

BAUSTATIK II – KOLLOQUIUM 3, Merkblatt

(101-0114)

Thema: Einflusslinien

Definition:Einflusslinien zeigen den Einfluss einer wandernden Last $Q=1$ auf eine bestimmte Zustandsgrösse.

Die Einflussordinate η_{ik} beschreibt den funktionalen Verlauf des Einflusses einer Einzelkraft $Q=1$ in einer festgelegten Wirkungsrichtung an einer beliebigen Stelle k auf eine Zustandsgrösse S_i an der Stelle i . Aus der Verbindung sämtlicher Einflussordinaten η_{ik} ergibt sich die Einflusslinie für eine Zustandsgrösse S_i an der Stelle i .

Es gilt:

- für Einzellasten Q_k : $S_i = \sum_{k=1}^n Q_k \cdot \eta_{ik}$
- für verteilte Lasten q : $S_i = \int q(x) \cdot \eta_i(x) \cdot dx$

Methoden zur Ermittlung von Einflusslinien:

- Punktweise Bestimmung (grosser Rechenaufwand bei statisch unbestimmten Systemen)
- Quantitative Ermittlung (grosser Rechenaufwand bei mehrfach statisch unbestimmten Systemen)
- Methode Land (qualitativ): Einführen einer Verformung $\delta = -1$ am Ort und in Richtung von S_i . Die daraus resultierende Biegelinie entspricht der Einflusslinie η_{S_i} .
- Ausnützen statischer Beziehungen (z.B. bei Fachwerken)

Einflusslinie für eine Verformung δ in i : $\eta_{\delta_i} = \delta_{ix}$: EL (Einflusslinie) für δ_i in i δ_{xi} : BL (Biegelinie) infolge $Q=1$ am Ort und in Richtung von δ_i

(1. Index: Ort und Richtung, 2. Index: Ursache)

Maxwell: $\rightarrow \boxed{\delta_{ix} = \delta_{xi}}$ (Indices sind vertauschbar)

EL für δ_i in $i \equiv$ BL infolge $Q=1$ am Ort und in Richtung von δ_i
--

4 Varianten zur quantitativen Ermittlung von Einflusslinien bei einfach statisch unbestimmten Systemen:

1. Anwendung der Methode Land mit Einführen einer Zustandsgrösse k

$$\eta_{S_i} = w(k)$$

- Lösen der Bindung am Ort und in Richtung der Zustandsgrösse, für die die Einflusslinie gesucht wird.
- Einführen einer entsprechenden Zustandsgrösse k .
- Ermittlung der Grösse von k , so dass sich eine negative Einheitsverformung $\delta = -1$ am Ort und in Richtung der gesuchten Zustandsgrösse ergibt. (Anwendung der Arbeitsgleichung).
- Ermittlung der Momentenlinie infolge der nun berechneten Zustandsgrösse k .
- Ermittlung der Biegelinie $w = \eta_{S_i}$ infolge dieser Zustandsgrösse k unter Anwendung der Mohrschen Analogie:

$$q^* = \frac{M}{EI} = -w'' \rightarrow M^* = w$$

2. Anwendung der Methode Land mit Kraftmethode

$$\eta_{S_i} = w = w_0 + X_1 \cdot w_1$$

wobei:

- w : Biegelinie (BL) infolge einer negativen Einheitsverformung $\delta = -1$ am Ort und in Richtung der gesuchten Zustandsgrösse
- w_0 : Biegelinie (BL) am statisch bestimmten GS infolge einer negativen Einheitsverformung am Ort und in Richtung der gesuchten Zustandsgrösse (mit dem Wert δ_{10} am Ort und in Richtung von X_1)
- w_1 : Biegelinie (BL) infolge $X_1=1$ am statisch bestimmten GS (Berechnung mit Mohrscher Analogie)

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} : \text{Überzählige Grösse}$$

- δ_{10} : Verformung am Ort und in Richtung von X_1 am statisch bestimmten GS infolge einer negativen Einheitsverformung am Ort und in Richtung der gesuchten Zustandsgrösse (aus Zeichnung)
- δ_{11} : Verformung am Ort und in Richtung von X_1 infolge $X_1 = 1$ am statisch bestimmten GS (Arbeitsgleichung)

Einflusslinie aus Überlagerung:

$$\eta_{S_i} = w = w_0 + X_1 \cdot w_1 = w_0 - \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} \cdot w_1$$

3. Allgemeine Berechnung nach Kraftmethode

$$S_i = S_{i0} + X_1 \cdot S_{i1} \quad \rightarrow \quad \boxed{\eta_{S_i} = \eta_{S_{i0}} + \eta_{X_1} \cdot S_{i1}}$$

wobei:

$\eta_{S_{i0}}$: Einflusslinie für S_i am statisch bestimmten Grundsystem

η_{X_1} : Einflusslinie für die ÜG X_1 am statisch bestimmten Grundsystem

S_{i1} : Zustandsgrösse in i infolge $X_1=1$ (unveränderlich)

$$X_1 = -\frac{\delta_{i0}}{\delta_{i1}} \quad \rightarrow \quad \boxed{\eta_{X_1} = -\frac{1}{\delta_{i1}} \cdot \eta_{\delta_{i0}} = -\frac{1}{\delta_{i1}} \cdot \delta_{1x} = -\frac{1}{\delta_{i1}} \cdot \delta_{x1}}$$

Maxwell: $\boxed{\delta_{1x} \equiv \delta_{x1}}$

$$\boxed{\text{EL } \delta_{1x} \text{ für Verformung am Ort und in Richtung von } X_1 \equiv \text{BL } \delta_{x1} \text{ am GS infolge } X_1=1}$$

Einflusslinie aus Überlagerung:

$$\boxed{\eta_{S_i} = \eta_{S_{i0}} + \eta_{X_1} \cdot S_{i1} = \eta_{S_{i0}} - \frac{1}{\delta_{i1}} \cdot \delta_{x1} \cdot S_{i1}}$$

4. Kraftmethode: Einführen der gesuchten Zustandsgrösse als Überzählige Grösse

Lösen der statischen Bindung am Ort und in Richtung der gesuchten Zustandsgrösse und Einführen einer entsprechenden ÜG X_i :

$$\delta_i = \delta_{i0} + X_i \cdot \delta_{ii} = 0$$

$$X_i = -\frac{\delta_{i0}}{\delta_{ii}} \quad \rightarrow \quad \boxed{\eta_{X_i} = -\frac{1}{\delta_{ii}} \cdot \eta_{\delta_{i0}} = -\frac{1}{\delta_{ii}} \cdot \delta_{ix} = -\frac{1}{\delta_{ii}} \cdot \delta_{xi}}$$

$$S_i = X_i :$$

$$\boxed{\eta_{S_i} = \eta_{X_i} = -\frac{1}{\delta_{ii}} \cdot \delta_{ix} = -\frac{1}{\delta_{ii}} \cdot \delta_{xi}}$$

Merke:

Die Einflusslinie für X_i (\equiv Zustandsgrösse S_i) entspricht somit der $(-1/\delta_{ii})$ -fachen Biegelinie am statisch bestimmten Grundsystem infolge $X_i = 1$.

Die Verformung in i in Richtung von X_i beträgt:

$$\boxed{\delta_i = -\frac{1}{\delta_{ii}} \cdot \delta_{ii} = -1} \quad (\text{Methode Land: negative Einheitsverformung!})$$