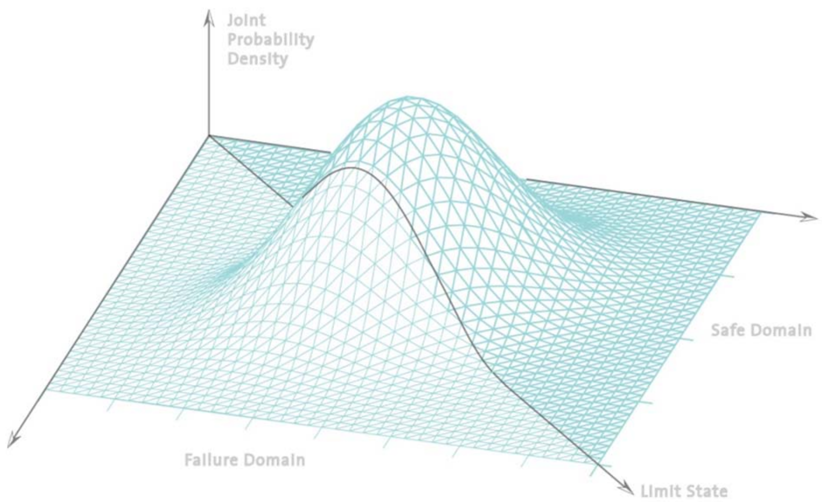
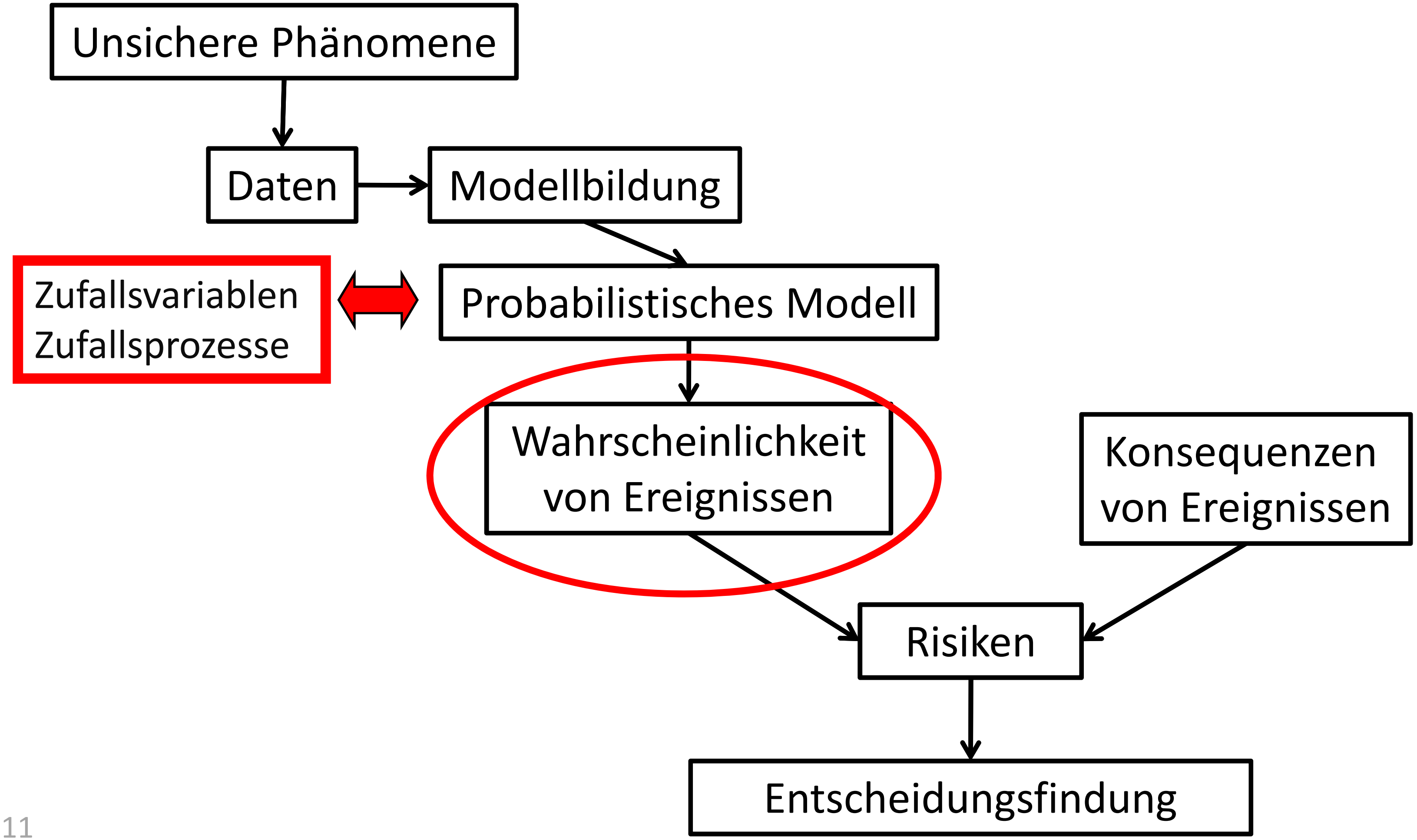


Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Mathias Graf

Der Enscheidungskontext

Wieso Unsicherheitenmodellierung?



Inhalt der heutigen Vorlesung

Zufallsprozesse

- Poissonprozess
- Exponentialverteilung, Gammaverteilung
- Normalprozess
- Stationarität und Ergodizität
- Kontinuierlicher Zufallsprozess
- Extreme von Zufallsprozessen

Zufallsvariablen und Zufallsprozesse

Wir haben Zufallsvariablen eingeführt um zufällige bzw. unsichere Ereignisse abzubilden, z.B. Eigenschaften von Objekten, Autos welche abbiegen usw.

Wenn wir Ereignisse über die Zeit betrachten sprechen wir von Zufallsprozessen.

Mit Hilfe von Modellen für Zufallsprozesse können wir die Wahrscheinlichkeit von zufälligen Ereignissen in der Zukunft abschätzen.

