d}x}$$

Es gilt somit:

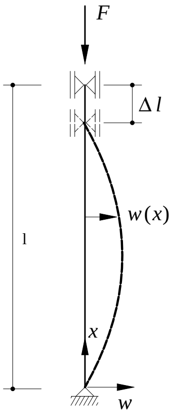
$$\Phi = U + V = \frac{1}{2} \cdot \int_0^l EI \cdot (w'')^2 \cdot \mathrm{d}x - \frac{F}{2} \cdot \int_0^l (w')^2 \cdot \mathrm{d}x \rightarrow \ \min$$

bzw. Rayleigh-Quotient: $\boxed{R(w) = \frac{\int_0^l EI \cdot (w'')^2 \cdot \mathrm{d}x}{\int_0^l (w')^2 \cdot \mathrm{d}x}} \ \rightarrow \ \min$

Der Rayleigh-Quotient liefert im Allgemeinen einen oberen Grenzwert für die Traglast. Der minimale Wert von R entspricht gerade der exakten Knicklast.

$\rightarrow \quad \boxed{R_{\min} = F_{cr}}$ (siehe Skript)

Zusätzliche Erläuterung: Verfahren von Rayleigh-Ritz



$\boxed{\Phi = U + V \to \min}$ (siehe Skript)

wobei:

$\Phi =$ potentielle Energie

$U =$ elastisches Potential (Formänderungsarbeit)

$V =$ Potential der äusseren Kräfte

Ansatz: $w(x) = w_0 \cdot f(x)$

(w_0 = unbekannte "Amplitude"; die kinematischen Randbedingungen sind von $f(x)$ zu erfüllen)

$$\Phi(w_0) = U(w_0) + V(w_0) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^l EI \cdot w_0^2 \cdot \left(f''(x)\right)^2 \cdot \mathrm{d}x - \frac{F}{2} \cdot \int_0^l w_0^2 \cdot \left(f'(x)\right)^2 \cdot \mathrm{d}x \quad \to \quad \min$$

$$\to \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}w_0} = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}w_0} + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}w_0} = 0}$$

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}w_0} = w_0 \cdot \int_0^l EI \cdot \left(f''(x)\right)^2 \cdot \mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}w_0} = -w_0 \cdot F \cdot \int_0^l \left(f'(x)\right)^2 \cdot \mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}w_0} = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}w_0} + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}w_0} = w_0 \cdot \left(\int_0^l EI \cdot \left(f''(x)\right)^2 \cdot \mathrm{d}x - F \cdot \int_0^l \left(f'(x)\right)^2 \cdot \mathrm{d}x \right) = 0$$

$$\int_0^l EI \cdot \left(f''(x)\right)^2 \cdot \mathrm{d}x - F \cdot \int_0^l \left(f'(x)\right)^2 \cdot \mathrm{d}x = 0$$

$$\to \quad \boxed{F_{cr} = \frac{\int_0^l EI \cdot \left(f''(x)\right)^2 \cdot \mathrm{d}x}{\int_0^l \left(f'(x)\right)^2 \cdot \mathrm{d}x}} \quad \to \text{Rayleigh-Quotient (s. Seite 5)}$$

Merke:

F_{cr} wird mit der Energiemethode **überschätzt**.