Prof. Dr. Peter Marti
Institut für Baustatik und Konstruktion
D-BAUG, Studiengang Bauingenieurwissenschaften
Frühjahrssemester

BAUSTATIK II – KOLLOQUIUM 8, Lösung

(101-0114)

Thema: Traglastverfahren: Oberer Grenzwertsatz, Plastizitätskontrolle

Aufgabe 1

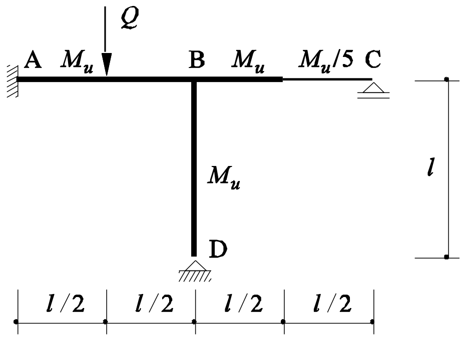
Gegeben: System und Belastungen Q

Querschnittswiderstände: Riegel: $\left|M_u^-\right| = \left|M_u^+\right| = M_u$

$\left|M_u^- / 5\right| = \left|M_u^+ / 5\right| = M_u / 5$

Stütze: $\left|M_u^-\right| = \left|M_u^+\right| = M_u$

Gesucht:
a) Traglast mit dem oberen Grenzwertsatz
b) Plastizitätskontrolle für denjenigen Mechanismus aus a), der die beste Näherung für die Traglast ergibt.

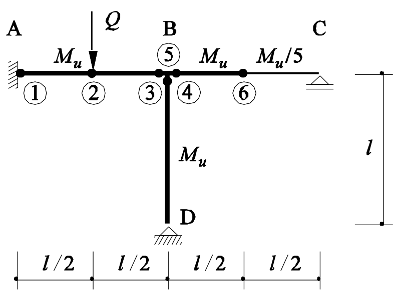


a) Oberer Grenzwertsatz (kinematische Methode)

Ermittlung eines kinematisch verträglichen Mechanismus
Die aus der Gleichsetzung der äusseren Arbeit und der Dissipationsarbeit ermittelte Traglast ist grösser oder gleich der tatsächlichen Traglast.

$\boxed{n=3}$ → Versagen des Systems bei $\boxed{n+1=4}$ Gelenken (Ausnahme: Balkenmechanismus)

Abzählkriterium zur Ermittlung der Anzahl unabhängiger Grundmechanismen:



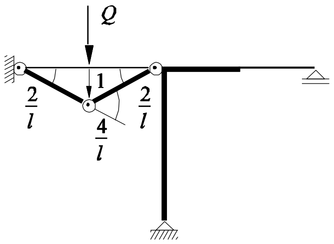
Anzahl möglicher plastischer Gelenke: $n_k = 6$

Grad der statischen Unbestimmtheit: $n = 3$

Anzahl unabhängiger Grundmechanismen: $\boxed{n_F = n_k - n = 3}$ $\rightarrow$ 2 Balkenmechanismen
1 Knotenmechanismus

Grundmechanismen:

- Balkenmechanismus 1:



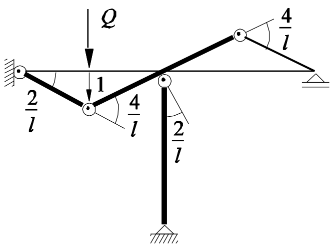
$$W = Q \cdot 1$$

$$D = M_u \cdot \left(\frac{2}{l} + \frac{4}{l} + \frac{2}{l} \right) = \frac{8M_u}{l}$$

$$W = D \;\rightarrow\; Q_k = \frac{8M_u}{l}$$

$$\rightarrow \qquad \underline{Q_u \leq \frac{8M_u}{l}}$$

- Balkenmechanismus 2:



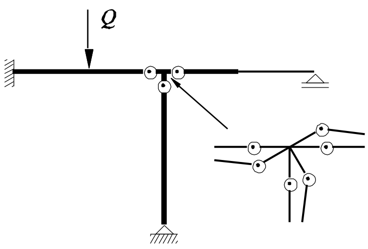
$$W = Q \cdot 1$$

$$D = M_u \cdot \left(\frac{2}{l} + \frac{4}{l} + \frac{2}{l} \right) + \frac{M_u}{5} \cdot \frac{4}{l} = \frac{44M_u}{5l}$$

$$W = D \;\rightarrow\; Q_k = \frac{44M_u}{5l}$$

$$\rightarrow \qquad \underline{Q_u \leq \frac{44M_u}{5l}}$$

- Knotenmechanismus:

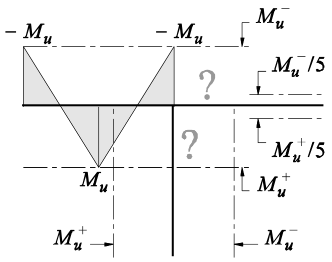


Knotenmechanismus bei 3 und mehr Stäben:
(Wird nur für Kombination verwendet; bei diesem Beispiel nicht möglich)

Merke:
Von allen möglichen kinematisch verträglichen Mechanismen ist der kleinste ermittelte Wert von Q_u für die Traglast massgebend $\rightarrow$

$$\boxed{Q_u \leq \frac{8M_u}{l}}$$

b) Plastizitätskontrolle für den Balkenmechanismus 1:



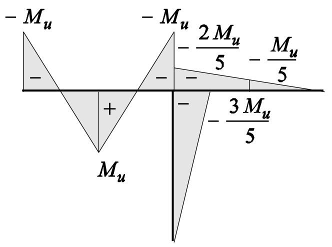
$$\boxed{M_A = M_B = M_u^-,\ \ M_{(2)} = M_u \qquad Q_k = \frac{8M_u}{l}}$$

Das System ist 3-fach statisch unbestimmt.
Für die Traglast sind i.a. 4 Gelenke notwendig.

Ausnahme: Balkenmechanismus
(3 Gelenke auf einer Geraden = lokaler Mechanismus)

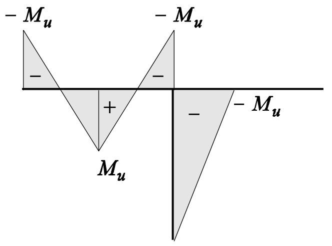
Der Rest des Systems bleibt statisch unbestimmt
(unbekannte horizontale Reaktion in der Einspannung).

- Variante 1 für möglichen Verlauf der *M*-Linien:



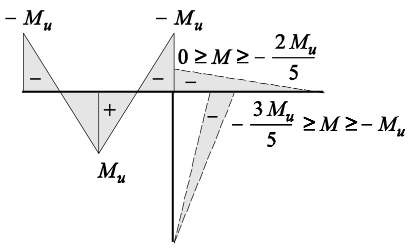
Verlauf der *M*-Linien so, dass Fliessbedingung im Riegel gerade nicht verletzt wird.

- Variante 2 für möglichen Verlauf der *M*-Linien:



Verlauf der *M*-Linien so, dass Fliessbedingung in Stütze gerade nicht verletzt wird.

- Folgerung:



Die Verläufe der Momentenlinien Variante 1 und Variante 2 sowie alle dazwischenliegenden (schraffierter Bereich) verletzen die Fliessbedingung nirgends.