Beispiele:

- Erdbeben mit einer Wiederkehrperiode von 475 Jahren
- 100 jähriges Hochwasser
- Maximale Lasten während der Lebensdauer eines Bauwerks

Zufallsvariablen und Zufallsprozesse

Für viele Ingenieurfragen müssen wir die zufälligen Schwankungen über die Zeit spezifischer erfassen können:

Diskreter Zufallsprozess:

Das zufällige Eintreten von Ereignissen zu diskreten Zeitpunkten (Unfälle, Steinschlag, Erdbeben, Stau, Versagen, usw.)

→Poissonprozess, Exponentialverteilung, Gammaverteilung

Kontinuierlicher Zufallsprozess:

Die zufälligen Ausprägungen von Ereignissen, welche kontinuierlich über die Zeit eintreten (Winddruck, Wellendruck, Temperaturen, usw.)

→ (Normalprozess)

Hochwasserereignis (diskret)

Belastungsschwankungen aufgrund Wellen (kontinuierlich)

Zufallsvariablen und Zufallsprozesse

Was wir heute näher betrachten wollen:

- Zufallssequenzen: Poissonprozess
- Wartezeit zwischen zwei Ereignissen: Exponentialverteilung, Gammaverteilung
- Kontinuierliche Zufallsprozesse: Normalprozess
- Kriterien für das Extrapolieren von Extremen: Stationarität und Ergodizität

Zufallssequenzen: Poissonprozess

- Der Poissonprozess ist eine der am häufigsten verwendeten Verteilungs-familien von Wahrscheinlichkeitsverteilungen in der Zuverlässigkeitstheorie.

- Der Prozess $N(t)$, welcher die Anzahl Ereignisse in einem (Zeit)Intervall $(t,t+\Delta t[$ bezeichnet, wird Poissonprozess genannt wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1) Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses im Intervall $(t,t+\Delta t[$ ist asymptotisch proportional zu Δt.
2) Die Wahrscheinlichkeit von mehr als einem Ereignis im Intervall $(t,t+\Delta t[$ ist eine Funktion höherer Ordnung von Δt für $\Delta t \rightarrow 0$.
3) Ereignisse in disjunkten (sich nicht überlappenden) Intervallen sind unabhängig.

Zufallssequenzen: Poissonprozess

Der Poissonprozess kann durch seine Intensität $\nu(t)$ beschrieben werden:

$$\nu(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} P(\text{ein Ereignis in } [t, t+\Delta t[)$$

wenn $\nu(t)$ = konstant, dann ist es ein homogener Poissonprozess, ansonsten ist es ein inhomogener Poissonprozess.

Die Wahrscheinlichkeit von *n* Ereignissen im Zeitintervall (0,*t*[ist:

$$P_n(t) = \frac{\left(\int_0^t \nu(\tau)d\tau\right)^n}{n!} \exp\left(-\int_0^t \nu(\tau)d\tau\right)$$

Für den inhomogenen Poissonprozess.

$$P_n(t) = \frac{(\nu t)^n}{n!} \exp(-\nu t)$$

Für den homogenen Poissonprozess.

Zufallssequenzen: Poissonprozess

Der Mittelwert und die Varianz der Zufallsvariable N, welche die Anzahl Ereignisse in einem bestimmten Intervall (0,t[bezeichnet, sind wie folgt gegeben:

$$E[N(t)] = Var[N(t)] = \int_0^t \nu(\tau)d\tau$$

Für den inhomogenen Poissonprozess.

$$E[N(t)] = Var[N(t)] = \nu t$$

Für den homogenen Poissonprozess.

Zufallssequenzen: Exponentialverteilung

Die Wahrscheinlichkeit von keinem Ereignis in einem gegebenen Zeitintervall (0,t[ist sehr oft von Interesse in Ingenieurproblemen.

- Kein ernsthafter Sturm in 10 Jahren.
- Kein Strukturversagen in 100 Jahren.
- Kein Erdbeben nächstes Jahr.

Diese Wahrscheinlichkeit wird folgendermassen erhalten:

$$P_0(t) = \frac{\left(\int_0^t \nu(\tau)d\tau\right)^0}{0!}\exp\left(-\int_0^t \nu(\tau)d\tau\right)$$

$$= \exp\left(-\int_0^t \nu(\tau)d\tau\right)$$

Für den inhomogenen Poissonprozess.

$$P_0(t) = \exp(-\nu t)$$

Für den homogenen Poissonprozess.

Zufallssequenzen: Exponentialverteilung

- Die kumulative Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion der (Warte-) Zeit bis zum ersten Ereignis T_1 kann leicht hergeleitet werden. Wenn die Wahrscheinlichkeit von $T_1 > t$ grösser ist als $P_0(t)$ dann erhalten wir:

