Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Prof. Dr. Peter Marti
Institut für Baustatik und Konstruktion
D-BAUG, Studiengang Bauingenieurwissenschaften
Frühjahrssemester

BAUSTATIK II – KOLLOQUIUM 7, Lösung

(101-0114)

Thema: Traglastverfahren; unterer und oberer Grenzwertsatz

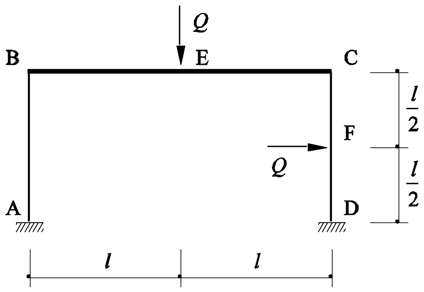
Aufgabe 1, Lösung

Gegeben: System und Belastungen Q

Querschnittswiderstände: Riegel: $\left|M_u^-\right| = \left|M_u^+\right| = 2M_u$

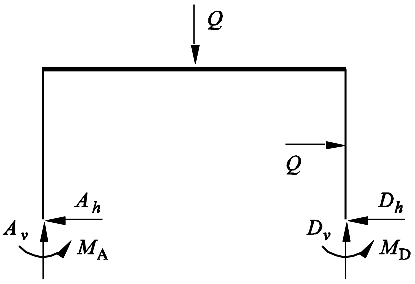
Stütze: $\left|M_u^-\right| = \left|M_u^+\right| = M_u$

Gesucht:
a) Zwei verschiedene, statisch zulässige Spannungszustände mit zugehörigen unteren Grenzwerten der Traglast.
b) Alle möglichen Grundmechanismen und ein kombinierter Mechanismus mit zugehörigen oberen Grenzwerten der Traglast.
c) Plastizitätskontrolle für den Mechanismus aus b), der die beste Näherung für die Traglast ergibt.



a) Zwei verschiedene, statisch zulässige Spannungszustände mit zugehörigen unteren Grenzwerten der Traglast (Unterer Grenzwertsatz):

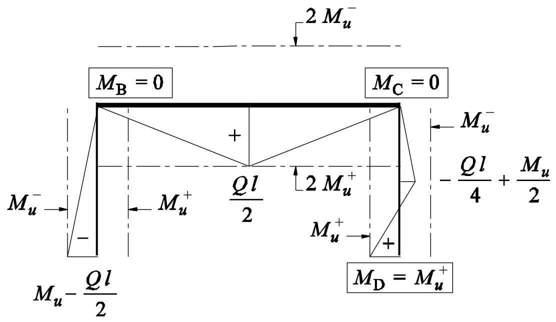
SKD:



Mögliche Gleichgewichtszustände:

$\boxed{n = 3}$ $\rightarrow$ 3 Grössen frei wählbar

Wahl 1: $\boxed{M_B = 0, \quad M_C = 0, \quad M_D = M_u^+}$



$$\Sigma\uparrow \;= 0: \quad A_v + D_v = Q$$

$$\Sigma\rightarrow \;= 0: \quad A_h + D_h = Q$$

$$M_C \;= 0: \quad M_D - D_h \cdot l + Q \cdot \frac{l}{2} = M_u - D_h \cdot l + Q \cdot \frac{l}{2} = 0$$

Da $\quad M_B = M_C = 0:$

$$\rightarrow \quad M_E = \frac{Q \cdot l}{2}$$

$$\rightarrow \quad A_v = D_v = \frac{Q}{2}$$

$$\rightarrow \quad D_h = \frac{M_u}{l} + \frac{Q}{2}$$

$$\rightarrow \quad A_h = -\frac{M_u}{l} + \frac{Q}{2}$$

$$\rightarrow \quad M_A = \frac{Q \cdot l}{2} - M_u$$

$$\rightarrow \quad M_F = -\frac{Q \cdot l}{4} + \frac{M_u}{2}$$

Vorzeichenkonvention beachten:

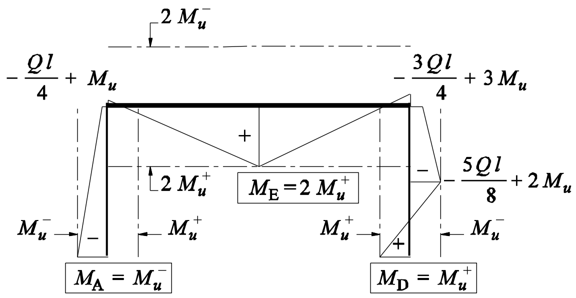
$$\text{Punkt A}: M_u - \frac{Q \cdot l}{2} \overset{!}{=} -M_u \quad \rightarrow \quad Q_s = \frac{4M_u}{l}$$

$$\text{Punkt E}: \frac{Q \cdot l}{2} \overset{!}{=} 2M_u \quad \rightarrow \quad Q_s = \frac{4M_u}{l}$$

$$\text{Punkt F}: -\frac{Q \cdot l}{4} + \frac{M_u}{2} \overset{!}{=} -M_u \quad \rightarrow \quad Q_s = \frac{6M_u}{l} \;\; (*)$$

$$\rightarrow \quad \underline{Q_u \geq \frac{4M_u}{l}}$$

Wahl 2: $\boxed{M_{\mathrm{A}} = M_u^-, \quad M_{\mathrm{E}} = 2M_u, \quad M_{\mathrm{D}} = M_u^+}$



$$\Sigma\uparrow \; = 0: \quad A_v + D_v = Q$$

$$\Sigma\rightarrow \; = 0: \quad A_h + D_h = Q$$

$$\Sigma M(\mathrm{A}) = 0: \quad M_u + D_v \cdot 2l + M_u - Q \cdot \frac{l}{2} - Q \cdot l = 0$$

$$\rightarrow \quad D_v = -\frac{M_u}{l} + \frac{3Q}{4}$$

$$\rightarrow \quad A_v = \frac{M_u}{l} + \frac{Q}{4}$$

Mit $M_{\mathrm{E}} = 2M_u = A_h \cdot l - M_u + A_v \cdot l :$

$$\rightarrow \quad A_h = \frac{2M_u}{l} - \frac{Q}{4}$$

$$\rightarrow \quad D_h = -\frac{2M_u}{l} + \frac{5Q}{4}$$

$$\rightarrow \quad M_{\mathrm{F}} = -D_h \cdot \frac{l}{2} + M_u = -\frac{5Q \cdot l}{8} + 2M_u$$

Vorzeichenkonvention beachten:

Punkt F: $-\frac{5Q \cdot l}{8} + 2M_u \overset{!}{=} -M_u \quad \rightarrow \quad Q_s = \frac{24}{5} \cdot \frac{M_u}{l}$

Punkt B: $-\frac{Q \cdot l}{4} + M_u \overset{!}{=} -M_u \quad \rightarrow \quad Q_s = \frac{8M_u}{l}$ (*)

Punkt C: $-\frac{3Q \cdot l}{4} + 3M_u \overset{!}{=} -M_u \quad \rightarrow \quad Q_s = \frac{16}{3} \cdot \frac{M_u}{l}$ (*)

$$\rightarrow \quad \underline{Q_u \geq \frac{24}{5} \cdot \frac{M_u}{l}}$$

Merke:

Für **jede** Wahl ist der **kleinste** der ermittelten Werte von Q_s **massgebend**, da mit grösseren Werten (*) die Fliessbedingung in einem anderen Punkt verletzt wird.