$\rightarrow$ alle $|M| \leq |M_u|$
Fliessbedingung nirgends verletzt
$\rightarrow$ vollständige Lösung

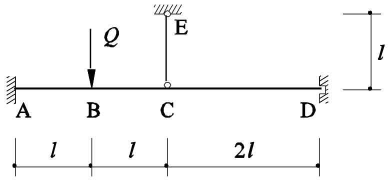
c) Vollständige Lösung

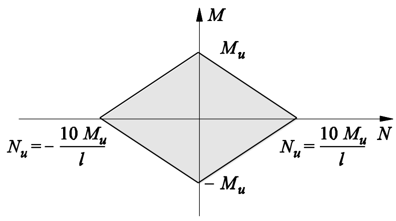
$$\boxed{Q_u = \frac{8M_u}{l}}$$

Aufgabe 2

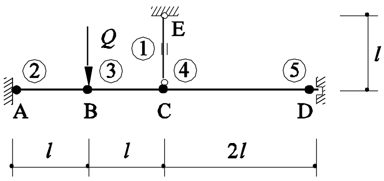
Gegeben: System (keine horizontale Auflagerkraft in D) und Last Q
Querschnittswiderstände gemäss Interaktionsdiagramm

Gesucht:
a) Drei verschiedene Bruchmechanismen mit zugehörigen oberen Grenzwerten für die Traglast.
b) Plastizitätskontrolle für die drei Mechanismen. Wo wird die Fliessbedingung verletzt?
c) Liefert einer der Mechanismen die vollständige Lösung?





Abzählkriterium zur Ermittlung der Anzahl unabhängiger Grundmechanismen:



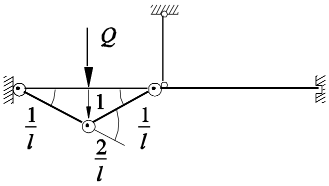
Anzahl möglicher plastischer Gelenke: $n_k = 5$

Grad der statischen Unbestimmtheit: $n = 3$

Anzahl unabhängiger Grundmechanismen: $\boxed{n_F = n_k - n = 2}$

a) 3 verschiedene Mechanismen

- Mechanismus 1:



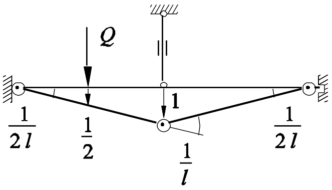
$$W = Q \cdot 1$$

$$D = M_u \cdot \left(\frac{1}{l} + \frac{2}{l} + \frac{1}{l}\right) = \frac{4M_u}{l}$$

$$W = D \quad \rightarrow \quad Q_k = \frac{4M_u}{l}$$

$$\rightarrow \qquad \underline{Q_u \leq \frac{4M_u}{l}}$$

- Mechanismus 2:



$$W = Q \cdot \frac{1}{2}$$

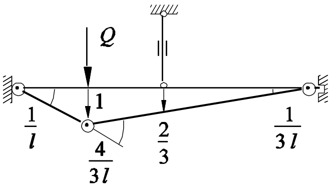
$$D = M_u \cdot \left(\frac{1}{2l} + \frac{1}{l} + \frac{1}{2l} \right) + N_u \cdot 1$$

$$= \frac{2M_u}{l} + \frac{10M_u}{l} \cdot 1 = \frac{12M_u}{l}$$

$$W = D \quad \rightarrow \quad Q_k = \frac{24M_u}{l}$$

$$\rightarrow \qquad \underline{Q_u \leq \frac{24M_u}{l}}$$

- Mechanismus 3:



$$W = Q \cdot 1$$

$$D = M_u \cdot \left(\frac{1}{l} + \frac{4}{3l} + \frac{1}{3l} \right) + N_u \cdot \frac{2}{3}$$

