Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Prof. Dr. Peter Marti
Institut für Baustatik und Konstruktion
D-BAUG, Studiengang Bauingenieurwissenschaften

BAUSTATIK II – KOLLOQUIUM 4, Lösung

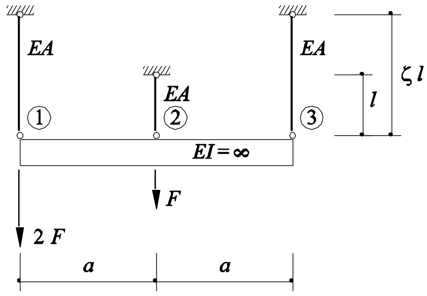
(101-0114)

Thema: Elastisch-plastische Systeme

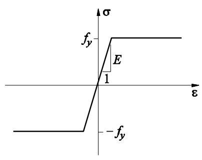
Aufgabe, Lösung

Gegeben: System und Einwirkung

Gesucht:
a) Systemverhalten in Abhängigkeit des Parameters ζ bei monoton wachsendem F bis zum Erreichen der Traglast F_u.
b) Für $\zeta = 5$:
- Diagramm F / F_u in Funktion von N_i / Af_y
- Diagramm w_2 / w_{2u} in Funktion von N_i / Af_y

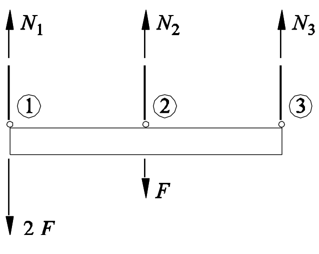


- Pendelstäbe: Querschnittsfläche A
- Materialverhalten der Stäbe: linear elastisch-ideal plastisch
- keine Stabilitätsprobleme
- F wächst monoton bis zum Kollaps
- System initial eigenspannungsfrei
- $\zeta > 0$



a) Systemverhalten bei monoton wachsendem *Q*

Elastische Phase:



System 1-fach statisch unbestimmt:
→ Gleichgewicht und Verträglichkeit zur Ermittlung der 3 Unbekannten

Gleichgewicht:

$$\Sigma F_v = 0 \quad \rightarrow \quad F + 2F - (N_1 + N_2 + N_3) = 0$$

$$3F - (N_1 + N_2 + N_3) = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma M_{(2)} = 0 \quad \rightarrow \quad N_1 \cdot a - N_3 \cdot a - 2F \cdot a = 0$$

$$N_1 - N_3 - 2F = 0 \qquad (2)$$

Verträglichkeit:

$$EI_{\text{Balken}} = \infty$$

$$w_2 = \frac{w_1 + w_3}{2} \quad \rightarrow \quad w_2 - \frac{w_1}{2} - \frac{w_3}{2} = 0$$

Es gilt: $w_1 = \Delta l_1$, $w_2 = \Delta l_2$, $w_3 = \Delta l_3$

$$\rightarrow \quad \frac{N_2 \cdot l}{EA} - \frac{1}{2} \cdot \frac{N_1 \cdot \zeta \cdot l}{EA} - \frac{1}{2} \cdot \frac{N_3 \cdot \zeta \cdot l}{EA} = 0$$

$$\rightarrow \quad N_2 - \frac{\zeta}{2} \cdot N_1 - \frac{\zeta}{2} \cdot N_3 = 0 \qquad (3)$$

Auflösung des Gleichungssystems:

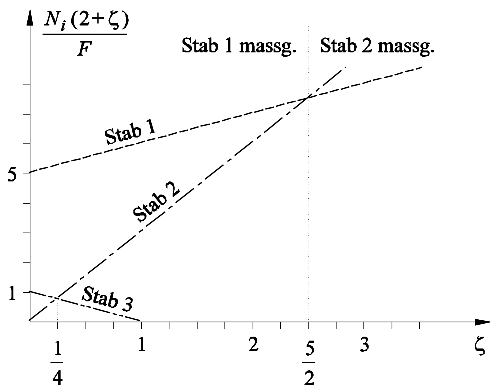
$$\boxed{\{N\} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} = F \cdot \begin{Bmatrix} \frac{5+\zeta}{2+\zeta} \\ \frac{3\zeta}{2+\zeta} \\ \frac{1-\zeta}{2+\zeta} \end{Bmatrix}}$$

Kontrolle: $N_1 + N_2 + N_3 = 3F$ i.O.

