

Aufgabe B.7 *Hausübung*

Aufgrund von steigendem Trink- und Nutzwasserverbrauchs entstehen Diskussionen über den Grundwasserspiegel. Das Szenario einer Absenkung des Grundwassers soll analysiert werden, wobei angenommen wird, dass diese Absenkung von der Dicke h der Lehmschicht unterhalb des Grundwassers abhängig ist. Diese wird wie folgt klassifiziert:



$$C_1 : 0 \leq h \leq 20 \text{ cm} \quad C_2 : 20 \text{ cm} < h \leq 40 \text{ cm} \quad C_3 : 40 \text{ cm} < h$$

Ein Geologe schätzt aufgrund seiner Erfahrung, dass die *a priori* Wahrscheinlichkeit der Lehmschichtdicke an einem bestimmten Ort einer der folgenden Aussagen entspricht:

$$P(C_1) = 0.2$$

$$P(C_2) = 0.47$$

$$P(C_3) = 0.33$$

Aufgabe B.7 *Hausübung*

Ein geo-elektrischer Test kann verwendet werden, um die *a priori* Wahrscheinlichkeit zu aktualisieren, obwohl das Testergebnis nicht immer korrekt ist. Die Erfahrungen vergangener Tests zeigen, dass die Wahrscheinlichkeit einer richtig/falsch Indikation wie in folgender Tabelle gegeben ist:

Klasse der Lehmschichtdicke	Indikation für die Klasse der Lehmschichtdicke		
	I_{C_1}	I_{C_2}	I_{C_3}
C_1	0.84 $P(I_{C_1} C_1)$		0.03 $P(I_{C_3} C_1)$
C_2	0.09 $P(I_{C_1} C_2)$	0.77 $P(I_{C_2} C_2)$	
C_3		0.07 $P(I_{C_2} C_3)$	0.89 $P(I_{C_3} C_3)$

Aufgabe B.7 *Hausübung*

sehr viele Informationen... deshalb Vereinfachung hilfreich:

- Die Senkung des Grundwasserspiegels ist abhängig von der Dicke der Lehmschicht h .
- Einstufung der Lehmschicht (**Ereignis**):

$$C_1 : 0 \leq h \leq 20 \text{ cm} \quad C_2 : 20 \text{ cm} < h \leq 40 \text{ cm} \quad C_3 : 40 \text{ cm} < h$$

- a priori Wahrscheinlichkeiten (**bekannte Wahrscheinlichkeiten**):

$$P(C_1) = 0.2 \quad P(C_2) = 0.47 \quad P(C_3) = 0.33$$

- Tests werden durchgeführt, um die **a priori Wahrscheinlichkeit zu aktualisieren**, dabei kann es vorkommen, dass das Testergebnis nicht immer richtig indiziert.
- Wahrscheinlichkeiten von richtig/falschen Anzeigen:
siehe Tabelle vorherige Folie

Aufgabe B.7 Hausübung

Was ist gesucht???

a) Vervollständigen der Tabelle:

Klasse der Lehmschichtdicke	Indikation für die Klasse der Lehmschichtdicke		
	I_{C_1}	I_{C_2}	I_{C_3}
C_1	0.84 $P(I_{C_1} C_1)$		0.03 $P(I_{C_3} C_1)$
C_2	0.09 $P(I_{C_1} C_2)$	0.77 $P(I_{C_2} C_2)$	
C_3		0.07 $P(I_{C_2} C_3)$	0.89 $P(I_{C_3} C_3)$

Tipp: $P(I_{C_1} | C_1) + P(I_{C_2} | C_1) + P(I_{C_3} | C_1) = 1$

Aufgabe B.7 Hausübung

a) Vervollständigen der Tabelle:

Klasse der Lehmschichtdicke	Indikation für die Klasse der Lehmschichtdicke		
	I_{C_1}	I_{C_2}	I_{C_3}
C_1	0.84 $P(I_{C_1} C_1)$ +	+ 0.03 $P(I_{C_3} C_1)$	= 1
C_2	0.09 $P(I_{C_1} C_2)$ +	0.77 $P(I_{C_2} C_2)$ +	= 1
C_3	+ 0.07 $P(I_{C_2} C_3)$ +	0.89 $P(I_{C_3} C_3)$	= 1

Tipp: $P(I_{C_1} | C_1) + P(I_{C_2} | C_1) + P(I_{C_3} | C_1) = 1$

Aufgabe B.7 Hausübung

a) Vervollständigen der Tabelle:

Klasse der Lehmschichtdicke	Indikation für die Klasse der Lehmschichtdicke		
	I_{C_1}	I_{C_2}	I_{C_3}
C_1	0.84 $P(I_{C_1} C_1)$ +	0.13 $P(I_{C_2} C_1)$ +	0.03 $P(I_{C_3} C_1)$ = 1
C_2	0.09 $P(I_{C_1} C_2)$ +	0.77 $P(I_{C_2} C_2)$ +	0.14 $P(I_{C_3} C_2)$ = 1
C_3	0.04 $P(I_{C_1} C_3)$ +	0.07 $P(I_{C_2} C_3)$ +	0.89 $P(I_{C_3} C_3)$ = 1

Tipp: $P(I_{C_1} | C_1) + P(I_{C_2} | C_1) + P(I_{C_3} | C_1) = 1$

Aufgabe B.7 *Hausübung*

b) Ein geo-elektrischer Versuch wurde durchgeführt und hat C_3 als Lehmschichtdicke angezeigt.

Was sind die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten, dass die tatsächliche Lehmschichtdicke C_1 , C_2 oder C_3 entspricht?

Tipp: Satz von Bayes, Skript Abschnitt B.5

Aufgabe B.7 *Hausübung*

b) Ein geo-elektrischer Versuch wurde durchgeführt und hat C_3 als Lehmschichtdicke angezeigt.

Was sind die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten, dass die tatsächliche Lehmschichtdicke C_1 , C_2 oder C_3 entspricht?

Tipp: Satz von Bayes, Skript Abschnitt B.5

$$P(C_1 | I_{C_3}) = \frac{P(I_{C_3} | C_1) \cdot P(C_1)}{P(I_{C_3} | C_1) \cdot P(C_1) + P(I_{C_3} | C_2) \cdot P(C_2) + P(I_{C_3} | C_3) \cdot P(C_3)}$$

$$P(C_1 | I_{C_3}) = \frac{0.03 \cdot 0.2}{0.03 \cdot 0.2 + 0.14 \cdot 0.47 + 0.89 \cdot 0.33} = \frac{0.006}{0.006 + 0.0658 + 0.2937} = 0.0164$$

Aufgabe B.7 *Hausübung*

b) Ein geo-elektrischer Versuch wurde durchgeführt und hat C_3 als Lehmschichtdicke angezeigt. Was sind die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten, dass die tatsächliche Lehmschichtdicke C_1 , C_2 oder C_3 entspricht?

$$P(C_2 | I_{C_3}) = \frac{P(I_{C_3} | C_2) \cdot P(C_2)}{P(I_{C_3} | C_1) \cdot P(C_1) + P(I_{C_3} | C_2) \cdot P(C_2) + P(I_{C_3} | C_3) \cdot P(C_3)}$$

$$P(C_2 | I_{C_3}) = \frac{0.14 \cdot 0.47}{0.006 + 0.0658 + 0.2937} = 0.180$$

$$P(C_3 | I_{C_3}) = \frac{P(I_{C_3} | C_3) \cdot P(C_3)}{P(I_{C_3} | C_1) \cdot P(C_1) + P(I_{C_3} | C_2) \cdot P(C_2) + P(I_{C_3} | C_3) \cdot P(C_3)}$$

$$P(C_3 | I_{C_3}) = \frac{0.89 \cdot 0.33}{0.006 + 0.0658 + 0.2937} = 0.804$$