Prof. Dr. Peter Marti
Institut für Baustatik und Konstruktion
D-BAUG, Studiengang Bauingenieurwissenschaften
Frühjahrssemester

BAUSTATIK II – KOLLOQUIUM 1, Merkblatt

(101-0114)

Thema: Verformungsmethode

Verformungsmethode (bei ebenen Stabtragwerken: Drehwinkelverfahren):

Mit der Verformungsmethode (Deformationsmethode) können die Reaktionen und die elastische Schnittkraftverteilung von statisch unbestimmten Systemen ermittelt werden.

Prinzip:

An statisch unbestimmten Systemen werden statt unbekannter Kraftgrössen (wie bei der Kraftmethode) unbekannte Verformungsgrössen (Knotendrehwinkel φ und Stabdrehwinkel ψ) eingeführt.
Pro Knoten ergibt sich ein unbekannter Knotendrehwinkel φ. An den Systemenden sind die Knotendrehwinkel bekannt (das heisst gleich Null oder in ihrer Grösse vorgegeben).
Jedem Freiheitsgrad der Verschieblichkeit entspricht ein unabhängiger Stabdrehwinkel ψ. An jedem Knoten wird ein Gelenk eingeführt (Gelenke im Stab blockieren). Die Anzahl der notwendigen Festhaltekräfte, die zur Stabilisierung dieses Systems eingeführt werden müssten, entspricht der Anzahl der unabhängigen Stabdrehwinkel.
Mit Hilfe von Gleichgewichtsbedingungen (Knotengleichgewicht und Verschiebegleichgewicht) lassen sich die Knoten- und Stabdrehwinkel ermitteln.

Gleichgewichtsbedingungen:

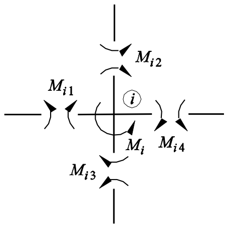
a) Knotengleichgewicht (eine Gleichung pro Knoten mit einem Knotendrehwinkel)

$$\boxed{M_i - \sum_k M_{ik} = 0}$$

wobei: M_i = am Knoten i angreifendes äusseres Moment
M_{ik} = Stabendmoment in i für den Stab $i-k$

Für $M_i = 0$: $\boxed{\sum_k M_{ik} = 0}$

Beispiel:



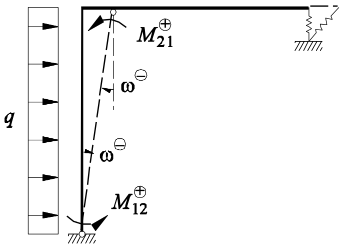
$$M_i - \sum_{k=1}^{4} M_{ik} = 0 \quad \rightarrow \quad M_{i1} + M_{i2} + M_{i3} + M_{i4} = M_i$$

b) Verschiebegleichgewicht (eine Gleichung pro Freiheitsgrad der Verschieblichkeit)

Prinzip der virtuellen Arbeiten:

$$\boxed{\delta W = \delta W_e + \delta W_i = 0}$$

Beispiel:



$$W_e + W_i = 0$$
$$W_e = ql \cdot \frac{\omega l}{2}$$
$$W_i = -\omega \cdot \left(M_{12} + M_{21}\right)$$

(negativ, da ω^- und M_{12}^+, M_{21}^+ entgegengesetzt drehen)

$$W_e + W_i = ql \cdot \frac{\omega l}{2} - \omega \cdot \left(M_{12} + M_{21}\right) = 0$$

Bezeichnungen:

Stabendmomente

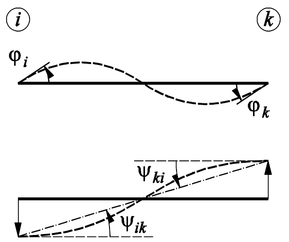
$$\boxed{\begin{aligned} M_{ik} &= M_{ik}^0 + s_{ik} \cdot \varphi_i + t_{ik} \cdot \varphi_k - \left(s_{ik} + t_{ik}\right) \cdot \psi_{ik} \\ M_{ki} &= M_{ki}^0 + s_{ki} \cdot \varphi_k + t_{ki} \cdot \varphi_i - \left(s_{ki} + t_{ki}\right) \cdot \psi_{ki} \end{aligned}}$$

φ_i = Knotendrehwinkel am Knoten i

φ_k = Knotendrehwinkel am Nachbarknoten k

ψ_{ik} = Stabdrehwinkel vom Stab zwischen dem Knoten i und dem Knoten k

Vorzeichenkonvention Verformungsmethode: (alle eingetragenen Grössen sind positiv)

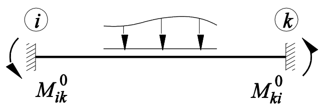


Merke: An den Stabenden sind alle M, φ und ψ **positiv** im **Gegenuhrzeigersinn**

Festeinspannmomente

M_{ik}^0 : Stabendmoment in i bei voller Einspannung infolge einer Einwirkung

M_{ki}^0 : Stabendmoment in k bei voller Einspannung infolge einer Einwirkung

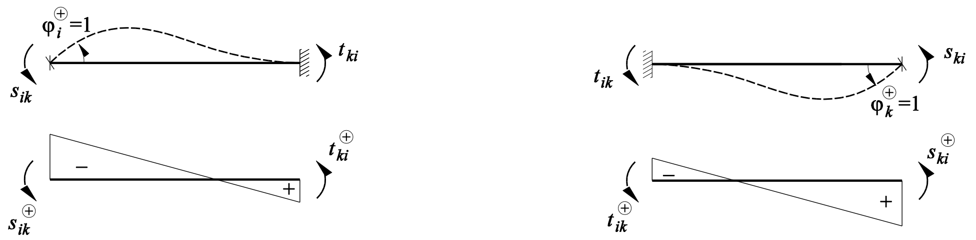


Stabsteifigkeiten

$s_{ik} = M_{ik}(\varphi_i = 1)$:	Moment in i, das erforderlich ist, um in i einen Knotendrehwinkel $\varphi_i = 1$ zu erzeugen.
$s_{ki} = M_{ki}(\varphi_k = 1)$:	Moment in k, das erforderlich ist, um in k einen Knotendrehwinkel $\varphi_k = 1$ zu erzeugen.

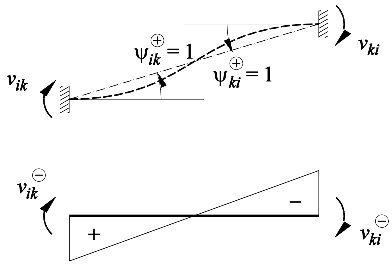
Kreuzsteifigkeiten

$t_{ik} = M_{ik}(\varphi_k = 1)$:	Moment in i, das entsteht, wenn in k ein Knotendrehwinkel $\varphi_k = 1$ wirkt.
$t_{ki} = M_{ki}(\varphi_i = 1)$:	Moment in k, das entsteht, wenn in i ein Knotendrehwinkel $\varphi_i = 1$ wirkt.



Verschiebesteifigkeiten

$v_{ik} = -(s_{ik} + t_{ik}) = M_{ik}(\psi_{ik} = 1)$:	Moment in i, das entsteht, wenn ein Stabdrehwinkel $\psi_{ik} = 1$ wirkt.
$v_{ki} = -(s_{ki} + t_{ki}) = M_{ki}(\psi_{ki} = 1)$:	Moment in k, das entsteht, wenn ein Stabdrehwinkel $\psi_{ki} = 1$ wirkt.



Merke:

$s_{ik} \neq s_{ki}$	$\rightarrow$ nicht zwingend; abhängig von der Lagerung des betrachteten Stabes
$t_{ik} = t_{ki}$	$\rightarrow$ zwingend (Maxwell)
$\psi_{ik} = \psi_{ki}$	

Vorgehen:

1. Knoten nummerieren, unbekannte Knotendrehwinkel φ_i und Stabdrehwinkel ψ_{ik} festlegen. Die Anzahl der notwendigen Festhaltekräfte, die bei verschieblichen Systemen zur Stabilisierung eingeführt werden müssten, entspricht der Anzahl der unabhängigen Stabdrehwinkel ψ_{ik}.

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Prof. Dr. Peter Marti
Institut für Baustatik und Konstruktion
D-BAUG, Studiengang Bauingenieurwissenschaften
Frühjahrssemester

2. Stabendmomente berechnen:

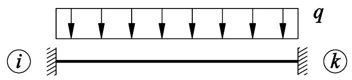
$$M_{ik} = M_{ik}^0 + s_{ik} \cdot \varphi_i + t_{ik} \cdot \varphi_k - \left(s_{ik} + t_{ik}\right) \cdot \psi_{ik}$$

$$M_{ki} = M_{ki}^0 + s_{ki} \cdot \varphi_k + t_{ki} \cdot \varphi_i - \left(s_{ki} + t_{ki}\right) \cdot \psi_{ki}$$

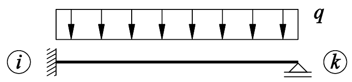
3. Gleichgewichtsbedingungen (Knotengleichgewicht und Verschiebegleichgewicht) aufstellen und lösen.
4. Stabendmomente durch Einsetzen von φ_i und ψ_{ik} ermitteln. Übrige Schnittgrössen ergeben sich durch Formulieren der Gleichgewichtsbedingungen an geeigneten Schnittkörpern (*V* aus Gleichgewicht am Stab und *N* aus Gleichgewicht am Knoten).

Folgende Festeinspannmomente sowie Stab- und Kreuzsteifigkeiten sollten auswendig gelernt werden:

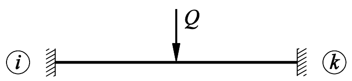
- Festeinspannmomente



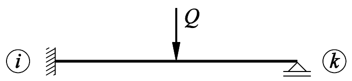
$$M_{ik}^0 = \frac{ql^2}{12} \qquad M_{ki}^0 = -\frac{ql^2}{12}$$



$$M_{ik}^0 = \frac{ql^2}{8} \qquad M_{ki}^0 = 0$$

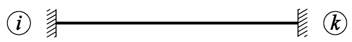


$$M_{ik}^0 = \frac{Ql}{8} \qquad M_{ki}^0 = -\frac{Ql}{8}$$

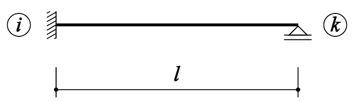


$$M_{ik}^0 = \frac{3Ql}{16} \qquad M_{ki}^0 = 0$$

- Stab- und Kreuzsteifigkeiten:

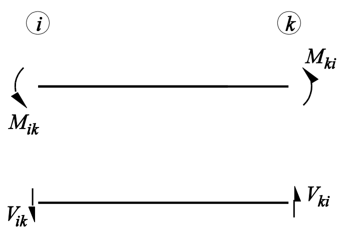


$$s_{ik} = s_{ki} = \frac{4EI}{l} \qquad t_{ki} = t_{ik} = \frac{2EI}{l}$$



$$s_{ik} = \frac{3EI}{l} \qquad t_{ki} = 0$$

Vorzeichenkonvention Verformungsmethode für die Schnitgrössen *M* und *V* an den Stabenden:
(alle eingetragenen Grössen sind positiv)



Merke: M, φ, ψ **positiv** im **Gegenuhrzeigersinn**

Beim **Aufzeichnen** von *V* **ursprüngliche Konvention** $(V^+ \uparrow \text{——} \downarrow)$ anwenden.