Fliesslast:

Welcher Stab erreicht zuerst die Fliessgrenze?

grafische Betrachtung:



$\rightarrow \quad 0 < \zeta < 5/2$: Stab 1 massgebend

$\rightarrow \quad 5/2 < \zeta < \infty$: Stab 2 massgebend

Analytische Betrachtung:

Die Stäbe können auf Zug oder Druck fliessen $\rightarrow$ Vergleich der Betragswerte

- $$|N_1| - |N_3| = \frac{F}{2+\zeta} \cdot \left(\underbrace{|5+\zeta|}_{>0} - \underbrace{|1-\zeta|}_{>0/<0} \right)$$

  $1-\zeta > 0: \quad |5+\zeta| - |1-\zeta| = 5+\zeta-1+\zeta = 4+2\zeta > 0$

  $1-\zeta < 0: \quad |5+\zeta| - |1-\zeta| = 5+\zeta+1-\zeta = 6$

  $|N_1| > |N_3|$ für alle ζ $\rightarrow$ Stab 1 fliesst immer vor Stab 3

- $$|N_1| - |N_2| = \frac{F}{2+\zeta} \cdot \left(\underbrace{|5+\zeta|}_{>0} - \underbrace{|3\zeta|}_{>0} \right) = \frac{F}{2+\zeta} \cdot (5-2\zeta)$$

$$5-2\zeta<0 \quad \rightarrow \quad \zeta > \frac{5}{2}: \qquad |N_1|<|N_2| \quad \rightarrow \quad \text{Stab 2 fliesst vor Stab 1}$$

$$5-2\zeta>0 \quad \rightarrow \quad \zeta < \frac{5}{2}: \qquad |N_1|>|N_2| \quad \rightarrow \quad \text{Stab 1 fliesst vor Stab 2}$$

$$5-2\zeta=0 \quad \rightarrow \quad \zeta = \frac{5}{2}: \qquad |N_1|=|N_2| \quad \rightarrow \quad \text{Stab 1 und Stab 2 fliessen gleichzeitig}$$

- $$|N_2| - |N_3| = \frac{F}{2+\zeta} \cdot \left(\underbrace{|3\zeta|}_{>0} - \underbrace{|1-\zeta|}_{>0/<0} \right)$$

$$1-\zeta>0: \quad |3\zeta|-|1-\zeta| = 3\zeta-1+\zeta = 4\zeta-1>0 \quad \text{für } \zeta > \frac{1}{4}$$

$$|3\zeta|-|1-\zeta| = 3\zeta-1+\zeta = 4\zeta-1<0 \quad \text{für } \zeta < \frac{1}{4}$$

$$1-\zeta<0: \quad |3\zeta|-|1-\zeta| = 3\zeta+1-\zeta = 2\zeta+1>0$$

$$|N_2|>|N_3| \quad \text{für } \zeta > \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad \text{Stab 2 fliesst vor Stab 3}$$

$$|N_2|<|N_3| \quad \text{für } \zeta < \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad \text{Stab 3 fliesst vor Stab 2}$$

Da Stab 1 immer vor Stab 3 fliesst, hätte dieser Fall nicht weiter untersucht werden müssen. (Stab 3 ist nie massgebend; siehe auch grafische Betrachtung.)

Zusammenfassung:

$0<\zeta<\frac{1}{4}$: $|N_1|>|N_3|$

$|N_1|>|N_2| \quad \rightarrow \quad$ Stab 1 fliesst zuerst

$|N_2|<|N_3|$

$\frac{1}{4}<\zeta<\frac{5}{2}$: $|N_1|>|N_3|$

$|N_1|>|N_2| \quad \rightarrow \quad$ Stab 1 fliesst zuerst

$|N_2|>|N_3|$

$\zeta=\frac{5}{2}$: $|N_1|=|N_2| \quad \rightarrow \quad$ Stab 1 und Stab 2 fliessen gleichzeitig

$\zeta>\frac{5}{2}$: $|N_1|>|N_3|$

$|N_2|>|N_1| \quad \rightarrow \quad$ Stab 2 fliesst zuerst

$|N_2|>|N_3|$

Fliesslast:

$\boxed{\zeta > \frac{5}{2}}$: Stab 2 fliesst zuerst $\rightarrow N_2 = F \cdot \frac{3\zeta}{2+\zeta} \overset{!}{=} Af_y \rightarrow \boxed{F_y^I = Af_y \cdot \frac{2+\zeta}{3\zeta}}$

$\boxed{\zeta < \frac{5}{2}}$: Stab 1 fliesst zuerst $\rightarrow N_1 = F \cdot \frac{5+\zeta}{2+\zeta} \overset{!}{=} Af_y \rightarrow \boxed{F_y^{II} = Af_y \cdot \frac{2+\zeta}{5+\zeta}}$

$\boxed{\zeta = \frac{5}{2}}$: Stab 1 und Stab 2 fliessen gleichzeitig $\rightarrow$ Fliesslast = Traglast $\rightarrow$ Kollaps

$$\rightarrow N_1 = N_2 \overset{!}{=} Af_y \rightarrow \boxed{F_y^I = F_y^{II} = \frac{3}{5} Af_y = F_u}$$

Im Folgenden werden die zwei Fälle $\zeta > 5/2$ und $\zeta < 5/2$ unterschieden:

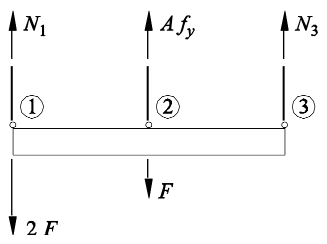
Fall 1: $\zeta > 5/2$

Fliesslast:

Stab 2 fliesst zuerst $\rightarrow N_2 = F \cdot \frac{3\zeta}{2+\zeta} \overset{!}{=} Af_y \rightarrow \boxed{F_y^I = Af_y \cdot \frac{2+\zeta}{3\zeta}}$

Stabkräfte beim Erreichen der Fliesslast:

$F = F_y^I = Af_y \cdot \frac{2+\zeta}{3\zeta}, \quad N_{2y} = Af_y \quad \rightarrow$ Ende der elastischen Phase:



$$\boxed{\{N_y\} = \begin{Bmatrix} N_{1y} \\ N_{2y} \\ N_{3y} \end{Bmatrix} = F_y \cdot \begin{Bmatrix} \frac{5+\zeta}{2+\zeta} \\ \frac{3\zeta}{2+\zeta} \\ \frac{1-\zeta}{2+\zeta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{5+\zeta}{3\zeta} \\ 1 \\ \frac{1-\zeta}{3\zeta} \end{Bmatrix} \cdot Af_y}$$

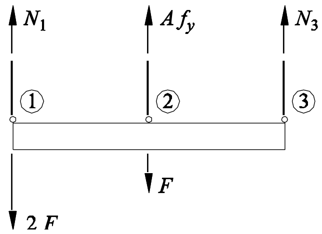
Kontrolle: $N_{1y} + N_{2y} + N_{3y} = 3F_y^I$ i.O.

Durchbiegungen beim Erreichen der Fliesslast (Ende der elastischen Phase):

$$\boxed{\{w_y\} = \begin{Bmatrix} w_{1y} \\ w_{2y} \\ w_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta l_{1y} \\ \Delta l_{2y} \\ \Delta l_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{N_{1y} \cdot \zeta \cdot l}{EA} \\ \frac{N_{2y} \cdot l}{EA} \\ \frac{N_{3y} \cdot \zeta \cdot l}{EA} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{5+\zeta}{3\zeta} \cdot \frac{f_y \cdot \zeta \cdot l}{E} \\ \frac{f_y \cdot l}{E} \\ \frac{1-\zeta}{3\zeta} \cdot \frac{f_y \cdot \zeta \cdot l}{E} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{5+\zeta}{3} \\ 1 \\ \frac{1-\zeta}{3} \end{Bmatrix} \cdot \frac{f_y \cdot l}{E}}$$

Elastisch-plastische Phase:

Stab 2 fliesst: $\rightarrow$ $\boxed{N_2 = Af_y}$



$\rightarrow$ System ist jetzt statisch bestimmt

Gleichgewicht muss erfüllt sein $\rightarrow$ Die Gleichungen (1) und (2) aus der elastischen Phase sind auch jetzt gültig.

$$\Sigma F_v = 0 \quad \rightarrow \quad F + 2F - \left(N_1 + Af_y + N_3\right) = 0$$

$$3F - \left(N_1 + Af_y + N_3\right) = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma M_{(1)} = 0 \quad \rightarrow \quad Af_y \cdot a + N_3 \cdot 2a - F \cdot a = 0$$

$$Af_y + 2N_3 - F = 0 \qquad (2)$$

Die Gleichung (3) aus der elastischen Phase ist nicht mehr gültig, da der Stab 2 fliesst und somit seine Längenänderung **nicht** mehr der elastischen Verlängerung entspricht: $\Delta l_2 \neq \frac{N_2 \cdot l}{EA}$

Dafür gilt jetzt: $N_2 = Af_y$ (3)

Auflösung des Gleichungssystems:

$$\boxed{\{N\} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{5F - Af_y}{2} \\ Af_y \\ \dfrac{F - Af_y}{2} \end{Bmatrix}}$$

Kontrolle: $N_1 + N_2 + N_3 = 3F$ i.O.

<u>Durchbiegungen für $F > F_y$:</u>

Die Stäbe 1 und 3 verhalten sich immer noch elastisch:

$$w_1 = \Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot \zeta \cdot l}{EA} = \frac{5F - Af_y}{2} \cdot \frac{\zeta \cdot l}{EA}$$

$$w_3 = \Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot \zeta \cdot l}{EA} = \frac{F - Af_y}{2} \cdot \frac{\zeta \cdot l}{EA}$$

Da Stab 2 fliesst $\rightarrow$ $w_2 = \Delta l_2 \neq \dfrac{N_2 \cdot l}{EA}$

Die Verträglichkeit $w_2 = \dfrac{w_1 + w_3}{2}$ muss aber wegen $EI_{\text{Balken}} = \infty$ immer erfüllt sein.

$$w_2 = \frac{w_1 + w_3}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5F - Af_y}{2} + \frac{F - Af_y}{2} \right) \cdot \frac{\zeta \cdot l}{EA} = \frac{3F - Af_y}{2} \cdot \frac{\zeta \cdot l}{EA}$$

$$\boxed{\{w\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \dfrac{w_1 + w_3}{2} \\ w_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta l_1 \\ \Delta l_2 \\ \Delta l_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{N_1 \cdot \zeta \cdot l}{EA} \\ \dfrac{(N_1 + N_3) \cdot \zeta \cdot l}{2EA} \\ \dfrac{N_3 \cdot \zeta \cdot l}{EA} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{5F - Af_y}{2} \\ \dfrac{3F - Af_y}{2} \\ \dfrac{F - Af_y}{2} \end{Bmatrix} \cdot \frac{\zeta \cdot l}{EA}}$$

