Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Prof. Dr. Peter Marti
Institut für Baustatik und Konstruktion
D-BAUG, Studiengang Bauingenieurwissenschaften
Frühjahrssemester

# BAUSTATIK II – KOLLOQUIUM 5, Lösung

(101-0114)

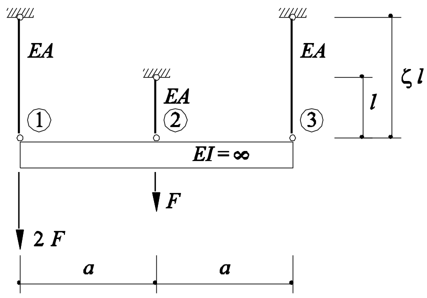
---

Thema: Elastisch-plastische Systeme

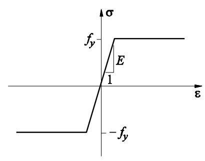
## Aufgabe, Lösung

Gegeben: System und Einwirkung

Gesucht:
a) Eigenspannungszustand nach Entlastung aus dem Bruchzustand für $\zeta > 5/2$
b) Superposition von Eigenspannungszuständen und elastisch verträglichen Spannungen für $\zeta = 5$

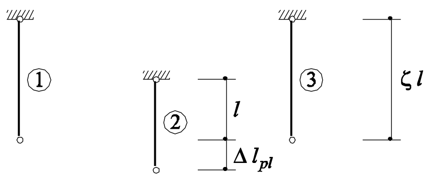



- Pendelstäbe: Querschnittsfläche $A$
- Materialverhalten der Stäbe: linear elastisch-ideal plastisch
- keine Stabilitätsprobleme
- $F$ wächst monoton bis zum Kollaps
- System initial eigenspannungsfrei
- $\zeta > 0$




## a) Eigenspannungszustand nach Entlastung aus dem Bruchzustand für $\zeta$ > 5/2

### Ohne starren Träger:

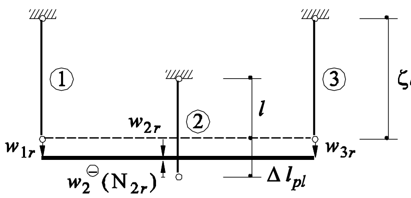



- Stäbe 1 und 3:
  würden sich auf ihre ursprüngliche Länge verkürzen / verlängern, da sie nur elastisch verformt wurden.

- Stab 2:
  würde sich auf seine ursprüngliche Länge zuzüglich der plastischen = bleibenden Verlängerung, die er in der elastisch-plastischen Phase erhielt, verkürzen.

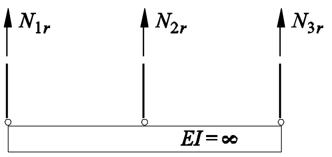
$$\Delta l_{pl} = w_{2u} - w_{2y}$$
$$N_1 = N_2 = N_3 = 0$$

### Mit starrem Träger:




- Stäbe 1 und 3:
  müssen sich elastisch verlängern
  $\rightarrow$ $N_{1r}$ und $N_{3r}$ werden postitiv.

- Stab 2:
  muss sich elastisch verkürzen
  $\rightarrow$ $N_{2r}$ wird negativ.




Gleichgewicht:

$$\Sigma F_v = 0 \quad \rightarrow \quad N_{1r} + N_{2r} + N_{3r} = 0$$

$$N_{2r} = -\left(N_{1r} + N_{3r}\right) \qquad (1)$$

$$\Sigma M_{(2)} = 0 \quad \rightarrow \quad N_{1r} \cdot a - N_{3r} \cdot a = 0$$

$$N_{1r} = N_{3r} \qquad (2)$$

Verträglichkeit:

$$EI_{\text{Balken}} = \infty \quad \rightarrow \quad w_{2r} = \frac{w_{1r} + w_{3r}}{2} \qquad (3)$$

Geometrie:

$$w_{2r} = \Delta l_{pl} + w_2^-\left(N_{2r}\right) \qquad (4)$$

siehe Zeichnung Seite 1/7 unten:

$w_2(N_{2r})$ ist negativ, deshalb Bezeichnung $w_2^-(N_{2r})$
(entspricht der elastischen Verformung infolge $N_{2r}$)

Da sich alle drei Stäbe bei der Entlastung **elastisch** verkürzen resp. verlängern und die Stäbe 1 und 3 noch nicht geflossen sind, gilt:

$$w_{1r} = \frac{N_{1r} \cdot \zeta \cdot l}{EA}$$

$$w_{3r} = \frac{N_{3r} \cdot \zeta \cdot l}{EA}$$

$$w_2^-(N_{2r}) = \frac{N_{2r} \cdot l}{EA}$$

Die plastische Verlängerung des Stabes 2 aus der elastisch-plastischen Phase beträgt:

$$\Delta l_{pl} = w_{2u} - w_{2y} = \frac{2 \cdot \zeta \cdot l \cdot f_y}{5 \cdot E} - \frac{f_y \cdot l}{E} = \frac{f_y \cdot l}{E} \cdot \left(\frac{2 \cdot \zeta}{5} - 1\right) \qquad \text{(siehe Kolloquium 4)}$$

Aus (4): $\quad w_2^-\left(N_{2r}\right) = w_{2r} - \Delta l_{pl}$

mit (3): $\quad w_2^-\left(N_{2r}\right) = \dfrac{w_{1r} + w_{3r}}{2} - \Delta l_{pl}$

$$\frac{N_{2r} \cdot l}{EA} = \frac{\left(N_{1r} + N_{3r}\right) \cdot \zeta \cdot l}{2 \cdot EA} - \Delta l_{pl}$$

und (1) resp. (2): $\quad N_{1r} = N_{3r} \quad \rightarrow \quad N_{2r} = -2N_{1r} \quad \rightarrow \quad N_{1r} = N_{3r} = -\dfrac{N_{2r}}{2}$

folgt:

$$\frac{N_{2r}\cdot l}{EA}=\frac{-2\cdot\frac{1}{2}\cdot N_{2r}\cdot\zeta\cdot l}{2\cdot EA}-\Delta l_{pl}=-\frac{N_{2r}\cdot\zeta\cdot l}{2\cdot EA}-\Delta l_{pl}$$

$$\frac{N_{2r}\cdot l}{2\cdot EA}\cdot\left(2+\zeta\right)=-\Delta l_{pl}$$

$$N_{2r}=-\Delta l_{pl}\cdot\frac{2\cdot EA}{l\cdot\left(2+\zeta\right)}=\underline{\underline{-2\cdot Af_y\cdot\frac{2\zeta-5}{5\cdot\left(2+\zeta\right)}}}$$

Für $\zeta=5$:

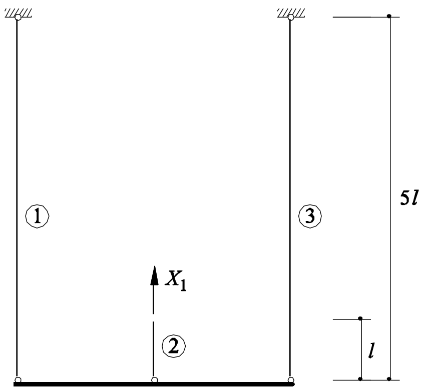
$$\Delta l_{pl}=\frac{f_y\cdot l}{E}\cdot\left(\frac{2\cdot\zeta}{5}-1\right)=\frac{f_y\cdot l}{E}\cdot\left(\frac{2\cdot 5}{5}-1\right)=\frac{f_y\cdot l}{E}$$

$$N_{2r}=-\frac{f_y\cdot l}{E}\cdot\frac{2\cdot EA}{l\cdot\left(2+5\right)}=\underline{\underline{-\frac{2}{7}\cdot Af_y}}$$

$$\underline{\underline{N_{1r}=N_{3r}=\frac{1}{7}\cdot Af_y}}$$

$$\boxed{\left\{N_r\right\}=\begin{Bmatrix}N_{1r}\\N_{2r}\\N_{3r}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\frac{1}{7}\\-\frac{2}{7}\\\frac{1}{7}\end{Bmatrix}\cdot Af_y}$$

Kontrolle von Stab 2 mit Kraftmethode:




$$X_1=1\ \rightarrow\ N_1=N_3=-\frac{1}{2}$$

$$\delta_1=-\Delta l_{pl}=-\left(w_{2u}-w_{2y}\right)=-\frac{f_y\cdot l}{E}$$

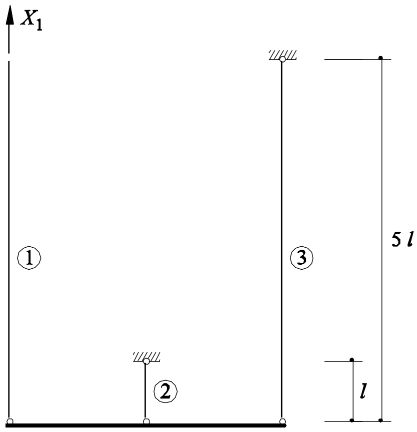
$$\delta_{10}=0$$

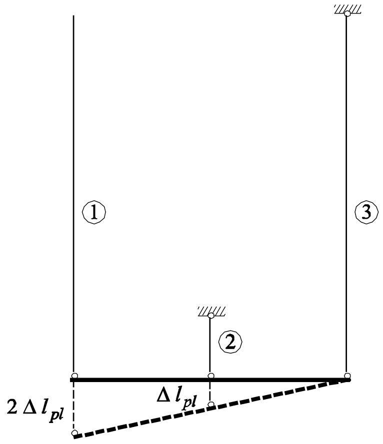
$$\delta_{11}=\frac{1\cdot 1\cdot l}{EA}+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{-1}{2\cdot EA}\right)\cdot\zeta\cdot l=\frac{7\cdot l}{2\cdot EA}$$

$$\delta_1=\delta_{10}+X_1\cdot\delta_{11}=X_1\cdot\delta_{11}$$

$$\rightarrow\ X_1=\frac{\delta_1}{\delta_{11}}=-\frac{f_y\cdot l}{E}\cdot\frac{2\cdot EA}{7\cdot l}=\underline{\underline{-\frac{2}{7}\cdot Af_y=N_{2r}}}$$

Kontrolle von Stab 1 mit Kraftmethode:




$$X_1 = 1 \quad \rightarrow \quad N_3 = 1, \quad N_2 = -2$$

$$\delta_{10} = -2 \cdot \Delta l_{pl} = -2 \cdot \frac{f_y \cdot l}{E}$$

$$\delta_{11} = (-2) \cdot \frac{(-2)}{EA} \cdot l + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{EA} \cdot \zeta \cdot l = \frac{14 \cdot l}{EA}$$

$$\delta_1 = \delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} = 0 \quad \rightarrow X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{2 \cdot f_y \cdot l}{E} \cdot \frac{EA}{14 \cdot l} = \underline{\underline{\frac{1}{7} \cdot Af_y = N_{1r}}}$$

**b) <u>Superposition von Eigenspannungszuständen *P*·{*N*$_0$} und elastisch verträglichen Spannungszuständen *F*·{*N*$_F$} für ζ = 5</u>**

$\boxed{\{N\} = P \cdot \{N_0\} + F \cdot \{N_F\}}$ (s. Skript vom 12.5.04, Seite 19)

$P$ : Eigenspannungs- oder Zwängungsparameter
$F$ : Belastungsintensität

Für **ζ = 5** ergeben sich für das vorliegende System folgende Werte der Belastungsgeschichte (s. Koll. 4 und Koll 5.1):

- Elastische Phase (initial eigenspannungsfrei: $P = 0$):

$$\{N\} = F \cdot \begin{Bmatrix} \dfrac{5+\zeta}{2+\zeta} \\ \dfrac{3\zeta}{2+\zeta} \\ \dfrac{1-\zeta}{2+\zeta} \end{Bmatrix} = F \cdot \begin{Bmatrix} \dfrac{10}{7} \\ \dfrac{15}{7} \\ -\dfrac{4}{7} \end{Bmatrix}$$

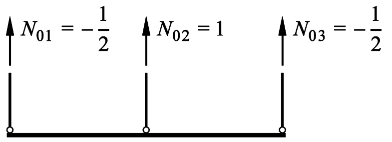
- Fliesslast: $N_2 \overset{!}{=} A f_y \quad \rightarrow \quad \underline{F_y = \frac{7}{15} A f_y}$
- Elastisch-plastische Phase:

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{5F - Af_y}{2} \\ Af_y \\ \dfrac{F - Af_y}{2} \end{Bmatrix}$$

- Traglast: $N_1 \overset{!}{=} A f_y \quad \rightarrow \quad \underline{F_u = \frac{3}{5} A f_y}$

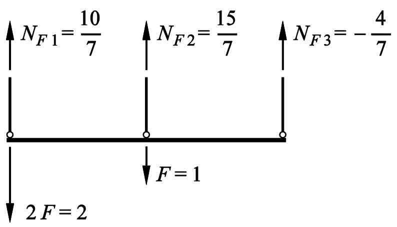
**Ermittlung von $P \cdot \{N_0\}$ und $F \cdot \{N_F\}$:**

$P \cdot \{N_0\}$: Eigenspannungszustand (Gleichgewichtszustand ohne Last $F$):




$$\begin{Bmatrix} N_{10} \\ N_{20} \\ N_{30} \end{Bmatrix} = P \cdot \{N_0\} = P \cdot \begin{Bmatrix} N_{01} \\ N_{02} \\ N_{03} \end{Bmatrix} = P \cdot \begin{Bmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ 1 \\ -\dfrac{1}{2} \end{Bmatrix}$$

$F \cdot \{N_F\}$: elastisch verträglicher Spannungszustand (Gleichgewichtszustand mit Last $F$):




$$\begin{Bmatrix} N_{1F} \\ N_{2F} \\ N_{3F} \end{Bmatrix} = F \cdot \{N_F\} = F \cdot \begin{Bmatrix} N_{F1} \\ N_{F2} \\ N_{F3} \end{Bmatrix} = F \cdot \begin{Bmatrix} \dfrac{10}{7} \\ \dfrac{15}{7} \\ -\dfrac{4}{7} \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\{N\} = P \cdot \{N_0\} + F \cdot \{N_F\} = P \cdot \begin{Bmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ 1 \\ -\dfrac{1}{2} \end{Bmatrix} + F \cdot \begin{Bmatrix} \dfrac{10}{7} \\ \dfrac{15}{7} \\ -\dfrac{4}{7} \end{Bmatrix}}$$

**Ermittlung der Fliessfigur:**

Für jeden Stab gilt: $\boxed{-Af_y \le N_i = P \cdot N_{0i} + F \cdot N_{Fi} \le Af_y}$

Superposition für Stab 1:

$N_1 > 0: \quad N_1 = P \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + F \cdot \frac{10}{7} \overset{!}{=} Af_y$

Gerade durch $(0, -2Af_y)$ und $(\frac{7}{10} Af_y, 0)$

$N_1 < 0: \quad N_1 = P \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + F \cdot \frac{10}{7} \overset{!}{=} -Af_y$

Gerade durch $(0, 2Af_y)$ und $(-\frac{7}{10} Af_y, 0)$

Superposition für Stab 2:

$N_2 > 0: \quad N_2 = P \cdot 1 + F \cdot \frac{15}{7} \overset{!}{=} Af_y$

Gerade durch $(0, Af_y)$ und $(\frac{7}{15} Af_y, 0)$

$N_2 < 0: \quad N_2 = P \cdot 1 + F \cdot \frac{15}{7} \overset{!}{=} -Af_y$

Gerade durch $(0, -Af_y)$ und $(-\frac{7}{15} Af_y, 0)$

Superposition für Stab 3:

$N_3 > 0: \quad N_3 = P \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + F \cdot \left(-\frac{4}{7}\right) \overset{!}{=} Af_y$

Gerade durch $(0, -2Af_y)$ und $(-\frac{7}{4} Af_y, 0)$

$N_3 < 0: \quad N_3 = P \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + F \cdot \left(-\frac{4}{7}\right) \overset{!}{=} -Af_y$

Gerade durch $(0, 2Af_y)$ und $(\frac{7}{4} Af_y, 0)$

**Ermittlung des Eigenspannungszustandes nach Entlastung aus $F_u$:**

Stabkräfte beim Erreichen der Traglast:

$$\{N_u\} = P_r \cdot \{N_0\} + F_u \cdot \{N_F\}$$

Eigenspannungszustand nach der Entlastung aus $F_u$:

$$P_r \cdot \{N_0\} = \{N_u\} - F_u \cdot \{N_F\}$$

$$P_r \cdot \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Af_y \\ Af_y \\ -\frac{Af_y}{5} \end{Bmatrix} - \frac{3Af_y}{5} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{10}{7} \\ \frac{15}{7} \\ -\frac{4}{7} \end{Bmatrix}$$

Aus der Gleichung für Stab 2 folgt:

$$P_r = Af_y - \frac{3Af_y}{5}\cdot\frac{15}{7} = \underline{-\frac{2}{7}Af_y}$$

Verbleibende Stabkräfte nach der Entlastung aus $F_u$:

$$\boxed{\{N_r\} = P_r\cdot\{N_0\} = P_r\cdot\begin{Bmatrix}-\frac{1}{2}\\ 1\\ -\frac{1}{2}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\frac{1}{7}\\ -\frac{2}{7}\\ \frac{1}{7}\end{Bmatrix}\cdot Af_y}$$

Wiederbelastung bis $F = F_y^-$: $\{N\} = \{N_u\} - (F_u - F)\cdot\{N_F\}$ (elastisches Verhalten: $P = 0$)

Stab 2 fliesst auf Druck: $N_2 \overset{!}{=} -Af_y$

$$-Af_y = Af_y - \left(\frac{3}{5}Af_y - F_y^-\right)\cdot\frac{15}{7}$$

$$\underline{F_y^- = -\frac{1}{3}Af_y} \qquad \left(\left|F_y^-\right| = \frac{1}{3} < \left|F_y^+\right| = \frac{7}{15}\right)$$

**Fliessfigur:**