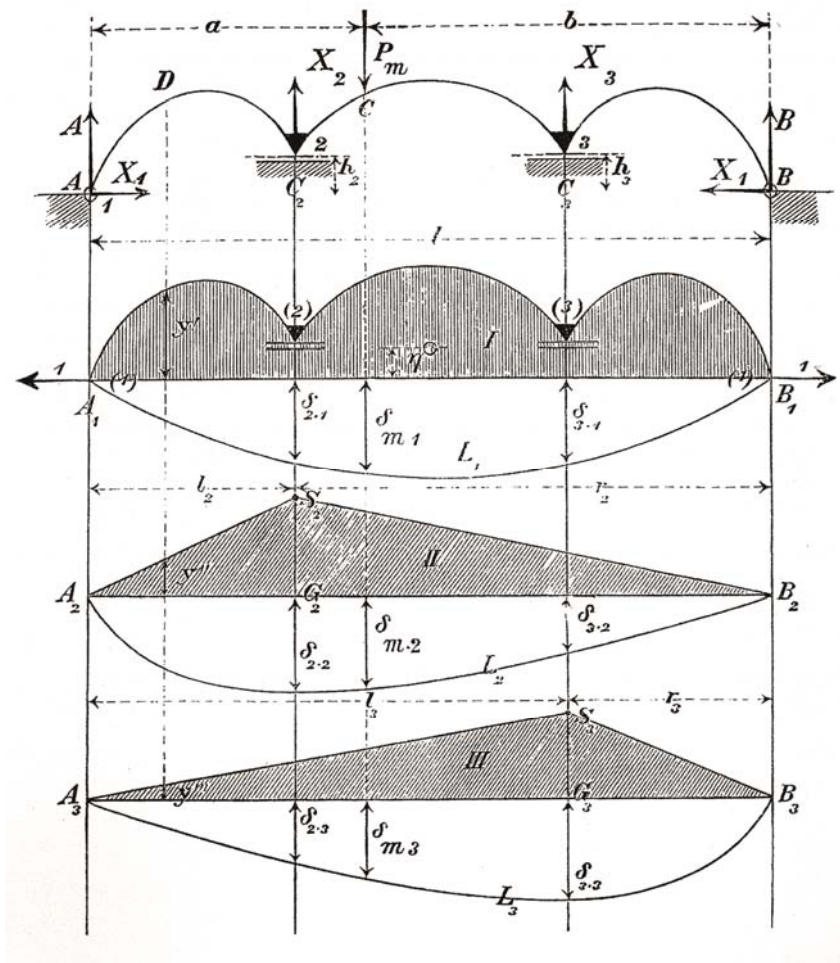


AUTOGRAPHIE-BLÄTTER
Baustatik II

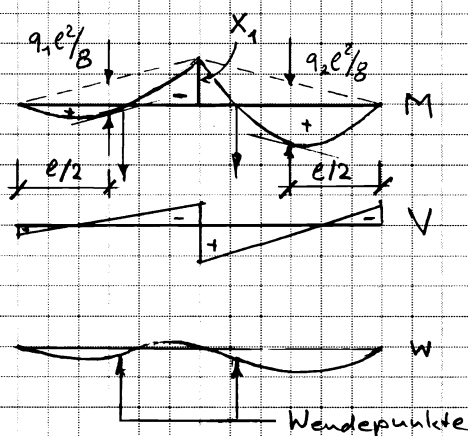
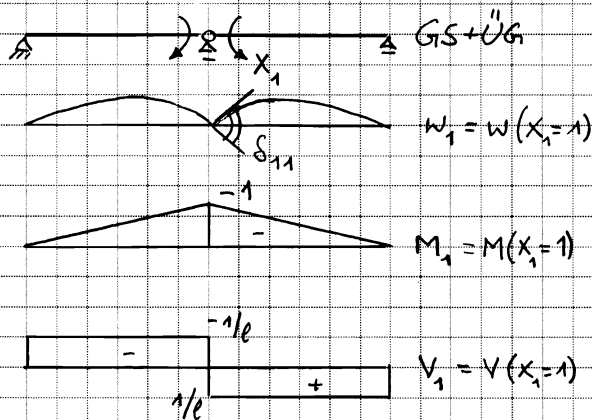
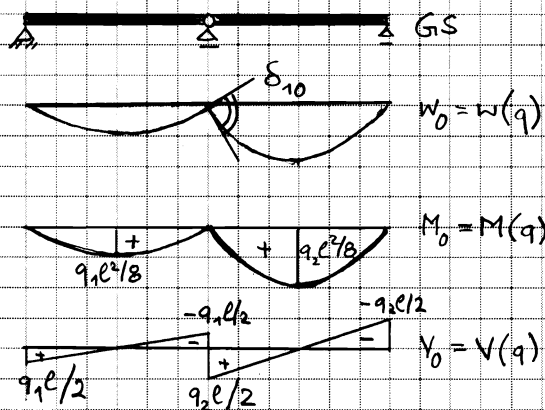
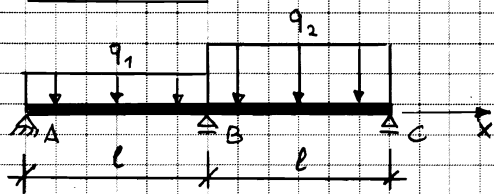


Baustatik II, Autographie-Blätter

Inhaltsverzeichnis

<i>Kapitel</i>	<i>Datum Autographie</i>	<i>Seiten</i>
<i>Kraftmethode</i>		
Einführung / Vorgehen	31.03.04	01-05
Beispiele	07.04.04	06-08
<i>Verformungsmethode</i>		
Einführung / Vorgehen	14.04.04	09-11
Beispiele	21.04.04	12-14
<i>Einflusslinien</i>		
Statisch unbestimmte Systeme	05.05.04	15-17
<i>Elastisch-plastische Systeme</i>		
Einfach statisch unbestimmtes Fachwerk	12.05.04	18-22
Balkenbiegung	19.05.04	23-24
<i>Fliessbedingungen</i>		
Fliessgrenze, Fliessgesetz	26.05.04	25-28
<i>Traglastverfahren</i>		
Grenzwertsätze	04.06.04	29-30
Beispiele	16.06.04	31-34
<i>Stabilität</i>		
Idealer Knickstab /Einfluss Vorkrümmung	08.06.05	01-03
Einfluss Querbelastung, Methode Vianello	15.06.05	04-07
Energieverfahren	22.06.05	08-11
Stützbiegelinien (CDC), Knicken – freie Schwingung	29.06.05	12-14

1. Einführung



Annahme $EI(x) = EI = \text{konstant}$.

Der einfach statisch unbestimmte Durchlaufträger wird durch Einführen eines Gelenkes beim Zwischenauflager B zu einem statisch bestimmten Grundsystem (Abkürzung GS).

Die Biegelinie $w(q) = w_0$ am GS zeigt bei B einen Knick δ_{10} .

δ_{10} entspricht einer Unverträglichkeit, die durch Anbringen einer entsprechenden statischen Größe zum Verschwinden gebracht werden muss. Diese statische Größe, die sogenannte überzählige Größe X_1 (Abkürzung UG), ist im vorhergehenden Fall ein Moment X_1 .

Die Biegelinie $w(X_1=1) = w_1$ am GS zeigt bei B die Unverträglichkeit δ_{11} .

Verträglichkeit erfordert

$$\delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} = 0$$

und somit

$$X_1 = \frac{-\delta_{10}}{\delta_{11}}$$

Die Größen δ_{10} und δ_{11} können mit der Arbeitsgleichung bestimmt werden. Werden nur die Biegeverformungen berücksichtigt, d.h. die Verformungen infolge Querkräften vernachlässigt, so folgt:

$$\delta_{10} = \frac{q_1 l^2}{8} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{EI} + \frac{q_2 l^2}{8} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{EI}$$

$$= -(q_1 + q_2) \cdot \frac{l^3}{24EI}$$

$$\delta_{11} = 2 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{EI} = \frac{2l}{3EI}$$

Somit ist

$$X_1 = \frac{(q_1 + q_2) l^2}{16}$$

Die Schnittgrößen M und V folgen durch Superposition von M_0 und M_1 bzw. V_0 und V_1 :

$$M = M_0 + X_1 \cdot M_1$$

$$V = V_0 + X_1 \cdot V_1$$

Ferner:

$$w = w_0 + X_1 \cdot w_1$$

Baustatik II	Page 2
Kraftmethode	PM/ 31.3.04

2. Allgemeines Vorgehen

Das allgemeine Vorgehen nach der Kraftmethode für n-fach statisch unbestimmte Systeme kann wie folgt zusammengefasst werden:

1. Bestimmung des Grades der statischen Unbestimmtheit (n)
2. Übergang zu stabilem, statisch bestimmtem GS durch Lösen von n Bindungen und Einführen entsprechender ÜG X_i ($i=1,2,\dots,n$)
3. Ermittlung der Verformungen S_{i0} an der Stelle und in der Richtung von X_i infolge äusserer Einwirkung (Belastung oder aufgezwungene Verformung)
4. Ermittlung der Verformungen S_{ij} an der Stelle und in der Richtung von X_i infolge $X_j=1$ ($j=1,2,\dots,n$)
5. Aufstellen und Lösen der Verträglichkeitsbedingungen

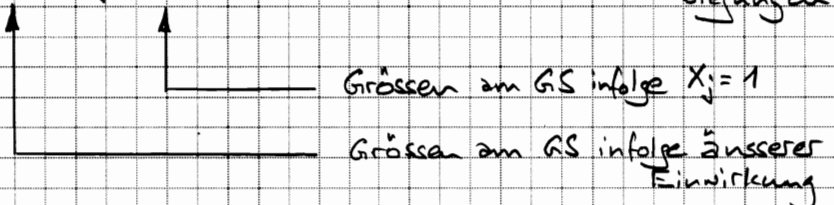
$$S_i = S_{i0} + \sum_{j=1}^n S_{ij} X_j = 0 \quad (i=1,2,\dots,n)$$

6. Ermittlung von Reaktionen, Schnittgrössen und Verformungen am ursprünglichen statisch unbestimmten System durch Superposition:

$$R = R_0 + \sum_{j=1}^n R_j X_j \quad \dots \text{ Reaktionen}$$

$$S = S_0 + \sum_{j=1}^n S_j X_j \quad \dots \text{ Schnittgrössen}$$

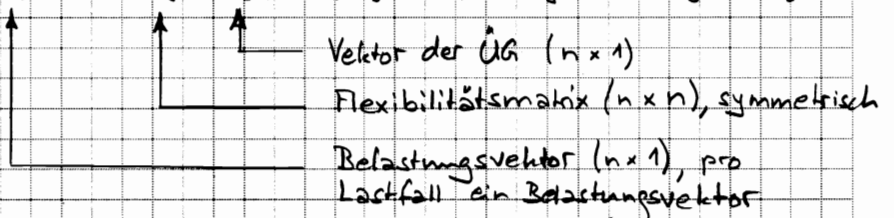
$$w = w_0 + \sum_{j=1}^n w_j X_j \quad \dots \text{ Verformungen, z.B. Durchbiegungen}$$



3. Hinweise (siehe Antographie S. 53-55)

- a) Man unterscheidet äusserlich und innerlich statisch unbestimmte Systeme, je nachdem, ob Auflagerreaktionen oder innere Kräfte nicht allein mit Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden können. Meist sind die Systeme sowohl äusserlich als auch innerlich statisch unbestimmt.
- b) Aufpassen, dass GS nicht instabil ist!
- c) GS so wählen, dass möglichst viele S_{ij} verschwinden.
- d) Matrixschreibweise der Verträglichkeitsbedingungen:

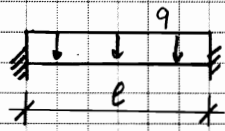
$$\{S_{i0}\} + [S_{ij}]\{X_j\} = \{0\} \rightarrow \{X_j\} = -[S_{ij}]\{d_{i0}\}$$



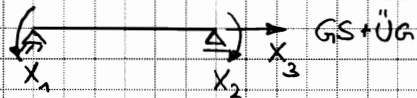
- e) Ermittlung von S_{i0} und S_{ij} mit Arbeitsgleichung

4. Beispiele

2) Beidseitig eingespannter Balken unter gleichmässig verteilter Belastung



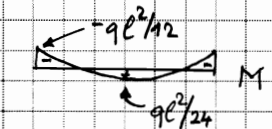
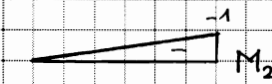
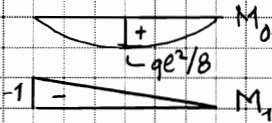
Da auch hier nur Biegeverformungen berücksichtigt werden sollen (Annahme $EI = \text{konstant}$) und keine Kräfte in Stabrichtung wirken, gilt für die dritte ÜG $X_3 = 0$.



$$\delta_{10} = \delta_{20} = \frac{ql^2}{8} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{EI} = -\frac{ql^3}{24EI}$$

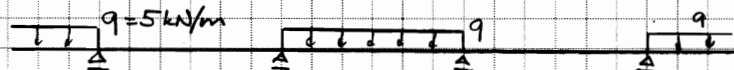
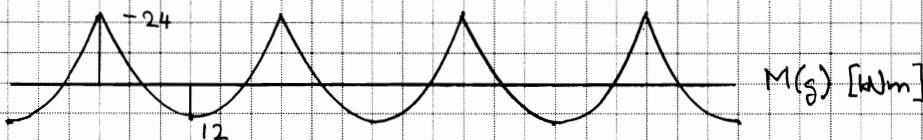
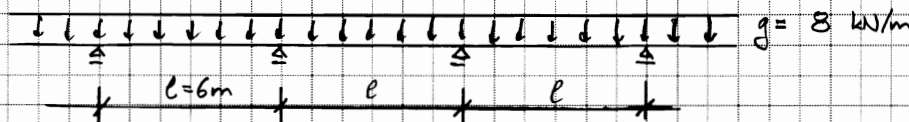
$$\delta_{11} = \delta_{22} = (-1) \cdot (-1) \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{EI} = \frac{l}{3EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = (-1) \cdot (-1) \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{l}{EI} = \frac{l}{6EI}$$

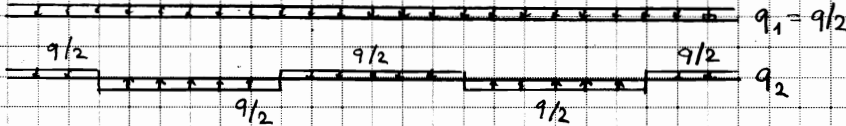


$$\begin{cases} -\frac{ql^3}{24EI} + \frac{l}{3EI} X_1 + \frac{l}{6EI} X_2 = 0 \\ -\frac{ql^3}{24EI} + \frac{l}{6EI} X_1 + \frac{l}{3EI} X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow X_1 = X_2 = \frac{ql^2}{12}$$

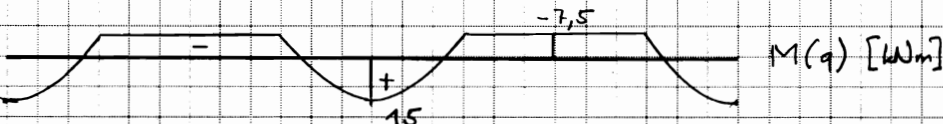
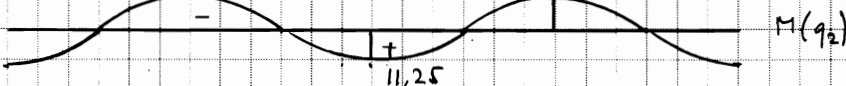
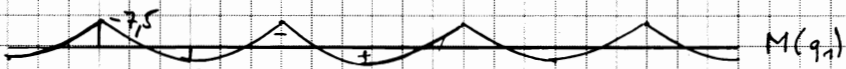
Anwendung auf Durchlaufträger (mit unendlich vielen Feldern) unter Eigenlast $g = \text{konstant}$ und Nutzlast q (in ungünstigster Stellung):

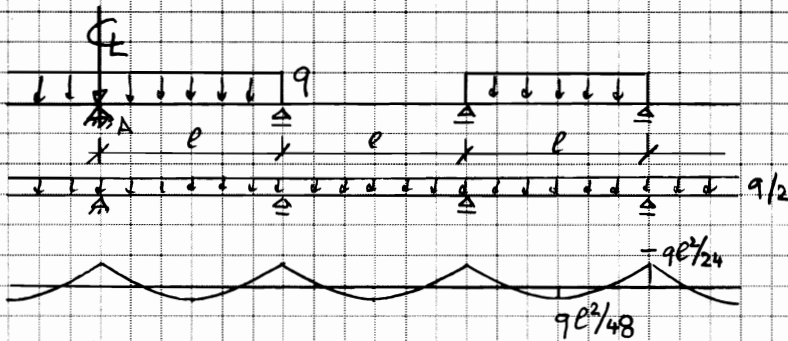


Lastanordnung für maximale Feldmomente

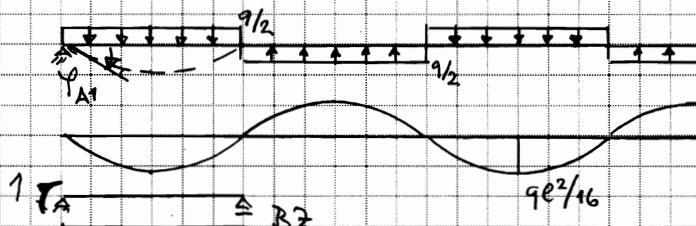


Lastanordnung ($q = q_1 + q_2$)



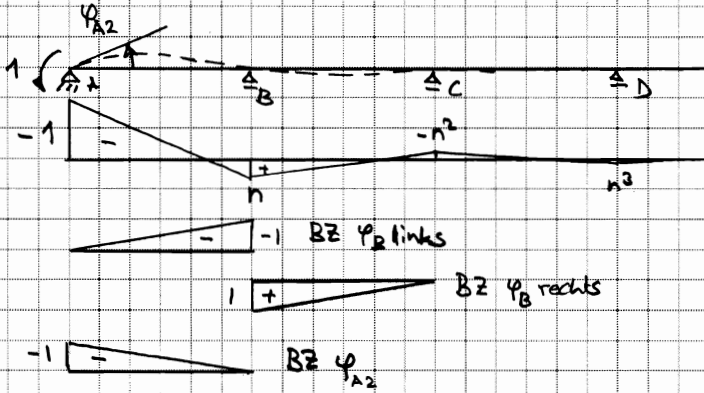


Lastanordnung für extremale Auflagerreaktion und Stützmoment (bei A)



$$\varphi_{A1} = \frac{qe^2}{16} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{EI} = \frac{qe^3}{48EI}$$

Um φ_{A1} zum Verschwinden zu bringen wird am (einseitig unendlich langen) Durchlaufträger bei A ein Moment vom Betrag 1 angebracht.



Bei B ergibt sich ein Moment vom Betrag n, bei C ein solches vom Betrag n^2 , u.s.w.

Da φ von links und von rechts gerechnet gleich sein muss erhält man mit Hilfe der Arbeitsgleichung

$$\frac{l}{6EI} \cdot (1-2n) = \frac{l}{6EI} (2n-n^2)$$

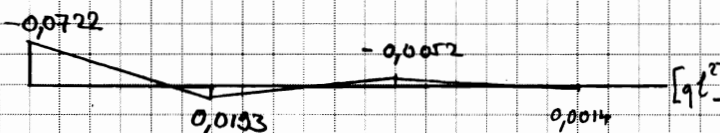
d.h. $n^2 - 4n + 1 = 0$, somit

$$n = 2 - \sqrt{3}$$

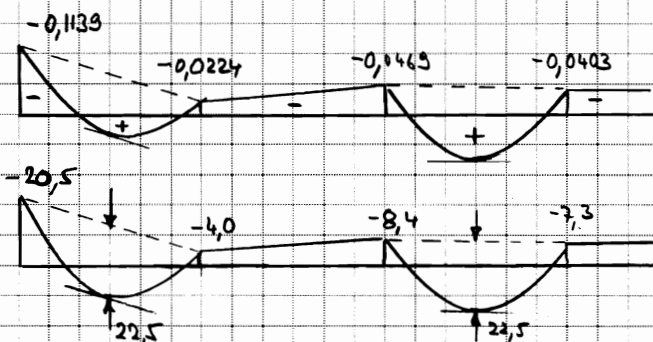
Für φ_{A2} folgt $\frac{l}{6EI} (2-2+\sqrt{3})$

Das bei A erforderliche Moment beträgt deshalb

$$\frac{\varphi_{A1}}{\varphi_{A2}} = \frac{qe^2 \sqrt{3}}{24} = 0,0722 qe^2$$



Die resultierenden Momente ergeben sich durch Superposition



Beispiel: $l=6m$
 $q=5kN/m$

Ergebnis: Extremale Momente infolge $g+q$

Stütze (A): $-24 - 20,5 = -44,5 \text{ kNm}$

Feld: $12 + 15 = 27 \text{ kNm}$

Die extreme Auflagerreaktion bei A infolge $g+q$ beträgt

$$6 \cdot 8 + 6 \cdot 5 + 2 \cdot \frac{20,5 - 4}{6} = 83,5 \text{ kN}$$

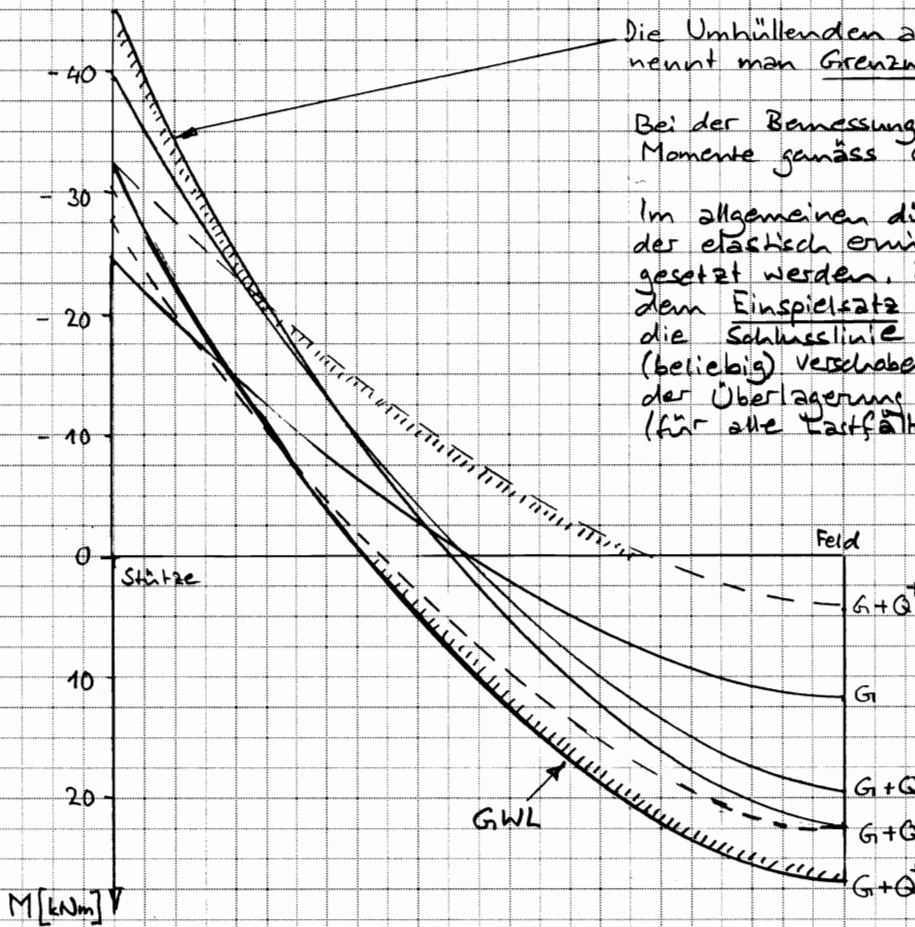
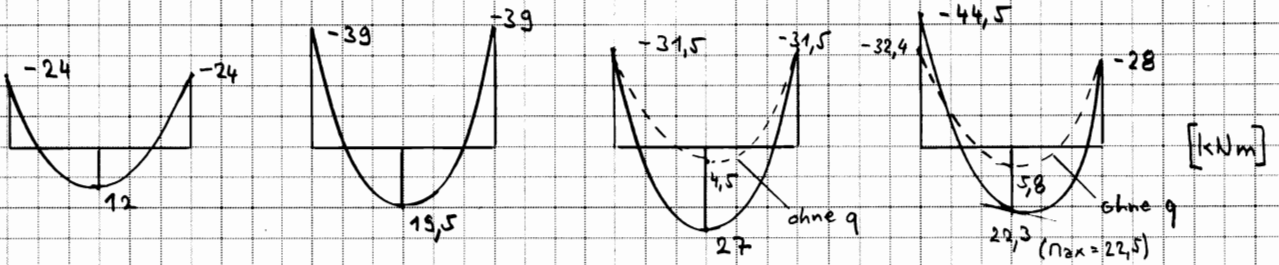
Zusammenstellung der Momente infolge verschiedener Lastfälle:

Eigenlast (G)

Volllast (G+Q)

Max. Feld (G+Q⁺)

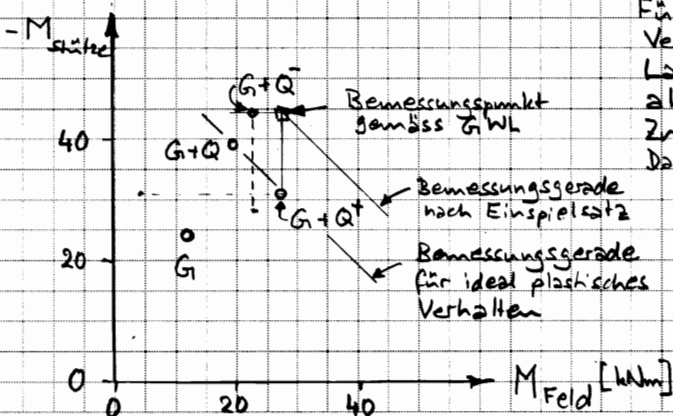
Max. Stütze (G+Q⁻)



Die Umhüllenden aller Momentenlinien nennt man Grenzwertlinien (Abkürzung GWL)

Bei der Bemessung sind die extremsten Momente gemäss GWL abzudecken.