Traglast:

Kollaps tritt ein, sobald Stab 1 oder Stab 3 ebenfalls die Fliessgrenze (auf Zug oder Druck) erreicht (Mechanismus). Dabei ist zu beachten, dass es durchaus möglich ist, dass ein Stab in der elastischen Phase auf Druck (Zug), in der elastisch-plastischen Phase jedoch auf Zug (Druck) beansprucht wird.

<u>Welcher Stab erreicht als nächster die Fliessgrenze?</u>

<u>Stab 3</u>:

elastisch: $N_3 = \dfrac{1-\zeta}{2+\zeta} \cdot F < 0$ $\rightarrow$ Druck für $\zeta > 5/2$

elastisch-plastisch: $N_3 = \dfrac{F - Af_y}{2}$ $\rightarrow$ Zug aus Zuwachs von F
$\rightarrow$ Erreichen der Fliessgrenze auf Zug

Mit: $N_3 = \dfrac{F - Af_y}{2} \overset{!}{=} Af_y$ $\rightarrow$ Stab 3 beginnt zu fliessen

folgt: $F(N_3 = Af_y) = 3Af_y$

<u>Stab 1</u>:

elastisch: $N_1 = F \cdot \dfrac{5+\zeta}{2+\zeta}$ $\rightarrow$ Zug für $\zeta > 5/2$

elastisch-plastisch: $N_1 = \dfrac{5F - Af_y}{2}$ $\rightarrow$ Zug aus Zuwachs von F
$\rightarrow$ Erreichen der Fliessgrenze auf Zug

Mit: $N_1 = \dfrac{5F - Af_y}{2} \overset{!}{=} Af_y \quad \rightarrow$ Stab 1 beginnt zu fliessen

folgt: $F(N_1 = Af_y) = \dfrac{3}{5} \cdot Af_y$

Traglast

$$F(N_1 = Af_y) < F(N_3 = Af_y) \quad \rightarrow \quad \boxed{F_u^I = \frac{3}{5} \cdot Af_y}$$

Kontrolle: $F_y^I = \dfrac{2+\zeta}{3\zeta} \cdot Af_y < \dfrac{3}{5} \cdot Af_y = F_u^I$ i.O.

Die Traglast ist unabhängig von ζ !

Stabkräfte beim Erreichen der Traglast (unabhängig von ζ !):

$$F = F_u = \frac{3}{5} \cdot Af_y$$

$$N_{1u} = N_{2u} = Af_y$$

Gleichgewicht:

$$\Sigma F_v = 0 \quad \rightarrow \quad 3F_u - \left(Af_y + Af_y + N_{3u}\right) = 0$$

$$\boxed{\{N_u\} = \begin{Bmatrix} N_{1u} \\ N_{2u} \\ N_{3u} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -\dfrac{1}{5} \end{Bmatrix} \cdot Af_y}$$

Kontrolle: $N_{1u} + N_{2u} + N_{3u} = 3F_u = \dfrac{9}{5} Af_y$ i.O.

Durchbiegungen beim Erreichen der Traglast:

Stab 1 ist gerade am Ende des elastischen Verhaltens, Stab 2 fliesst, Stab 3 verhält sich immer noch elastisch.

$$\boxed{\{w_u\} = \begin{Bmatrix} w_{1u} \\ w_{2u} \\ w_{3u} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_{1u} \\ \dfrac{w_{1u} + w_{3u}}{2} \\ w_{3u} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta l_{1u} \\ \Delta l_{2u} \\ \Delta l_{3u} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{N_{1u} \cdot \zeta \cdot l}{EA} \\ \dfrac{(N_{1u} + N_{3u}) \cdot \zeta \cdot l}{2EA} \\ \dfrac{N_{3u} \cdot \zeta \cdot l}{EA} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \zeta \\ \dfrac{2 \cdot \zeta}{5} \\ -\dfrac{\zeta}{5} \end{Bmatrix} \cdot \frac{f_y \cdot l}{E}}$$

Die **Verformungen** beim Kollaps sind abhängig von ζ !