Für den inhomogenen Poissonprozess

$$F_{T_1}(t_1) = 1 - P_0(t_1)$$

$$= 1 - \exp(-\int_0^t \nu(\tau)d\tau)$$

Für den homogenen Poissonprozess

$$F_{T_1}(t_1) = 1 - \exp(-\nu t)$$

↑

Exponentiale kumulative Verteilungsfunktion

Exponentiale Verteilungsdichtefunktion

↓

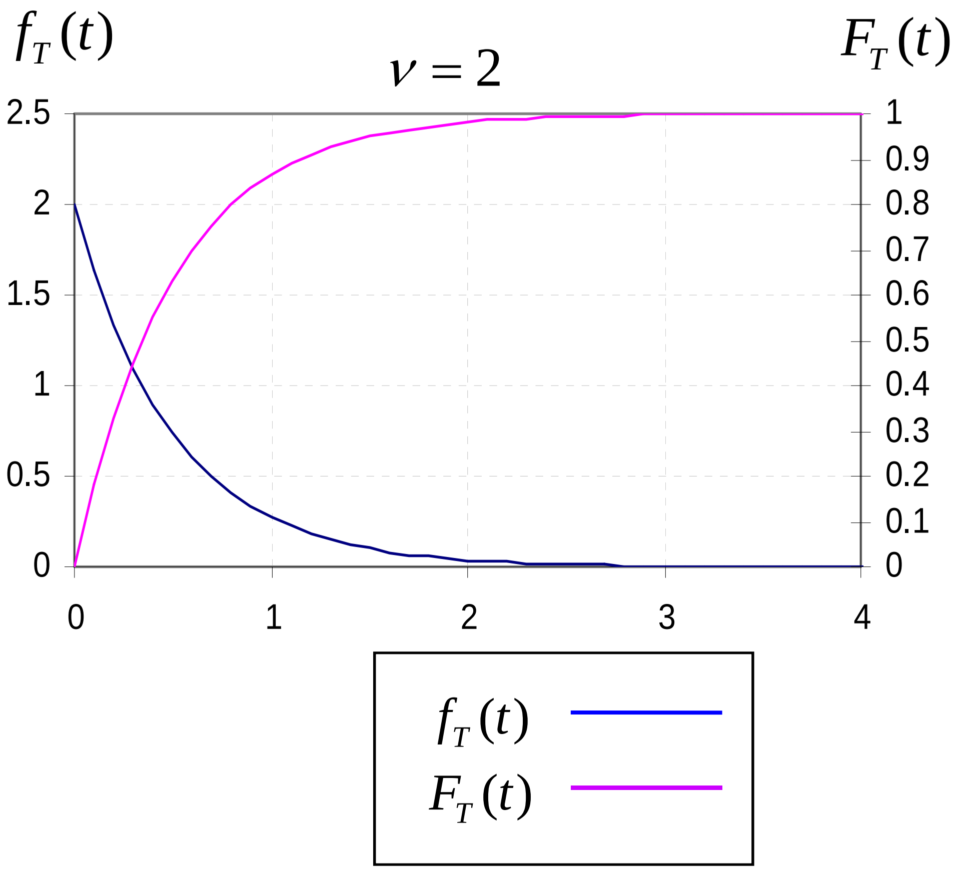
$$f_{T_1}(t_1) = \nu \exp(-\nu t)$$

Poissonprozess - Exponentialverteilung

Exponentialverteilung:
Die Wahrscheinlichkeit von einem Ereignis in Abhängigkeit von (der Wartezeit) t.

$$F_T(t) = 1 - e^{-\nu(t)\cdot t}$$

$$f_T(t) = \nu(t)\,\mathrm{e}^{-\nu(t)\cdot t}$$



Zufallssequenzen: Exponentialverteilung

Die **Exponentialverteilung** wird oft benutzt, um Wartezeiten zu modellieren:

- Zeit bis zu einem Versagen
- Zeit bis zum nächsten Erdbeben
- Zeit bis zum nächsten Unfall

$$\boxed{f_T(t) = \nu(t)\,\mathrm{e}^{-\nu(t)\cdot t}}$$

Der Erwartungswert und die Varianz einer exponentiell verteilten Zufallsvariable T sind gegeben als:

$$E[T] = \sqrt{Var[T]} = 1/\nu$$

Zufallssequenzen: Gammaverteilung

Oft ist auch die Zeit T bis zum n -ten Ereignis von Interesse im Ingenieurwesen:

- Überschwemmungsereignisse
- Eintreffen von Fahrzeugen an einer Strassenkreuzung
- Zeit bis zu notwendigen Unterhaltsarbeiten

Wenn T_i, i=1,2,..n unabhängige, exponentiell verteilte Wartezeiten sind, dann folgt ihre Summe T

$$T = T_1 + T_2 + \ldots + T_{n-1} + T_n$$

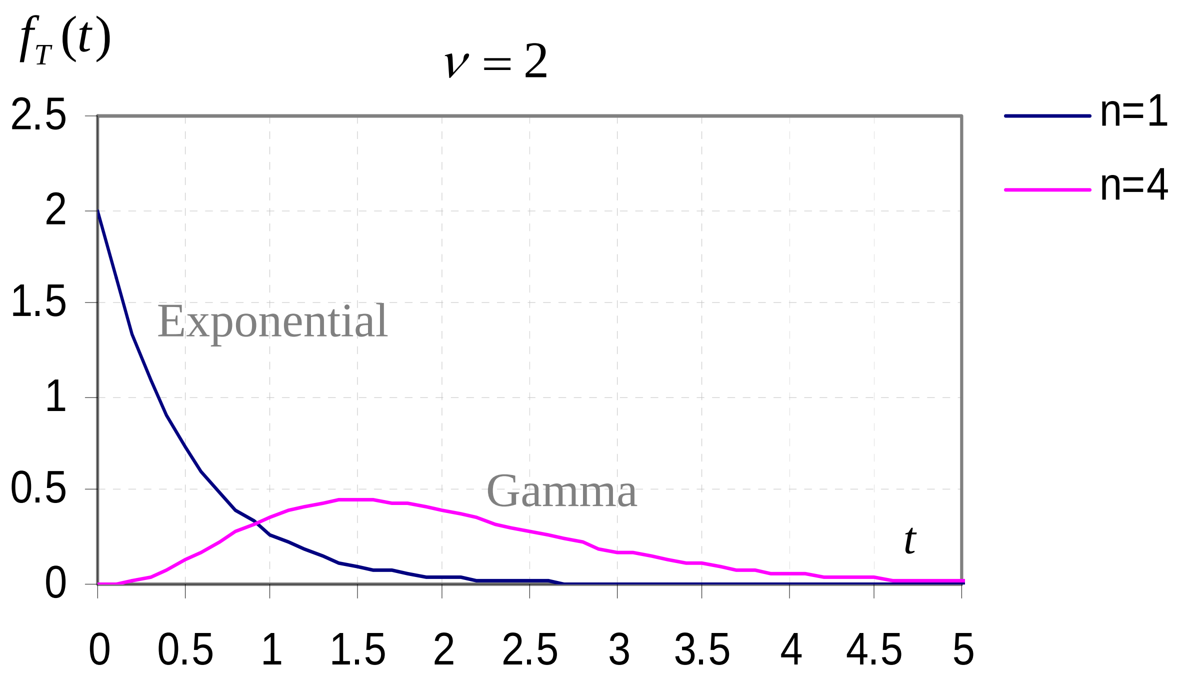
einer Gammaverteilung

$$f_T(t) = \frac{\nu(\nu t)^{(n\text{-}1)} \exp(-\nu t)}{(n-1)!}$$

Diese folgt aus der wiederholten Anwendung des Resultats der Verteilung der Summe aus zwei Zufallsvariablen.