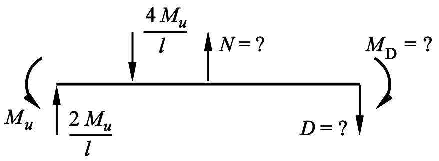
$$= \frac{8M_u}{3l} + \frac{10M_u}{l} \cdot \frac{2}{3} = \frac{28M_u}{3l}$$

$$W = D \quad \rightarrow \quad Q_k = \frac{28M_u}{3l}$$

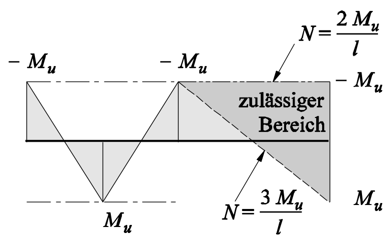
$$\rightarrow \qquad \underline{Q_u \leq \frac{28M_u}{3l}}$$

b) Plastizitätskontrolle

- Mechanismus 1:



$$\boxed{\begin{array}{l} M_A = M_u^-, \;\; M_B = M_u, \;\; M_C = -M_u \\ Q_k = \dfrac{4M_u}{l} \end{array}}$$



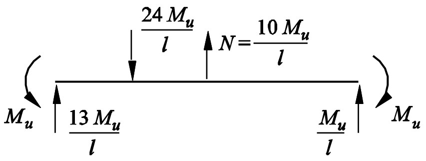
$$-M_u \leq M_D \leq M_u \qquad \rightarrow \qquad \frac{2M_u}{l} \leq N \leq \frac{3M_u}{l}$$

$\rightarrow$ alle $|M| \leq |M_u|$ resp. $|N| \leq |N_u|$
Fliessbedingung nirgends verletzt

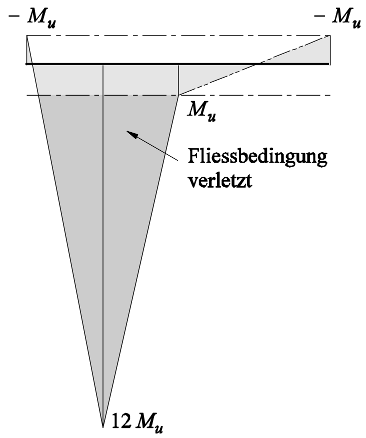
$\rightarrow$ vollständige Lösung

$$\boxed{Q_u = \frac{4M_u}{l}}$$

- Mechanismus 2:



$$\boxed{\begin{array}{l} M_A = M_u^-,\ \ M_C = M_u,\ \ M_D = M_u^-,\ \ N_{C-E} = N_u \\ Q_k = \dfrac{24M_u}{l} \end{array}}$$



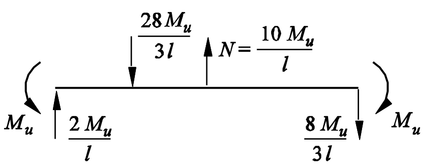
$$\rightarrow \quad A = \frac{13M_u}{l}$$

$$\rightarrow \quad D = \frac{M_u}{l}$$

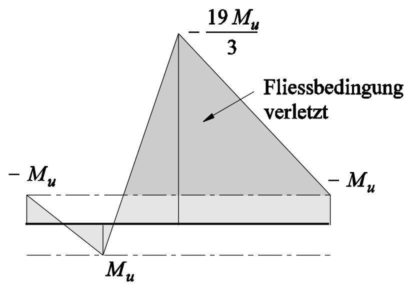
$$\rightarrow \quad M_B = -M_u + A \cdot l = -M_u + \frac{13M_u}{l} \cdot l = 12M_u > M_u$$

$\rightarrow$ Fliessbedingung im Riegel verletzt

- Mechanismus 3 :



$$\boxed{\begin{array}{l} M_A = M_u^-,\ \ M_B = M_u,\ \ M_D = M_u^-,\ \ N_{C-E} = N_u \\ Q_k = \dfrac{28M_u}{3l} \end{array}}$$



$$\rightarrow \quad D = \frac{8M_u}{3l}$$

$$\rightarrow \quad M_C = -M_u - D \cdot 2l$$

$$= -M_u - \frac{8M_u}{3l} \cdot 2l = -\frac{19M_u}{3} < -M_u$$

$\rightarrow$ Fliessbedingung im Riegel verletzt

c) Vollständige Lösung

$$\boxed{Q_u = \frac{4M_u}{l}}$$