Im allgemeinen dürfen gewisse Umlagerungen der elastisch ermittelten Momente vorausgesetzt werden. Zumindest darf nach dem Einspielgesetz der Plastizitätstheorie die Schlusslinie des Momentendiagramms (beliebig) verschoben werden. Dies entspricht der Überlagerung eines Zwangszustands (für alle Lastfälle derselbe).

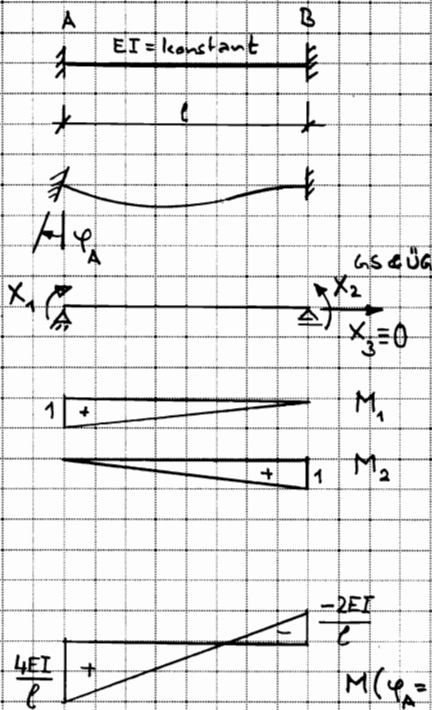


Für den Bruchzustand, d.h. unter im Vergleich zum Gebrauchszustand erhöhten Lasten, dürfen nach Plastizitätstheorie allen Lastfällen optimale (verschiedene) Zwangszustände überlagert werden. Dabei ist das Verformungsvermögen zu prüfen.

Zusammenfassung [kNm]:

- GWL ... $M_F = 27$, $-M_S = 44,5$
- Einspielgesetz ... $M_F - M_S = 71,5$
- ideal plastisch ... $M_F - M_S = 58,5$

b) Eingespannter Balken



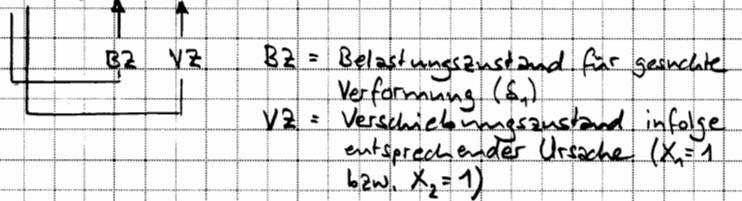
Dem beidseitig eingespannten Balken wird eine Auflagerverdrehung φ_A aufgezungen.

Als GS wird wieder ein einfacher Balken gewählt. Die an sich einzuführende UG X_3 verschwindet.

Koeffizienten der Flexibilitätsmatrix:

$$\delta_{11} = \int_0^l M_1 \cdot \frac{M_1}{EI} dx = \frac{l}{3EI}, \quad \delta_{22} = \frac{l}{3EI}$$

$$\delta_{12} = \int_0^l M_1 \cdot \frac{M_2}{EI} dx = \frac{l}{6EI}, \quad \delta_{21} = \delta_{12}$$

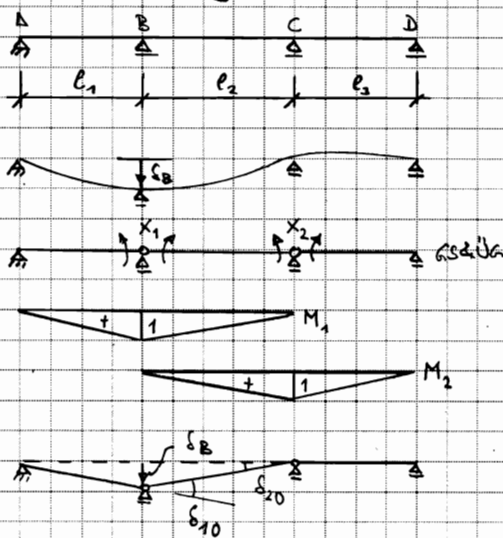


Gleichungssystem und Lösung:

$$\begin{bmatrix} \frac{l}{3EI} & \frac{l}{6EI} \\ \frac{l}{6EI} & \frac{l}{3EI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_A \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} X_1 = \frac{4EI}{l} \cdot \varphi_A \\ X_2 = \frac{-2EI}{l} \cdot \varphi_A \end{Bmatrix}$$

N.B.: $\delta_{10} = \delta_{20} = 0$, $\delta_1 = \varphi_A$, $\delta_2 = 0$. Die resultierende Momentenverteilung wird bei der Diskussion der Verformungsmethode wieder verwendet.

c) Durchlaufträger



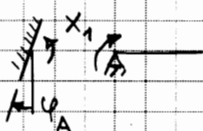
Das Auflager B des Durchlaufträgers ABCD setzt sich um δ_B .

Als GS des zweifach statisch unbestimmten Systems wird eine Kette von drei einfachen Balken gewählt.

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\delta_{10} = -\frac{\delta_B}{l_1} - \frac{\delta_B}{l_2}, \quad \delta_{20} = +\frac{\delta_B}{l_2}$$

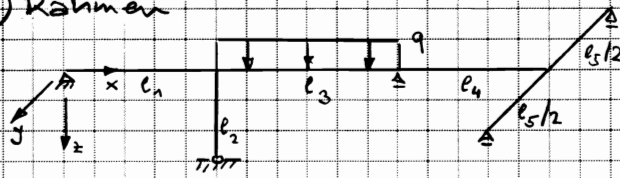
Analog wie in diesem Beispiel hätte man im Beispiel b) auch $\delta_{10} = -\varphi_A$ setzen können. Begründung:



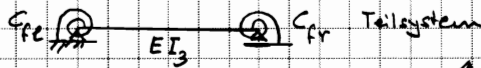
Mit der Einführung von X_1 wurde die Einspannung neggeschnitten: Wird die neggeschnittene Einspannung als Teil des GS betrachtet, wird $\delta_{10} = -\varphi_A$.

Ist die Einspannung nicht Teil des GS, so ist, wie oben ausgeführt, $\delta_{10} = \delta_{20} = 0$ und $\delta_1 = \varphi_A$.

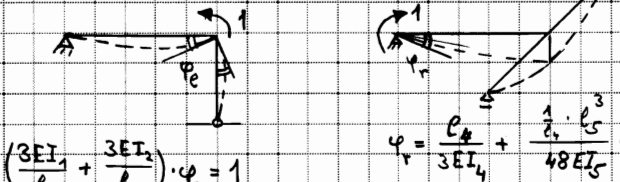
d) Rahmen



Der Balken der Länge l_3 wird aus dem zweifach statisch unbestimmten System herangegrennt. Der Einfluss der weggeschnittenen Systemteile wird über Federn mit den Nachgiebigkeiten c_{fe} und c_{fr} berücksichtigt.



N.B.: c_{fe} ist der Kehrwert der Federsteifigkeit, d.h. im vorliegenden Fall des zur Erzeugung einer Verdrehung von 1 erforderlichen Moments. Dem entsprechend hat c_{fe} die Dimension $(kNm)^{-1}$. Grasse Nachgiebigkeit bedeutet kleine Steifigkeit und umgekehrt.

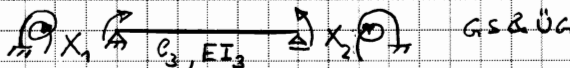


Moment um $\varphi_e = 1$ zu erzeugen

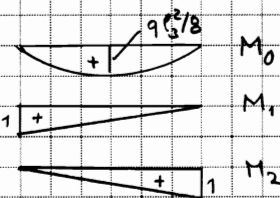
$$\left(\frac{3EI_1}{l_1} + \frac{3EI_2}{l_2} \right) \cdot \varphi_e = 1$$

$$\varphi_r = \frac{l_3}{3EI_4} + \frac{1}{48EI_5} \cdot \frac{l_3^3}{l_4}$$

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



$$\delta_{10} = \delta_{20} = 1 \cdot \frac{q \cdot l_3^2}{8EI_3} \cdot l_3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{q \cdot l_3^3}{24EI_3}$$

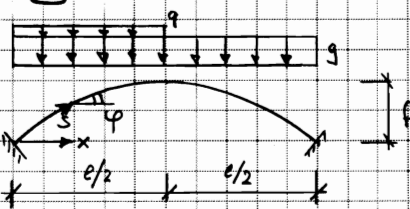


$$\delta_{11} = \frac{l_3}{3EI_2} + c_{fe} \quad (c_{fe} = \varphi_e)$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{l_3}{6EI_3}$$

$$\delta_{22} = \frac{l_3}{3EI_3} + c_{fr} \quad (c_{fr} = \varphi_r)$$

e) Bogen

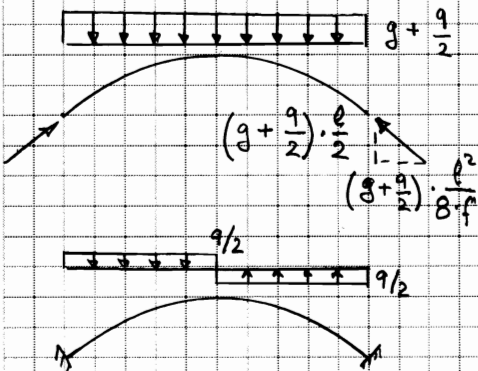


Beidseitig eingespannter Parabelbogen unter gleichmäßig verteilt angenommenen ständigen Lastung und einseitiger Nutlast q.

Annahme: $EI = EI_s \cdot (\cos \varphi)^{-1}$

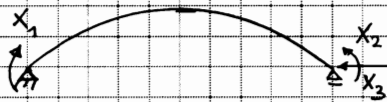
Geometrie: $dx = ds \cdot \cos \varphi$

Die Nutlast wird in einen symmetrischen gleichmäßig verteilten Anteil $q/2$ und einen antisymmetrischen Anteil $\pm q/2$ aufgeteilt.

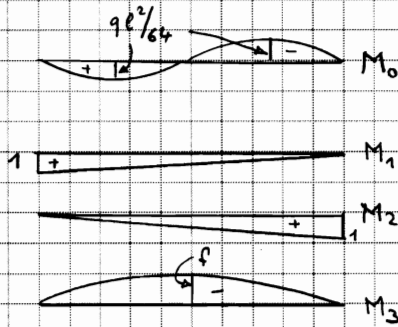


Die ständigen Lasten und die symmetrische Nutlast $(g + q/2)$ verursachen reine Druckkräfte im Bogen (keine Biegemomente und Querkräfte), da der Parabelbogen der Stütlinie für eine gleichmäßig verteilte Belastung entspricht.

Die antisymmetrische Nutlast $(\pm q/2)$ verursacht Biegemomente und Querkräfte, siehe folgende Seite.



GS & ÜG



$$\delta_{i0} = \int M_i \frac{M_0}{EI} ds = \frac{1}{EI_s} \int M_i M_0 dx$$

$$\delta_{it} = \int M_i \frac{M_t}{EI} ds = \frac{1}{EI_s} \int M_i M_t dx$$

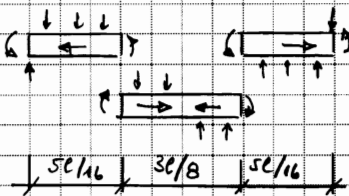
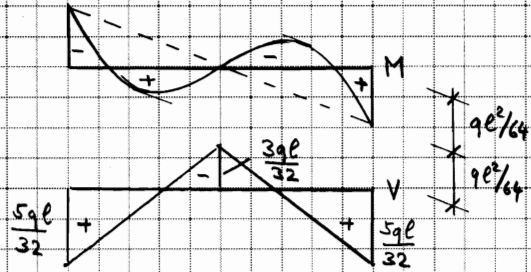
$$\delta_{10} = -\delta_{20} = \frac{1}{2} \cdot \frac{ql^2}{64} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{EI_s} = \frac{ql^2}{384EI_s}$$

$$\delta_{30} = 0$$

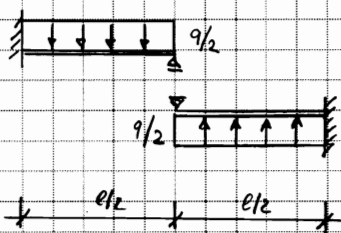
$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{l}{3EI_s}, \quad \delta_{23} = \frac{8lf^2}{15EI_s}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{l}{6EI_s}, \quad \delta_{13} = \delta_{31} = \frac{-lf}{3EI_s} = \delta_{23} + \delta_{32}$$

$$[\delta] \cdot \{X\} = -\{\delta_0\}; \quad -X_1 = X_2 = \frac{ql^2}{64}, \quad X_3 = 0$$

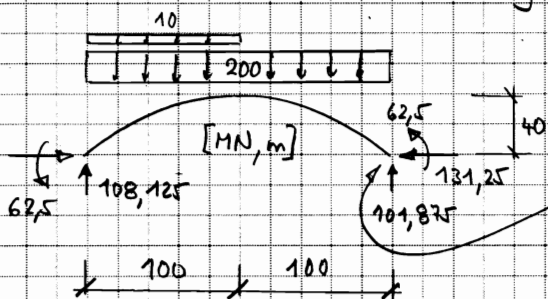


Kräftefluss



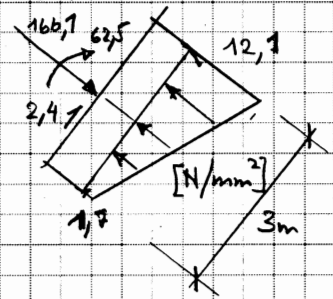
Analogieträger

Numerisches Beispiel: $l = 200 \text{ m}$, $f = 40 \text{ m}$, $g = 1 \text{ MN/m}$, $q = 0,1 \text{ MN/m}$
 rechteckiger Vollquerschnitt $b = 8 \text{ m}$, $h = 3 \text{ m}$

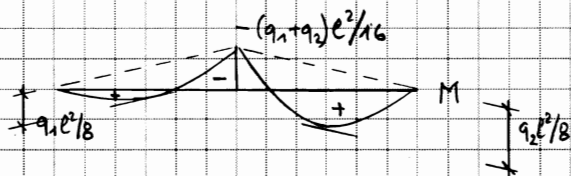
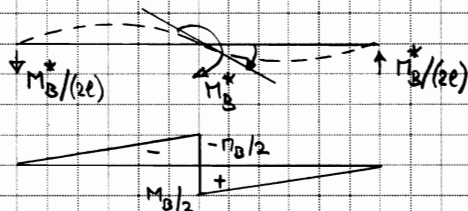
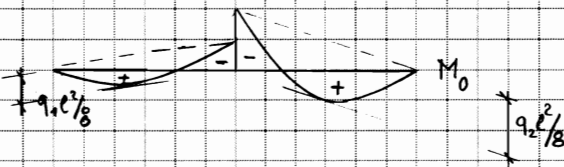
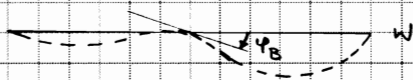
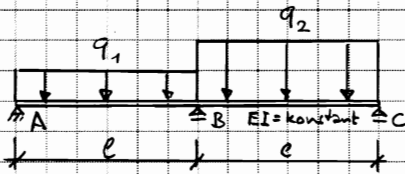


Spannungsverteilung im Einspannungsquerschnitt:

Dicke im Scheitel = 2,76m wegen $EI = EI_s / \cos \varphi$



1. Einführung



Statt unbekannter Kraftgrößen wie bei der Kraftmethode werden bei der Verformungs- oder Deformationsmethode unbekannte Verformungsgrößen eingeführt. Liefern bei der Kraftmethode Verträglichkeitsbedingungen die Lösung, so sind dies bei der Verformungsmethode Gleichgewichtsbedingungen.

Im Beispiel resultiert aus der ungleichen Belastung die Verteilung φ_B .

Blockiert man den Knoten B derart dass zunächst $\varphi_B = 0$ ist, so resultieren die Momente M_0 .

Bei B ergibt sich ein Momentensprung vom Betrag $(q_2 - q_1)l^2/8$.

Um diese Gleichgewichtsverletzung zu eliminieren, wird bei B ein Moment M_B^* aufgebracht. Dieses verursacht

$$\varphi_B = \frac{M_B^*}{2} \cdot \frac{l}{3EI}$$

Aus der Gleichgewichtsbedingung

$$-\frac{q_1 l^2}{8} - \varphi_B \cdot \frac{3EI}{l} = -\frac{q_2 l^2}{8} + \varphi_B \cdot \frac{3EI}{l}$$

folgt

$$\varphi_B = \frac{(q_2 - q_1) l^3}{48EI}$$

und

$$M_B = -\frac{q_1 l^2}{8} - \frac{M_B^*}{2} = -\frac{(q_1 + q_2) l^2}{16}$$

Analog zu den Verträglichkeitsbedingungen

$$S_{i0} + \sum_{j=1}^n S_{ij} X_j = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

bei der Kraftmethode erhält man mit der Verformungsmethode die Gleichgewichtsbedingungen

$$M_{k0} + \sum_{e=1}^m M_{ke} \varphi_e = M_k \quad (k=1, 2, \dots, m)$$

wobei M_k = äußeres Moment am Knoten k und M_{k0} = entsprechendes Festspannungsmoment.

2. Allgemeines Vorgehen

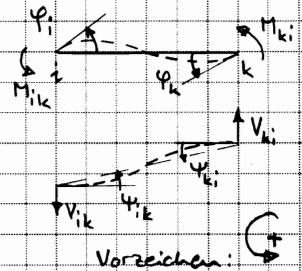
- Das Vorgehen nach dem Drehwinkelverfahren kann wie folgt zusammengefasst werden:

1. Knoten nummerieren, Knotendrehwinkel φ und Stabdrehwinkel ψ festlegen
2. Stabendmomente berechnen:

$$M_{ik} = M_{ik}^0 + S_{ik} \varphi_i + L_{ik} \varphi_k - (S_{ik} + t_{ik}) \psi_{ik}$$

$$M_{ki} = M_{ki}^0 + t_{ki} \varphi_i + S_{ki} \varphi_k - (S_{ki} + t_{ki}) \psi_{ki}$$

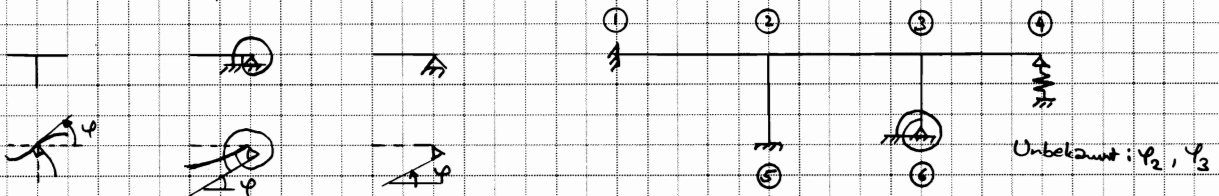
Festspannmomente
infolge Betätigung



3. Knoten- und Verschiebeleichgewichtsbedingungen aufstellen und lösen

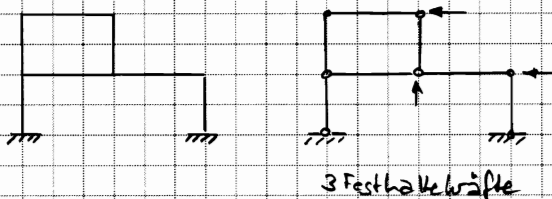
4. Schnittgrößen (M, V, N) und Auflagerreaktionen ermitteln

- Knotendrehwinkel φ :



φ ist bei jedem Knoten einzuführen
Gelenke und Federn werden als Bestandteil des Stabes betrachtet

- Stabdrehwinkel ψ :

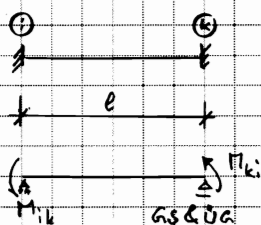


Bei jedem Knoten wird ein Gelenk angebracht,
und es werden so viele Festhaltekräfte
eingeführt, bis das System stabil ist.

Anzahl Festhaltekräfte = Anzahl unabhängige ψ

3 Festhaltekräfte

- Stabendmomente:



Im allgemeinen sind variable Biegesteifigkeiten EI zu berücksichtigen. Die Stabsteifigkeiten S_{ik} und S_{ki} sowie die Kreuzsteifigkeiten $t_{ik} = t_{ki}$ folgen durch Anwenden der Kraftmethode:

$$\varphi_i = \varphi_{i0} + \varphi_{ii} M_{ik} + \varphi_{ik} M_{ki}$$

$$\varphi_k = \varphi_{k0} + \varphi_{ki} M_{ik} + \varphi_{kk} M_{ki}$$

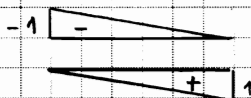
Die Koeffizienten $\varphi_{i0}, \varphi_{k0}, \varphi_{ii}, \varphi_{ik} = \varphi_{ki}$ und φ_{kk} werden durch Anwenden der Arbeitsgleichung bestimmt.

z.B. für $EI = \text{konstant}$:

$$\varphi_{ii} = \varphi_{kk} = \frac{l}{3EI}$$

$$\varphi_{ik} = \varphi_{ki} = -\frac{l}{6EI}$$

$\varphi_{i0}, \varphi_{k0}$ = Verdrehungen am GS infolge anderer Last
 φ_{ik} = Verdrehung des Knotens i am GS infolge $M_{ki} = 1$



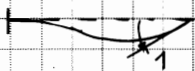
• Stabendmomente infolge q , $\varphi_i = 1$, $\varphi_k = 1$ und $\varphi_{ik} = 1$:



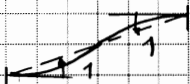
$$M_{ik}^0 = - \frac{\begin{vmatrix} \varphi_{i0} & \varphi_{ik} \\ \varphi_{k0} & \varphi_{kk} \end{vmatrix}}{N}, \quad M_{ki}^0 = - \frac{\begin{vmatrix} \varphi_{ki} & \varphi_{i0} \\ \varphi_{ki} & \varphi_{k0} \end{vmatrix}}{N}, \quad N = \begin{vmatrix} \varphi_{ki} & \varphi_{ik} \\ \varphi_{ki} & \varphi_{kk} \end{vmatrix}$$



$$M_{ik} = S_{ik} = \frac{\varphi_{kk}}{N}, \quad M_{ki} = t_{ki} = - \frac{\varphi_{ki}}{N}$$



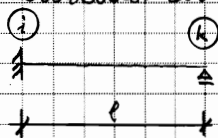
$$M_{ik} = t_{ik} = - \frac{\varphi_{ik}}{N}, \quad M_{ki} = S_{ki} = \frac{\varphi_{ii}}{N}$$



$$M_{ik} = -(s_{ik} + t_{ik}), \quad M_{ki} = -(s_{ki} + t_{ki})$$

z.B. für $EI = \text{konstant}$: $S_{ik} = S_{ki} = \frac{4EI}{l}$, $t_{ik} = t_{ki} = \frac{2EI}{l}$

• Stabendmoment bei Endstab mit freidrehbarem Auflager:



$$\varphi_i = \varphi_{i0} + M_{ik} \varphi_{ii}$$



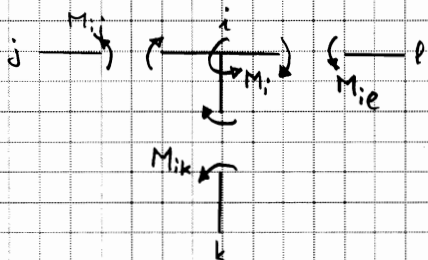
$$M_{ik}^0 = -\varphi_{i0} / \varphi_{ii}$$

$$S_{ik} = M_{ik} (\varphi_{ii} = 1) = 1 / \varphi_{ii} \quad (\text{z.B. } 3EI/l \text{ für } EI = \text{konstant})$$



$$t_{ik} = S_{ki} = 0$$

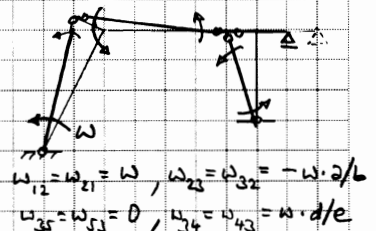
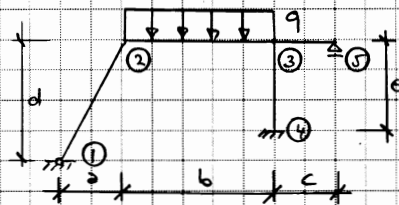
- Knotengleichgewicht



$$M_i - \sum_{k=1}^n M_{ik} = 0$$

M_i = am Knoten i angreifendes Moment

- Verschiebegleichgewicht



$$w_{12} = w_{21} = w, \quad w_{23} = w_{32} = -w \cdot a/b$$

$$w_{35} = w_{53} = 0, \quad w_{34} = w_{43} = w \cdot d/e$$

Prinzip der virtuellen Arbeiten:

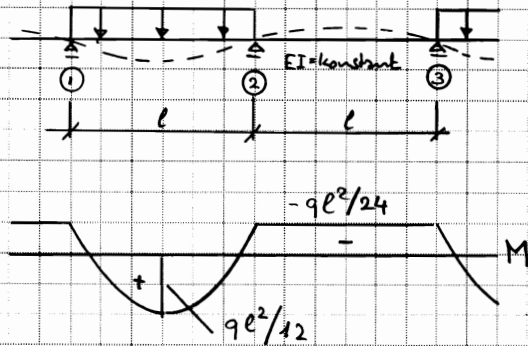
$$q b w_{23} \cdot b/2 + M_{21} \cdot w_{21} + \Pi_{20} w_{23} + \Pi_{32} w_{32} + M_{30} w_{34} + M_{43} w_{43} = 0$$

$$\Rightarrow -qab/2 + \Pi_{21} - (\Pi_{23} + \Pi_{32})a/b + (\Pi_{34} + \Pi_{43})d/e = 0$$

- Gelenke einführen, bis System verschieblich ist
- PVA für jede unabhängige Systemverschiebung formulieren
- Die an den Knoten angreifenden Momente leisten keine Arbeit, da im Gleichgewicht

3. Beispiele

a) Unendlich langer Durchlaufträger mit abwechselnd belasteten, gleich langen Feldern (vgl. S. 3):



$$-\varphi_1 = \varphi_2 = -\varphi_3 = \varphi$$

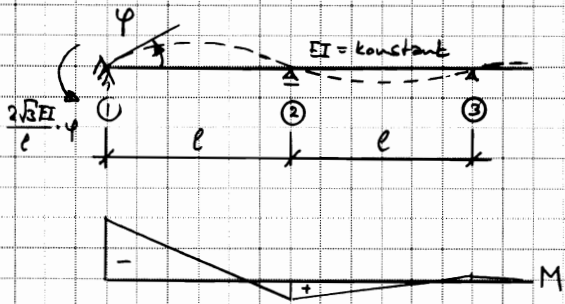
$$M_{21}^0 = -\frac{q l^2}{12}, S_{21} = S_{23} = \frac{4EI}{l}, t_{21} = t_{23} = \frac{2EI}{l}$$

$$\begin{cases} M_{21} = -\frac{q l^2}{12} + \frac{4EI}{l} \cdot \varphi - \frac{2EI}{l} \cdot \varphi \\ M_{23} = \frac{4EI}{l} \cdot \varphi - \frac{2EI}{l} \cdot \varphi \end{cases}$$

$$M_{21} + M_{23} = -\frac{q l^2}{12} + \frac{4EI}{l} \cdot \varphi = 0 \rightarrow \varphi = \frac{q l^3}{48EI}$$

$$M_{23} = \frac{q l^2}{24}$$

b) Einseitig unendlich langer Durchlaufträger mit gleich langen Feldern unter Endverdrehung φ (vgl. S. 4):



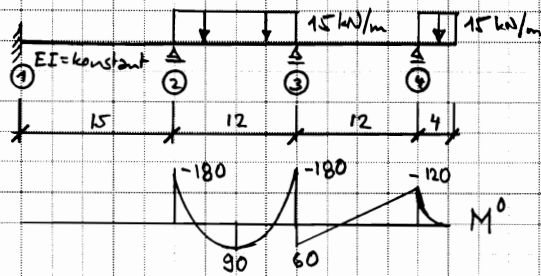
$$\varphi_1 = \varphi, \varphi_2 = -n \cdot \varphi, \varphi_3 = n^2 \varphi, \dots$$

$$\begin{cases} M_{21} = \frac{4EI}{l} \cdot (-n\varphi) + \frac{2EI}{l} \cdot \varphi \\ M_{23} = \frac{4EI}{l} \cdot (-n\varphi) + \frac{2EI}{l} \cdot (n^2 \varphi) \end{cases}$$

$$M_{21} + M_{23} = 0 \rightarrow n^2 - 4n + 1 = 0 \rightarrow n = 2 - \sqrt{3}$$

$$M_{12} = \frac{4EI}{l} \cdot \varphi + \frac{2EI}{l} \cdot (-n\varphi) = \frac{2\sqrt{3}EI}{l} \cdot \varphi$$

c) Durchlaufträger [m, kN]:



Unbekannt: φ_2, φ_3

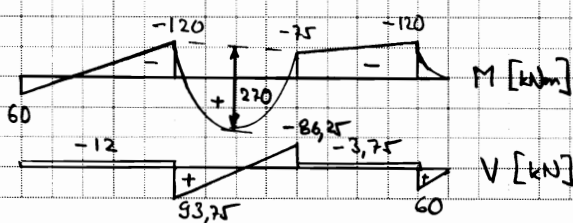
Festeinspannungsmomente [kNm]:

$$M_{23}^0 = -M_{32}^0 = 180, M_{43}^0 = -120, M_{34}^0 = -60$$

$$\sum M_2 = \frac{4EI}{15} \cdot \varphi_2 + 180 + \frac{4EI}{12} \cdot \varphi_2 + \frac{2EI}{12} \cdot \varphi_3 = 0$$

$$\sum \pi_3 = \frac{2EI}{12} \cdot \varphi_2 + \frac{4EI}{12} \cdot \varphi_3 - 180 - 60 + \frac{3EI}{12} \cdot \varphi_3 = 0$$

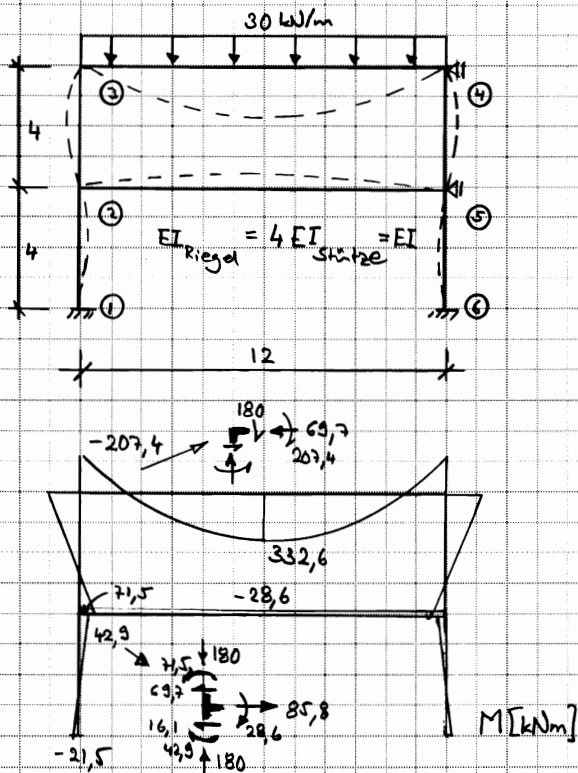
$$\therefore \varphi_2 = -450/(EI), \varphi_3 = 540/(EI)$$



$$M_{23} = 180 - \frac{1800}{12} + \frac{1080}{12} = 120$$

$$M_{32} = -\frac{900}{12} + \frac{2160}{12} - 180 = -75$$

d) Stabwerkrahmen [kN, m]:



Unbekannt: $\varphi_4 = -\varphi_2$, $\varphi_2 = -\varphi_3$

$$M_{34}^0 = 30 \cdot 12^2 / 12 = 360$$

$$M_{34} = 360 + \frac{4EI}{12} \cdot \varphi_3 - \frac{2EI}{12} \cdot \varphi_3$$

$$M_{32} = \frac{EI}{4} \cdot \varphi_3 + \frac{EI}{8} \cdot \varphi_2$$

$$M_{23} = \frac{EI}{8} \cdot \varphi_3 + \frac{EI}{4} \cdot \varphi_2$$

$$M_{25} = \frac{4EI}{12} \cdot \varphi_2 - \frac{2EI}{12} \cdot \varphi_2$$

$$M_{21} = \frac{EI}{4} \cdot \varphi_2$$

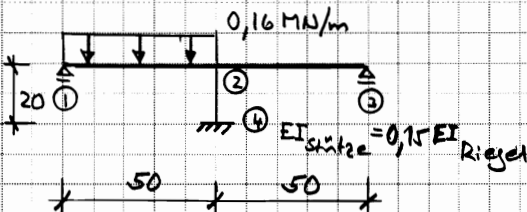
$$\sum M_3 = 0 : 8640/EI + 10\varphi_3 + 3\varphi_2 = 0$$

$$\sum M_2 = 0 : 3\varphi_3 + 16\varphi_2 = 0$$

$$\therefore \varphi_2 = 171,6556/EI, \varphi_3 = -915,4967/EI$$

N.B. Druckkraft 69,7 kN im Riegel 34
Zugkraft 85,8 kN im Riegel 25

e) Verschiebliches Rahmen [MN, m]:



Unbekannt: φ_2, ψ_{24}

$$M_{21}^0 = -0,16 \cdot 50^2 / 8 = -50$$

$$M_{21} = -50 + \frac{3EI}{50} \cdot \varphi_2$$

$$M_{23} = \frac{3EI}{50} \cdot \varphi_2$$

$$M_{24} = \frac{0,6EI}{20} \cdot \varphi_2 - \frac{0,9EI}{20} \cdot \psi_{24}$$

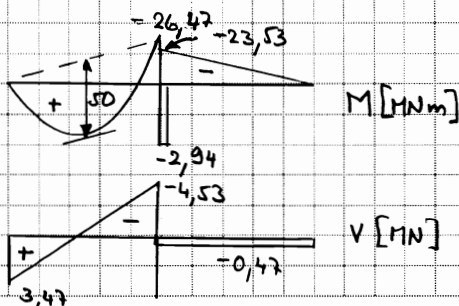
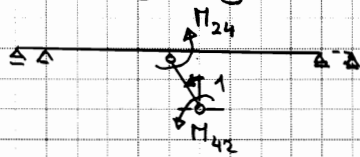
$$\sum M_2 = 0 : -5000/EI + 15\varphi_2 - 4,5\psi_{24} = 0 \quad (1)$$

$$PVA : M_{24} + M_{42} = \frac{0,6EI}{20} \cdot \varphi_2 - \frac{0,9EI}{20} \cdot \psi_{24} + \frac{0,3EI}{20} \cdot \varphi_2 - \frac{0,3EI}{20} \cdot \psi_{24} = 0$$

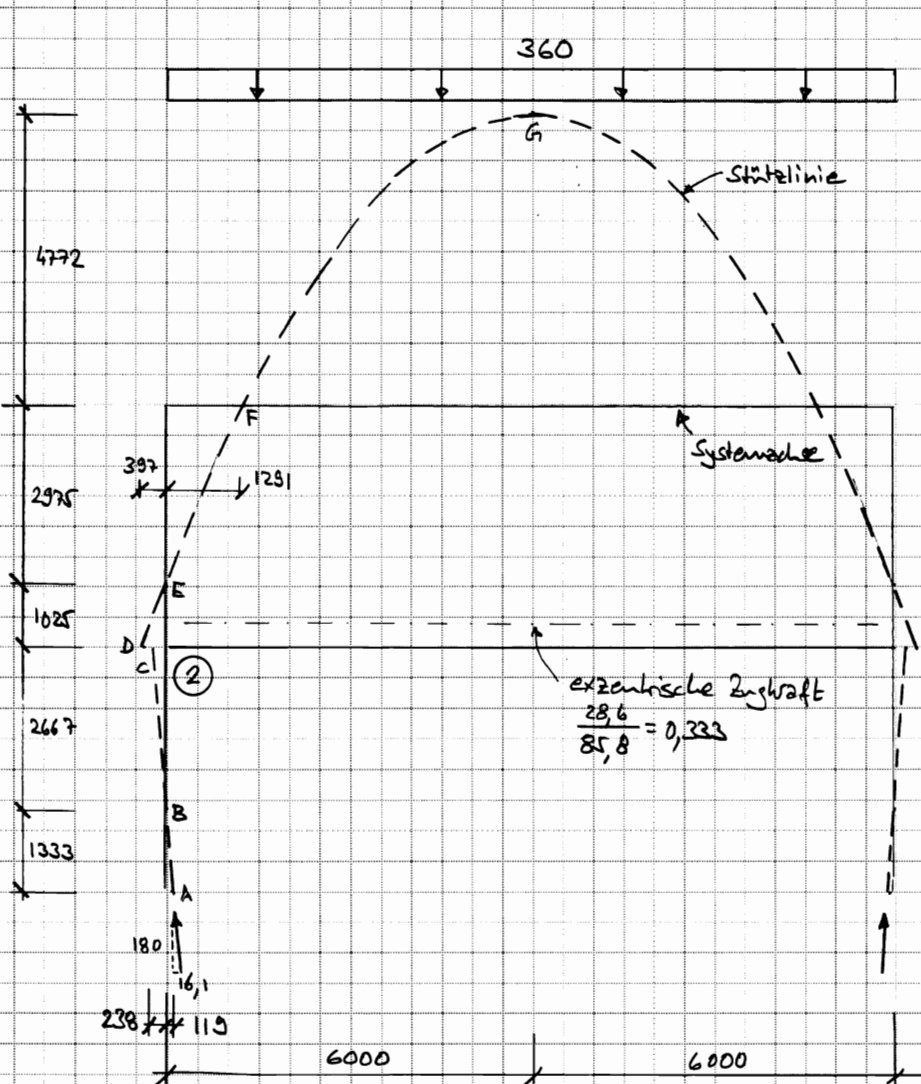
$$\rightarrow \varphi_2 - 2\psi_{24} = 0 \quad (2)$$

$$\therefore \varphi_2 = 2\psi_{24} = 392,1569/EI$$

Verschiebungsgleichgewicht:



Bemerkungen zur Tragwirkung des Hochwerkrähmens Beispiel d), vgl. S. 13:



$$\frac{332,6}{69,7} = 4,772$$

$$\frac{207,4}{69,7} = 2,975$$

$$\frac{71,5}{180} = 0,397$$

$$\frac{42,9}{180} = 0,238$$

$$\frac{21,5}{180} = 0,119$$

$$\frac{102,5}{387} = \frac{180}{69,7}, \text{ i.O.}$$

$$\frac{4000}{238+119} = \frac{180}{16,1}, \text{ i.O.}$$

Die Momentennullpunkte entsprechen den Durchstoßpunkten der Stütze durch die Systemachse.

- ABC gerade
- DE gerade
- EFG parabolisch

Knoten ②, Annahme Stingerabstand im Riegel 800 mm, in Stützen 500 mm:

$$71,5 - \frac{207,4 + 71,5}{4} \cdot 0,4 = 43,6 \text{ kNm}$$

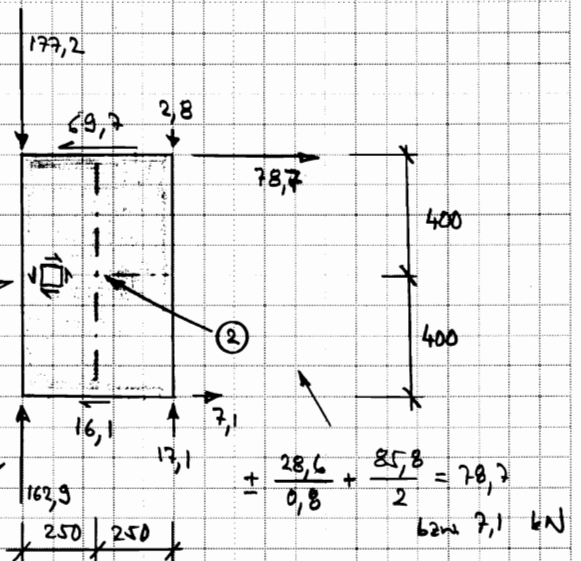
$$90 \pm 43,6 / 0,5 = 177,2 \text{ bzw. } 2,8 \text{ kN}$$

Im Knotenbereich entsteht ein Scherfluss von

$$(78,7 - 69,7) / 0,5 \approx (17,1 - 2,8) / 0,8 \approx 18 \text{ kN/m}$$

$$42,9 - \frac{21,5 + 42,9}{4} \cdot 0,4 = 36,5 \text{ kNm}$$

$$90 \pm 36,5 / 0,5 = 162,9 \text{ bzw. } 17,1 \text{ kN}$$



$$\pm \frac{28,6}{0,8} + \frac{85,8}{2} = 78,7 \text{ bzw. } 7,1 \text{ kN}$$

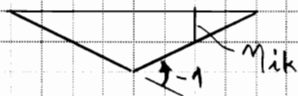
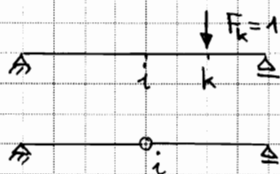
1. Statisch bestimmte Systeme

Einflusslinien beschreiben den Einfluss einer Einzelkraft vom Betrag 1 in einer festgelegten Wirkungsrichtung an der beliebigen Stelle k auf eine bestimmte Zustandsgrösse an der Stelle i , d.h.

$$S_i = \sum_{k=1}^n Q_k \cdot \eta_{ik} \quad \text{bzw.} \quad S_i = \int q(x) \cdot \eta_i(x) dx$$

Für statisch bestimmte Systeme ergeben sich stückweise gerade Einflusslinien siehe Skript S. 24-26.

Einflusslinien lassen sich mit der nach Robert Land (1857-1899) benannten Methode durch Einführen einer der Zustandsgrösse S_i entsprechenden Verschiebung von -1 gewinnen; die entstehende Biegelinie ist gleich der gesuchten Einflusslinie.



positives M_i



positive



negative

Rotations φ_i

Die grundlegenden Verhältnisse lassen sich am Beispiel der Einflusslinie für das Biegemoment in der Mitte eines einfachen Balkens leicht illustrieren.

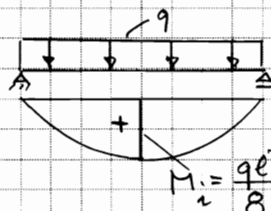
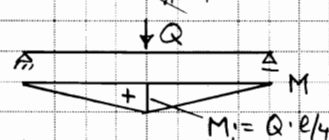
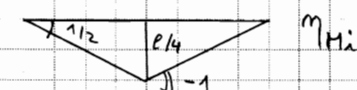
An der Stelle der interessierenden Zustandsgrösse M_i wird ein entsprechendes Gelenk eingeführt. Das statisch bestimmte System wird dadurch zu einem Mechanismus.

Lässt man sich den Mechanismus so weit verformen, bis sich an der Stelle i eine Rotation -1 ergibt, erhält man an der Stelle k die Einseitung η_{ik} .

Die äussere Kraft vom Betrag 1 leistet an der Verschiebung die Arbeit $1 \cdot \eta_{ik}$, und das Moment M_i leistet die Arbeit $M_i \cdot (-1)$, d.h. nach dem Prinzip der virtuellen Arbeiten gilt

$$1 \cdot \eta_{ik} + M_i \cdot (-1) = 0 \Rightarrow M_i = \eta_{ik}$$

Da die beiden durch das Gelenk miteinander verbundenen Balkenteile starr (gerade) bleiben, leisten die infolge der Einheitskraft $F=1$ auftretenden Biegemomente und Querkräfte keinen Beitrag zur virtuellen Gesamtarbeit.

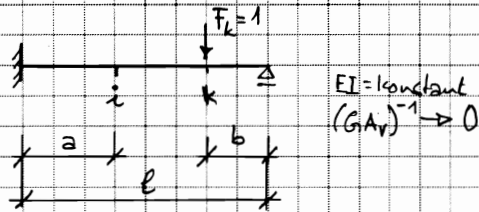


Die bekannten einfachen Fälle einer mittig angebrachten Einzelkraft Q und einer gleichmässig verteilten Strecklast q lassen sich leicht verifizieren:

$$M_i(Q) = Q \cdot \frac{l}{4} = Ql/4$$

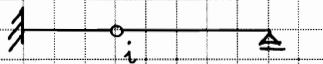
$$M_i(q) = ql \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{1}{2} = ql^2/8$$

2. Statisch unbestimmte Systeme

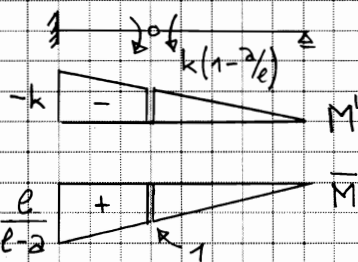


Für das einfach statisch unbestimmte System wird die Einflusslinie für das Biegemoment M_i gesucht (m_{M_i}).

Durch Einführen eines Biegegleiters an der Stelle i wird das System zu einem statisch bestimmten Gerberträger.

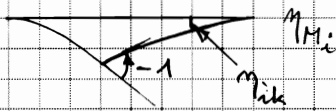


Um eine Rotation $\varphi_i = -1$ zu erzeugen, müssen unmittelbar links und rechts von i entgegengesetzt gleiche Kräftepaare angebracht werden, die dem Zwängungsmomentenverlauf M' mit dem vorerst unbekanntem Einspannmoment $-k$ entsprechen.



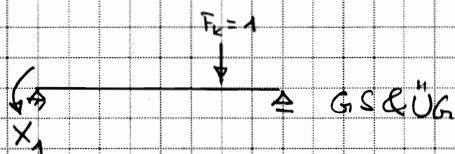
k wird mit Hilfe der Arbeitsgleichung desast bestimmt, dass $\varphi_i = -1$ wird:

$$\varphi_i = -k \cdot \frac{l}{l-2a} \cdot \frac{l}{EI} \cdot \frac{1}{3} = -1 \rightarrow k = \frac{3EI}{l} \left(1 - \frac{2a}{l}\right)$$

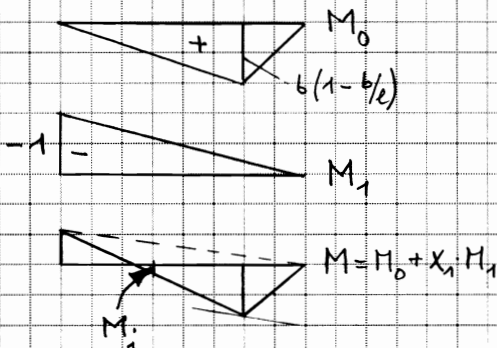


Die zu den Krümmungen $M'/(EI)$ gehörige Biegelinie kann damit leicht bestimmt werden und entspricht gerade der gesuchten Einflusslinie m_{M_i} .

Im Gegensatz zu den stückweise geraden Einflusslinien statisch bestimmter Systeme sind Einflusslinien statisch unbestimmter Systeme gekrümmt.



Die Schnittgrößen infolge $F_k=1$ am statisch unbestimmten System ergeben sich z.B. nach der Kraftmethode zu



$$M = M_0 + X_1 M_1$$

mit
$$X_1 = \frac{-\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{-\int_0^l M_1 \cdot \frac{M_0}{EI} dx}{\int_0^l M_1 \cdot \frac{M_1}{EI} dx}$$

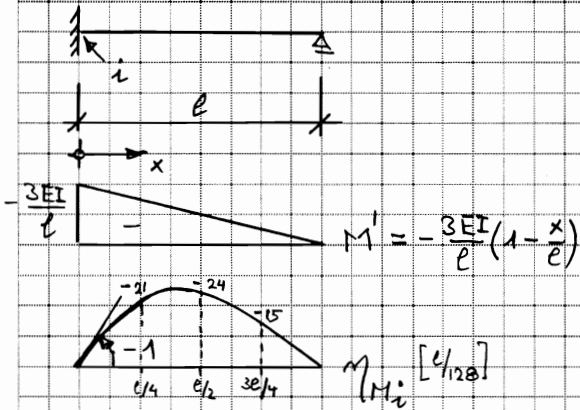
Verknüpft man die Kraftgrößen infolge $F_k=1$ am statisch unbestimmten System mit den virtuellen Verformungsgrößen m_{M_i} , so erhält man nach dem Prinzip Π_i der virtuellen Arbeiten

$$1 \cdot \eta_{ik} + M_i \cdot (-1) + \int_0^l M \cdot \frac{M'}{EI} dx = 0$$

$$\int_0^l M \cdot \frac{M'}{EI} dx = \int_0^l (M_0 + X_1 M_1) \cdot \frac{k \cdot M_1}{EI} dx = k \cdot (\delta_{10} + X_1 \delta_{11}) = 0 \Rightarrow M_i = \eta_{ik}$$

Der Zwängungszustand M' und der Lastspannungszustand M sind zueinander orthogonal. Die Kräfte des einen Zustands leisten an den Verformungen des anderen keine Arbeit.

Anwendung: $a = 0$, Einflusslinie für das Einspannmoment



$$k = 3EI/l$$

$$w'' = -\frac{M'}{EI} = \frac{3}{l^2} \cdot (l-x)$$

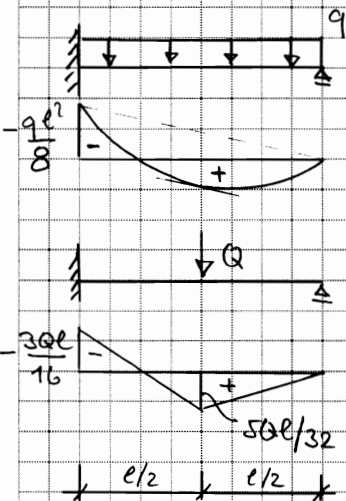
$$w' = \frac{3}{l^2} \cdot \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_1$$

$$w = \frac{3}{l^2} \cdot \left(lx \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_1 x + C_2$$

$$w'(0) = -1 \Rightarrow C_1 = -1$$

$$w(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$w = -x + \frac{3x^2}{2l} - \frac{x^3}{2l^2} = \eta_{M_i}$$



Gleichmässig verteilte Belastung q:

$$\int_0^l q \cdot \eta_{M_i} dx = -q \cdot \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2l} + \frac{x^4}{8l^2} \right]_0^l = -ql^2/8$$

Einzellast in Feldmitte:

$$Q \cdot \left(-\frac{l}{2} + \frac{3l}{8} - \frac{l}{16} \right) = -\frac{3Ql}{16}$$

etc.

Die Methode Land lässt sich für beliebige Systeme verallgemeinern.

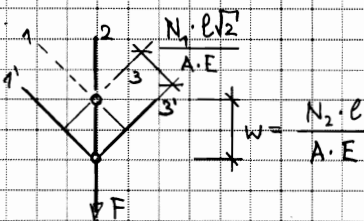
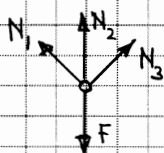
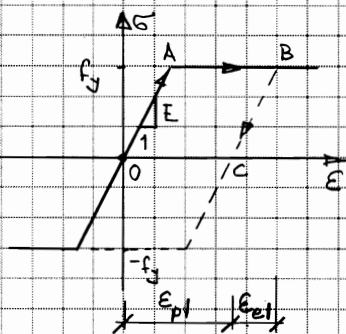
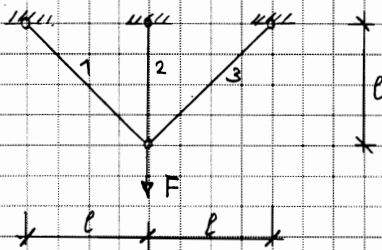
Wichtig ist v.a. die qualitative Anwendung von Einflusslinien, insbesondere zur raschen Ermittlung massgebender Laststellungen.

Mit gefühlvoll gezeichneten Einflusslinien lassen sich einzelne interessierende Zustandsgrössen in kürzester Zeit für beliebige Lastfälle abschätzen.

Die früher übliche quantitative Auswertung von Einflusslinien ist heute überholt.

N.B. Einflusslinien für Verschiebungsgrössen (z.B. Durchbiegungen) ergeben sich nach dem Satz von Maxwell ($\delta_{ij} = \delta_{ji}$) durch Anbringen einer Einzellast vom Betrag 1 an der Stelle (j) und in der Richtung der gesuchten Verschiebung.

Einfach statisch unbestimmtes Fachwerk



Alle Stäbe sind prismaförmig und weisen dieselbe Querschnittsfläche A auf.

Alle Stäbe sind aus demselben Werkstoff hergestellt, der sich linear elastisch-ideal plastisch verhält. Dieses Verhalten wird mit dem Elastizitätsmodul E und den Fließgrenzen $\pm f_y$ charakterisiert.

Bei der Entlastung aus B verbleibt bei C die plastische Dehnung $\epsilon_p = \epsilon_B - f_y/E$; der elastische Anteil f_y/E von ϵ_B bildet sich zurück.

Allgemein gilt $\epsilon = \epsilon_{el} + \epsilon_{pl}$ mit $\epsilon_{el} = \sigma/E$, wobei $|\sigma| \leq f_y$.

Das Verhalten des Systems unter einer monoton wachsenden Belastung F kann in drei Phasen unterteilt werden, nämlich

- a) elastisch ($0 \leq F < F_y$)
- b) elastisch-plastisch ($F_y \leq F < F_u$)
- c) plastisch ($F = F_u$)

a) Elastische Phase:

Gleichgewicht: $-N_1 + N_3 = 0, N_2 + (N_1 + N_3) \frac{\sqrt{2}}{2} - F = 0$

Verschiebung: $w = \frac{N_2 \cdot l}{A \cdot E} = \frac{2N_1 \cdot l}{A \cdot E}$

Stabkräfte: $N_1 = N_3 = \frac{N_2}{2} = \frac{F}{2 + \sqrt{2}}$

Fließbeginn: $N_2 = A \cdot f_y \rightarrow F_y = A \cdot f_y (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}), w_y = \frac{f_y \cdot l}{E}$

b) Elastisch-plastische Phase:

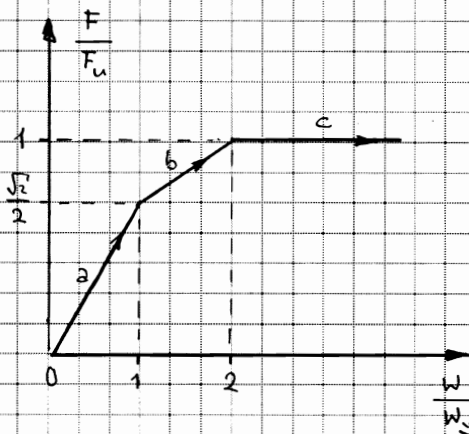
$N_2 = A \cdot f_y$ (System statisch bestimmt)

Somit: $N_1 = N_3 = (F - A \cdot f_y) / \sqrt{2}, w = \frac{(F - A \cdot f_y) \cdot l \sqrt{2}}{A \cdot E}$

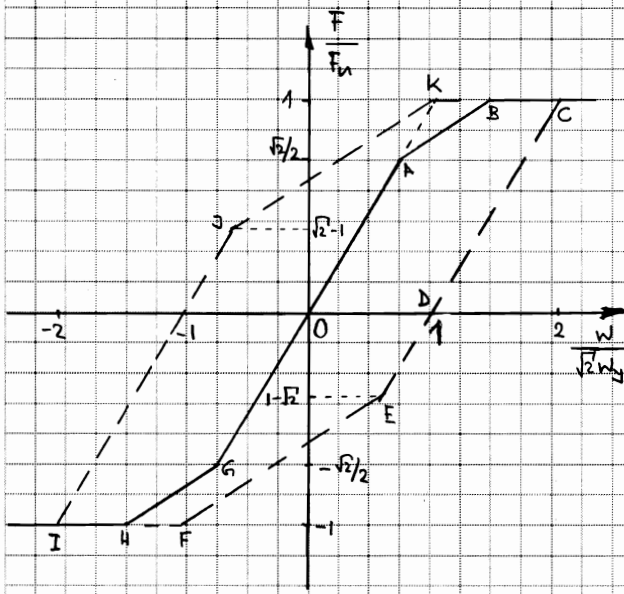
Traglast: $N_1 = N_3 = A \cdot f_y \rightarrow F_u = A \cdot f_y \cdot (1 + \sqrt{2}), w_u = \frac{f_y \cdot l \cdot 2}{E}$

c) Plastische Phase:

$N_1 = N_3 = N_2 = A \cdot f_y, F = F_u, w$ kann unbeschränkt wachsen (System ist zu einem Mechanismus geworden).



Die elastisch-plastische Phase entspricht einem beschränkten Fließen (nur Stab 2 fließt). Mit dem Erreichen der Traglast F_u ergibt sich ein unbeschränktes, einen Mechanismus ermöglichendes Fließen.



Bei einer Entlastung nach einer bestimmten plastischen Verformung verhalten sich alle Stäbe elastisch. Vollständige Entlastung ausgehend von F_u ergibt:

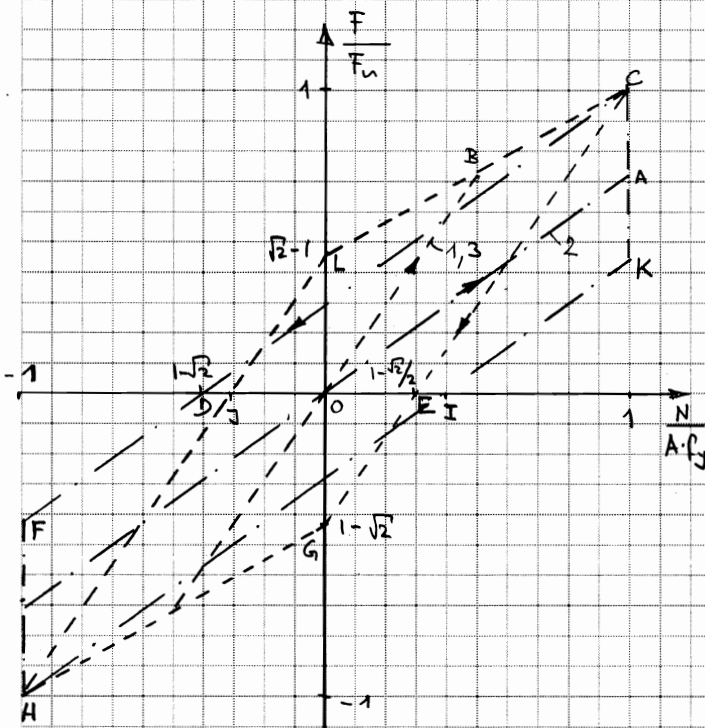
$$N_2 = A \cdot f_y - \frac{2 \cdot F_u}{2 + \sqrt{2}} = A f_y \cdot (1 - \sqrt{2})$$

$$N_1 = N_3 = A \cdot f_y - \frac{F_u}{2 + \sqrt{2}} = A f_y \cdot (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$$

Wird die Belastung nach der vollständigen Belastung in umgekehrtem Sinn fortgesetzt, so erreicht der Stab 2 bei

$$F = (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot A f_y (\sqrt{2} - 2) = -A f_y = (1 - \sqrt{2}) \cdot F_u$$

die Fließgrenze $-f_y$, und es beginnt eine zweite elastisch-plastische Phase, die mit dem Erreichen der Fließgrenze $-f_y$ in den Stäben 1 und 3 bei $F = -F_u$ abgeschlossen wird.



Mit dem nebenstehenden Diagramm können die Stabkräfte bei beliebigen Belastungsprozessen verfolgt werden:

- Erstbelastung, Phase a): OA, OB
- b): AC, BC
- c): C

Entlastung aus C : CD, CE

Belastung im Gegensinn: DFH, EGH

Entlastung (Wiederbelastung) aus H: HJKC, HJLC

Die Punkte D und E bzw. I und J entsprechen sogenannten Eigenspannungszuständen

$$\begin{Bmatrix} N_{10} \\ N_{20} \\ N_{30} \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 1 \\ -\sqrt{2}/2 \end{Bmatrix} = P \cdot \{N_0\}$$

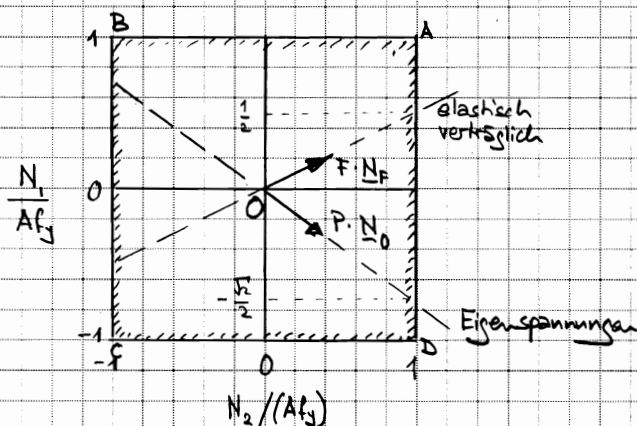
wobei P einen Eigenspannungs- oder Zwangsparameter bezeichnet.

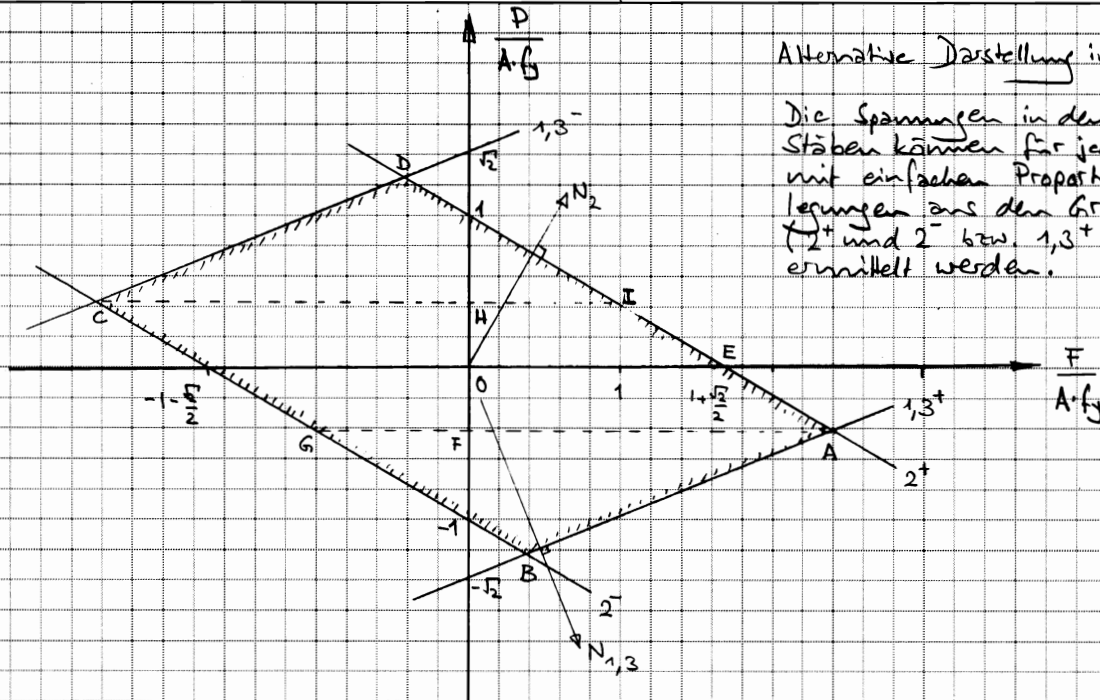
Dieser Eigenspannungszustand werden elastisch verträgliche Spannungen

$$\begin{Bmatrix} N_{1F} \\ N_{2F} \\ N_{3F} \end{Bmatrix} = F \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{2 + \sqrt{2}} = F \cdot \{N_F\}$$

überlagert : $\{N\} = P \cdot \{N_0\} + F \cdot \{N_F\}$

bzw. $N = P \cdot N_0 + F \cdot N_F$





Alternative Darstellung in F-P-Ebene

Die Spannungen in den einzelnen Stäben können für jeden Bildpunkt mit einfachen Proportionalitätsüberlegungen aus den Grenzwerten (2^+ und 2^- bzw. $1,3^+$ und $1,3^-$) ermittelt werden.

Die Fließbedingungen $|N_i| \leq A f_y$ beschränken die möglichen Bildpunkte in der F-P-Ebene auf streifenförmige Bereiche, deren Durchschnitt ein konvexes Fließpolygon bildet.

Erstbelastung OEA, Entlastung AF, Belastung im Gegensinn FGC, weiter CHI, etc.

Ausser für die Traglast (Punkte A und C) hängt der Spannungszustand von der ganzen Belastungsgeschichte ab.

Fiktive elastische Formänderungsarbeit $U = \sum_{i=1}^3 \frac{N_i^2 \cdot l_i}{2EA}$

$$U = F^2 \cdot \sum_{i=1}^3 \frac{N_{iF}^2 \cdot l_i}{2EA} + F \cdot P \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^3 \frac{N_{iF} \cdot N_{i0} \cdot l_i}{EA}}_0 + P^2 \cdot \sum_{i=1}^3 \frac{N_{i0}^2 \cdot l_i}{2EA}$$

$$= F^2 \cdot \frac{l}{(2+\sqrt{2})EA} + P^2 \cdot \frac{l(1+\sqrt{2})}{2EA}$$

Der Abstand von Bildpunkten in der F-P-Ebene vom Ursprung ist zu \sqrt{U} proportional.

Offensichtlich gelten folgende Sätze:

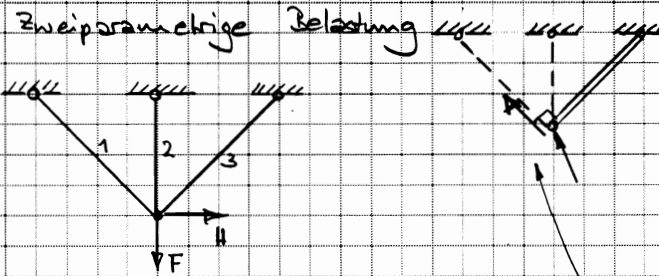
Die Tragfähigkeit ist nicht erschöpft, wenn sich ein Gleichgewichtszustand angeben lässt, der nirgends die Fließgrenze erreicht.

Bei einer monotonen Laststeigerung tritt derjenige Spannungszustand ein, der U minimiert, ohne dass die Fließgrenze irgendwo überschritten wird.

Für eine infinitesimale Belastungsänderung ΔF stellt sich diejenige Spannungsänderung ein, welche ΔU minimiert, ohne dass die Fließgrenze irgendwo überschritten wird.

Gegebene Grenzwerte von F liegen innerhalb des Anpassungsvermögens des Systems, wenn ein Eigenspannungszustand angegeben werden kann, derart, dass die resultierenden Spannungsgrenzwerte nirgends die Fließgrenze überschreiten.

Verallgemeinerung für mehrfach statisch unbestimmte Systeme (P_1, P_2, \dots, P_n), mitparametrische Belastung (F_1, F_2, \dots, F_m) und allgemeine Belastungs-Zwangszyklen ohne grundsätzliche Schwierigkeiten möglich.

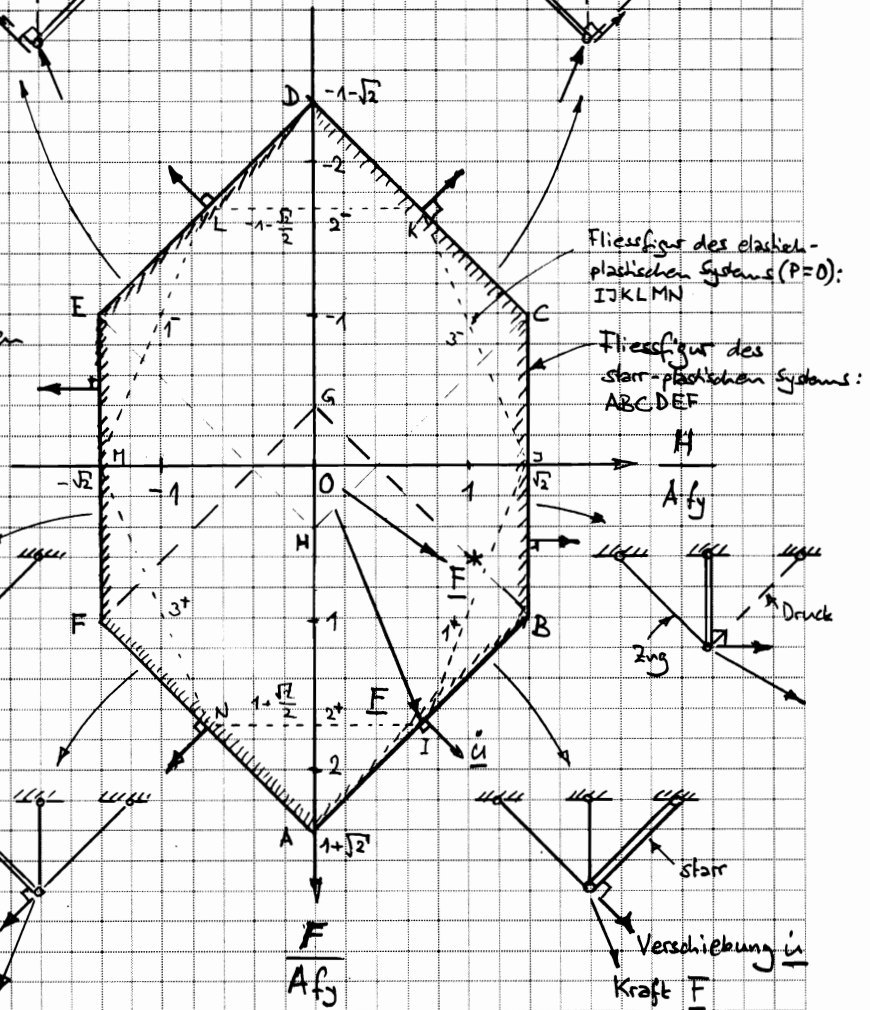


Die zu den jeweils starr bleibenden Stäben orthogonalen Verschiebungsvektoren sind zu den entsprechenden Seiten der Fließfigur orthogonal.

Die Verschiebungsvektoren sind infinitesimal klein und zeigen die Richtung des Bruchmechanismus an.

Die hier dargestellte Fließfigur des starr-plastischen Systems entspricht der Projektion des auf der folgenden Seite dargestellten Parallelepipedes in die F-H-Ebene:

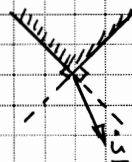
- ABCH/DEFG → 1⁺/1⁻
- ABGF/CDEH → 2⁺/2⁻
- AHEF/BCDG → 3⁺/3⁻



Regime	N_1/A_1	N_2/A_2	N_3/A_3
AB	1	1	s
B	1	1	-1
BC	1	s	-1
C	1	-1	-1
CD	s	-1	-1
D	-1	-1	s
DE	-1	-1	1
E	-1	-1	1
EF	-1	s	1
F	-1	1	1
FA	s	1	1
A	1	1	1

s = starr, d.h. $|N_i| < A_i$

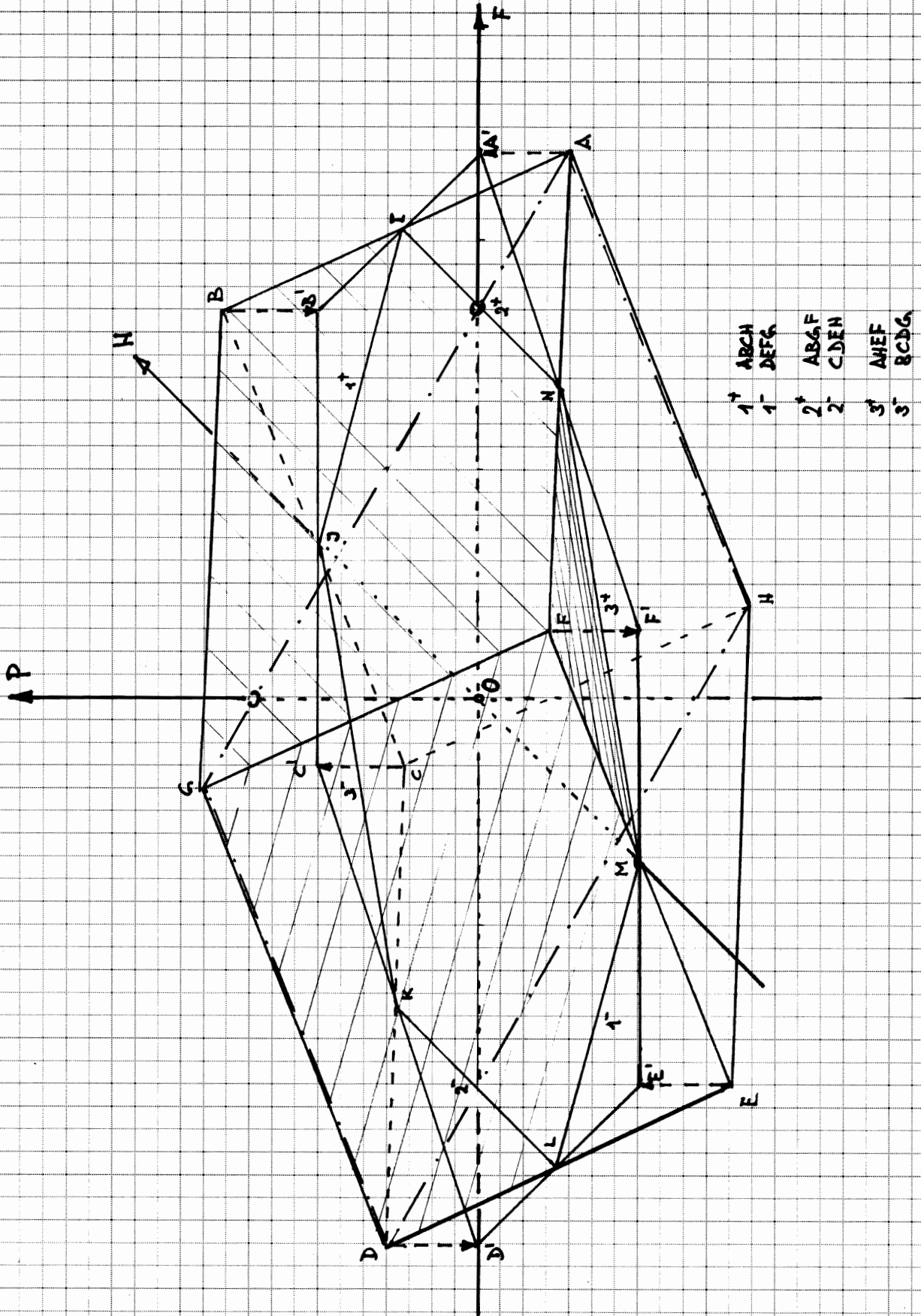
An den Eckpunkten der Fließfigur können die Verschiebungsvektoren zwischen jenen der angrenzenden Seiten der Fließfigur sein:



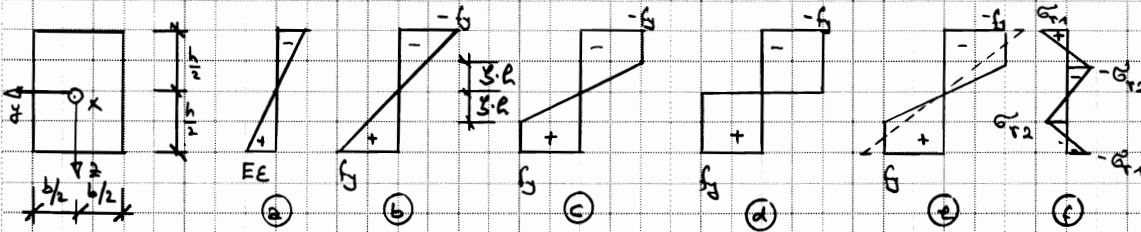
Betrachtet man einen beliebigen Kraftvektor $F = (F, H)$ mit Endpunkt an der Fließgrenze, den zugehörigen Verschiebungsvektor u_i (Verschiebungsincrement beim Bruch) sowie einen beliebigen Kraftvektor F^* mit Endpunkt innerhalb der Fließfigur, so gilt

$$(F - F^*) \cdot u_i \geq 0$$

Aus diesem sog. Prinzip der maximalen Dissipationsarbeit folgen die Konvexität der Fließfigur und die Orthogonalität der Verschiebungsincrementvektoren.



Balkenbiegung



Erläuterung durch Ermittlung des $M-\chi$ -Diagramms eines Rechteckquerschnitts:

- (a) elastisch $\epsilon = z \cdot \chi = \frac{\sigma}{E} = \frac{M \cdot z}{EI}$ $I = \frac{bh^3}{12}$
- (b) Fließbeginn $M_y = \frac{bh^2 \sigma_y}{6}$, $\chi_y = \frac{\sigma_y \cdot z}{E \cdot R}$
- (c) elastisch-plastisch $\chi = \frac{f_y}{E \cdot z \cdot h}$, $M' = \left(\frac{bh^2}{4} - \frac{b \sigma_y^2 z^2}{3} \right) \cdot f_y = M_y \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{\chi^2}{2 \chi_y^2} \right)$
- (d) Traglast $M_u = \frac{bh^2 f_y}{4} = \frac{3}{2} \cdot M_y$, $\chi_u \rightarrow \infty$ Formfaktor $\frac{M_u}{M_y} = 1,5$
- (e) Entlastung (von M' aus) $-\sigma_{r1} = f_y - \frac{M' \cdot 6}{bh^2} = f_y \cdot \left(2,5 - \frac{1}{2} \right)$, $\sigma_{r2} = f_y - \frac{M' \cdot 3 \cdot 2}{bh^2/6} = f_y \cdot (1 - 3,5 + 4,5^3)$

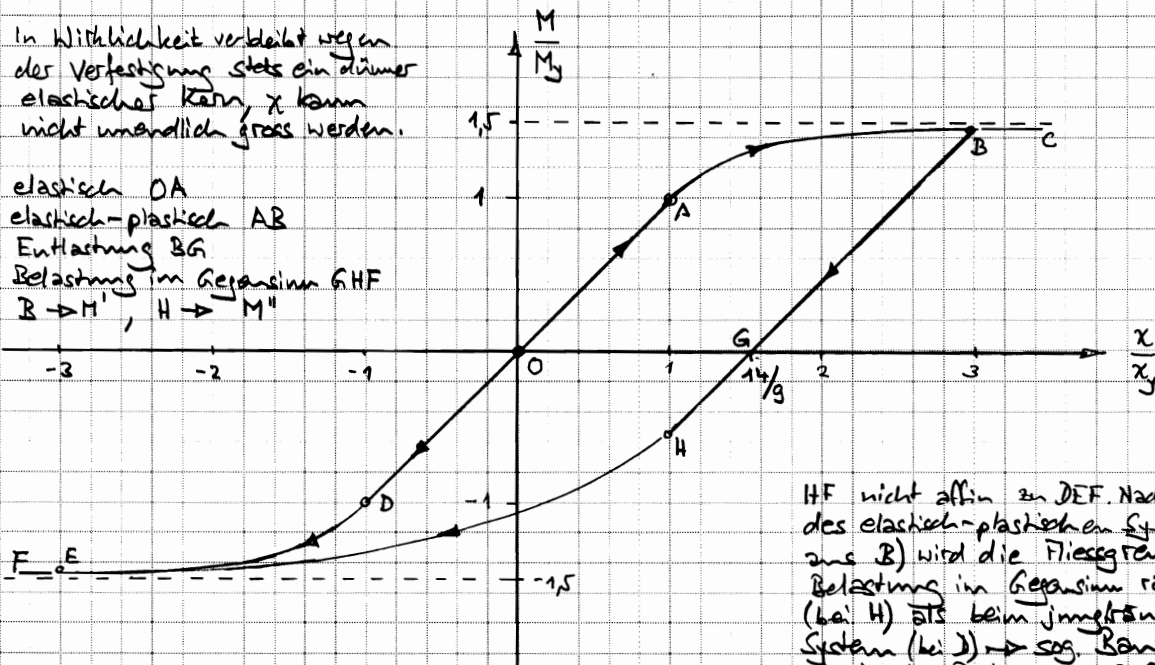
Eigenstresszustand (f)

Bei einer Belastung im Gegensinn werden dem Eigenstresszustand elastische Spannungen überlagert, bis zum erneuten Fließbeginn bei M'' :

$$-M'' = (f_y - \sigma_{r1}) \cdot \frac{bh^2}{6} = M_y \cdot \left(\frac{1}{2} + 2 \cdot 0,5^2 \right) \text{ , d.h. } M' - M'' = 2M_y = \text{konstant}$$

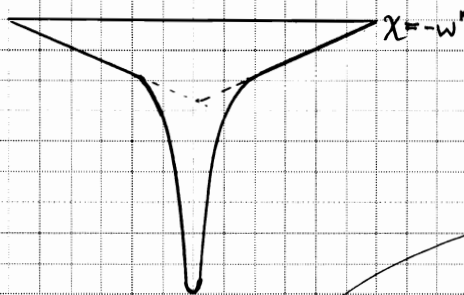
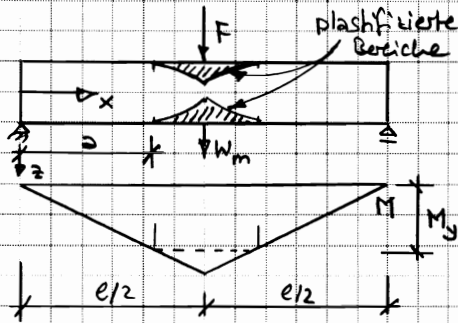
In Wirklichkeit verbleibt wegen der Verfestigung stets ein dünner elastischer Kern, χ kann nicht unendlich groß werden.

elastisch OA
 elastisch-plastisch AB
 Entlastung BG
 Belastung im Gegensinn GHF
 $B \rightarrow M'$, $H \rightarrow M''$



HF nicht affin zu DEF. Nach Entlastung des elastisch-plastischen Systems (z.B. aus B) wird die Fließgrenze bei Belastung im Gegensinn rascher erreicht (bei H) als beim innerelastischen System (bei D) \rightarrow sog. Bauschinger-Effekt, wichtig bei Problemen 2. Ordnung.

Anwendung auf einfachen Balken unter mittiger Einzellast:



$$F_y = 4 \cdot \frac{M_y}{l}$$

$$w = \frac{l}{2} \cdot \frac{M_y}{EI}$$

$$w_y = \frac{F_y l^3}{48 EI} = \frac{\chi_y \cdot l^2}{12}$$

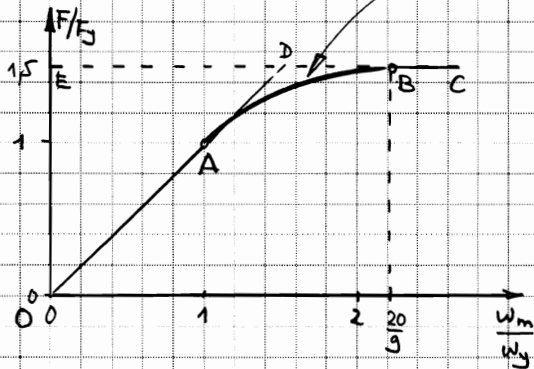
$$0 \leq x \leq \frac{l}{2} : \chi = \chi_y \cdot \frac{x}{l/2}, \quad w = \frac{\chi_y x^2}{6 \cdot \frac{l}{2}} + c_1 \cdot x$$

$$\frac{l}{2} \leq x \leq l : \chi = \frac{\chi_y}{\sqrt{3 - \frac{2x}{l}}}, \quad w = -\chi_y \cdot \left(3 - \frac{2x}{l}\right)^{3/2} \cdot \frac{l^2}{5} + c_2 x + c_3$$

$$w(0) = \frac{dw}{dx}\left(\frac{l}{2}\right) = 0, \quad w(l/2) \text{ und } \frac{dw}{dx}(l/2) \text{ stetig}$$

$$\frac{w_m}{w_y} = \left(\frac{F}{F_y}\right)^2 \cdot \left[5 - \left(3 + \frac{F}{F_y}\right) \left(3 - \frac{2F}{F_y}\right)^{1/2}\right]$$

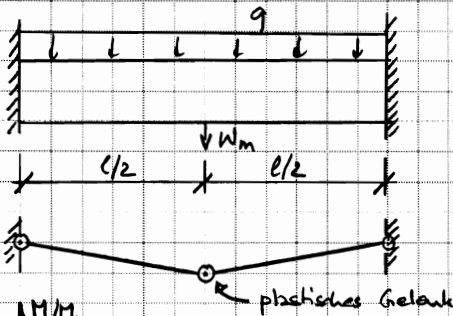
$$F = F_u = 1,5 \cdot F_y \rightarrow w_m = \frac{20}{9} \cdot w_y, \text{ endlich!}$$



Näherung mit bilinearem M-x-Diagramm ergäbe OADBC.

Wären elastische Verformungen vernachlässigt, erhält man das stat.-ideal plastische Verhalten OEDBC.

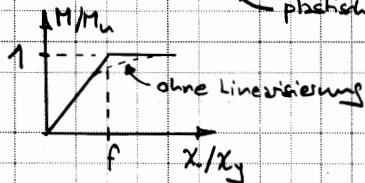
Beidseitig eingespannter Balken unter Gleichlast, vereinfachtes M-x-Diagramm:



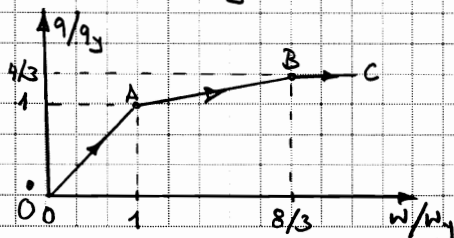
Formfaktor $f = 1,5$ (Rechteckquerschnitt)

$$\text{Fließbeginn } \frac{q_y l^2}{12} = M_u, \quad w_y = \frac{q_y l^4}{384 EI}$$

$$\text{Traglast } \frac{q_u l^2}{16} = M_u, \quad w_u = w_y + \frac{5(q_u - q_y) l^4}{384 EI} = \frac{8}{3} \cdot w_y$$



Ohne Linearisierung des M-x-Diagramms ergäbe sich nach dem Fließbeginn eine Entlastung einzelner Querschnitte bei den Einspannungen unter steigender Last q. Ferner gälte $q_u/q_y = 2 > f = 1,5$.



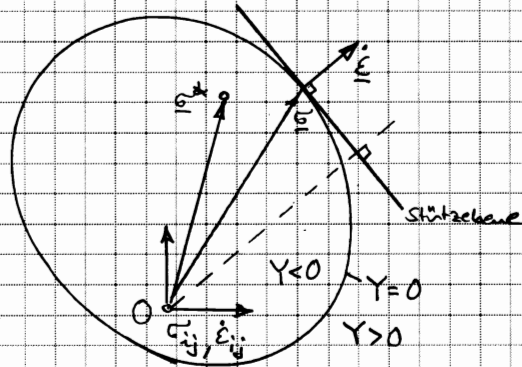
Plastische Rotation bei Einspannstellen in elastisch-plastischer Phase:

$$\theta_{pl} = \frac{(q_u - q_y) l^2}{8} \cdot 1 \cdot \frac{l}{EI} \cdot \frac{1}{3} = \frac{M_u \cdot l}{6 \cdot EI} = \frac{f_y \cdot l}{2 \cdot EI}$$

$$M_u = f_y \cdot b h^2 / 4, \quad I = b h^3 / 12$$

Am Beispiel des einfach statisch unbestimmten Fachwerksystems erkannten wir, dass sich sowohl im Raum der verallgemeinerten Spannungen (N_1, N_2, N_3) als auch im Raum der verallgemeinerten Lasten (F, H) konvexe Fließgrenzen bzw. Fließfiguren ergeben, und dass sich die verallgemeinerten Verformungen bzw. Verschiebungen (w, u) als zu diesen Fließgrenzen bzw. Fließfiguren orthogonale Vektoren denken lassen.

Konvexität der Fließgrenze und Orthogonalität der plastischen Verzerrungsinkremente werden nun als Postulate im Spannungsraum vorausgesetzt.



Fließgrenze $Y=0$ ist Einhüllende aller Stützvektoren.

Stützvektor = Orthogonalvektor zu Verzerrungsincrement $\dot{\epsilon}$ durch Endpunkt des zugehörigen Spannungsvektors $\underline{\sigma}$.

Beliebiger aplastischer Spannungsvektor $\underline{\sigma}^*$

Prinzip der maximalen Dissipationsarbeit

$$(\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^*) \cdot \dot{\epsilon} \geq 0$$

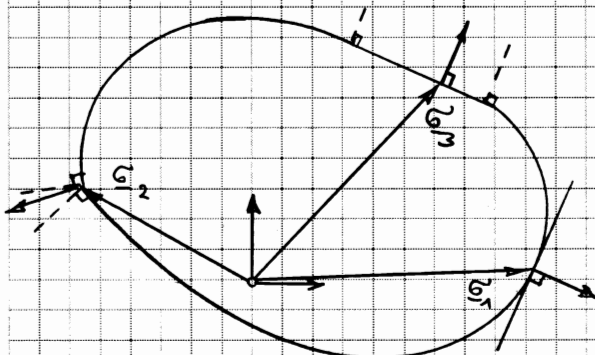
$\dot{\epsilon}$ = plastisches Verzerrungsincrement. Die Ableitung (') bezieht sich nicht auf die physikalische Zeit, sondern einen rein skalaren Parameter. Der beim Erreichen der Fließgrenze sich einstellende Mechanismus ist durch das Verhältnis der Komponenten von $\dot{\epsilon}$ bestimmt, ihre absolute Größe spielt keine Rolle (infinitesimal kleine Verformungen). Statt von Verzerrungsgeschwindigkeiten und Dissipationsleistungen wird deshalb in der Folge immer von Verzerrungen und Dissipationsarbeiten gesprochen.

Setzt man das Prinzip der maximalen Dissipationsarbeit als Postulat voraus, so folgen Konvexität der Fließgrenze und Orthogonalität der $\dot{\epsilon}$ zu ihr.

Offen sichtlich gilt das Fließgesetz

$$\dot{\epsilon} = k \text{ grad } Y \quad (k \geq 0)$$

Die Fließfunktion Y spielt die Rolle einer Potentialfunktion und wird deshalb auch als plastisches Potential bezeichnet.



Für Fließgrenzen mit Spitzen und Ecken gilt die Verallgemeinerung

$$\dot{\epsilon} = \sum k_i \text{ grad } Y_i \quad (k_i \geq 0)$$

- σ_1 ... Fließgrenze stark konvex, glatt ... regulär
- σ_2 ... " " " , nicht glatt ... singular
- σ_3 ... " schwach " , glatt ... singular

In jedem Fall ist die (elementare) Dissipationsarbeit $D = \underline{\sigma} \cdot \dot{\epsilon}$ eine eindeutige Funktion von $\dot{\epsilon}$, d.h. $D = D(\dot{\epsilon})$. Zudem gilt für positive c die Beziehung $D(c \cdot \dot{\epsilon}) = c \cdot D(\dot{\epsilon})$, d.h. D ist eine homogene Funktion vom Grad eins.

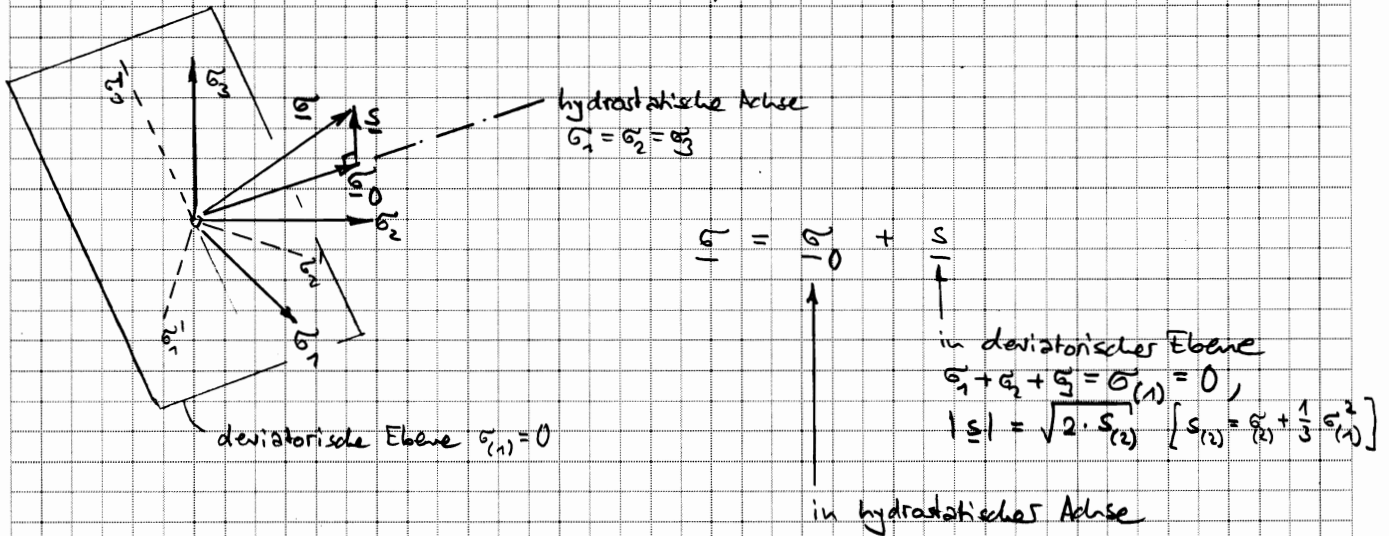
Allgemein heißt eine Funktion $f(\underline{r})$ homogen vom Grad n , wenn $f(c\underline{r}) = c^n f(\underline{r})$, und nach einem Satz von Euler gilt $\underline{r} \cdot \text{grad} f = n f(\underline{r})$, somit

$$\underline{\dot{\epsilon}} \cdot \text{grad} D = 1 \cdot D = \underline{\dot{\epsilon}} \cdot \underline{\sigma} \Rightarrow \underline{\sigma} = \text{grad} D$$

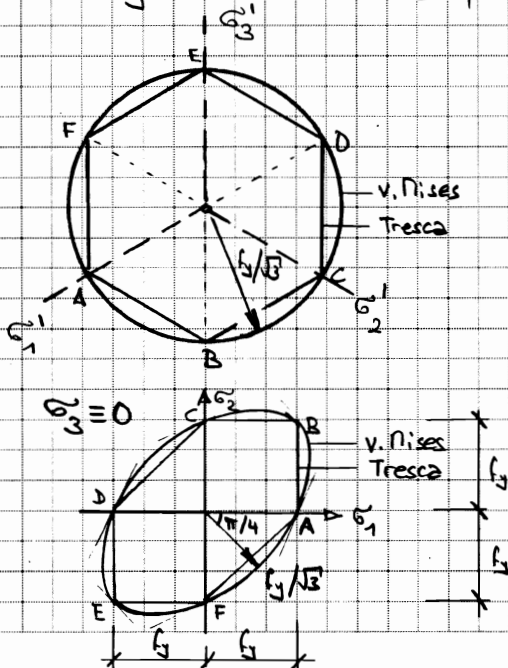
Man kann zeigen, dass die hier für den Spannungsraum dargelegte Theorie des plastischen Potentials auch für gesamte Systeme, verallgemeinerte Spannungen und Lasten sowie die zugehörigen Verformungen und Verschiebungen gilt.

In der Folge werden sechs Fließbedingungen $Y=0$ für isotropes Verhalten des Werkstoffs dargestellt, nämlich jene von v. Mises, Tresca, Prager, Drucker, Coulomb und Mohr.

Für isotropes Verhalten kann $Y=0$ als Funktion der Grundinvarianten des Spannungstensors dargestellt werden, d.h. $Y(\sigma_{(1)}, \sigma_{(2)}, \sigma_{(3)}) = 0$ mit $\sigma_{(1)} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$, $\sigma_{(2)} = -\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3$, $\sigma_{(3)} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$.



Inkompressibles Verhalten: $\dot{\epsilon}_{(1)} = \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon}_3 = 0 \rightarrow$ alle Fließgrenzen ergeben sich zur hydrostatischen Achse parallele Zylinder $Y(s_{(2)}, s_{(3)}) = 0$.



$$s_{(2)} = f_y^2 / 3 \quad \text{v. Mises}$$

$$s_{(2)}^2 = f_y^2 / 4 \quad \text{Tresca}$$

$$(4s_{(2)}^3 - 27s_{(3)}^2 - 9f_y^2 s_{(2)}^2 + 6f_y^4 s_{(3)} - f_y^6 = 0)$$

Ebenes Spannungszustand ($\sigma_3 = 0$):

v. Mises: $3s_{(2)} = \sigma_1^2 + 3\sigma_2^2 = \sigma_1^2 + 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 - 3\sigma_1\sigma_2 = \sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = f_y^2$, Ellipse

Tresca: $\left. \begin{aligned} |\sigma_1| &\leq f_y \\ |\sigma_2| &\leq f_y \\ |\sigma_1 - \sigma_2| &\leq f_y \end{aligned} \right\}$ Sechseck

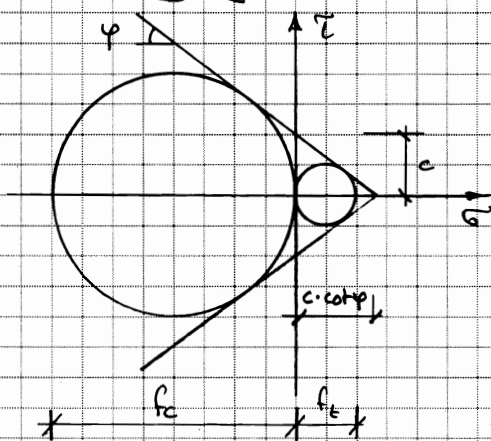
Kompressibles Verhalten

Vergleichsbeziehung von v. Nöies: $S_{(2)} - \frac{2}{3} \sqrt{s^2} \left(1 - \frac{\sigma_{(1)}}{k}\right)^2 = 0$ Prager, Kreiskegel

Tresca: $\sqrt{s_{max}^2} - \frac{4}{3} \sqrt{s^2} \cdot \left(1 - \frac{\sigma_{(1)}}{k}\right)^2 = 0$ Drehel, hexagonale Pyramide

Fließgrenzen unter einachsiger Beanspruchung: $f_c = \frac{f_y}{1 - f_y/k}$, $f_t = \frac{f_y}{1 + f_y/k}$

Fließbedingung von Coulomb:



$$|\tau| + \sigma \cdot \tan \varphi - c \leq 0 \quad \left(0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$$

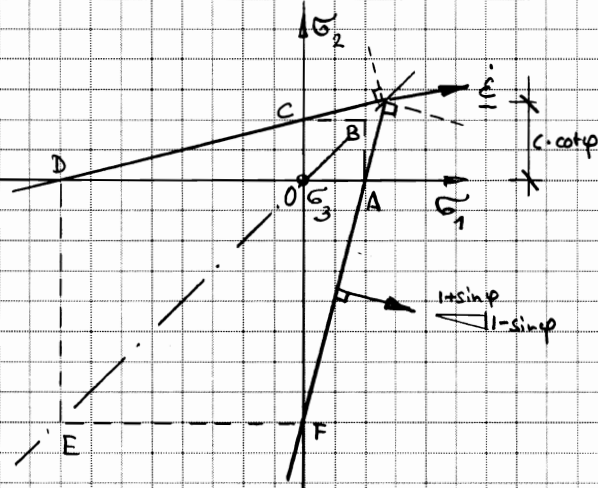
in Hauptspannungen ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$):

$$\left[c \cdot \cot \varphi - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) \right] \sin \varphi = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3)$$

$$\Rightarrow \tau = \sigma_2 (1 + \sin \varphi) - \sigma_3 (1 - \sin \varphi) - 2 \cdot c \cdot \cot \varphi = 0$$

einachsige Fließgrenzen:

$$f_c = \frac{2c \cot \varphi}{1 - \sin \varphi} = 2c \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right), \quad f_t = \frac{2c \cot \varphi}{1 + \sin \varphi} = 2c \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)$$

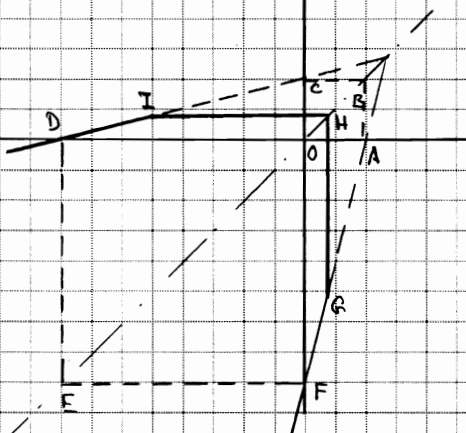


Im Hauptspannungsraum ergibt sich eine irregulär hexagonale Pyramide.

Für $\varphi = 0$ reduziert sich die Fließbedingung von Coulomb auf jene von Tresca.

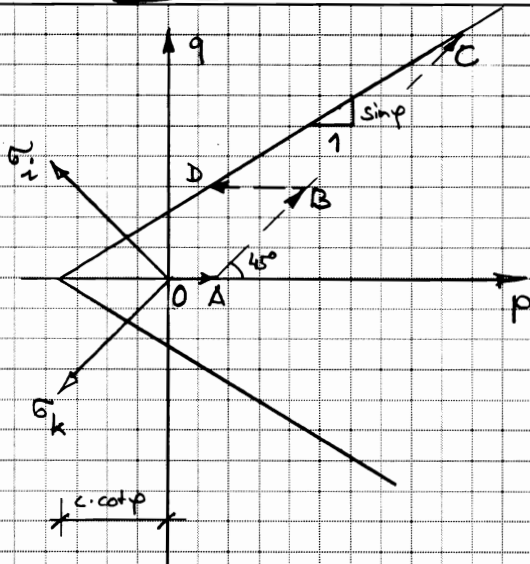
Für Spannungsbildpunkte auf den Seitenflächen der Fließfigur herrscht ein ebener Fließzustand ($\dot{\epsilon}_3 = 0$).

Allgemein ist $D = c \cdot \cot \varphi \cdot \dot{\epsilon}_1$



Für die Anwendung auf Beton wird oft von $\varphi = 3/4$ gesetzt und die Fließbedingung von Coulomb auf der Zugseite geschützt, d.h. $\sigma \leq f_{ct}$

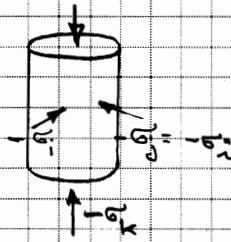
\Rightarrow sog. modifizierte Fließbedingung von Coulomb, oft $f_{ct} = 0$ gesetzt.



In der Bodenmechanik ist die Darstellung mit $(\sigma_1, \sigma_j, \sigma_k)$

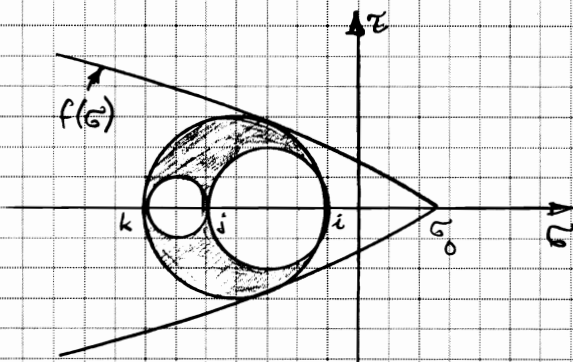
$$p = -\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_k), \quad q = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_k)$$

gebräuchlicher und wird z.B. bei der Auswertung von Triaxialversuchen verwendet:



Belastungsprofile
z.B. OABC, OABD

Fließbedingung von Mohr:



$$|\tau| - f(\sigma) \leq 0 \quad \text{bzw. } q = g(p)$$

wobei $\sigma \leq \sigma_0$

$$\sigma_0 \geq 0 \quad \text{und} \quad f(\sigma_0) = 0$$

$$\frac{df}{d\sigma} \leq 0 \quad \text{und} \quad \frac{d^2f}{d\sigma^2} \leq 0$$

$f(\sigma \rightarrow -\infty)$ endlich

1. Grenzwertsätze

Nach dem Prinzip der virtuellen Arbeiten gilt für ein starr-ideal plastisches System

$$\frac{F}{I} \cdot \dot{u} - \frac{\sigma}{I} \cdot \dot{\epsilon} = 0$$

Gleichgewicht
Verträglichkeit

Dabei bezeichnet \underline{F} die verallgemeinerten Lasten und $\underline{\sigma}$ die mit \underline{F} im Gleichgewicht befindlichen verallgemeinerten Spannungen; \dot{u} und $\dot{\epsilon}$ sind beliebige (virtuelle) verallgemeinerte Verschiebungen und mit diesen verträgliche verallgemeinerte Verformungen.

Man bezeichnet einen (verallgemeinerten) Spannungszustand als statisch zulässig, wenn die Gleichgewichtsbedingungen im Inneren des Systems ebenso wie die statischen Randbedingungen erfüllt sind.

Ein (verallgemeinertes) Verformungszustand heißt kinematisch zulässig, wenn die kinematischen Relationen und Randbedingungen erfüllt sind.

Unterer Grenzwertsatz Jede Belastung, zu der sich ein statisch zulässiger Spannungszustand angeben lässt, der die Fließgrenze nicht verletzt, liegt nicht höher als die Traglast.

Beweis: wirklicher Spannungszustand $\underline{\sigma}$ im Gleichgewicht mit $\underline{F} = \lambda_u \cdot \underline{F}_0$
 stat. zul. Spannungszustand $\underline{\sigma}_s$ im Gleichgewicht mit $\underline{F}_s = \lambda_s \cdot \underline{F}_0$

wirklicher Verformungszustand $\dot{\underline{\epsilon}}$ verträglich mit $\dot{\underline{u}}$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_u \underline{F}_0 \cdot \dot{\underline{u}} - \underline{\sigma} \cdot \dot{\underline{\epsilon}} &= 0 \\ \lambda_s \underline{F}_0 \cdot \dot{\underline{u}} - \underline{\sigma}_s \cdot \dot{\underline{\epsilon}} &= 0 \end{aligned} \right\} (\lambda_u - \lambda_s) \underline{F}_0 \cdot \dot{\underline{u}} = (\underline{\sigma} - \underline{\sigma}_s) \cdot \dot{\underline{\epsilon}} \Rightarrow \underline{\lambda}_s \leq \underline{\lambda}_u$$

> 0 ≥ 0 wegen Prinzip der maximalen Dissipationsarbeit

Oberer Grenzwertsatz

Jede Belastung, die aus der Gleichsetzung der Arbeit der äußeren Kräfte bei einem kinematisch zulässigen Verformungszustand mit der zugehörigen Dissipationsarbeit resultiert, liegt nicht tiefer als die Traglast.

Beweis: wirklicher Spannungszustand $\underline{\sigma}$ im Gleichgewicht mit $\underline{F} = \lambda_u \cdot \underline{F}_0$

kinematisch zulässiger Verformungszustand $\dot{\underline{\epsilon}}_k$ verträglich mit $\dot{\underline{u}}_k$

$$\lambda_u \underline{F}_0 \cdot \dot{\underline{u}}_k - \underline{\sigma} \cdot \dot{\underline{\epsilon}}_k = 0$$

Gemäss dem Prinzip der maximalen Dissipationsarbeit gilt $D(\dot{\underline{\epsilon}}_k) \geq \underline{\sigma} \cdot \dot{\underline{\epsilon}}_k$, somit

$$\lambda_u \underline{F}_0 \cdot \dot{\underline{u}}_k \leq D(\dot{\underline{\epsilon}}_k) \quad \text{bzw.} \quad \lambda_u \leq \frac{D(\dot{\underline{\epsilon}}_k)}{\underline{F}_0 \cdot \dot{\underline{u}}_k} = \lambda_k \Rightarrow \underline{\lambda}_u \leq \underline{\lambda}_k$$

Verträglichkeitssatz

Jede Belastung, zu der ein statisch zulässiger Spannungszustand, der die Fließgrenze nicht verletzt, und ein damit verträgliches kinematisch zulässiges Verformungszustand angegeben werden kann (d.h. eine vollständige Lösung existiert), ist eine Traglast.

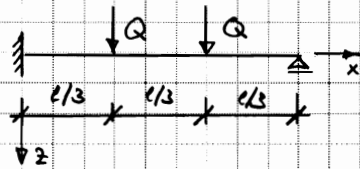
2. Statische und kinematische Methode

Die beiden Grenzwertsätze führen zur Einschränkung

$$\lambda_s \leq \lambda_n \leq \lambda_k$$

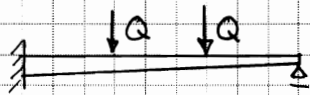
Dementsprechend ergeben sich zwei Methoden, je nachdem, ob von einem statisch zulässigen Spannungszustand ausgegangen wird, der die Fließgrenze nicht verletzt (statische Methode), oder von einem kinematisch zulässigen Verformungszustand bei dem die Arbeit der äusseren Kräfte der Dissipationsarbeit gleich gesetzt wird (kinematische Methode).

Beispiel 1:

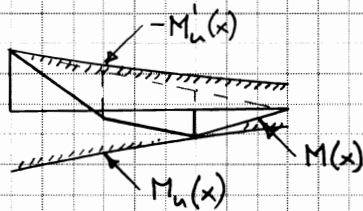


Betrachtet man die Biegemomente als einzige verallgemeinerte Spannungen (keine Interaktion mit Querkraften), reduziert sich das Problem nach der statischen Methode auf das Einpassen der Momentenlinie $M(x)$ in die Fließgrenzen $M_u(x)$ und $-M_u(x)$, d.h.

$$-M_u(x) \leq M(x) \leq M_u(x)$$



Damit lassen sich leicht nicht nur untere Grenzwerte der Traglast Q_u , sondern auch diese selbst bestimmen.



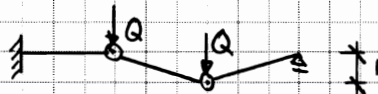
Gemäss den im nebenstehenden Diagramm dargestellten Verhältnissen ereignen sich plastische Gelenke bei $x=0$ und $x=2l/3$, und es gilt

$$Q_u \cdot l/3 = \frac{1}{3} M_u'(0) + M_u(2l/3)$$

$$\text{d.h. } Q_u = [M_u'(0) + 3 \cdot M_u(2l/3)] / l$$

$$\text{oder für } M_u'(x) = M_u(x) = M_u = \text{konstant: } Q_u = 4M_u/l.$$

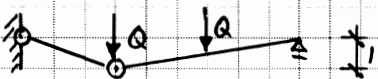
Mechanismus 1:



$$W = Q \cdot l$$

$$D = M_u \cdot \left(\frac{3}{l} + 2 \cdot \frac{3}{l} \right) \left. \vphantom{D} \right\} W=D \rightarrow Q = 5M_u/l \geq Q_u$$

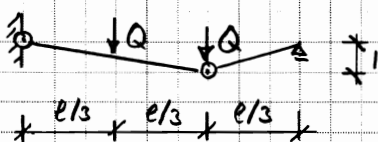
Mechanismus 2:



$$W = Q \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \right)$$

$$D = M_u \cdot \left(\frac{3}{l} + \frac{3}{l} + \frac{3}{2l} \right) \left. \vphantom{D} \right\} W=D \rightarrow Q = 5M_u/l \geq Q_u$$

Mechanismus 3:

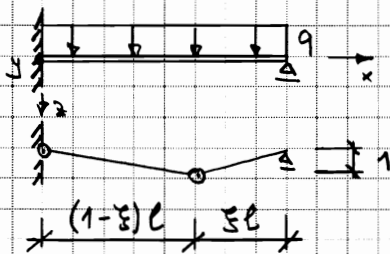


$$W = Q \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \right)$$

$$D = M_u \cdot \left(\frac{3}{2l} + \frac{3}{2l} + \frac{3}{l} \right) \left. \vphantom{D} \right\} W=D \rightarrow Q = 4M_u/l \geq Q_u$$

Für $M_u'(x) = M_u(x) = M_u = \text{konstant}$ wird Mechanismus 3 massgebend, Traglast $Q_u = 4M_u/l$, wie bereits mit statischer Methode ermittelt.

Beispiel 2:



$$M_u^+ = M_u^- = M_u = \text{konstant}$$

Anwendung der kinematischen Methode mit plastischen Gelenken an den Stellen $x=0$ und $x=(1-\xi)l$.

Plastische Gelenkrotationen bei angenommenen Durchbiegung 1 an der Stelle des plastischen Gelenkes im Feld:

$$x=0 \rightarrow \theta_1 = \frac{1}{(1-\xi)l}$$

$$x=(1-\xi)l \rightarrow \theta_2 = \frac{1}{(1-\xi)l} + \frac{1}{\xi l}$$

Arbeit der äusseren Kräfte:

$$W = ql \cdot \frac{1}{2}$$

Dissipationsarbeit:

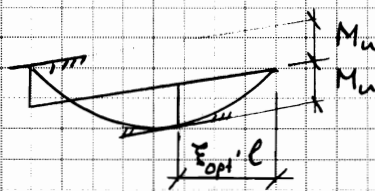
$$D = M_u \cdot (\theta_1 + \theta_2) = M_u \cdot \left[\frac{2}{(1-\xi)l} + \frac{1}{\xi l} \right]$$

Somit nach oberem Grenzwertsatz:

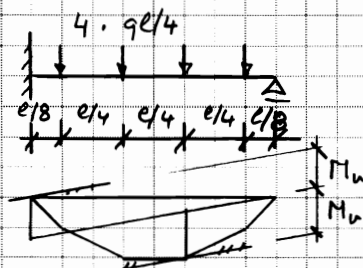
$$q_u \leq \frac{M_u}{l^2} \cdot \frac{2(1+\xi)}{(1-\xi)\xi} = \frac{M_u}{l^2} \cdot f(\xi)$$

Minimalstelle von $f(\xi)$: $\xi_{opt} = \sqrt{2} - 1$

$$q_u = \frac{M_u}{l^2} \cdot f(\xi_{opt}) = \frac{M_u}{l^2} \cdot \frac{2}{(\sqrt{2}-1)^2} = 11,66 \frac{M_u}{l^2}$$



Plastizitätskontrolle: Die Konstruktion der Momentenlinie zeigt, dass die Fließbedingung nirgends verletzt (nämlich bei den beiden plastischen Gelenken gerade erfüllt) ist.

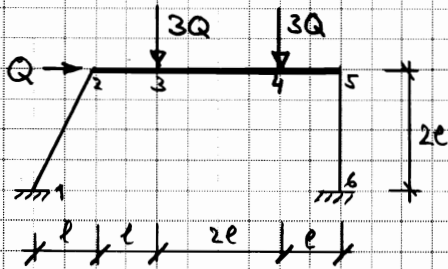


Wird die gleichmässig verteilte Last durch statisch äquivalente Einzellasten ersetzt, ergibt sich am statisch bestimmten Grundsystem ein dem parabolischen M-Diagramm umschriebenes polygonales M-Diagramm. Dies führt zu einer Unterschätzung der Traglast, z.B. bei vier Einzellasten von $ql/4$:

$$M_u \cdot \left(1 + \frac{3}{8}\right) = ql^2/8 \rightarrow q = 11 \frac{M_u}{l^2}$$

Im allgemeinen sind M_u^+ und M_u^- variabel (abgestufte Bewehrung, Vorkon-zusammengesetzte Träger). In solchen Fällen findet man die Lösung durch sukzessive Approximation bzw. Probieren.

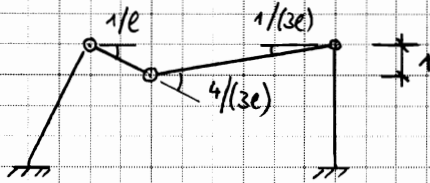
Beispiel 3:



Riegelwiderstand $\pm 2M_u$

Stützwiderstand $\pm M_u$

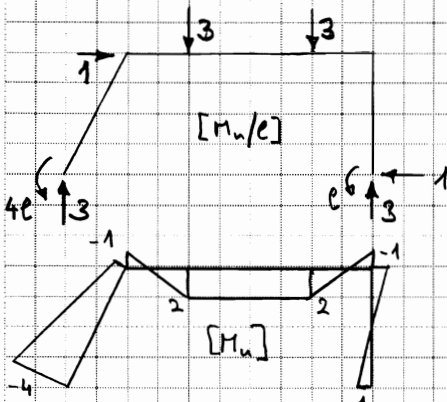
System dreifach statisch unbestimmt, plastische Gelenke an den Stellen 1 bis 6 möglich.



Balkenmechanismus:

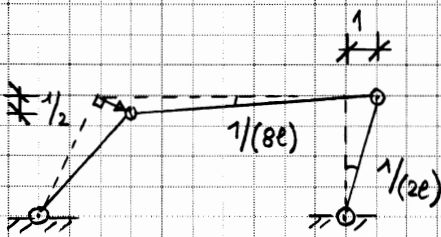
$$W = 3Q \cdot (1 + \frac{1}{3}) = 4Q$$

$$D = M_u \cdot (\frac{1}{e} + 2 \cdot \frac{4}{3e} + \frac{1}{3e}) = M_u \cdot \frac{4}{e} \quad \left. \vphantom{D} \right\} Q_u \leq \frac{M_u}{e}$$



Plastizitätskontrolle:

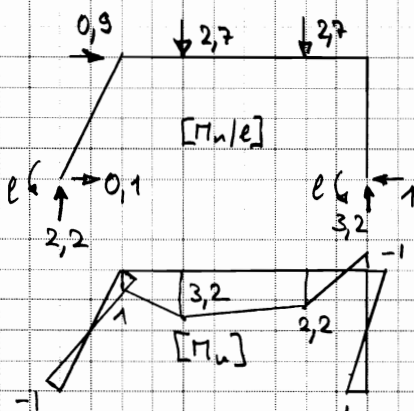
Mit den bekannten M-Werten an den plastischen Gelenkstellen kann das Schnittkörperdiagramm und das M-Diagramm ermittelt werden. Wie man sieht, ist die Fließbedingung in der Stütze links verletzt.



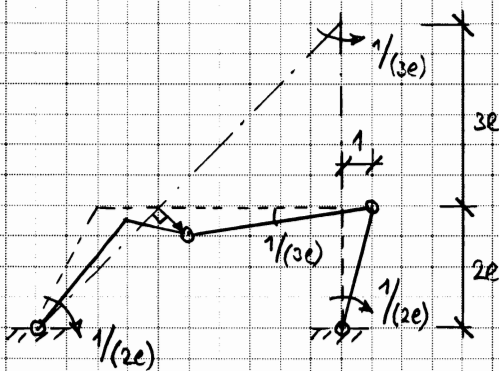
Verschiebemechanismus:

$$W = Q \cdot 1 + 6Q \cdot \frac{1}{4} = \frac{5Q}{2}$$

$$D = M_u \cdot (\frac{1}{2e} + \frac{2}{8e}) = M_u \cdot \frac{9}{4e} \quad \left. \vphantom{D} \right\} Q_u \leq 0,9 \cdot \frac{M_u}{e}$$



Die Plastizitätskontrolle zeigt, dass die Fließbedingung im Riegel verletzt wird.

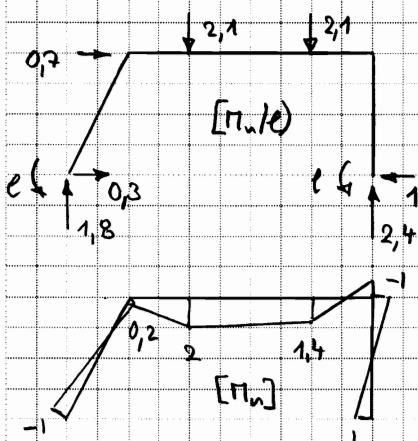


Kombinierter Mechanismus

$$W = Q \cdot 1 + 3Q \cdot 1 + 3Q \cdot \frac{1}{3} = 5Q$$

$$D = M_u \cdot \frac{1}{2e} \cdot 3 + 2M_u \cdot \left(\frac{1}{2e} + \frac{1}{3e} \right) + M_u \cdot \frac{1}{3e} = \frac{7M_u}{2e}$$

$$\rightarrow Q_u \leq 0,7 \frac{M_u}{e}$$



Die Plastizitätskontrolle zeigt, dass die Fließbedingungen verletzt sind.

Somit gilt für die Traglast

$$Q_u = 0,7 \cdot \frac{M_u}{e}$$

Abzählkriterium:

Bei stückweise linearem Momentenverlauf und stückweise konstanten Biege-
widerständen können plastische Gelenke auftreten bei:

- Einspannstellen
- Lastangriffspunkten
- Eckpunkten
- Querschnittsänderungen

Bezeichnet n_k die Anzahl solcher Stellen und n den Grad der statischen Unbestimmtheit, so ergeben sich

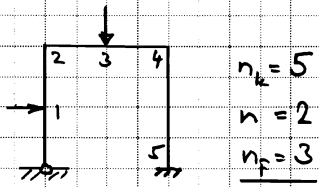
$$n_F = n_k - n$$

Grundmechanismen (Balken- bzw. Verschiebemechanismen). Die entsprechenden linear unabhängigen Gleichgewichtsbedingungen lauten

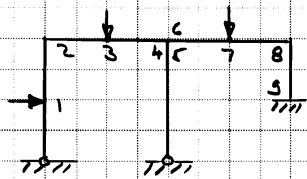
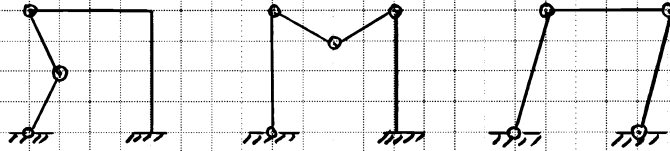
$$F_i - \sum_{j=1}^{n_k} \dot{\theta}_{ij}^T M_j = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n_F)$$

wobei $\dot{\theta}_{ij}^T$ = Rotationsinkrement an der Stelle j infolge des i -ten Grundmechanismus.

Beispiele zur Anwendung des Abzählkriteriums:



$n_k = 5$
 $n = 2$
 $n_F = 3$

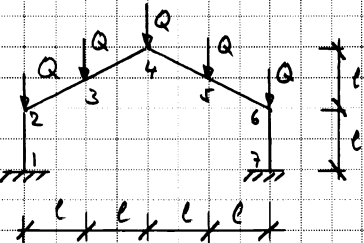


$n_k = 9$
 $n = 4$
 $n_F = 5$

(3 Balkenmechanismen, 1 Verschiebemechanismus und 1 Knotenmechanismus)

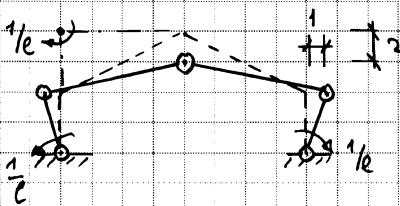


Beispiel 4:



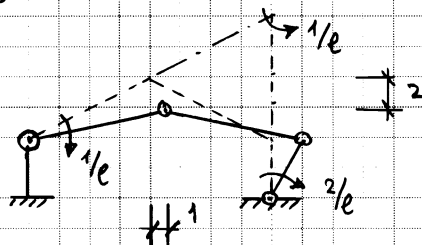
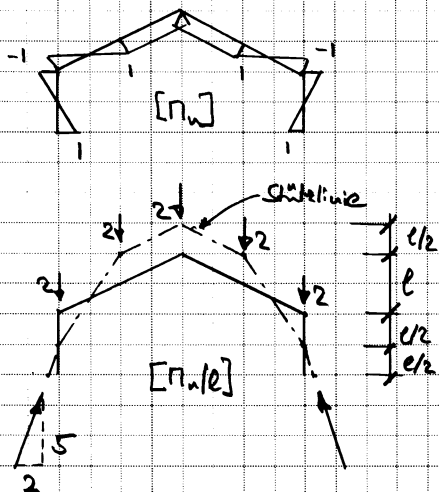
$n_k = 7, n = 3, n_F = 4$

$M_u = \text{konstant}$



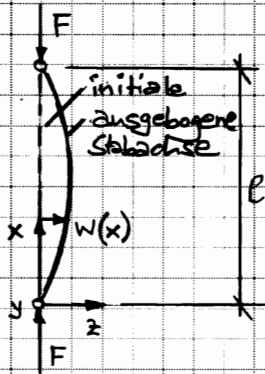
$W = Q \cdot (1 + 2 + 1) = 4Q$
 $D = n_u \cdot \left(\frac{1}{e} + \frac{2}{e} + \frac{1}{e} \right) \cdot 2 = \frac{8n_u}{e} \left. \right\} Q_u \leq \frac{2n_u}{e}$

Der Mechanismus mit 5 Gelenken ist scheinbar überbestimmt. unsymmetrischer Mechanismus mit 4 Gelenken ebenfalls möglich und im Versuch zu erwarten:



$W = Q \cdot (1 + 2 + 1) = 4Q$
 $D = n_u \cdot \left(\frac{1}{e} + \frac{2}{e} + \frac{1}{e} + \frac{2}{e} + \frac{2}{e} \right) = \frac{8n_u}{e} \left. \right\} Q_u \leq \frac{2n_u}{e}$

Knicken eines eigenspannungsfreien prismatischen Stabs aus homogenem, linear elastischem Material unter zentrischer Druckkraft; Stabeigenlast vernachlässigt, Ausknicken in $x-z$ -Ebene (Biegung um y -Achse):



Biegesteifigkeit $D(x) = EI = \text{konstant}$

Ausbiegung $w(x)$

Krümmung $\chi(x) \approx -\frac{d^2 w}{dx^2} = -w''$

Biegemoment $M(x) = F \cdot w = EI \cdot \chi$

Somit ergibt sich die Differentialgleichung der Knickbiegeline

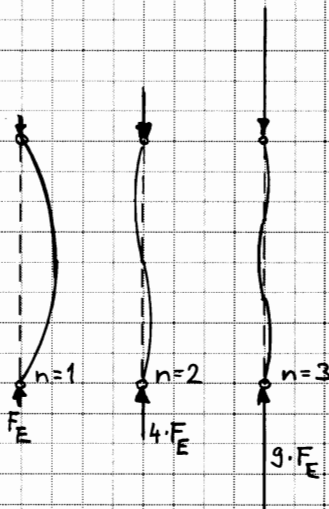
$$F \cdot w + EI \cdot w'' = 0$$

mit der Lösung

$$w = w_0 \cdot \sin(k \cdot x)$$

wobei

$$k = \sqrt{\frac{F}{EI}}$$



An den Stabenden ($x=0$ bzw. $x=l$) müssen w und M verschwinden. Für $x=0$ ist dies offensichtlich der Fall, $w(0) = 0$ und $w''(0) = 0$. Um die Randbedingungen $w(l) = 0$ und $w''(l) = 0$ zu erfüllen, muss gelten $\sin(kl) = 0$, d.h.

$$k \cdot l = n \cdot \pi \quad (n=1, 2, \dots)$$

woraus sich die kritischen Druckkräfte

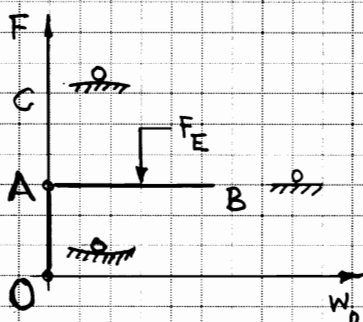
$$F_{cr} = n^2 \cdot \frac{\pi^2 EI}{l^2} = n^2 \cdot F_E$$

ergeben. $F_E = \pi^2 EI / l^2 =$ Eulersche Knickkraft.

Die Bedingung

$$w(l) = w_0 \cdot \sin(k \cdot l) = 0$$

entspricht einem Eigenwertproblem, das außer der oben angegebenen Lösung auch die triviale Lösung $w_0 = 0$ hat.



Zusammenfassend ergibt sich das im $F-w_0$ -Diagramm dargestellte Verhalten mit der Gleichgewichtsverzweigung bei A:

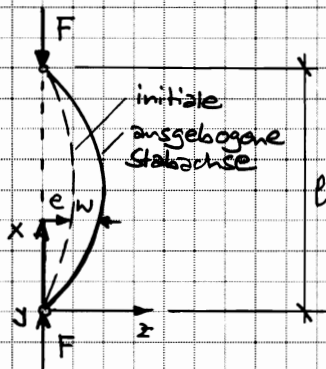
$F < F_E$ stabiles Gleichgewicht, $w_0 = 0$... OA

$F = F_E$ indifferentes Gleichgewicht, w_0 unbestimmt ... AB

$F > F_E$ instabiles Gleichgewicht, $w_0 = 0$... AC

N.B.: Die höheren Knickformen ($n > 1$) erfordern seitliche Anlässe an den Wändepunkten der Knickbiegeline $w(x)$. Eine Halbierung der Knicklänge bringt eine Vervielfachung von F_{cr} .

Einfluss einer Vorkrümmung:



Annahme $e = e(x) = e_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$

Biegemoment $M = F \cdot (e + w)$

Differentialgleichung der Knickbiegeline

$$F \cdot (e + w) + EI \cdot w'' = 0$$

Ansatz

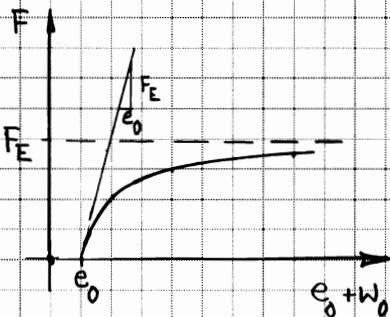
$$w(x) = w_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

führt zu

$$F \cdot (e_0 + w_0) = EI \cdot w_0 \cdot \frac{\pi^2}{l^2} = w_0 \cdot F_E$$

und somit zu

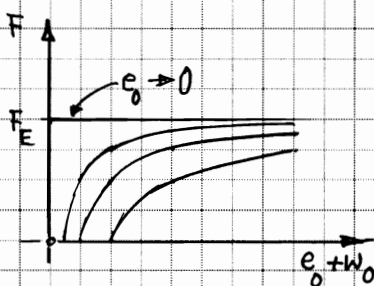
$$e_0 + w_0 = \frac{e_0}{1 - \frac{F}{F_E}}$$



Wegen der Vorkrümmung ergibt sich kein Verzweigungsproblem, sondern ein gewöhnliches Biegeproblem. Die Beziehung zwischen F und $e_0 + w_0$ ist eindeutig, F_E wird asymptotisch für $w_0 \rightarrow \infty$ erreicht.

Je grösser e_0 , desto imperfekter verhält sich der Stab.

Der perfekte Fall ($e \rightarrow 0$) ist praktisch nicht realisierbar und auch nicht wünschenswert, da sich keine Vorankündigung des Knickens ergäbe.



$e(x)$ und $w(x)$ sind beides Sinuskurven und somit zueinander affin. Dem Moment $F \cdot e$ an irgend einer Stelle x entspricht eine Ausbiegung $w = \alpha \cdot e$. Das entsprechende Zusatzmoment $F \cdot w$ produziert eine zusätzliche Ausbiegung $w_1 = \alpha \cdot w = \alpha^2 \cdot e$, und so weiter. Man gelangt so zur Reihe

$$e + w = e(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots) = \frac{e}{1 - \alpha}$$

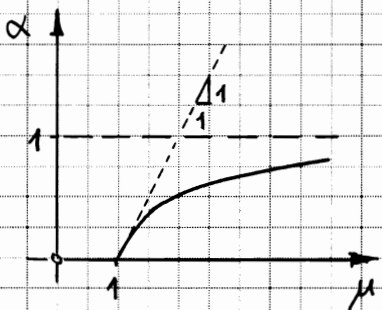
Der Vergleich mit dem Ausdruck oben für $e_0 + w_0$ zeigt, dass $\alpha = F/F_E$ ist und der Vergrößerungsfaktor

$$\mu = \frac{e + w}{e} = \frac{1}{1 - \alpha}$$

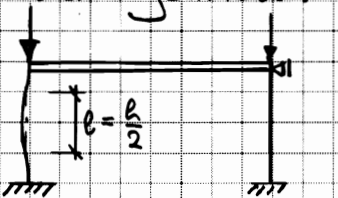
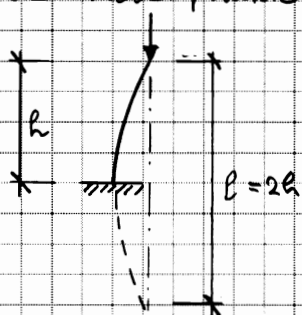
beträgt.

Die Biegemomente $F \cdot (e + w)$ am verformten System ergeben sich durch Multiplikation der Momente $F \cdot e$ am unverformten System mit μ .

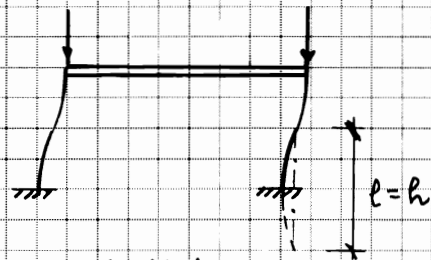
Näherungsweise kann μ auch für nicht affine e und w angewendet werden.



Bei Stabsystemen weisen die Druckkräfte an den Stabenden im allgemeinen Endexzentrizitäten auf. Die Knicklängen l ergeben sich durch Betrachtung der Wendepunkte der Knickbiegeline:

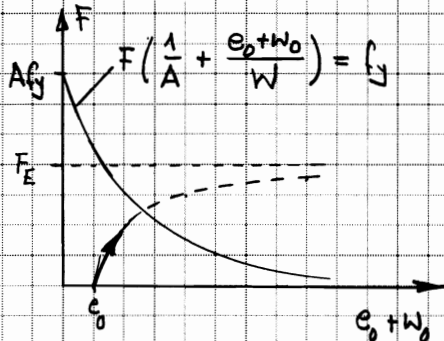
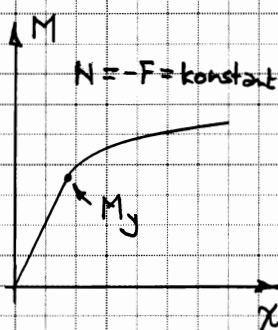
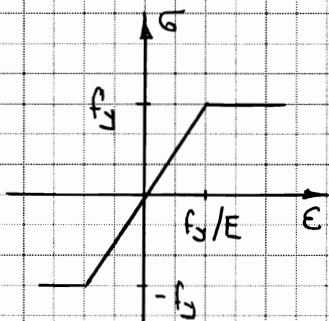


unverschieblicher Rahmen mit unendlich steifem Riegel



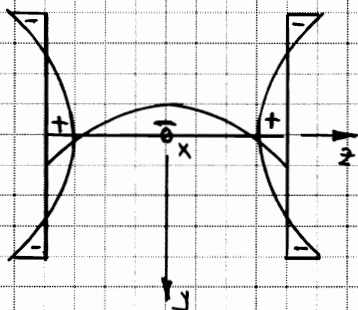
verschieblicher Rahmen mit unendlich steifem Riegel

Das plastische Werkstoffverhalten begrenzt die Gültigkeit der elastischen Lösung:



Im allgemeinen ist mit nichtlinearen $M-x$ -Diagrammen zu rechnen, um die Knickbiegeline und die Last-Verformungsdiagramme zu bestimmen.

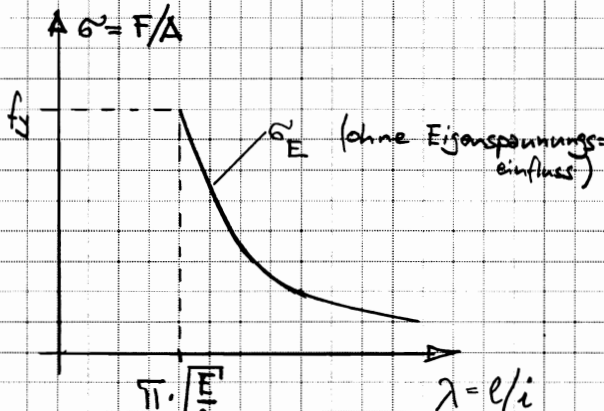
Aus dem Abkühlungsprozess nach dem Walzen von Stahlprofilen ergeben sich Eigenspannungen: Querschnittsteile die zuerst anskühlen, erhalten Druckspannungen. Die Eigenspannungen beeinflussen das $M-x$ -Verhalten und damit auch das Last-Verformungsverhalten.



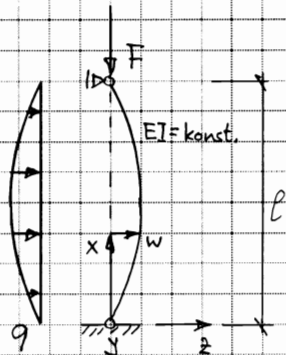
Eigenspannungsverteilung in einem I-Profil

Die vorgedrückten anliegenden Flanschsteile erreichen beim Ansknicken in y -Richtung frühzeitig die Fließgrenze auf Druck

$$F_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \rightarrow \sigma_E = \frac{F_E}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad \lambda = \frac{l}{i}, \quad i^2 = \frac{I}{A}$$



Knickspannungen in Abhängigkeit der Schlankheit λ . N.B.: i = Trägheitsradius.



Die Querbelastrung

$$q = q_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

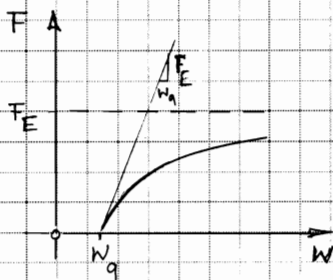
verursacht das Biegemoment

$$M_q = q_0 \cdot \frac{l^2}{\pi^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

und die Ausbiegung

$$w_q = \frac{q_0 \cdot l^4}{\pi^4 \cdot EI} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

e_0 , siehe Seite 2

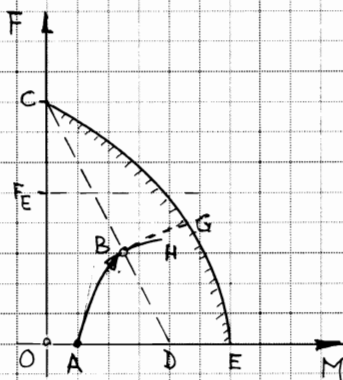


Die totale Ausbiegung infolge q und F ergibt sich analog zum Stab mit Vorkrümmung:

$$W = W_q + W_F = \frac{W_q}{1 - \frac{F}{F_E}}$$

Für die Biegemomente gilt mit $\bar{F}_E = \pi^2 EI / l^2$

$$\begin{aligned} M &= M_q + M_F = M_q + F \cdot W = \left(\frac{q_0 l^2}{\pi^2} + \frac{q_0 l^4}{\pi^4 EI} \cdot \frac{F}{1 - \frac{F}{F_E}} \right) \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \\ &= \frac{q_0 l^2}{\pi^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right) \\ &= \frac{M_q}{1 - \alpha} \quad (\alpha = F/F_E) \end{aligned}$$



Fazit: Ausbiegungen und Biegemomente infolge q werden durch Anbringen von F mit dem Vergrößerungsfaktor $\mu = 1/(1-\alpha)$ vergrößert.

CBD: Fließbeginn

CGE: Bruch

ABG: $M = \mu \cdot M_q$

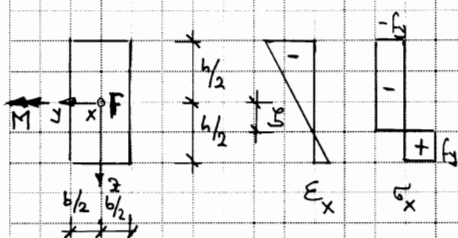
Für nicht sinusförmige Querbelastrung und damit nicht sinusförmige Anfangsausbiegung gilt diese Aussage nicht exakt, aber mit i.a. sehr guter Näherung.

Beispiel Rechteckquerschnitt, elastisch-plastisches Verhalten:

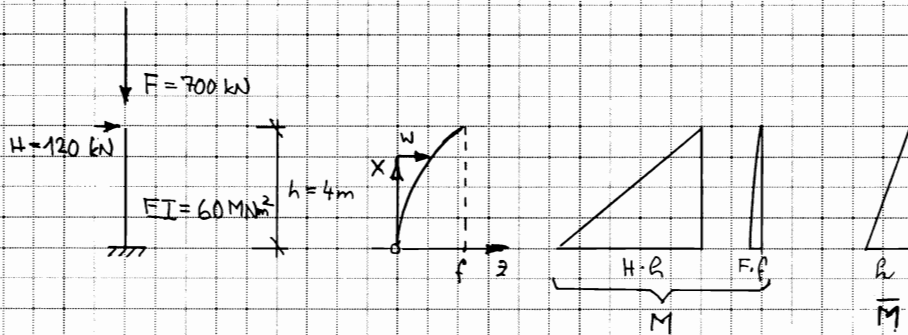
Fließbeginn $\rightarrow \frac{F}{bh} + \frac{M}{bh^2/6} = f_y \rightarrow bhf_y - F - \frac{6M}{h} = 0$ (CBD)

Bruch $\rightarrow F = 2.5bf_y$

$$M = b \cdot \left(\frac{h}{2} - s\right) \left(\frac{h}{2} + s\right) f_y \left. \vphantom{M} \right\} \frac{bh^2}{4} f_y - \frac{F^2}{4bf_y} - M = 0$$
 (CGE)



Im F-M-Diagramm erhält man durch Anbringen von q den Punkt A und dann durch Anbringen von F die Kurve AB. Bei B wird die Fließgrenze des initial eigenspannungsfreien Stabes erreicht. Bei weiterer Steigerung von F muss der Bildpunkt einer unterhalb des fließenden elastischen Bogens BG liegenden Kurve BH folgen.



Das Moment 1. Ordnung $M_0 = H \cdot h \cdot (1 - x/h)$ verursacht eine Kopfbiegung

$$f_0 = \frac{1}{3} \cdot H \cdot h \cdot \frac{h}{EI} = \frac{120 \cdot 4^3}{3 \cdot 60} = 42,67 \text{ mm}$$

Unter der Annahme einer parabolischen Biegelinie $w_0 = f_0 (x/h)^2$ entsteht aus dem Zusatzmoment $F \cdot w_0$ eine Zusatzbiegung

$$f_1 = \frac{5}{12} \cdot F \cdot f_0 \cdot \frac{h}{EI} = \frac{5 \cdot 700 \cdot 42,67 \cdot 4^2}{12 \cdot 60 \cdot 10^3} = 3,32 \text{ mm}$$

Wiederholung dieser Überlegung führt zu

$$f_2 = \frac{5 \cdot 700 \cdot 3,32 \cdot 4^2}{12 \cdot 60 \cdot 10^3} = 0,26 \text{ mm}$$

$$f_3 = \frac{5 \cdot 700 \cdot 0,26 \cdot 4^2}{12 \cdot 60 \cdot 10^3} = 0,02 \text{ mm}$$

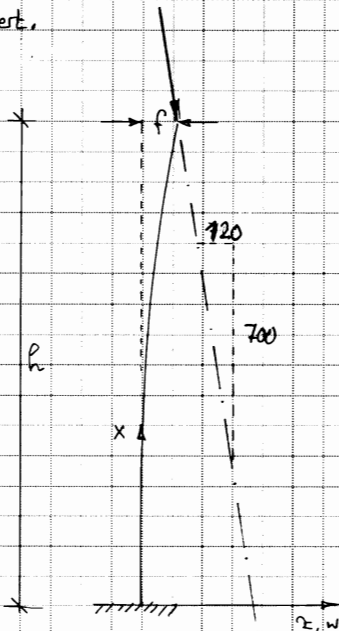
Insgesamt resultiert $f = 42,67 + 3,32 + 0,26 + 0,02 = 46,27 \text{ mm}$ und ein Einspannmoment am Stützenfuß von $120 \cdot 4 + 700 \cdot 46,27 \cdot 10^{-3} = 512,4 \text{ kNm}$.

Mit $F_E = \pi^2 EI / (2e)^2 = \pi^2 \cdot 60 / 8^2 = 9253 \text{ kN}$ erhält man $F/F_E = \alpha = 700/9253 = 0,0757$ und damit den Vergrößerungsfaktor $\mu = 1/(1-\alpha) = 1,0818$ und somit näherungsweise ein Einspannmoment von $480 \cdot \mu = 549,3 \text{ kNm}$ sowie eine Kopfauslenkung von etwa $42,67 \cdot \mu = 46,16 \text{ mm}$.

Die Verhältnisse $f_1/f_0 = 0,0778$, $f_2/f_1 = 0,0778$, etc. entsprechen dem Verhältnis α , aus dem mit $F_E = \pi^2 EI / e^2 = F/\alpha$ eine Knicklänge von

$$e = \pi \cdot \sqrt{\frac{\alpha EI}{F}} = \pi \cdot \sqrt{\frac{0,0778 \cdot 60}{0,7}} = 8,112 \text{ m}$$

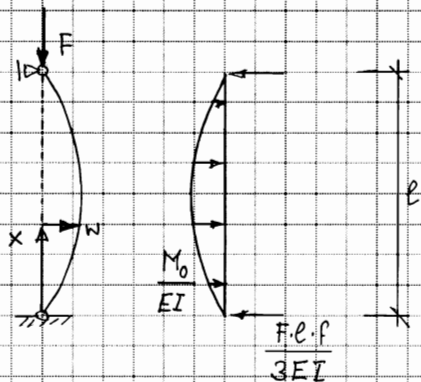
resultiert.



Die exakte Lösung der Differentialgleichung $M + EI w'' = 0$ führt mit $\alpha^2 = F/(EI)$ zu einem Einspannmoment von

$$H \cdot h \cdot \frac{\tan(\alpha e h)}{\alpha e h} = 120 \cdot 4 \cdot \frac{0,4611}{0,4320} = 512,3 \text{ kNm}$$

und einer Kopfauslenkung von $f = 46,11 \text{ mm}$



Zur Knicklastberechnung kann eine Biegelinie w_0 geschätzt werden, und durch Gleichsetzen von w_0 mit der daraus sich ergebenden Durchbiegung w_1 in einem beliebigen Punkt ergibt sich eine Näherung für F_{cr} . Erläuterung am Beispiel einer Stütze mit konstanter Biegesteifigkeit EI :

$$w_0 = f \cdot \frac{4x(l-x)}{l^2} \rightarrow w_1 = \frac{Fef}{3EI} \cdot x - \int_0^x \frac{4f}{l^2} \cdot \frac{F}{EI} \cdot \frac{1}{2}(l-\xi)(x-\xi) d\xi$$

$$= \frac{Fef}{3EI} \cdot x \left(1 - \frac{2x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}\right)$$

Setzt man nun $w_0(\frac{l}{2}) = w_1(\frac{l}{2}) = f$, so folgt

$$f = \frac{Fef}{3EI} \cdot \frac{l}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right)$$

und damit

$$F_{cr} \approx \frac{48}{5} \cdot \frac{EI}{l^2} = 9,6 \frac{EI}{l^2}$$

Allgemein ergibt sich der Quotient $\frac{w_0}{w_1} = \frac{12EI \cdot (l-x)}{F(l^3 - 2x^2l + x^3)}$
 Max bei $x=0$: $12 \frac{EI}{l^2}$
 Min bei $x=\frac{l}{2}$: $9,6 \frac{EI}{l^2}$

Verwendet man die Mittelwerte

$$w_{0m} = \int_0^l \frac{w_0 dx}{l} = \frac{2f}{3} = w_{1m} = \int_0^l \frac{w_1 dx}{l} = \frac{Fef}{3EI} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5}\right) = \frac{Fef}{15EI}$$

so erhält man $F_{cr} \approx 10 \frac{EI}{l^2}$ (N.B. $\pi^2 = 9,87$)

Wird der Mohr'sche Analogiekörper mit $F \cdot w_1/EI$ belastet, so folgt

$$w_2 = \frac{8Fef}{75EI} \left(3\frac{x}{l} - 5\frac{x^2}{l^2} + 3\frac{x^3}{l^3} - \frac{x^4}{l^4}\right)$$

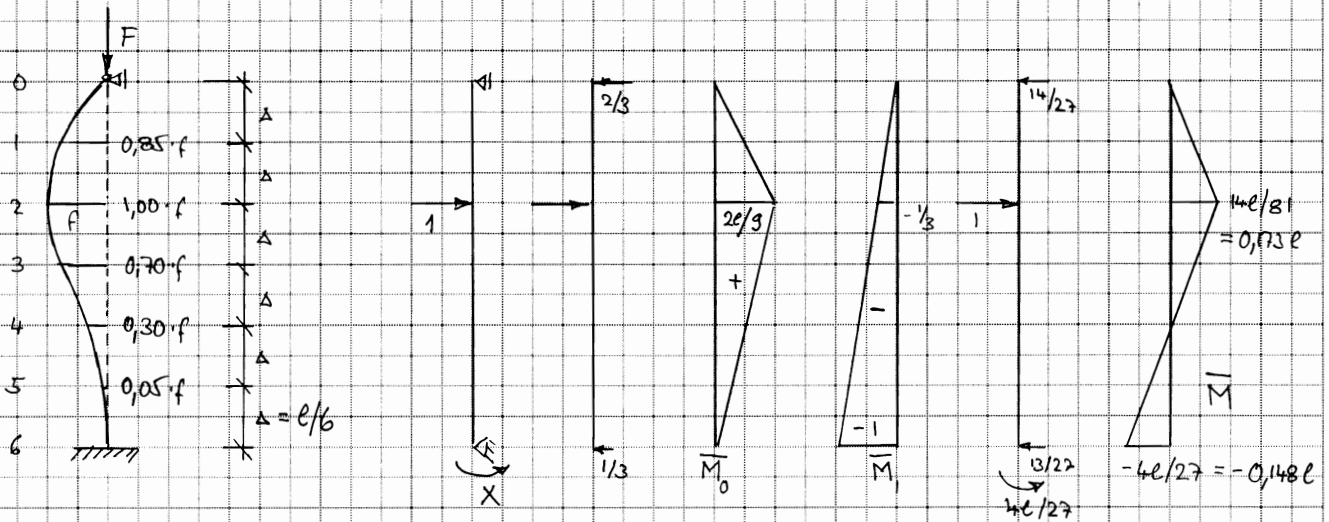
und somit

$$w_2\left(\frac{l}{2}\right) = w_1\left(\frac{l}{2}\right) \rightarrow F_{cr} \approx 9,836 \frac{EI}{l^2}$$

$$w_2(0) = w_1(0) \rightarrow F_{cr} \approx 10 \quad "$$

$$w_{2m} = w_{1m} \rightarrow F_{cr} \approx 9,882 \quad "$$

Fazit: Mit der Methode von Vianello kann die Knicklast durch sukzessive Approximation beliebig genau abgeschätzt werden. Meist liefert schon der erste Schritt eine brauchbare Näherung.



Verwendung von $M = F \cdot w$ (am einfachen Balken) als VZ und \bar{M} (am einfach statisch unbestimmten System) als BZ.

Bestimmung von \bar{M} :
$$\delta_{10} = -\frac{2l}{9} \cdot \frac{2l}{3} \cdot \frac{1}{6EI} \cdot (1 + 2 \cdot \frac{1}{3}) - \frac{2l}{9} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{1}{3EI} = -\frac{4l^2}{81EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{l}{3EI} \Rightarrow X = \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{4l}{27} = 0,148 \cdot l$$

$$\frac{2l}{9} - \frac{X}{3} = \frac{14l}{81} = 0,173 \cdot l$$

Numerische Integration mit Integrationsregel von Simpson:

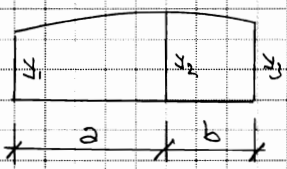
Knoten	M	\bar{M}	$M\bar{M}$	Faktor	Produkt
0	0	0	0	1	0
1	0,85	0,086	0,073	4	0,292
2	1,00	0,173	0,173	2	0,346
3	0,70	0,093	0,065	4	0,260
4	0,30	0,012	0,004	2	0,008
5	0,05	-0,068	-0,003	4	-0,012
6	0	-0,148	0	1	0
Faktor	F · f	l	F · f · l	$\frac{\Delta}{3EI}$	$\frac{\Delta F f l}{3EI}$

$$\sum = 0,894 \cdot \frac{F \cdot f \cdot l^2}{18 EI} = f$$

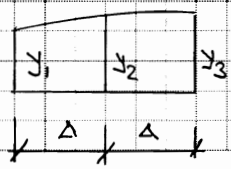
$$\Rightarrow F_{cr} \approx 20,1 EI/l^2$$

 (exakt 20,2 EI/l²)

N.B. Simpson:

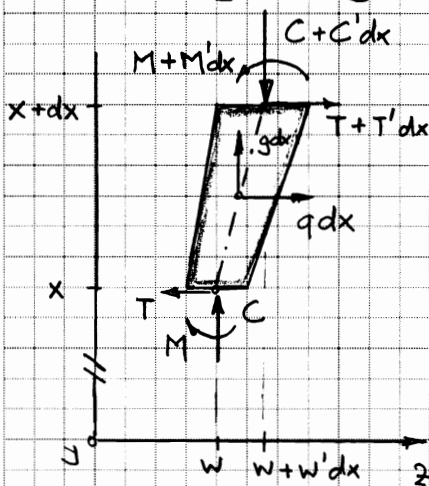


$$I = \frac{a+b}{6ab} \left[(2a-b)by_1 + (a+b)^2y_2 + (2b-a)ay_3 \right]$$



$$\bar{I} = \frac{\Delta}{3} \cdot (y_1 + 4y_2 + y_3)$$

Differentialgleichung der Stützenbiegeline:



Stabelement der Länge dx mit Streckenlasten g und q in x - und z -Richtung

$$\sum F_x = 0 : g - C' = 0$$

$$\sum F_z = 0 : q + T' = 0$$

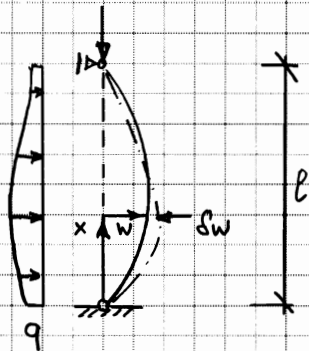
$$\sum M_y = 0 : M' - T - Cw' = 0$$

Somit mit $M = -EI w''$:

$$(EI w'''') + (Cw')' = q$$

N.B. C und T parallel zu x bzw. z !

Die inhomogene Differentialgleichung vierter Ordnung lässt sich nur in speziellen Fällen analytisch lösen. Stets möglich sind jedoch numerische Näherungslösungen. Dazu ist der Übergang auf eine energetische Formulierung zweckmässig:



Nach dem Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie wird

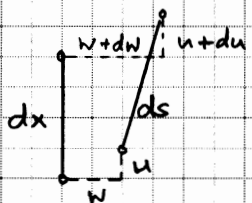
$$\Phi = U + V \quad (U = \text{elastisches Potential}; V = \text{Potential der äußeren Kräfte})$$

für die wirkliche Stützenbiegeline $w(x)$ minimal, d.h. $\Phi \rightarrow \text{Min.}$

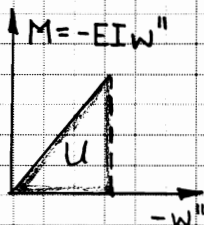
Annahme: Stabachse dehnt sich nicht ($\epsilon_y = 0$):

$$\Rightarrow ds^2 = (dx + du)^2 + (dw)^2 = dx^2$$

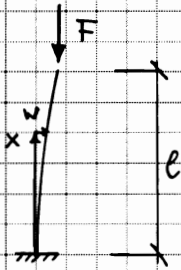
$$\rightarrow 2 \cdot \frac{du}{dx} + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 = 0, \quad u' = -(w')^2/2$$



$$\begin{aligned} \text{Somit: } V &= -\int_0^l q w dx + \int_0^l C du \\ &= -\int_0^l q w dx - \int_0^l C \cdot \frac{(w')^2}{2} dx \\ U &= \int_0^l \frac{EI}{2} \cdot (w''')^2 dx \end{aligned}$$



$$\Phi = \int_0^l \left[\frac{1}{2} EI (w''')^2 - \frac{1}{2} C \cdot (w')^2 - q w \right] dx$$

Knicklastberechnung mit Rayleigh-Quotient:

Für das Verzweigungsproblem des Stabes ohne Querbelastung ($q \equiv 0$) unter $C = F = \text{konst.}$ bleibt w unbestimmt. Statt

$$\Phi = \int_0^l \frac{1}{2} EI (w'')^2 dx - F \cdot \int_0^l \frac{1}{2} (w')^2 dx \rightarrow \text{Min!}$$

zu verlangen, kann man deshalb auch den Quotienten

$$R(w) = \frac{\int_0^l EI (w'')^2 dx}{\int_0^l (w')^2 dx}$$

minimieren. Offensichtlich liefert $R(w)$ i.a. einen oberen Grenzwert für die Knicklast. Der minimale Wert von R entspricht gerade der exakten Knicklast.

Beispiel 1: $EI = \text{konstant}$, $w = c \cdot x^2$, $w' = 2cx$, $w'' = 2c$

$$R(w) = \frac{EI(4c^2) \cdot l}{4c^2 \cdot l^3/3} = \frac{3EI}{l^2} > \frac{\pi^2 EI}{4l^2} = 2,467 \frac{EI}{l^2}$$

Beispiel 2: $EI = \text{konstant}$, $w = c \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2l}\right)\right)$

$$w' = \frac{\pi c}{2l} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)$$

$$w'' = \frac{\pi^2 c}{4l^2} \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2l}\right)$$

$$R(w) = \frac{EI \cdot \left(\frac{\pi^2 c}{4l^2}\right)^2 \cdot \frac{l}{2}}{\left(\frac{\pi c}{2l}\right)^2 \cdot \frac{l}{2}} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$

Die Qualität der Näherung $R(w)$ hängt von der Ansatzfunktion $w(x)$ ab. Arbeitet man nach der Methode Ritz mit Linearkombinationen

$$w = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \eta_i$$

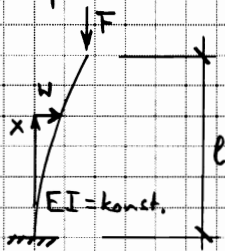
kinematisch zulässiger Ansatzfunktionen η_i (kinematische Randbedingungen erfüllt), so gilt

$$\frac{\partial R}{\partial a_1} = \frac{\partial R}{\partial a_2} = \dots = \frac{\partial R}{\partial a_n} = 0$$

oder, wenn man zum ursprünglichen Problem $\Phi \rightarrow \text{Min!}$ zurückkehrt

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial a_2} = \dots = \frac{\partial \Phi}{\partial a_n} = 0$$

Beispiel 1 zur Methode von Ritz:



$$\eta_1 = x^2, \quad \eta_1' = 2x, \quad \eta_1'' = 2$$

$$\eta_2 = x^3, \quad \eta_2' = 3x^2, \quad \eta_2'' = 6x$$

$$\Phi = \frac{EI}{2} \int_0^l (2a_1 + 6a_2x)^2 dx - \frac{F}{2} \int_0^l (2a_1x + 3a_2x^2)^2 dx$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_1} = (4EI l - \frac{4}{3} F l^3) a_1 + (6EI l^2 - \frac{3}{2} F l^4) a_2 = 0$$

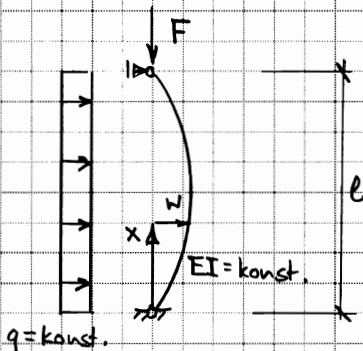
$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_2} = (6EI l^2 - \frac{3}{2} F l^4) a_1 + (12EI l^3 - \frac{9}{5} F l^5) a_2 = 0$$

$$\det = (4EI l - \frac{4}{3} F l^3) (12EI l^3 - \frac{9}{5} F l^5) - (6EI l^2 - \frac{3}{2} F l^4)^2 = 0$$

$$\rightarrow \left(\frac{F l^2}{EI}\right)^2 - \frac{104}{3} \cdot \left(\frac{F l^2}{EI}\right) + 80 = 0$$

$$\rightarrow \frac{F l^2}{EI} = 2.486 \approx 2.467 = \frac{7}{4}$$

Beispiel 2 zur Methode Ritz:



$$w = a \cdot x(l-x), \quad w' = a \cdot (l-2x), \quad w'' = -2a$$

$$\Phi = \frac{EI}{2} \cdot 4a^2 \cdot l - \frac{F}{2} a^2 \cdot (l^3 - 2l^2x + \frac{4}{3} l^3) - q \cdot a \left(\frac{l^3}{2} - \frac{l^3}{3}\right)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = 4EI a l - F \cdot a \cdot l^3/3 - q \cdot l^3/6 = 0$$

$$\rightarrow a = \frac{q l^2}{24EI - 2F l^2} \rightarrow w = \frac{q l^2 x(l-x)}{24EI - 2F l^2}$$

$$q \rightarrow 0 : F \rightarrow 12 EI / l^2 = 1.216 \cdot \frac{7^2 EI}{l^2}$$

$$F \rightarrow 0 : w(\frac{l}{2}) \rightarrow \frac{q l^4}{96EI} = 0.800 \cdot \frac{5 q l^4}{384EI}$$

Wie man sieht liefert die Methode Ritz im Vergleich zu den bekannten Lösungen für die beiden Grenzfälle (hier um rund 20%) zu steife Resultate, d.h. die Knicklast wird überschätzt und die Durchbiegungen werden unterschätzt.

Methode Galerkin

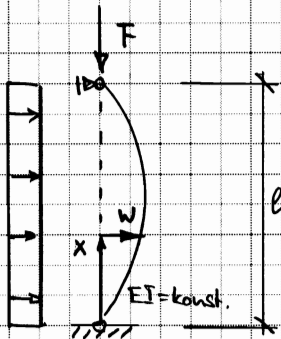
Erfüllen die Ansatzfunktionen η_i nicht nur die kinematischen, sondern auch die statischen Randbedingungen, so führt das Problem $\Phi \rightarrow \text{Min?}$ zu den Gleichungen

$$\int_0^l [(EI w''')'' + (Cw')' - q] \eta_i dx = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

d.h. die Differentialgleichung der Stützenbiegeline wird im Mittel erfüllt, wobei die Ansatzfunktionen η_i die Rolle von Gewichten spielen.

Beispiel zur Methode Galerkin:

$$\xi = x/l$$



$q = \text{konst.}$

$$w = a \cdot (\xi - 2\xi^3 + \xi^4) \rightarrow w(0,1) = 0 \quad (\text{kin. R.B.})$$

$$w' = a \cdot (1 - 6\xi^2 + 4\xi^3)/l$$

$$w'' = a \cdot (-12\xi + 12\xi^2)/l^2 \rightarrow w''(0,1) = 0 \quad (\text{stat. R.B.})$$

$$w''' = a \cdot (-12 + 24\xi)/l^3$$

$$w'''' = a \cdot 24/l^4$$

$$\int_0^1 [EI \cdot a \cdot \frac{24}{l^4} - \frac{F \cdot a}{l^2} \cdot 12\xi(1-\xi) - q] a \cdot (\xi - 2\xi^3 + \xi^4) l d\xi = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{79l^4}{168EI - 17Fl^2}$$

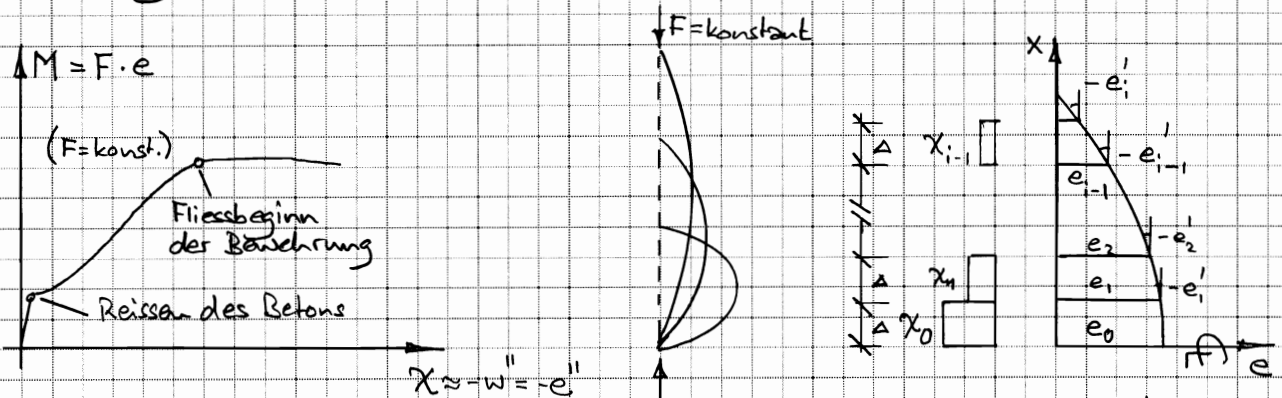
$$q \rightarrow 0 : F \rightarrow \frac{168EI}{17l^2} = 9.882 \frac{EI}{l^2} = 1.001 \cdot \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$$F \rightarrow 0 : w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{59l^4}{384EI}, \text{ exakt.}$$

Die Methode Galerkin erfordert im Vergleich zur Methode Ritz höherwertige Ansatzfunktionen (da auch die statischen Randbedingungen erfüllt sein müssen), ist aber vom Formalismus her einfacher.

Im allgemeinen ist neben der geometrischen auch eine werkstoffbedingte Nichtlinearität zu berücksichtigen. Beispielsweise reißen Stahlbetonstützen unter relativ geringen Lasten und ihr Verhalten weicht von dem eines linear elastischen Systems ab. In solchen Fällen führt allgemein die auf Arbeiten von Ritter, von Kármán und Chwalla zurückgehende Methode der Stützenbiegelinien (Column-Deflection-Curves) zum Ziel.

Die Methode besteht darin, Scharen von Biegelinien unter konstanter Achsenlastkraft ($F = \text{konstant}$) und variabler Exzentrizität e zu bestimmen und die zu den Randbedingungen des Problems passende Biegelinie herauszugreifen.



Momenten-Krümmungsdiagramm einer Stahlbetonstütze

CDC-Schar mit variablem e_0

N.B.: $e' \hat{=} \frac{d}{dx}$

$$e'_i = e'_{i-1} - \chi_{i-1} \cdot \Delta$$

$$e_i = e_{i-1} + e'_{i-1} \cdot \Delta - \frac{\chi_{i-1} \cdot \Delta^2}{2}$$

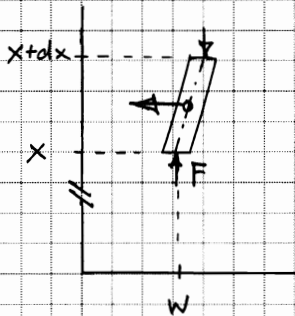
Berechnungsgang der Methode CDC:

1. Annahme $e_0 \rightarrow$ aus $M-\chi$ -Diagramm folgt χ_0
2. $e'_1 = -\chi_0 \cdot \Delta$
 $e_1 = e_0 - \chi_0 \cdot \Delta^2 / 2 \rightarrow$ aus $M-\chi$ -Diagramm folgt χ_1
3. $e'_2 = e'_1 - \chi_1 \cdot \Delta$
 $e_2 = e_1 + e'_1 \cdot \Delta - \chi_1 \cdot \Delta^2 / 2 \rightarrow$ aus $M-\chi$ -Diagramm folgt χ_2
4. etc. bis $e_n = 0$

Anwendung dieser Methode z.B. in Norm SIA 266 "Mauerwerk"

Stütze mit $EI = \text{konstant}$, $F = \text{konstant}$, Masse $\rho \cdot A$ pro Längeneinheit
($\rho = \text{Dichte}$, $A = \text{Querschnittsfläche}$):

Modifikation der Differentialgleichung von Seite 8 durch Zusatzterm
infolge Trägheit (d'Alembert)



$$EI w'''' + F \cdot w'' + \rho \cdot A \cdot \ddot{w} = 0$$

$$\cdot \triangleq \frac{d}{dt}$$

Separierung der Variablen mit $w = W(x) \cdot \sin(\omega t)$
bringt

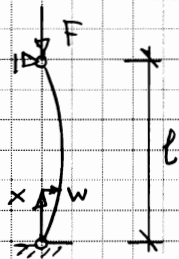
$$EI \cdot W'''' + F \cdot W'' - \rho \cdot A \cdot \omega^2 \cdot W = 0$$

→ allgemeine Lösung (mit $\xi = x/l$):

$$w = c_1 \cdot \operatorname{ch}(\lambda_1 \xi) + c_2 \cdot \operatorname{sh}(\lambda_1 \xi) + c_3 \cdot \cos(\lambda_2 \xi) + c_4 \cdot \sin(\lambda_2 \xi)$$

wobei

$$\lambda_{1,2}^2 = \rho^2 \cdot \left(\mp \frac{F}{2EI} + \sqrt{\left(\frac{F}{2EI} \right)^2 + \frac{\rho A \omega^2}{EI}} \right)$$



Anwendung → Randbed. $w(0) = w''(0) = w(l) = w''(l) = 0$

$$c_1 + c_3 = 0$$

$$c_1 \cdot (\lambda_1/l)^2 - c_3 \cdot (\lambda_2/l)^2 = 0$$

$$c_1 \cdot \operatorname{ch}(\lambda_1) + c_2 \cdot \operatorname{sh}(\lambda_1) + c_3 \cdot \cos(\lambda_2) + c_4 \cdot \sin(\lambda_2) = 0$$

$$c_1 \cdot (\lambda_1/l)^2 \cdot \operatorname{ch}(\lambda_1) + c_2 \cdot (\lambda_1/l) \cdot \operatorname{sh}(\lambda_1) - c_3 \cdot (\lambda_2/l)^2 \cdot \cos(\lambda_2) - c_4 \cdot (\lambda_2/l)^2 \cdot \sin(\lambda_2) = 0$$

Um endliche Eigenwerte λ_1 und λ_2 zu erhalten,
müssen c_1 und c_3 verschwinden und somit
muss gelten

$$\operatorname{sh}(\lambda_1) \cdot \sin(\lambda_2) = 0$$

Spezialfälle: $\omega = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2^2 = Fl^2/(EI)$
 $F = 0 \rightarrow \lambda_1^2 = \lambda_2^2 = \lambda^2 = \rho^2 \cdot \sqrt{\frac{\rho A \omega^2}{EI}}$

Allgemeiner Fall: $\lambda_2 = n \cdot \pi$ (n ganz)

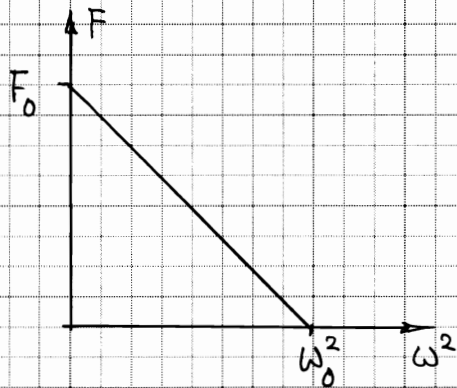
$$\Rightarrow \left(\frac{n^2 \pi^2}{\rho^2} \right)^2 = \frac{\rho A \omega^2}{EI} + \frac{n^2 \pi^2}{\rho^2} \cdot \frac{F}{EI}$$

$\omega = 0 \rightarrow F = \eta^2 \cdot \frac{\pi^2 EI}{e^2}$ Knicklast

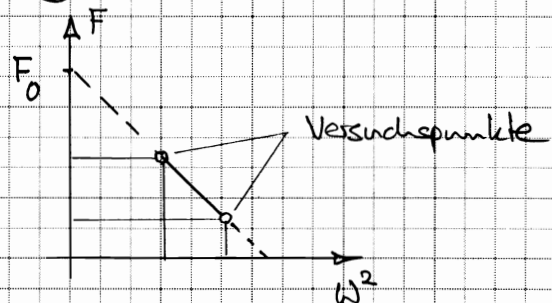
$F = 0 \rightarrow \omega^2 = \eta^4 \cdot \frac{\pi^2 EI}{e^4 \cdot pA}$ Eigenfrequenz

$n = 1 \rightarrow F_0 = \frac{\pi^2 EI}{e^2}, \quad \omega_0 = \left(\frac{\pi}{e}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{pA}}$

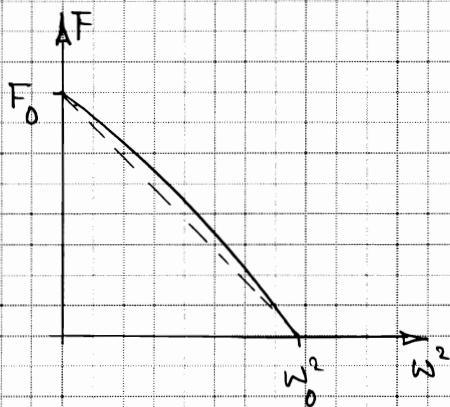
$\frac{F}{F_0} + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 1$



Im Versuch kann ω für verschiedene Werte von F bestimmt werden. F_0 folgt dann durch Extrapolation:



Knicken entspricht einer unendlich langsamen Schwingung.



Wenn die Eigenfunktionen der Knick- und Schwingungsprobleme nicht affin sind, gilt

$\frac{F}{F_0} + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \geq 1$

z.B. für