Verhältnis:

$$\frac{w_{2y}}{w_{2u}} = \frac{f_y \cdot l \cdot 5 \cdot E}{E \cdot 2 \cdot \zeta \cdot l \cdot f_y} = \underline{\frac{5}{2 \cdot \zeta}}$$

$$\boxed{\zeta = \frac{5}{2}} \rightarrow \quad \frac{w_{2y}}{w_{2u}} = 1$$

→ keine elastisch-plastische Phase
→ sprödes Verhalten

$$\boxed{\zeta > \frac{5}{2}} \rightarrow \quad \frac{w_{2y}}{w_{2u}} < 1$$

→ Übergang in elastisch-plastische Phase
→ duktiles Verhalten

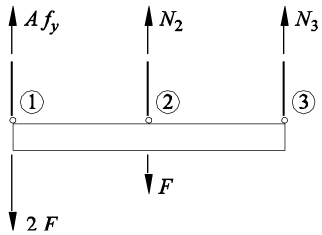
Fall 2: $\zeta < 5/2$

Fliesslast:

Stab 1 fliesst zuerst $\rightarrow N_1 = F \cdot \dfrac{5+\zeta}{2+\zeta} \overset{!}{=} Af_y \rightarrow$ $\boxed{F_y^{II} = Af_y \cdot \dfrac{2+\zeta}{5+\zeta}}$

Stabkräfte beim Erreichen der Fliesslast:

$F = F_y^{II} = Af_y \cdot \dfrac{2+\zeta}{5+\zeta}, \quad N_{1y} = Af_y \qquad \rightarrow$ Ende der elastischen Phase:



$$\boxed{\left\{N_y\right\} = \begin{Bmatrix} N_{1y} \\ N_{2y} \\ N_{3y} \end{Bmatrix} = F_y \cdot \begin{Bmatrix} \dfrac{5+\zeta}{2+\zeta} \\ \dfrac{3\zeta}{2+\zeta} \\ \dfrac{1-\zeta}{2+\zeta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \dfrac{3\zeta}{5+\zeta} \\ \dfrac{1-\zeta}{5+\zeta} \end{Bmatrix} \cdot Af_y}$$

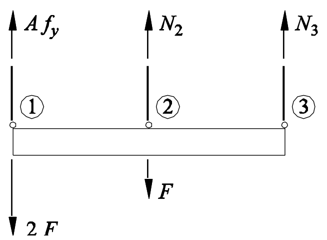
Kontrolle: $N_{1y} + N_{2y} + N_{3y} = 3F_y^{II}$ i.O.

Durchbiegungen beim Erreichen der Fliesslast (Ende der elastischen Phase):

$$\boxed{\left\{w_y\right\} = \begin{Bmatrix} w_{1y} \\ w_{2y} \\ w_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta l_{1y} \\ \Delta l_{2y} \\ \Delta l_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{N_{1y} \cdot \zeta \cdot l}{EA} \\ \dfrac{N_{2y} \cdot l}{EA} \\ \dfrac{N_{3y} \cdot \zeta \cdot l}{EA} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{f_y \cdot \zeta \cdot l}{E} \\ \dfrac{3 \cdot \zeta}{5+\zeta} \cdot \dfrac{f_y \cdot l}{E} \\ \dfrac{\zeta \cdot (1-\zeta)}{5+\zeta} \cdot \dfrac{f_y \cdot l}{E} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \zeta \\ \dfrac{3 \cdot \zeta}{5+\zeta} \\ \dfrac{\zeta \cdot (1-\zeta)}{5+\zeta} \end{Bmatrix} \cdot \dfrac{f_y \cdot l}{E}}$$

Elastisch-plastische Phase:

Stab 1 fliesst: → $\boxed{N_1 = Af_y}$



→ System ist jetzt statisch bestimmt

Gleichgewicht muss erfüllt sein → Die Gleichungen (1) und (2) aus der elastischen Phase sind auch jetzt gültig.

$$\Sigma F_v = 0 \quad \rightarrow \quad F + 2F - \left(Af_y + N_2 + N_3\right) = 0$$

$$3F - \left(Af_y + N_2 + N_3\right) = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma M_{(2)} = 0 \quad \rightarrow \quad Af_y \cdot a - N_3 \cdot a - 2F \cdot a = 0$$

$$Af_y - N_3 - 2F = 0 \qquad (2)$$

Die Gleichung (3) aus der elastischen Phase ist nicht mehr gültig, da der Stab 1 fliesst und somit seine Längenänderung **nicht** mehr der elastischen Verlängerung entspricht: $\Delta l_1 \neq \dfrac{N_1 \cdot \zeta \cdot l}{EA}$

Dafür gilt jetzt: $N_1 = Af_y$ (3)

Auflösung des Gleichungssystems:

$$\boxed{\{N\} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Af_y \\ 5F - 2Af \\ Af_y - 2F \end{Bmatrix}}$$

Kontrolle: $N_1 + N_2 + N_3 = 3F$ i.O.