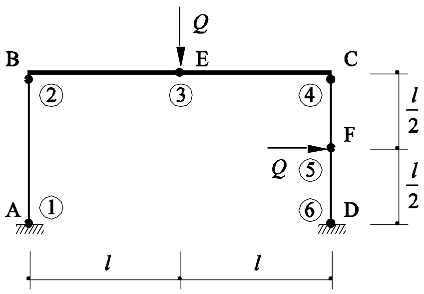
Von allen **massgebende**<u>n</u> Werten der verschiedenen getroffenen Wahlen ist der **grösste** die beste Näherung für die Traglast Q_u :

$$\boxed{Q_u \geq \frac{24}{5} \cdot \frac{M_u}{l}}$$

b) Alle möglichen Grundmechanismen und ein kombinierter Mechanismus mit zugehörigen oberen Grenzwerten der Traglast (Oberer Grenzwertsatz):

$\boxed{n=3}$ $\rightarrow$ Versagen des Systems bei $\boxed{n+1=4}$ Gelenken (Ausnahme: Balkenmechanismus)

Abzählkriterium zur Ermittlung der Anzahl unabhängiger Grundmechanismen:



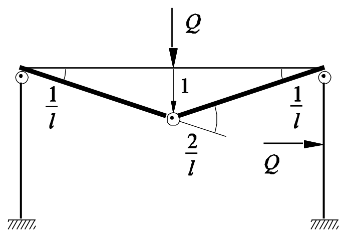
Anzahl möglicher plastischer Gelenke: $n_k = 6$

Grad der statischen Unbestimmtheit: $n = 3$

Anzahl unabhängiger Grundmechanismen: $\boxed{n_F = n_k - n = 3}$ $\rightarrow$ 2 Balkenmechanismen
1 Verschiebemechanismus

Grundmechanismen:

- Balkenmechanismus 1:



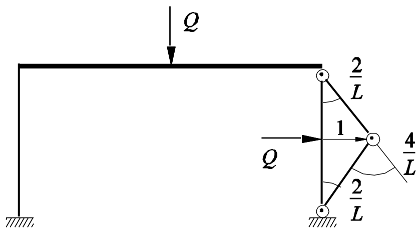
$$W = Q \cdot 1$$

$$D = M_u \cdot \frac{1}{l} + 2M_u \cdot \frac{2}{l} + M_u \cdot \frac{1}{l} = \frac{6M_u}{l}$$

$$W = D \quad \rightarrow \quad Q_k = \frac{6M_u}{l}$$

$$\rightarrow \qquad \underline{Q_u \le \frac{6M_u}{l}}$$

- Balkenmechanismus 2:



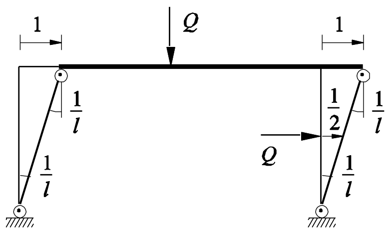
$$W = Q \cdot 1$$

$$D = 2 \cdot M_u \cdot \frac{2}{l} + M_u \cdot \frac{4}{l} = \frac{8M_u}{l}$$

$$W = D \quad \rightarrow \quad Q_k = \frac{8M_u}{l}$$

$$\rightarrow \qquad \underline{Q_u \leq \frac{8M_u}{l}}$$

- Verschiebemechanismus:



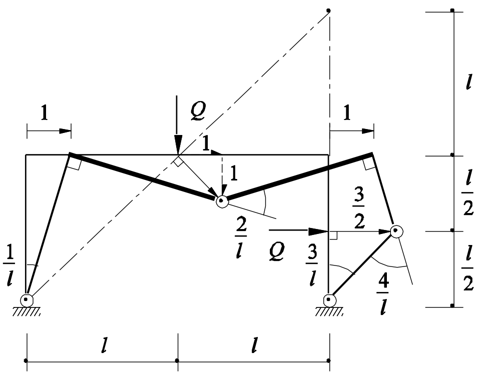
$$W = Q \cdot \frac{1}{2}$$

$$D = 4 \cdot M_u \cdot \frac{1}{l} = \frac{4M_u}{l}$$

$$W = D \quad \rightarrow \quad Q_k = \frac{8M_u}{l}$$

$$\rightarrow \qquad \underline{Q_u \leq \frac{8M_u}{l}}$$

Kombinierter Mechanismus



$$W = Q \cdot 1 + Q \cdot \frac{3}{2} = \frac{5Q}{2}$$

$$D = M_u \cdot \left(\frac{1}{l} + \frac{4}{l} + \frac{3}{l}\right) + 2M_u \cdot \frac{2}{l} = \frac{12M_u}{l}$$

$$W = D \quad \rightarrow \quad Q_k = \frac{24}{5} \cdot \frac{M_u}{l}$$

$$\rightarrow \qquad \underline{Q_u \leq \frac{24}{5} \cdot \frac{M_u}{l}}$$

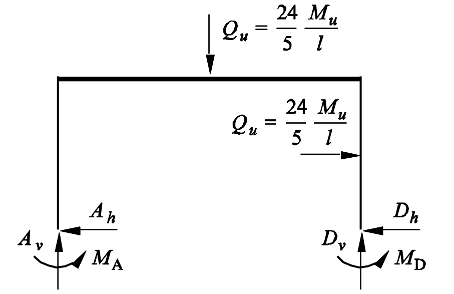
Merke:

Von allen möglichen kinematisch verträglichen Mechanismen ist der **kleinste** ermittelte Wert die beste Näherung für die Traglast Q_u :

$$\boxed{Q_u \leq \frac{24}{5} \cdot \frac{M_u}{l}}$$

c) Plastizitätskontrolle für den kombinierten Mechanismus (kleinster ermittelter Wert für die Traglast)

SKD:



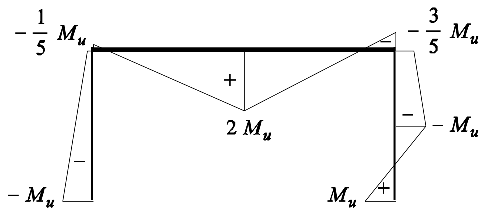
Aus kombiniertem Mechanismus:

$$\boxed{\begin{array}{l} M_{\mathrm{A}} = M_u,\ \ M_{\mathrm{E}} = 2M_u,\ \ M_{\mathrm{F}} = -M_u,\ \ M_{\mathrm{D}} = M_u \\ Q_k = \frac{24}{5}\cdot\frac{M_u}{l} \end{array}}$$

$$\rightarrow\ M_{\mathrm{F}} = -M_u = M_u - D_h \cdot \frac{l}{2}$$

$$\rightarrow\ D_h = \frac{4M_u}{l}$$

$$\rightarrow\ A_h = Q_u - D_h = \frac{24}{5}\cdot\frac{M_u}{l} - \frac{4M_u}{l} = \frac{4}{5}\cdot\frac{M_u}{l}$$



$$M_{\mathrm{C}} = -D_h \cdot l + M_u + Q_u \cdot \frac{l}{2}$$

$$= -\frac{4M_u}{l} + M_u + \frac{24}{5}\cdot\frac{M_u}{l}\cdot\frac{l}{2} = -\frac{3}{5}\cdot M_u > -M_u$$

$$M_{\mathrm{B}} = -M_u + A_h \cdot l = -M_u + \frac{4}{5}\cdot\frac{M_u}{l}\cdot l = -\frac{1}{5}\cdot M_u > -M_u$$

$\rightarrow$ alle $|M| \le |M_u|$

Fliessbedingung nirgends verletzt

$\rightarrow$ vollständige Lösung

d) Vollständige Lösung

Da der höchste untere Grenzwert mit dem tiefsten oberen Grenzwert übereinstimmt bzw. dieser die Plastizitätskontrolle erfüllt, ist die vollständige Lösung gefunden:

$$\boxed{Q_u = \frac{24}{5}\cdot\frac{M_u}{l}}$$

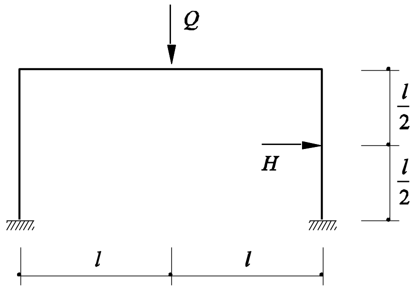
Die vollständige Lösung (Traglast) ergibt sich somit aus einem statisch zulässigen Spannungszustand, der die Fliessbedingung nirgends verletzt, und einem damit verträglichen kinematischen Verformungszustand (Verträglichkeitssatz).

Aufgabe 2, Lösung

Gegeben: System und Lasten Q und H

Querschnittswiderstände: $\left|M_u^-\right| = \left|M_u^+\right| = M_u$

Gesucht: Fliessfigur für das System in einem normierten Diagramm mit den Achsen $\left(\frac{Ql}{M_u}\,;\,\frac{Hl}{M_u}\right)$.



Abzählkriterium zur Ermittlung der Anzahl unabhängiger Grundmechanismen:

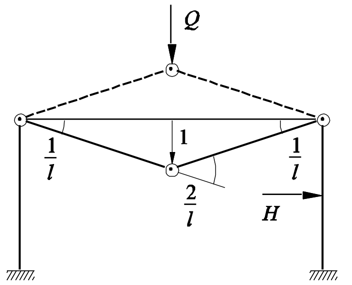
Anzahl möglicher plastischer Gelenke: $n_k = 6$

Grad der statischen Unbestimmtheit: $n = 3$

Anzahl unabhängiger Grundmechanismen: $\boxed{n_F = n_k - n = 3}$ $\rightarrow$ 2 Balkenmechanismen
1 Verschiebemechanismus

Grundmechanismen:

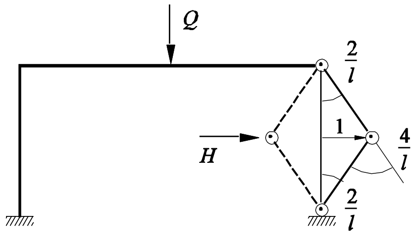
- Balkenmechanismus Q (Geraden 1a und 1b)



$$Q \cdot 1 = M_u \cdot \left(\frac{1}{l} + \frac{2}{l} + \frac{1}{l}\right) = \frac{4M_u}{l}$$

$$\underline{-\frac{4M_u}{l} \leq Q_u \leq \frac{4M_u}{l}}$$

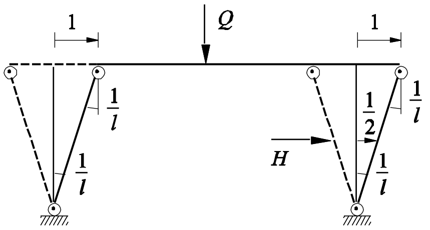
- Balkenmechanismus H (Geraden 2a und 2b)



$$H \cdot 1 = M_u \cdot \left(\frac{2}{l} + \frac{4}{l} + \frac{2}{l}\right) = \frac{8M_u}{l}$$

$$\underline{-\frac{8M_u}{l} \leq H_u \leq \frac{8M_u}{l}}$$

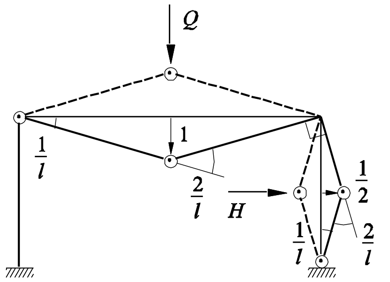
- Verschiebemechanismus (Geraden 3a und 3b)



$$H \cdot \frac{1}{2} = 4 \cdot M_u \cdot \frac{1}{l} = \frac{4M_u}{l}$$
$$\underline{-\frac{8M_u}{l} \le H_u \le \frac{8M_u}{l}}$$

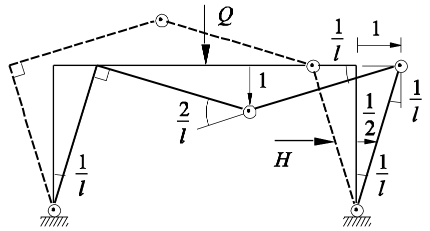
Kombinierte Mechanismen:

- Kombinierter Mechanismus 1 (Geraden 4a und 4b)



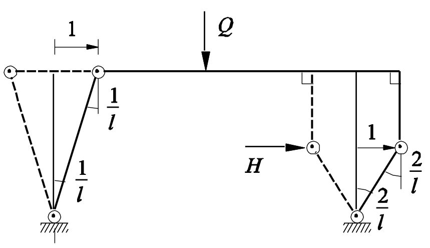
$$Q \cdot 1 + H \cdot \frac{1}{2} = M_u \cdot \left(\frac{1}{l} + \frac{2}{l} + \frac{2}{l} + \frac{1}{l}\right) = \frac{6M_u}{l}$$
$$\underline{-\frac{6M_u}{l} \le Q_u + \frac{1}{2} \cdot H_u \le \frac{6M_u}{l}}$$

- Kombinierter Mechanismus 2 (Geraden 5a und 5b)



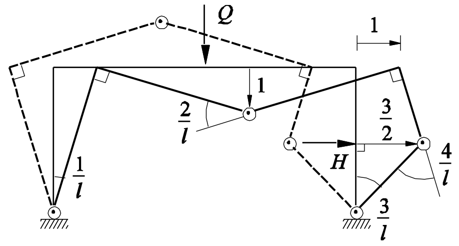
$$Q \cdot 1 + H \cdot \frac{1}{2} = M_u \cdot \left(\frac{1}{l} + \frac{2}{l} + \frac{1}{l} + \frac{1}{l} + \frac{1}{l}\right) = \frac{6M_u}{l}$$
$$\underline{-\frac{6M_u}{l} \le Q_u + \frac{1}{2} \cdot H_u \le \frac{6M_u}{l}}$$

- Kombinierter Mechanismus 3 (Geraden 6a und 6b)



$$H \cdot 1 = M_u \cdot \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{l} + \frac{2}{l} + \frac{2}{l}\right) = \frac{6M_u}{l}$$
$$\underline{-\frac{6M_u}{l} \le H_u \le \frac{6M_u}{l}}$$

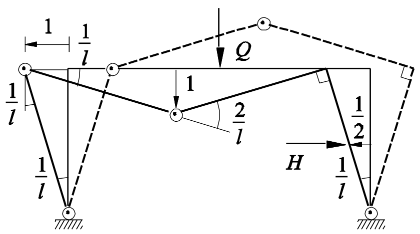
- Kombinierter Mechanismus 4 (Geraden 7a und 7b)



$$Q\cdot 1 + H\cdot\frac{3}{2} = M_u\cdot\left(\frac{1}{l}+\frac{2}{l}+\frac{4}{l}+\frac{3}{l}\right) = \frac{10M_u}{l}$$

$$\underline{-\frac{10M_u}{l} \le Q_u + \frac{3}{2}\cdot H_u \le \frac{10M_u}{l}}$$

- Kombinierter Mechanismus 5 (Geraden 8a und 8b)



$$Q\cdot 1 - H\cdot\frac{1}{2} = M_u\cdot\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{l}+\frac{1}{l}+\frac{2}{l}+\frac{1}{l}\right) = \frac{6M_u}{l}$$

$$\underline{-\frac{6M_u}{l} \le Q_u - \frac{1}{2}\cdot H_u \le \frac{6M_u}{l}}$$

Fliessfigur: