Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Prof. Dr. Peter Marti
Institut für Baustatik und Konstruktion
D-BAUG, Studiengang Bauingenieurwissenschaften
Frühjahrssemester

BAUSTATIK II – KOLLOQUIUM 6, Lösung

(101-0114)

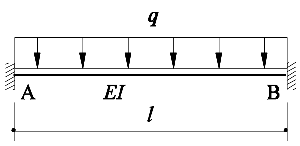
Thema: Traglastverfahren; unterer und oberer Grenzwertsatz

Aufgabe 1, Lösung

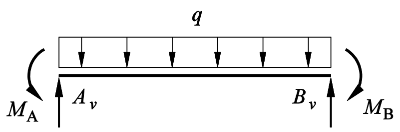
Gegeben: System und Belastung q

Querschnittswiderstände: $\left|M_u^-\right| = \left|M_u^+\right| = M_u$

Gesucht: Traglast nach dem unteren und oberen Grenzwertsatz

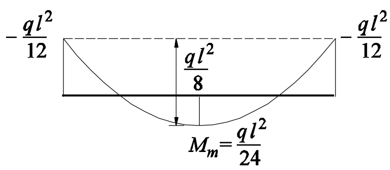


SKD:



$\boxed{n=2}$ (keine Horizontalkräfte)

a) Elastische Lösung



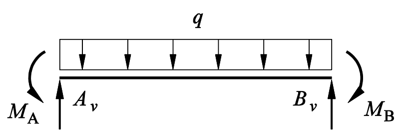
$$M_A = M_B = \frac{ql^2}{12}$$

Bei Fliessbeginn:

$$M_A = M_B = M_y = \frac{q_y \cdot l^2}{12} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{q_y = \frac{12 M_y}{l^2}}}$$

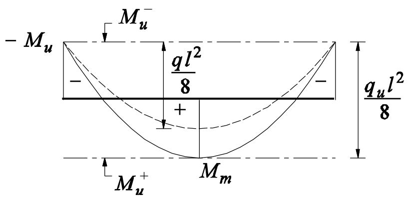
b) Anwendung des unteren Grenzwertsatzes

SKD:



$\boxed{n=2}$ $\rightarrow$ 2 Grössen frei wählbar:

Wahl: $\boxed{M_A = M_u^-, \quad M_B = M_u^-}$

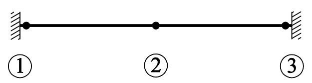


$$\rightarrow \quad M_m = -M_u + \frac{ql^2}{8}$$

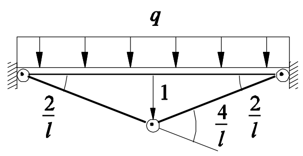
$$-M_u + \frac{ql^2}{8} \overset{!}{=} M_u \quad \rightarrow \quad q_s = \frac{16 M_u}{l^2}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{q_u \geq \frac{16 M_u}{l^2}}$$

c) Anwendung des oberen Grenzwertsatzes



$\boxed{n = 2}$ $\rightarrow$ 3 Gelenke für Mechanismus nötig



Arbeit der äusseren Kräfte:

$$W = q \cdot l \cdot \frac{1}{2} = \frac{ql}{2}$$

Merke: Mittlere Einsenkung über wirksame Länge von q beträgt ½ !

Dissipationsarbeit:

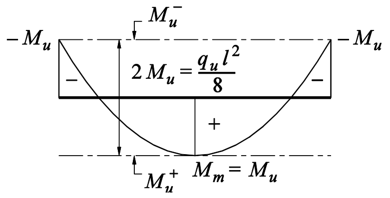
$$D = M_u \cdot \left(\frac{2}{l} + \frac{4}{l} + \frac{2}{l} \right) = \frac{8 M_u}{l}$$

$$W = D \quad \rightarrow \quad q_k = \frac{16 M_u}{l^2}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{q_u \leq \frac{16 M_u}{l^2}}$$

d) Plastizitätskontrolle

(Verifikation, dass die optimale kinematische Lösung der tatsächlichen Traglast entspricht.)



$$\boxed{\begin{array}{l} M_A = M_B = M_u^- \\ q_k = \dfrac{16 M_u}{l^2} \end{array}}$$

$$\rightarrow \quad M_m = -M_u + \frac{q_k \cdot l^2}{8} = -M_u + 2M_u = \underline{\underline{M_u}}$$

$\rightarrow$ Fliessbedingung nirgends verletzt

$\rightarrow$ vollständige Lösung

e) Vollständige Lösung

Da der untere Grenzwert q_s (statisch zulässiger Spannungszustand, der die Fliessbedingung nirgends verletzt) mit dem oberen Grenzwert q_k (verträglicher kinematisch zulässiger Verformungszustand) übereinstimmt bzw. dieser die Plastizitätskontrolle erfüllt, ist die die Traglast q_u (vollständige Lösung) gefunden (Verträglichkeitssatz):

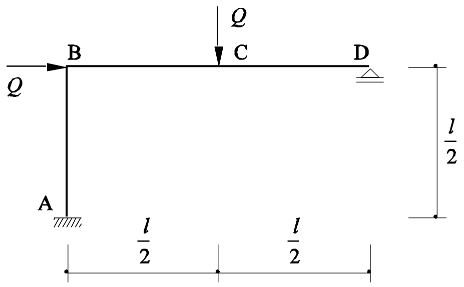
$$\boxed{q_s = q_k = q_u = \frac{16M_u}{l^2}}$$

Aufgabe 2, Lösung

Gegeben: System und Lasten Q

Querschnittswiderstände: $\left|M_u^-\right| = \left|M_u^+\right| = M_u$

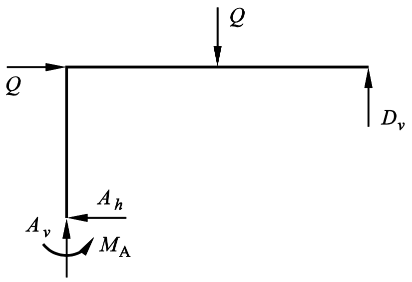
Gesucht: Traglast nach dem unteren und oberen Grenzwertsatz



a) Unterer Grenzwertsatz (statische Methode)

Ermittlung eines statisch zulässigen Spannungszustandes (Gleichgewichtszustand), der die Fliessbedingung nirgends verletzt
Die so ermittelte Traglast ist kleiner oder gleich der tatsächlichen Traglast.

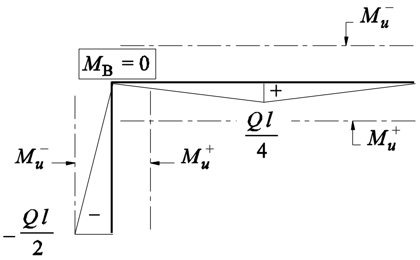
SKD:



Mögliche Gleichgewichtszustände:

$\boxed{n=1}$ $\rightarrow$ 1 Grösse frei wählbar

Wahl 1: $\boxed{M_B = 0}$



$$\Sigma \uparrow \quad = 0: \quad A_v + D_v = Q$$
$$\Sigma \rightarrow \quad = 0: \quad A_h = Q$$

Mit $M_B = 0$:

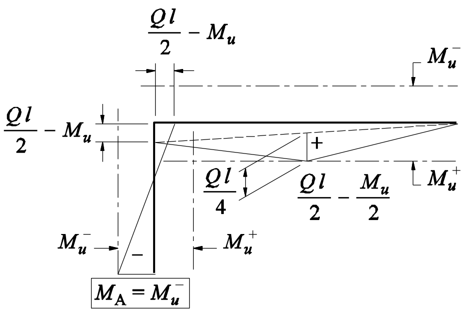
$$\rightarrow \quad M_C = \frac{Q \cdot l}{4}$$
$$\rightarrow \quad D_v = \frac{Q}{2}$$
$$\rightarrow \quad A_v = \frac{Q}{2}$$
$$\rightarrow \quad M_A = \frac{Q \cdot l}{2}$$

Punkt A: $\quad -\frac{Q \cdot l}{2} \overset{!}{=} -M_u \quad \rightarrow \quad Q_s = \frac{2M_u}{l}$

Punkt C: $\quad \frac{Q \cdot l}{4} \overset{!}{=} M_u \quad \rightarrow \quad Q_s = \frac{4M_u}{l}$ (* s.S.5)

$$\rightarrow \quad \underline{Q_u \geq \frac{2M_u}{l}}$$

Wahl 2: $\boxed{M_A = M_u^-}$



$$\Sigma \uparrow \quad = 0: \quad A_v + D_v = Q$$
$$\Sigma \rightarrow \quad = 0: \quad A_h = Q$$

Mit $M_A = M_u^-$:

$$\rightarrow \quad M_B = \frac{Q \cdot l}{2} - M_u$$
$$\rightarrow \quad M_C = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{Q \cdot l}{2} - M_u \right) + \frac{Ql}{4} = \frac{Q \cdot l}{2} - \frac{M_u}{2}$$

Punkt C: $\quad \frac{Q \cdot l}{2} - \frac{M_u}{2} \overset{!}{=} M_u \quad \rightarrow Q_s = \frac{3M_u}{l}$

Punkt B: $\quad \frac{Q \cdot l}{2} - M_u \overset{!}{=} M_u \quad \rightarrow Q_s = \frac{4M_u}{l}$ (* s.S.5)

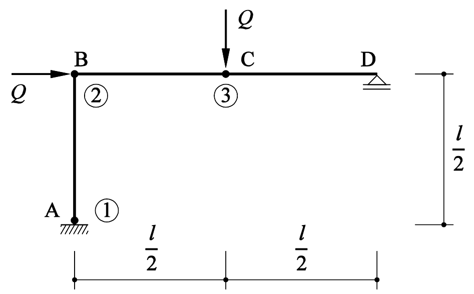
$$\rightarrow \quad \underline{Q_u \geq \frac{3M_u}{l}}$$

Merke:
Für jede Wahl ist der kleinste der ermittelten Werte von Q_u massgebend, da mit grösseren Werten (*) die Fliessbedingung in einem anderen Punkt verletzt wird.
Von allen massgebenden Werten der verschiedenen getroffenen Wahlen ist der grösste die beste Näherung für die Traglast Q_u :

$$\boxed{Q_u \geq \frac{3M_u}{l}}$$

b) Oberer Grenzwertsatz (kinematische Methode)

Ermittlung eines kinematisch verträglichen Mechanismus $\rightarrow$
Die aus der Gleichsetzung von äusserer Arbeit und Dissipationsarbeit ermittelte Traglast ist grösser oder gleich der tatsächlichen Traglast.

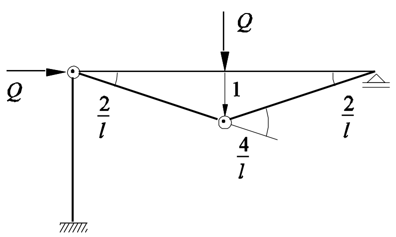


Abzählkriterium zur Ermittlung der Anzahl unabhängiger Grundmechanismen:

Anzahl möglicher plastischer Gelenke: $n_k = 3$
Grad der statischen Unbestimmtheit: $n = 1$
Anzahl unabhängiger Grundmechanismen: $\boxed{n_F = n_k - n = 2}$ $\rightarrow$ 1 Balkenmechanismus
1 Verschiebemechanismus

Grundmechanismen:

- Balkenmechanismus:



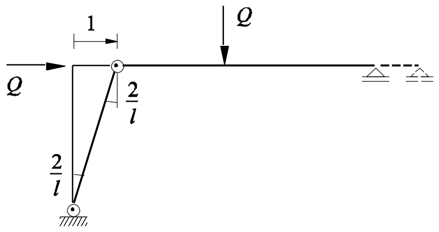
$$W = Q \cdot 1$$

$$D = M_u \cdot \frac{2}{l} + M_u \cdot \frac{4}{l} = \frac{6M_u}{l}$$

$$W = D \quad \rightarrow \quad Q_k = \frac{6M_u}{l}$$

$$\rightarrow \qquad \underline{Q_u \leq \frac{6M_u}{l}}$$

- Verschiebemechanismus:



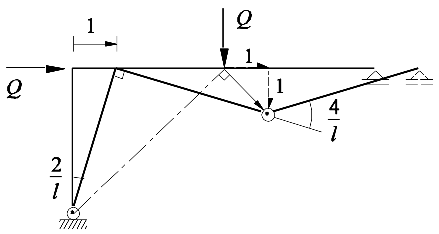
$$W = Q \cdot 1$$

$$D = 2 \cdot M_u \cdot \frac{2}{l} = \frac{4M_u}{l}$$

$$W = D \quad \rightarrow \quad Q_k = \frac{4M_u}{l}$$

$$\rightarrow \qquad \underline{Q_u \leq \frac{4M_u}{l}}$$

Kombinierter Mechanismus:



$$W = 2 \cdot Q \cdot 1$$

$$D = M_u \cdot \frac{2}{l} + M_u \cdot \frac{4}{l} = \frac{6M_u}{l}$$

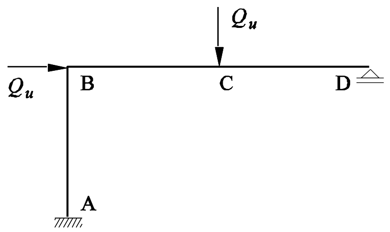
$$W = D \quad \rightarrow \quad Q_k = \frac{3M_u}{l}$$

$$\rightarrow \qquad \underline{Q_u \leq \frac{3M_u}{l}}$$

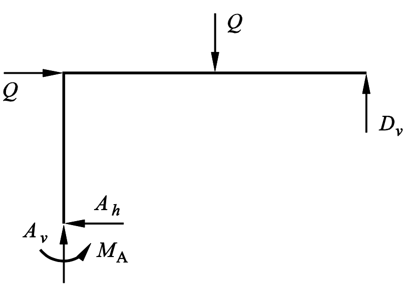
Merke:
Von allen möglichen kinematisch verträglichen Mechanismen ist der <u>kleinste</u> ermittelte Wert die beste Näherung für die Traglast Q_u :

$$\boxed{Q_u \leq \frac{3M_u}{l}}$$

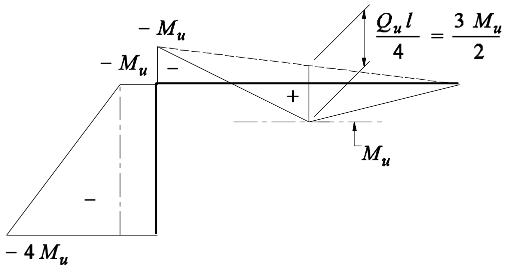
c) Plastizitätskontrolle



SKD:



- Balkenmechanismus:



Aus Balkenmechanismus:

$$\boxed{\begin{array}{l} M_B = -M_u \;,\; M_C = M_u \\ Q_k = \dfrac{6M_u}{l} \end{array}}$$

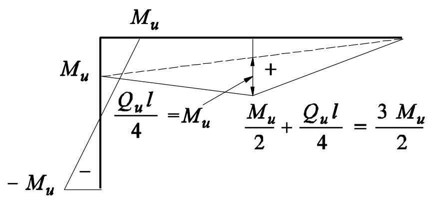
$\rightarrow \quad A_h = \dfrac{6M_u}{l}$

$\rightarrow \quad D_v = \dfrac{Q_u}{2} - \dfrac{M_u}{l} = \dfrac{3M_u}{l} - \dfrac{M_u}{l} = \dfrac{2M_u}{l}$

$\rightarrow \quad M_A = M_u + Q_u \cdot \dfrac{l}{2} = M_u + \dfrac{6M_u}{l} \cdot \dfrac{l}{2} = 4M_u > M_u$

$\rightarrow$ Fliessbedingung in Stütze verletzt!

- Verschiebemechanismus:



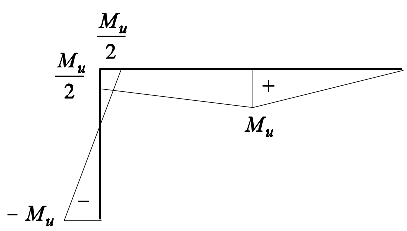
Aus Verschiebemechanismus:

$$\boxed{\begin{array}{l} M_A = M_B = M_u \\ Q_k = \dfrac{4M_u}{l} \end{array}}$$

$\rightarrow \quad M_C = \dfrac{M_u}{2} + \dfrac{Q_u \cdot l}{4} = \dfrac{3M_u}{2} > M_u$

$\rightarrow$ Fliessbedingung im Riegel verletzt!

- Kombinierter Mechanismus:



Aus kombiniertem Mechanismus:

$$\boxed{\begin{array}{l} M_A = M_C = M_u \\ Q_k = \dfrac{3M_u}{l} \end{array}}$$

$\rightarrow \quad A_h = \dfrac{3M_u}{l}$

$\rightarrow \quad D_v = \dfrac{2M_u}{l}$

$\rightarrow \quad M_B = \dfrac{2M_u}{l} \cdot l - Q_u \cdot \dfrac{l}{2} = \dfrac{M_u}{2} < M_u$

$\rightarrow$ alle $|M| \leq |M_u|$
Fliessbedingung nirgends verletzt

$\rightarrow$ vollständige Lösung

d) Vollständige Lösung

Da der höchste untere Grenzwert mit dem tiefsten oberen Grenzwert übereinstimmt bzw. dieser die Plastizitätskontrolle erfüllt, ist die vollständige Lösung gefunden:

$$\boxed{Q_u = \frac{3M_u}{l}}$$

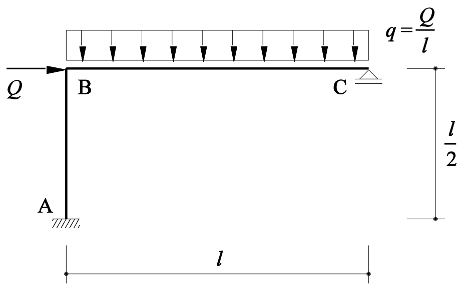
Die vollständige Lösung (Traglast) ergibt sich somit aus einem statisch zulässigen Spannungszustand, der die Fliessbedingung nirgends verletzt, und einem damit verträglichen kinematischen Verformungszustand (Verträglichkeitssatz).

Aufgabe 3, Lösung

Gegeben: System und Belastung q

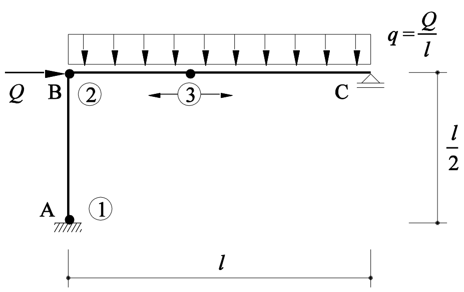
Querschnittswiderstände: $\left|M_u^-\right| = \left|M_u^+\right| = M_u$

Gesucht: Traglast nach dem oberen Grenzwertsatz



Oberer Grenzwertsatz (kinematische Methode)

Ermittlung eines kinematisch verträglichen Mechanismus →
Die aus der Gleichsetzung von äusserer Arbeit und Dissipationsarbeit ermittelte Traglast ist grösser oder gleich der tatsächlichen Traglast.



$\boxed{n=1}$ → 2 Gelenke für Mechanismus nötig

Die genaue Lage das plastischen Gelenks (3) ist unbekannt.

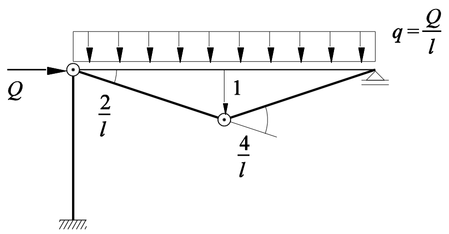
Abzählkriterium zur Ermittlung der Anzahl unabhängiger Grundmechanismen:

Anzahl möglicher plastischer Gelenke: $n_k = 3$

Grad der statischen Unbestimmtheit: $n = 1$

Anzahl unabhängiger Grundmechanismen: $\boxed{n_F = n_k - n = 2}$ $\rightarrow$ 1 Balkenmechanismus
1 Verschiebemechanismus

- Balkenmechanismus



Arbeit der äusseren Kräfte:

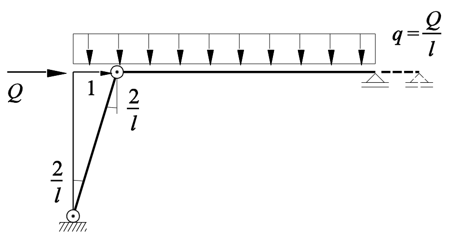
$$W = q \cdot l \cdot \frac{1}{2} = \frac{ql}{2} = \frac{Q}{2}$$

Dissipationsarbeit:

$$D = M_u \cdot \left(\frac{2}{l} + \frac{4}{l}\right) = 6\frac{M_u}{l}$$

$$W = D \;\rightarrow\; \boxed{Q_u \le Q_k = 12\frac{M_u}{l}}$$

- Verschiebemechanismus



Arbeit der äusseren Kräfte:

$$W = Q \cdot 1$$

Dissipationsarbeit:

$$D = \frac{4}{l} \cdot M_u = 4\frac{M_u}{l}$$

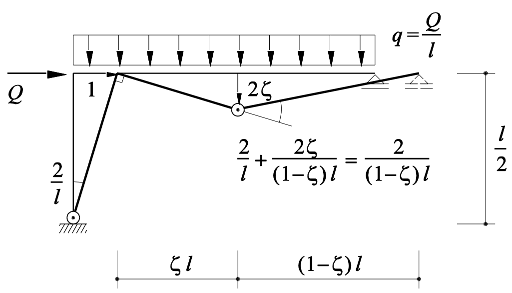
$$W = D \;\rightarrow\; \boxed{Q_u \le Q_k = 4\frac{M_u}{l}}$$

- Kombinierter Mechanismus:

Annahme: Lage des plastischen Gelenks (3) in Abhängigkeit von ζ

$\rightarrow$ Einsenkung bei Gelenk (3): $\frac{2}{l} \cdot \zeta l = 2\zeta$

$\rightarrow$ Mittlere Einsenkung über wirksame Länge von q: $\frac{1}{2} \cdot 2\zeta = \zeta$



Arbeit der äusseren Kräfte:

$$W = Q \cdot 1 + q \cdot l \cdot \frac{2\zeta}{2} = Q + q \cdot \zeta l = Q \cdot (1+\zeta)$$

Dissipationsarbeit:

$$D = M_u \cdot \frac{2}{l} + M_u \cdot \frac{2}{(1-\zeta)\cdot l} = \frac{2M_u}{l} \cdot \frac{2-\zeta}{1-\zeta}$$

$$W = D$$

$$\rightarrow \; Q_k = \frac{2M_u}{l} \cdot \frac{2-\zeta}{(1-\zeta)\cdot(1+\zeta)} = \frac{2M_u}{l} \cdot \frac{2-\zeta}{1-\zeta^2}$$

Da Q_k ein oberer Grenzwert für die Traglast ist, muss ζ so gewählt werden, dass $Q_k(\zeta) \rightarrow min: \;\; \zeta = \zeta_{opt}$

$$Q_k(\zeta) \rightarrow min \qquad \boxed{\rightarrow \; \frac{\mathrm{d}Q_k}{\mathrm{d}\zeta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\left[\frac{2M_u}{l} \cdot \frac{2-\zeta}{1-\zeta^2}\right] = 0}$$

Mit der Quotientenregel $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{v(x)\cdot u'(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}$ gilt:

$$\frac{\mathrm{d}Q_k}{\mathrm{d}\zeta} = \frac{2M_u}{l} \cdot \frac{(1-\zeta^2)\cdot(-1)-(2-\zeta)\cdot(-2\zeta)}{(1-\zeta^2)^2} = \frac{2M_u}{l} \cdot \frac{-\zeta^2+4\zeta-1}{(1-\zeta^2)^2} = 0$$

$$\zeta \neq 1 \quad \rightarrow \quad \zeta^2 - 4\zeta + 1 = 0$$

$$\zeta = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

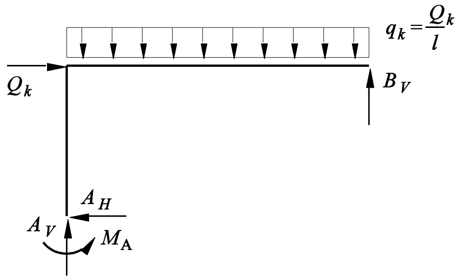
$$\zeta_{opt} < 1 \quad \rightarrow \quad \boxed{\zeta_{opt} = 2-\sqrt{3} = 0.2679}$$

$$Q_k = \frac{2M_u}{l} \cdot \frac{2-\zeta}{1-\zeta^2} = \frac{2M_u}{l} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}-6} = \frac{M_u}{l} \cdot \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 3.7321\frac{M_u}{l}$$

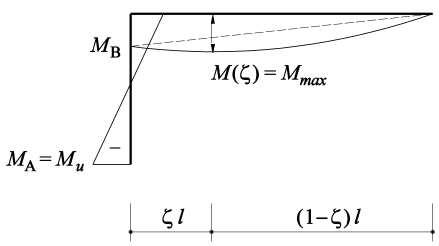
$$\rightarrow \; \boxed{Q_u \leq Q_k = 3.7321\frac{M_u}{l}}$$

Plastizitätskontrolle:

(Verifikation, dass die optimale kinematische Lösung der tatsächlichen Traglast entspricht.)



Momente:



$$\boxed{\begin{aligned} M_A &= M_u \\ Q_k &= 3.7321\frac{M_u}{l} \\ q_k &= 3.7321\frac{M_u}{l^2} \end{aligned}}$$

$\rightarrow \quad A_h = Q_k = 3.7321\dfrac{M_u}{l}$

$\rightarrow \quad M_B = -M_u + A_h \cdot \dfrac{l}{2} = -M_u + 3.7321\dfrac{M_u}{2} = 0.8660 \cdot M_u$

$\rightarrow \quad A_v = \dfrac{q_k \cdot l}{2} - \dfrac{0.8660 \cdot M_u}{l} = \dfrac{3.7321 \cdot M_u}{2l} - \dfrac{0.8660 \cdot M_u}{l} = \dfrac{M_u}{l}$

$\rightarrow \quad B_v = -\dfrac{q_k \cdot l}{2} - \dfrac{0.8660 \cdot M_u}{l} = -\dfrac{3.7321 \cdot M_u}{2l} - \dfrac{0.8660 \cdot M_u}{l} = 2.7321\dfrac{M_u}{l}$

$M_{max} \rightarrow \quad V = 0$

$\rightarrow \quad B_v - q_k \cdot (1-\zeta) \cdot l = 2.7321\dfrac{M_u}{l} - 3.7321\dfrac{M_u}{l} + 3.7321\dfrac{\zeta \cdot M_u}{l} = 0$

$\rightarrow \quad \boxed{\zeta = 0.2679}$ (Kontrolle: Vergleich mit ζ_{opt})

$$M(\zeta) = B_v \cdot (1-\zeta) \cdot l - q_k \cdot \frac{(1-\zeta)^2 \cdot l^2}{2}$$

$$M_{max} = M(\zeta = 0.2679) = 2.7321\frac{M_u}{l} \cdot (1-0.2679) \cdot l - 3.7321\frac{M_u}{l^2} \cdot \frac{(1-0.2679)^2 \cdot l^2}{2} = \underline{\underline{M_u}}$$

$\rightarrow \quad$ alle $|M| \leq |M_u|$
Fliessbedingung nirgends verletzt
$\rightarrow \quad$ vollständige Lösung

Traglast:

$$\boxed{Q_u = 3.7321\frac{M_u}{l}}$$