<u>Durchbiegungen für $F > F_y$:</u>

Die Stäbe 2 und 3 verhalten sich immer noch elastisch:

$$w_2 = \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l}{EA} = \left(5F - 2Af_y\right) \cdot \frac{l}{EA}$$

$$w_3 = \Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot \zeta \cdot l}{EA} = \left(Af_y - 2F\right) \cdot \frac{\zeta \cdot l}{EA}$$

Da Stab 1 fliesst $\rightarrow\ w_1 = \Delta l_1 \neq \frac{N_1 \cdot \zeta \cdot l}{EA}$

Die Verträglichkeit muss aber wegen $EI_{\text{Balken}} = \infty$ immer erfüllt sein:

$$w_1 = 2w_2 - w_3 = \left[2F \cdot (5+\zeta) - Af_y \cdot (4+\zeta)\right] \cdot \frac{l}{EA}$$

$$\boxed{\{w\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2w_2 - w_3 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta l_1 \\ \Delta l_2 \\ \Delta l_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{2N_2 \cdot l - N_3 \cdot \zeta \cdot l}{EA} \\ \frac{N_2 \cdot l}{EA} \\ \frac{N_3 \cdot \zeta \cdot l}{EA} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2F \cdot (5+\zeta) - Af_y \cdot (4+\zeta) \\ 5F - 2Af_y \\ (Af_y - 2F) \cdot \zeta \end{Bmatrix} \cdot \frac{l}{EA}}$$

Traglast:

Kollaps tritt ein, sobald Stab 2 oder Stab 3 ebenfalls die Fliessgrenze (auf Zug oder Druck) erreicht (Mechanismus). Dabei ist zu beachten, dass es durchaus möglich ist, dass ein Stab in der elastischen Phase auf Druck (Zug), in der elastisch-plastischen Phase jedoch auf Zug (Druck) beansprucht wird.

<u>Welcher Stab erreicht als nächster die Fliessgrenze?</u>

<u>Stab 3:</u>

elastisch: $N_3 = \frac{1-\zeta}{2+\zeta} \cdot F$ $\rightarrow$ Druck für $1 < \zeta < 5/2$

elastisch-plastisch: $N_3 = Af_y - 2F$ $\rightarrow$ Druck aus Zuwachs von F
$\rightarrow$ Erreichen der Fliessgrenze auf Druck

Mit $N_3 = Af_y - 2F \overset{!}{=} -Af_y$ $\rightarrow$ Stab 3 beginnt zu fliessen

folgt: $F(N_3 = Af_y) = Af_y$

<u>Stab 2:</u>

elastisch: $N_2 = F \cdot \frac{3\zeta}{2+\zeta}$ $\rightarrow$ Zug aus Zuwachs von F

elastisch-plastisch: $N_2 = 5F - 2Af_y$ $\rightarrow$ Zug aus Zuwachs von F
$\rightarrow$ Erreichen der Fliessgrenze auf Zug

Mit: $N_2 = 5F - 2Af_y \overset{!}{=} Af_y \quad \rightarrow$ Stab 2 beginnt zu fliessen

folgt: $F(N_2 = Af_y) = \dfrac{3Af_y}{5}$

Traglast:

$$F(N_2 = Af_y) < F(N_3 = Af_y) \quad \rightarrow \quad \boxed{F_u^{II} = \frac{3Af_y}{5}}$$

Kontrolle: $F_y^{II} = \dfrac{2+\zeta}{5+\zeta} \cdot Af_y < \dfrac{3}{5} \cdot Af_y = F_u^{II}$ i.O.

Die **Traglast** ist unabhängig von ζ !

Stabkräfte beim Erreichen der Traglast (unabhängig von ζ !):

$$F = F_u = \frac{3}{5} \cdot Af_y$$
$$N_{1u} = N_{2u} = Af_y$$

Gleichgewicht:

$$\Sigma F_v = 0 \quad \rightarrow \quad 3F_u - \left(Af_y + Af_y + N_{3u}\right) = 0$$

$$\boxed{\{N_u\} = \begin{Bmatrix} N_{1u} \\ N_{2u} \\ N_{3u} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{5} \end{Bmatrix} \cdot Af_y}$$

Kontrolle: $N_{1u} + N_{2u} + N_{3u} = 3F_u = \dfrac{9}{5} Af_y$ i.O.

Durchbiegungen beim Erreichen der Traglast:

Stab 1 fliesst, Stab 2 ist gerade am Ende des elastischen Verhaltens, Stab 3 verhält sich immer noch elastisch.

$$\boxed{\{w_u\} = \begin{Bmatrix} w_{1u} \\ w_{2u} \\ w_{3u} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2w_{2u} - w_{3u} \\ w_{2u} \\ w_{3u} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta l_{1u} \\ \Delta l_{2u} \\ \Delta l_{3u} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{2N_{2u} \cdot l - N_{3u} \cdot \zeta \cdot l}{EA} \\ \dfrac{N_{2u} \cdot l}{EA} \\ \dfrac{N_{3u} \cdot \zeta \cdot l}{EA} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left(2 + \dfrac{\zeta}{5}\right) \\ 1 \\ -\dfrac{\zeta}{5} \end{Bmatrix} \cdot \frac{f_y \cdot l}{E}}$$

Die **Verformungen** beim Kollaps sind abhängig von ζ !

Verhältnis:

$$\frac{w_{1y}}{w_{1u}} = \frac{f_y \cdot \zeta \cdot l \cdot E}{\left(2+\frac{\zeta}{5}\right) E \cdot f_y \cdot l} = \underline{\frac{5\cdot\zeta}{10+\zeta}}$$

$$\boxed{\zeta = \frac{5}{2}} \rightarrow \qquad \frac{w_{1y}}{w_{1u}} = 1$$

$\rightarrow$ keine elastisch-plastische Phase
$\rightarrow$ sprödes Verhalten

$$\boxed{\zeta < \frac{5}{2}} \rightarrow \qquad \frac{w_{1y}}{w_{1u}} < 1$$

$\rightarrow$ Übergang in elastisch-plastische Phase
$\rightarrow$ duktiles Verhalten

Zusammenfassung:

$$\boxed{F_u = F_u^I = F_u^{II} = \frac{3}{5} \cdot A f_y}$$

Die Traglast F_u ist unabhängig von ζ und damit unabhängig von der Reihenfolge, mit welcher die Stäbe ins Fliessen kommen.

Verallgemeinerung:

Die Traglast ist nur abhängig von den plastischen Widerständen, nicht aber von den Stabsteifigkeiten *EA*/*l*.
Die Annahme eines starr – ideal plastischen Materialverhaltens der Stäbe reicht zur Traglastermittlung aus.

b) Diagramme für ζ = 5

Elastische Phase:

$$\{N\} = F \cdot \begin{Bmatrix} \frac{10}{7} \\ \frac{15}{7} \\ -\frac{4}{7} \end{Bmatrix}$$

Fliesslast:

$$F_y = \frac{7}{15} A f_y$$

Stabkräfte bei Fliessbeginn:

$$\{N_y\} = F_y \cdot \begin{Bmatrix} \frac{10}{7} \\ \frac{15}{7} \\ -\frac{4}{7} \end{Bmatrix} = \frac{7}{15} A f_y \cdot \begin{Bmatrix} \frac{10}{7} \\ \frac{15}{7} \\ -\frac{4}{7} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ -\frac{4}{15} \end{Bmatrix} \cdot A f_y$$

Durchbiegungen bei Fliessbeginn: $$\{w_y\} = \begin{Bmatrix} \frac{10}{3} \\ 1 \\ -\frac{4}{3} \end{Bmatrix} \cdot \frac{f_y \cdot l}{E}$$

Elastisch-plastische Phase: $$\{N\} = \begin{Bmatrix} \frac{5F - Af_y}{2} \\ Af_y \\ \frac{F - Af_y}{2} \end{Bmatrix}$$

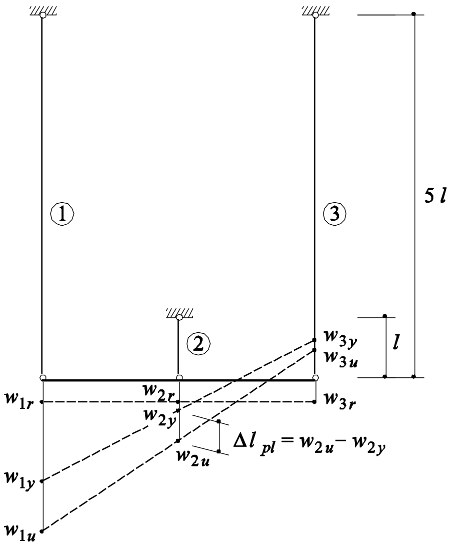
Traglast: $$F_u = \frac{3}{5} Af_y$$

Stabkräfte bei Traglast: $$\{N_u\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{5} \end{Bmatrix} \cdot Af_y$$

Durchbiegungen bei Traglast: $$\{w_u\} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{Bmatrix} \cdot \frac{f_y \cdot l}{E}$$

Entlastung:

Bei einer Entlastung nach Erreichen der Traglast F_u verformen sich die Stäbe wieder parallel zur elastischen Verformung. Die Stäbe 1 und 3 sind noch nicht geflossen, haben also auch keine plastische Verformung erfahren. Stab 2 hat sich hingegen plastisch verlängert.
Bei $F = 0$ verbleibt somit ein Eigenspannungszustand (Index „r“ für „residual“). N_{1r}, N_{2r}, N_{3r} sowie w_{2r} können aus den Diagrammen gelesen oder mittels geometrischen Betrachtungen ermittelt werden.
Die genaue Berechnung des Eigenspannungszustandes ist Gegenstand von Kolloquium 5.



Verformungen:
Da die Stäbe 1 und 3 noch nicht geflossen sind und auch nach der Entlastung Gleichgewicht erfüllt sein muss, gilt mit $w_{2r} = 5/14 \cdot w_{2u}$ (aus dem Diagramm w_2 / w_{2u} gelesen):

$$\Sigma M_{(2)} = 0 \quad \rightarrow \quad N_{1r} = N_{3r} \rightarrow \quad w_{1r} = w_{3r}$$

$$EI_{\text{Balken}} = \infty \quad \rightarrow \quad w_{1r} = w_{3r} = w_{2r} = \frac{5}{14} \cdot w_{2u}$$

$$w_{1r} = \frac{5}{14} \cdot 2 \cdot \frac{f_y \cdot l}{E} = \underline{\frac{10}{14} \cdot \frac{f_y \cdot l}{E}}$$