Zufallssequenzen: Gammaverteilung

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der **Gammaverteilung**



Zufallsprozesse

Kontinuierlicher Zufallsprozess

Mit einem kontinuierlichen Zufallsprozess werden Zufallsgrössen beschrieben, die sich über die Zeit kontinuierlich realisieren.

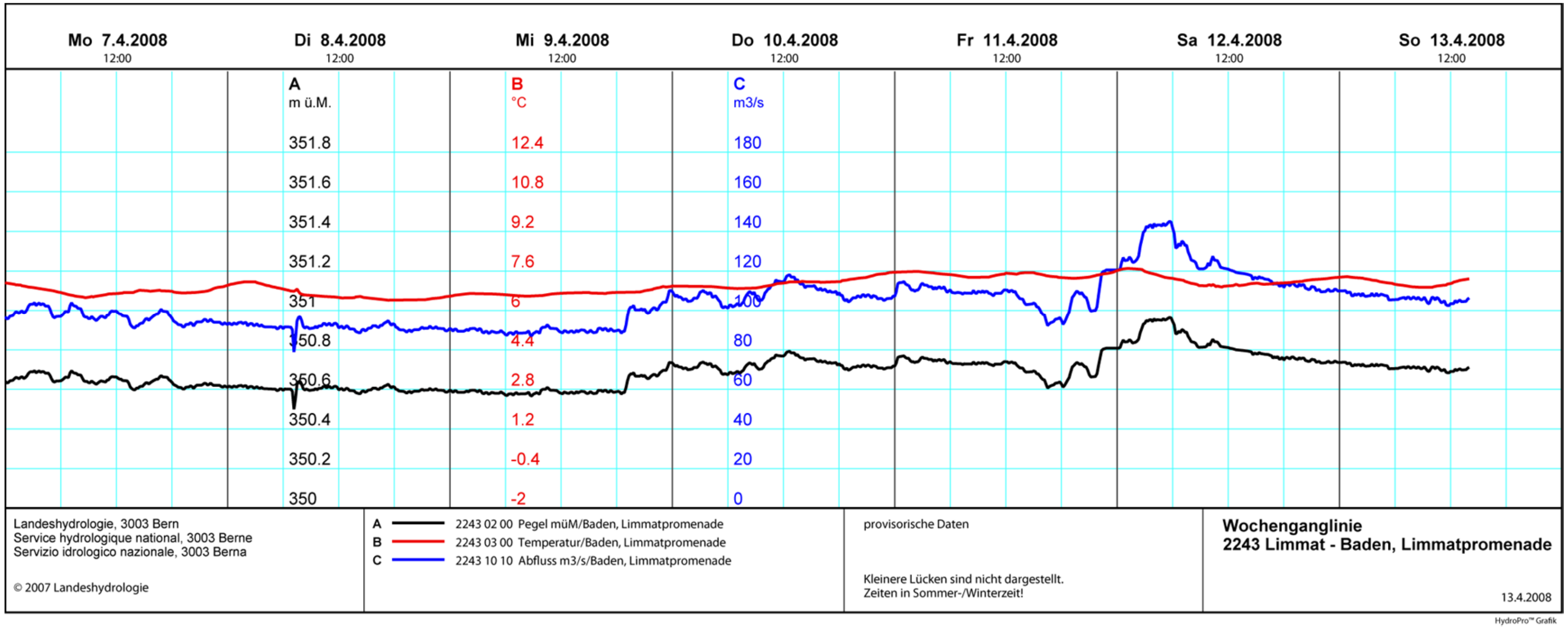
Variationen von:

- Pegelständen
- Windgeschwindigkeiten
- Herzfrequenzen
- Geschwindigkeiten von Objekten
- ….

Zufallsprozesse

Realisation eines **kontinuierlichen Zufallsprozesses**

– Pegel, Abfluss und Temperatur der Limmat bei Baden.



Zufallsprozesse

Kontinuierlicher stochastischer Prozess

- Der Mittelwert der möglichen Realisation des Zufallsprozesses ist gegeben mit:

$$\mu_X(t) = E\left[X(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x \; f_X(x\,;t)dx$$

Funktion der Zeit!

- Die Autokorrelation zwischen den Realisationen an zwei Zeitpunkten ist gegeben mit:

$$R_{XX}(t_1,t_2) = E\left[X(t_1)X(t_2)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 \; x_2 \;\; f_{XX}(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2$$

Zufallsprozesse

Kontinuierlicher stochastischer Prozess

- Die **Auto-Kovarianz-Funktion** ist definiert als:

$$C_{XX}(t_1,t_2) = E\left[(X(t_1)-\mu_X(t_1))(X(t_2)-\mu_X(t_2))\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x_1-\mu_X(t_1))\ (x_2-\mu_X(t_2))\ f_{XX}(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2$$

- für $t_1 = t_2 = t$ wird die Auto-Kovarianz-Funktion zur Kovarianz Funktion: $\sigma_X^2(t) = C_{XX}(t,t) = R_{XX}(t,t) - \mu_X^2(t)$

$\sigma_X(t)$ **"Standardabweichungs Funktion"**

Zufallsprozesse

Kontinuierlicher stochastischer Prozess

- Ein vektorwertiger Prozess ist ein Zufallsprozess mit zwei oder mehr Komponenten:

  $$\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t))^T$$

  mit Kovarianz Funktion:

  $$\boxed{\begin{aligned} &C_{X_i X_j}(t_1, t_2) = \\ &E\left[(X_i(t_1) - \mu_{X_i}(t_1))(X_j(t_2) - \mu_{X_j}(t_2))\right] \end{aligned}}$$

  $i = j$ Auto-Kovarianz Funktion

  $i \neq j$ Kreuz-Kovarianz Funktion

- Die Korrelationskoeffizienten Funktion ist definiert mit:

  $$\rho\left[X_i(t_1), X_j(t_2)\right] = \frac{C_{X_i X_j}(t_1, t_2)}{\sigma_{X_i}(t_1) \cdot \sigma_{X_j}(t_2)}$$

Zufallsprozesse

Normal oder Gauss Prozess

- Ein Zufallsprozess $X(t)$ wird als Normal bezeichnet, wenn:

  für beliebige; $X(t_1), X(t_2), X(t_3), \ldots, X(t_j)$

  die gemeinsame Wahrscheinlichkeits-Verteilung von

  $X(t_1), X(t_2), X(t_3), \ldots, X(t_j)$

  die Normalverteilung ist.

Zufallsprozesse

Stationarität und Ergodizität

- Ein Zufallsprozess wird als **streng stationär** bezeichnet, wenn alle seine Momente invariant sind über die Zeit.
- Ein Zufallsprozess wird als **schwach stationär** bezeichnet, wenn seine zwei ersten Momente, also der Mittelwert und die Autokorrelationsfunktion, invariant sind über die Zeit.

$$\left.\begin{aligned} &\mu_X(t) = cst \\ &R_{XX}(t_1, t_2) = f(t_2 - t_1) \end{aligned}\right\} \quad \text{Schwach stationär}$$

Zufallsprozesse

Stationarität und Ergodizität

- Ein Zufallsprozess wird als **streng ergodisch** bezeichnet, wenn er streng stationär ist und zusätzlich alle seine Momente aufgrund einer Realisation des Prozesses bestimmt werden können.

- Ein Zufallsprozess wird als **schwach ergodisch** bezeichnet, wenn er schwach stationär ist und zusätzlich seine zwei ersten Momente aufgrund einer Realisation des Prozesses bestimmt werden können.

Zufallsprozesse

Stationarität und Ergodizität

- Wieso sind Annahmen bezüglich Stationarität und Ergodizität nützlich im Ingenieurwesen?

- Wenn ein Zufallsprozess ergodisch ist, dann können wir probabilistische Modelle von Extremereignissen aus kurzen Referenzperioden für längere Referenzperioden extrapolieren.

Extremwertverteilungen

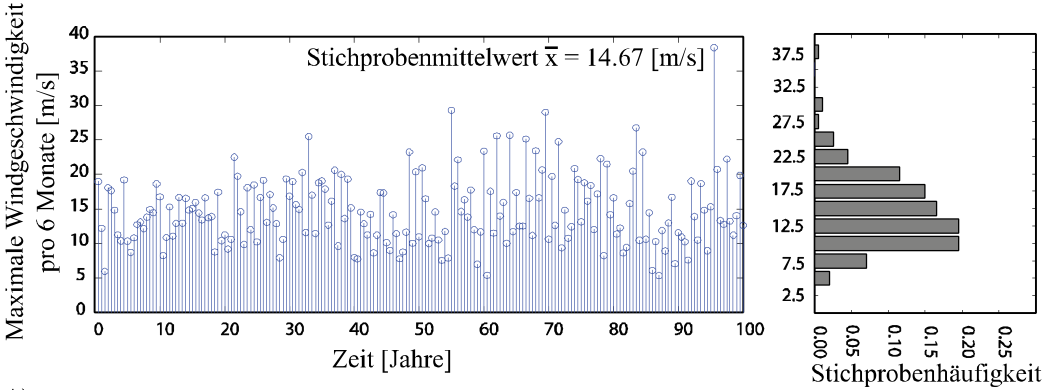
Bei **Extremwerten** handelt es sich jeweils um den grössten, oder um den kleinsten Wert einer bestimmten Grösse innerhalb eines gegebenen Zeitintervalls:

- Grösstes Erdbeben in einem Jahr
- Höchste Welle in einer Winterperiode
- Grösste Niederschlagsmenge in 100 Jahren

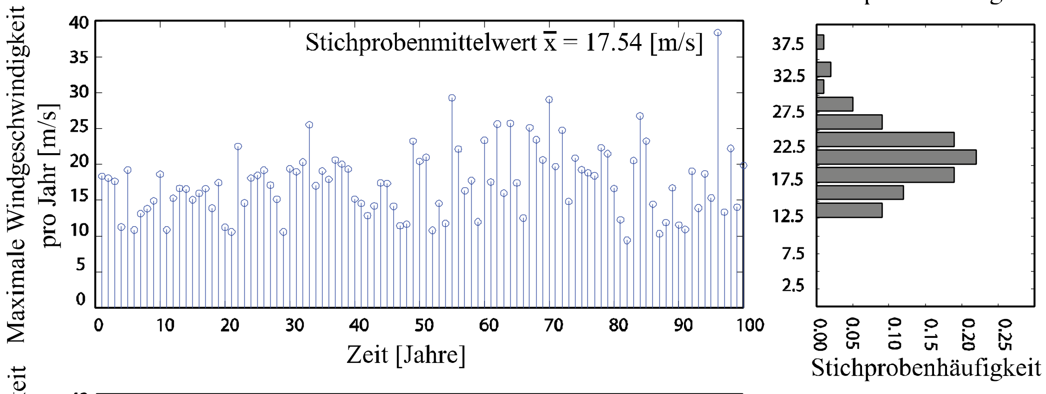
…oder um den grössten oder kleinsten Wert einer bestimmten Grösse innerhalb einer bestimmten Fläche oder Volumen:

- Die grösste Konzentration von Pestiziden in einem Kubikmeter Boden
- Das schwächste Glied in einer Kette
- Die kleinste Betonüberdeckung

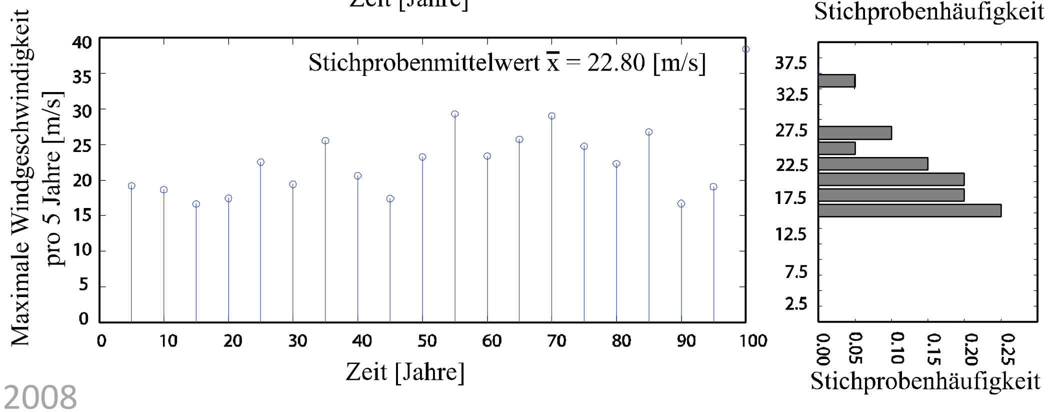
Extremwertverteilungen



Beobachtete 6-monatliche Extremwerte

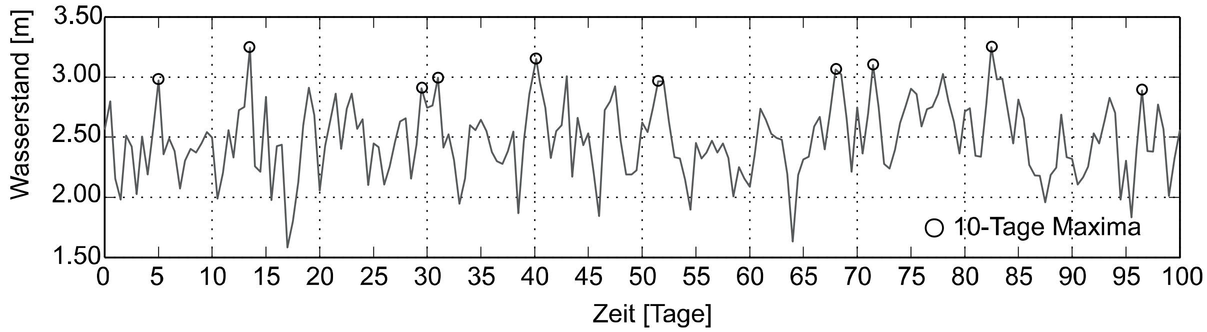


Beobachtete jährliche Extremwerte

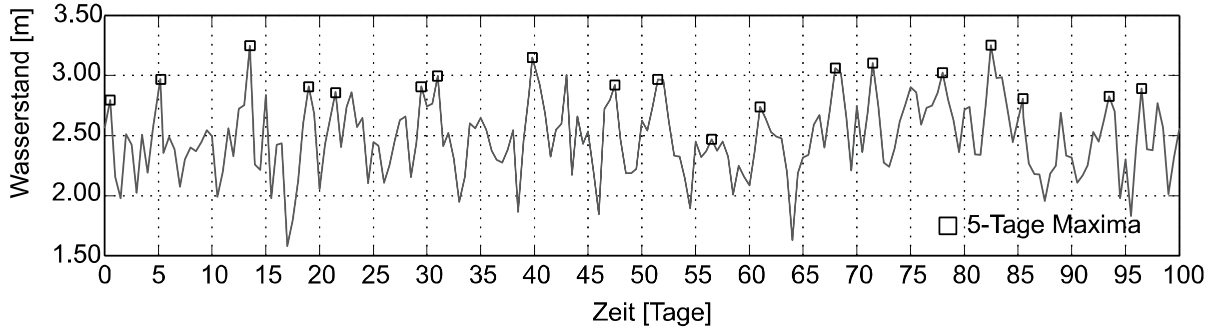


Beobachtete 5-Jahres Extremwerte

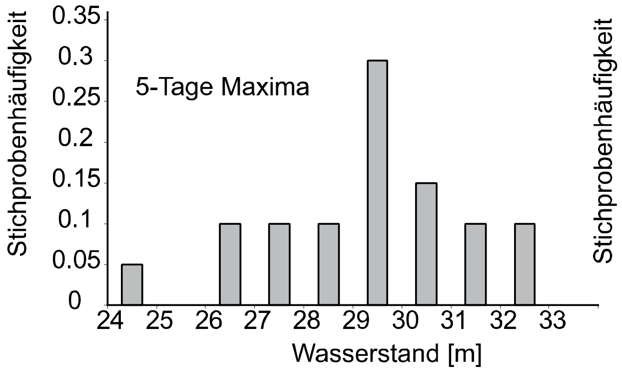
Extremwertverteilungen

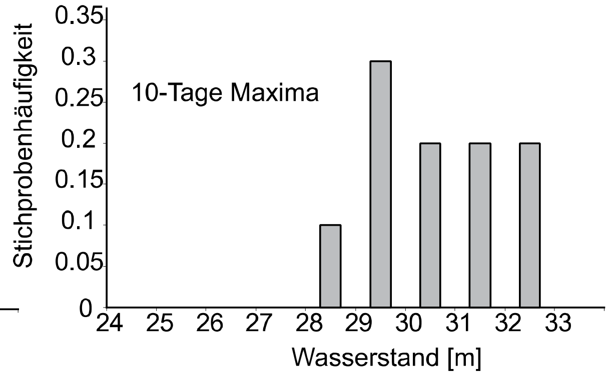


Beobachtete Extremwerte 10 Tage Intervalle



Beobachtete Extremwerte 5 Tage Intervalle





Extremwertverteilungen

Wenn die Extremwerte innerhalb einer Periode T eines ergodischen Zufallsprozesses $X(t)$ unabhängig sind und der Verteilung

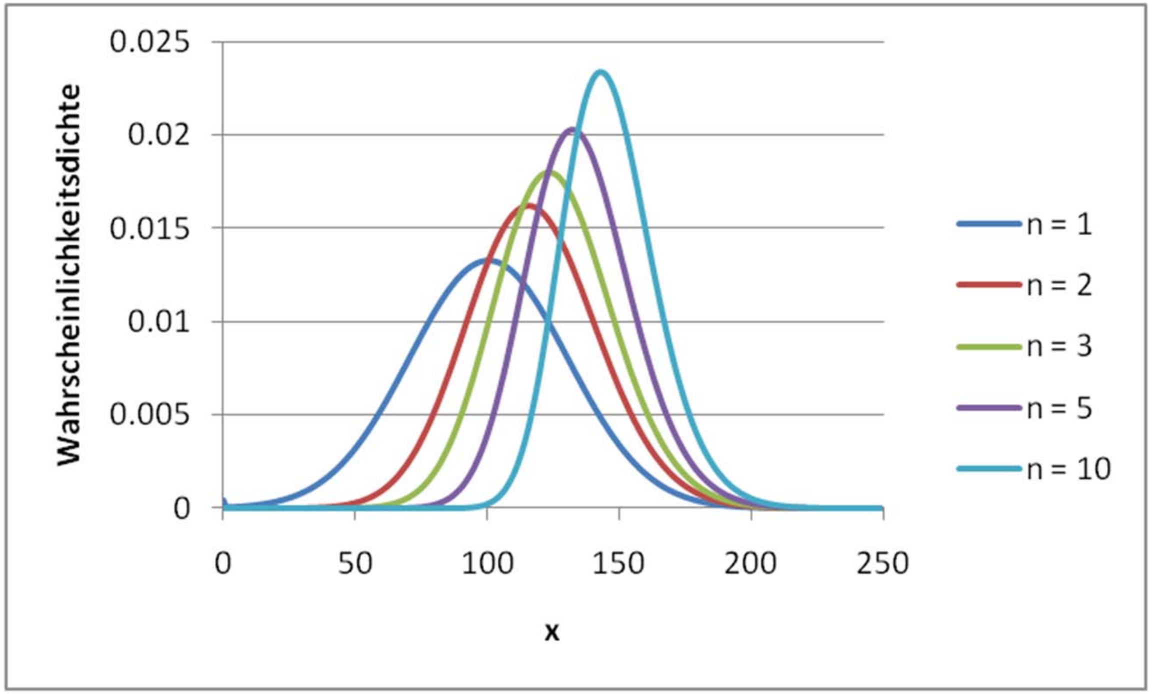
$$F_{X,T}^{\max}(x)$$

folgen, dann werden die Extremwerte des gleichen Prozesses innerhalb der Periode

$$n \cdot T$$

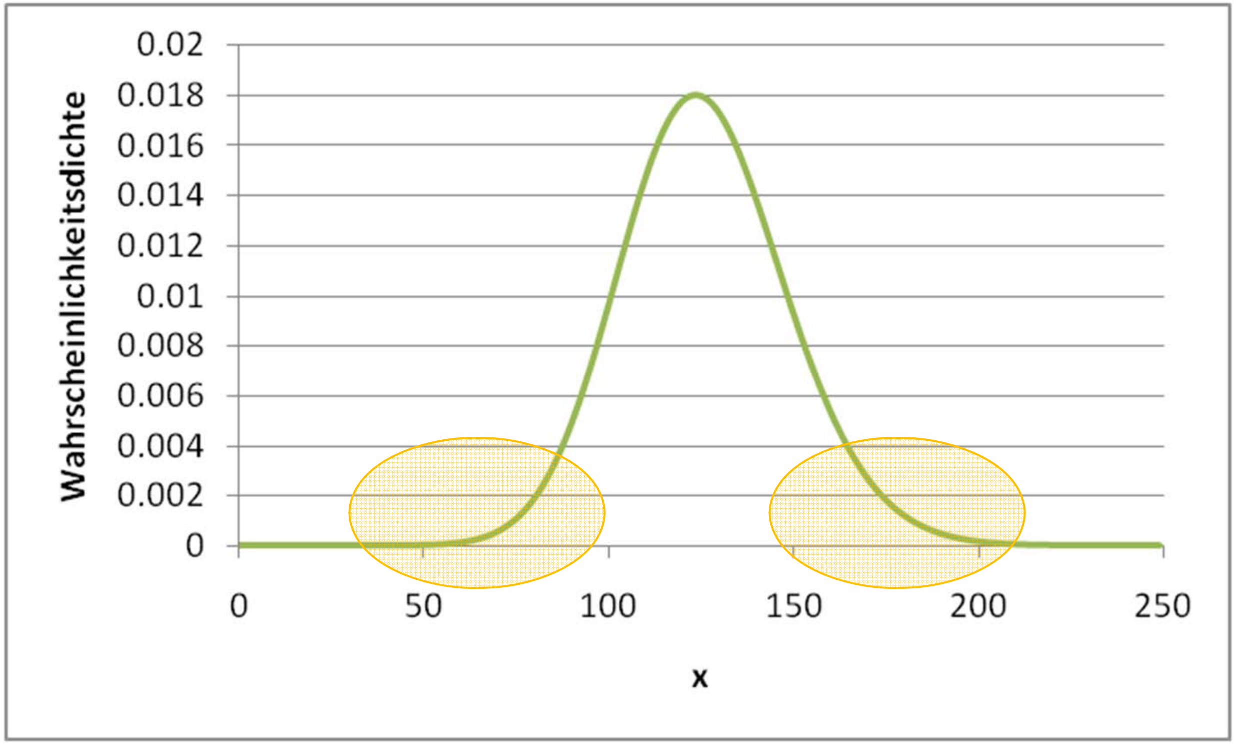
folgender Verteilung folgen:

$$F_{X,nT}^{\max}(x) = \left(F_{X,T}^{\max}(x)\right)^n$$



Extremwertverteilungen

Verschieden Typen von Extremwertverteilungen in Abhängigkeit von der Form der Dichteverteilung der Variablen in den ‚Extremen'.



Typ I: Oberer Bereich fällt exponentiell ab -> z.B. Gumbel max.

Typ II: nach unten begrenzt + Abfall im oberen Bereich $F_X(x) = 1 - \beta(\frac{1}{x})^k$ -> z.B. Frechet max.

Typ III: nach unten begrenzt bei ε und Abfall im unteren Bereich $F(x) = c(x-\varepsilon)^k$ -> z.B. Weibull min

Extremwertverteilungen: Gumbel Max

Wenn der obere Schwanz der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion exponentiell abfällt (Exponential-, Normal- und Gammaverteilung), dann wird das Maximum im Zeitintervall T als **Typ I extremverteilt** bezeichnet.

$$f_{X,T}^{\max}(x) = \alpha \exp(-\alpha(x-u) - \exp(-\alpha(x-u)))$$

$$F_{X,T}^{\max}(x) = \exp(-\exp(-\alpha(x-u)))$$

$$\mu_{X_T^{\max}} = u + \frac{\gamma}{\alpha} = u + \frac{0.577216}{\alpha}$$

$$\sigma_{X_T^{\max}} = \frac{\pi}{\alpha\sqrt{6}}$$

Für zunehmende Zeitintervalle ist die Varianz konstant, aber der Mittelwert wird grösser:

$$\mu_{X_{nT}^{\max}} = \mu_{X_T^{\max}} + \frac{\sqrt{6}}{\pi}\sigma_{X_T^{\max}} \ln(n)$$

Extremwertverteilungen: Frechet Max

Wenn eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion unten bei Null begrenzt ist, und in ihrem oberen Ende abfällt in der Form

$$F_X(x) = 1 - \beta(\frac{1}{x})^k$$

dann wird das Maximum im Zeitintervall T als **Typ II extremverteilt** bezeichnet.

$$F_{X,T}^{\max}(x) = \exp(-\left(\frac{u}{x}\right)^k)$$

$$f_{X,T}^{\max}(x) = \frac{k}{u}\left(\frac{u}{x}\right)^{k+1} \exp(-\left(\frac{u}{x}\right)^k)$$

Mittelwert und Standardabweichung

$$\mu_{X_T^{\max}} = u\Gamma(1 - \frac{1}{k})$$

$$\sigma_{X_T^{\max}}^2 = u^2\left[\Gamma(1 - \frac{2}{k}) - \Gamma^2(1 - \frac{1}{k})\right]$$

Extremwertverteilungen: Weibull Min

Wenn eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion unten bei ε begrenzt ist, und das untere Ende zu ε hin abfällt in der Form

$$F(x) = c(x-\varepsilon)^k$$

dann wird das Maximum im Zeitintervall T als **Typ III extremverteilt** bezeichnet.

$$F_{X,T}^{\min}(x) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x-\varepsilon}{u-\varepsilon} \right)^k \right)$$

$$f_{X,T}^{\min}(x) = \frac{k}{u-\varepsilon} \left(\frac{x-\varepsilon}{u-\varepsilon} \right)^{k-1} \exp\left(-\left(\frac{x-\varepsilon}{u-\varepsilon} \right)^k \right)$$

Mittelwert und Standardabweichung

$$\mu_{X_T^{\min}} = \varepsilon + (u-\varepsilon)\Gamma(1+\frac{1}{k})$$

$$\sigma_{X_T^{\min}}^2 = (u-\varepsilon)^2 \left[\Gamma(1+\frac{2}{k}) - \Gamma^2(1+\frac{1}{k}) \right]$$

Wiederkehrperiode

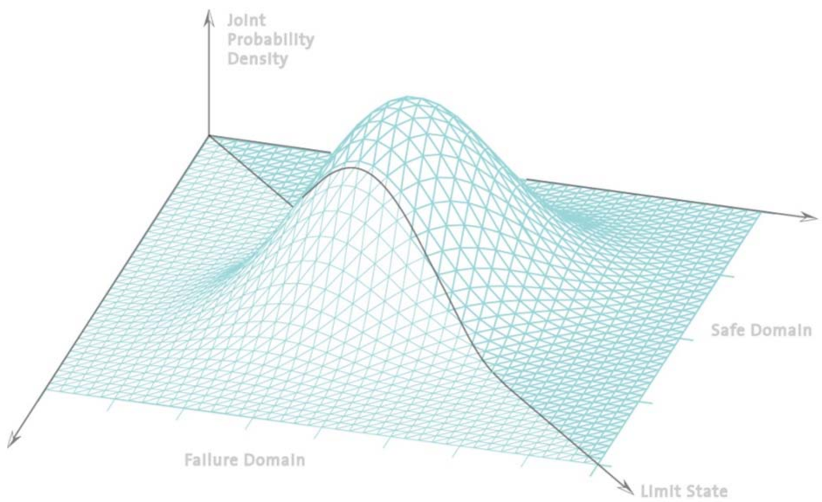
Die **Wiederkehrperiode** für Extremereignisse T_R wird definiert als:

$$T_R = n \cdot T = \frac{1}{(1 - F_{X,T}^{\max}(x))} T$$

Beispiel:
Nehmen wir an, dass gemäss der kumulativen Wahrscheinlichkeits-verteilungsfunktion des jährlichen Maximums der Verkehrslasten, die jährliche Wahrscheinlichkeit einer Verkehrslast grösser als 100 Tonnen gleich 0.02 ist - dann ist die Wiederkehrperiode einer solchen Last:

$$T_R = n \cdot T = \frac{1}{0.02} 1 = \frac{1}{0.02} 1 = 50 \text{ Jahre}$$

T=1 (jährliche Wahrscheinlichkeit)



Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Mathias Graf