Stab 1 ist noch nicht geflossen:

$$w_1(N_{1r}) = \Delta l_1(N_{1r}) = \frac{N_{1r} \cdot \zeta \cdot l}{EA} = \underline{\frac{N_{1r} \cdot 5 \cdot l}{EA}}$$

$$w_{1r} \overset{!}{=} w_1(N_{1r}) \quad \rightarrow \quad \frac{N_{1r} \cdot 5 \cdot l}{EA} \overset{!}{=} \frac{10}{14} \cdot \frac{f_y \cdot l}{E}$$

$$\rightarrow \quad \underline{N_{1r}} = \underline{N_{3r}} = \frac{EA \cdot 10 \cdot f_y \cdot l}{5 \cdot l \cdot 14 \cdot E} = \underline{\frac{1}{7} \cdot Af_y}$$

$$\Sigma F_v = 0 \quad \rightarrow \quad N_{1r} + N_{2r} + N_{3r} = 0$$

$$\rightarrow \quad \underline{N_{2r}} = -2N_{1r} = \underline{-\frac{2}{7} \cdot Af_y}$$

Verbleibende Stabkräfte nach der Entlastung aus F_u:

$$\boxed{\{N_r\} = \begin{Bmatrix} N_{1r} \\ N_{2r} \\ N_{3r} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} \end{Bmatrix} \cdot Af_y}$$

Bezogene Werte für Diagramme:

$$\frac{F_y}{F_u} = \frac{\frac{7}{15} \cdot Af_y}{\frac{3}{5} \cdot Af_y} = \frac{7}{9}$$

$$\frac{w_{2y}}{w_{2u}} = \frac{\frac{f_y \cdot l}{E}}{\frac{2 \cdot f_y \cdot l}{E}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{N_{1y}}{Af_y} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{N_{2y}}{Af_y} = 1$$

$$\frac{N_{3y}}{Af_y} = -\frac{4}{15}$$

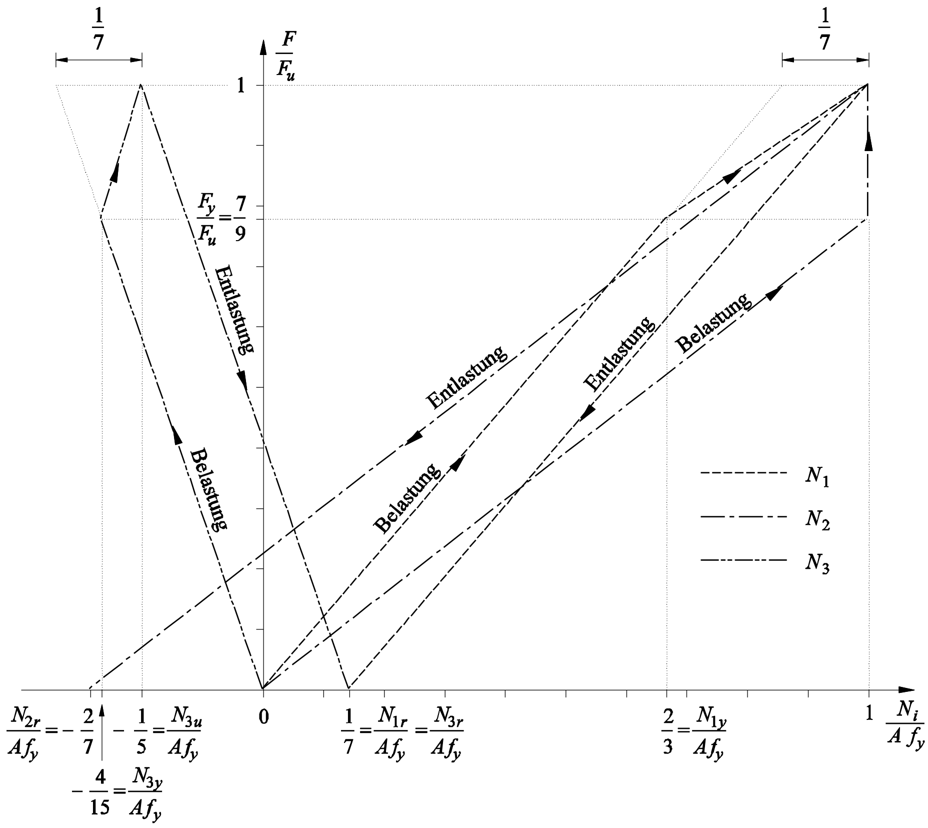
$$\frac{N_{1u}}{Af_y} = \frac{N_{2u}}{Af_y} = 1$$

$$\frac{N_{3u}}{Af_y} = -\frac{1}{5}$$

$$\frac{N_{1r}}{Af_y} = \frac{N_{3r}}{Af_y} = \frac{1}{7}$$

$$\frac{N_{2r}}{Af_y} = -\frac{2}{7}$$

$\frac{N_i}{Af_y}$:



$\frac{w_2}{w_{2u}}$: