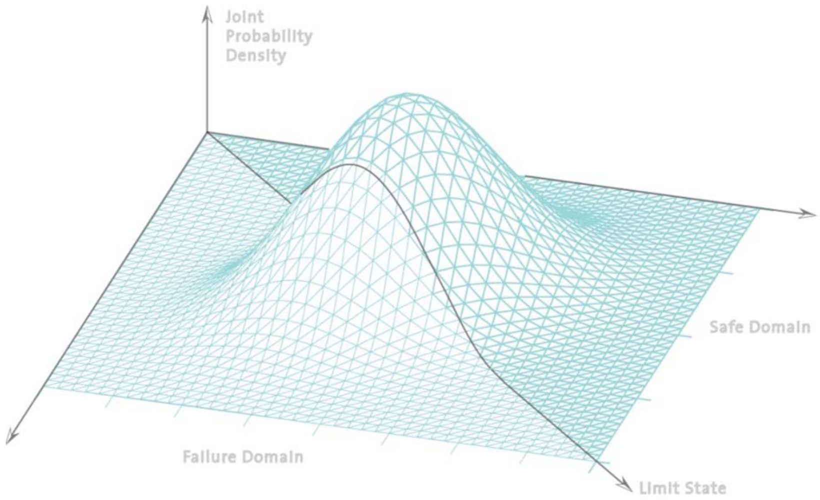



# Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

## 2. Vorlesung

Dr. Jochen Köhler

# Inhalt der heutigen Vorlesung

- Risiko und Motivation für Risikobeurteilungen
- Übersicht über die Wahrscheinlichkeitstheorie
- Interpretation von Wahrscheinlichkeit
- Stichprobenraum und Ereignisse
- Die drei Axiome der Wahrscheinlichkeitstheorie
- Bedingte Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes

# Warum Statistik und Wahrscheinlichkeits-rechnung im Ingenieurwesen?

Risiko ist eine Charakteristik einer Aktivität bezogen auf mögliche Ereignisse $n_E$ welche mit der Aktivität zusammenhängen.

Das Risiko $R_{E_i}$ des Ereignisses $E_i$ ist definiert als das Produkt der Eintretenswahrscheinlichkeit des Ereignisses $P_{E_i}$ und den Konsequenzen des Ereignisses $C_{E_i}$.

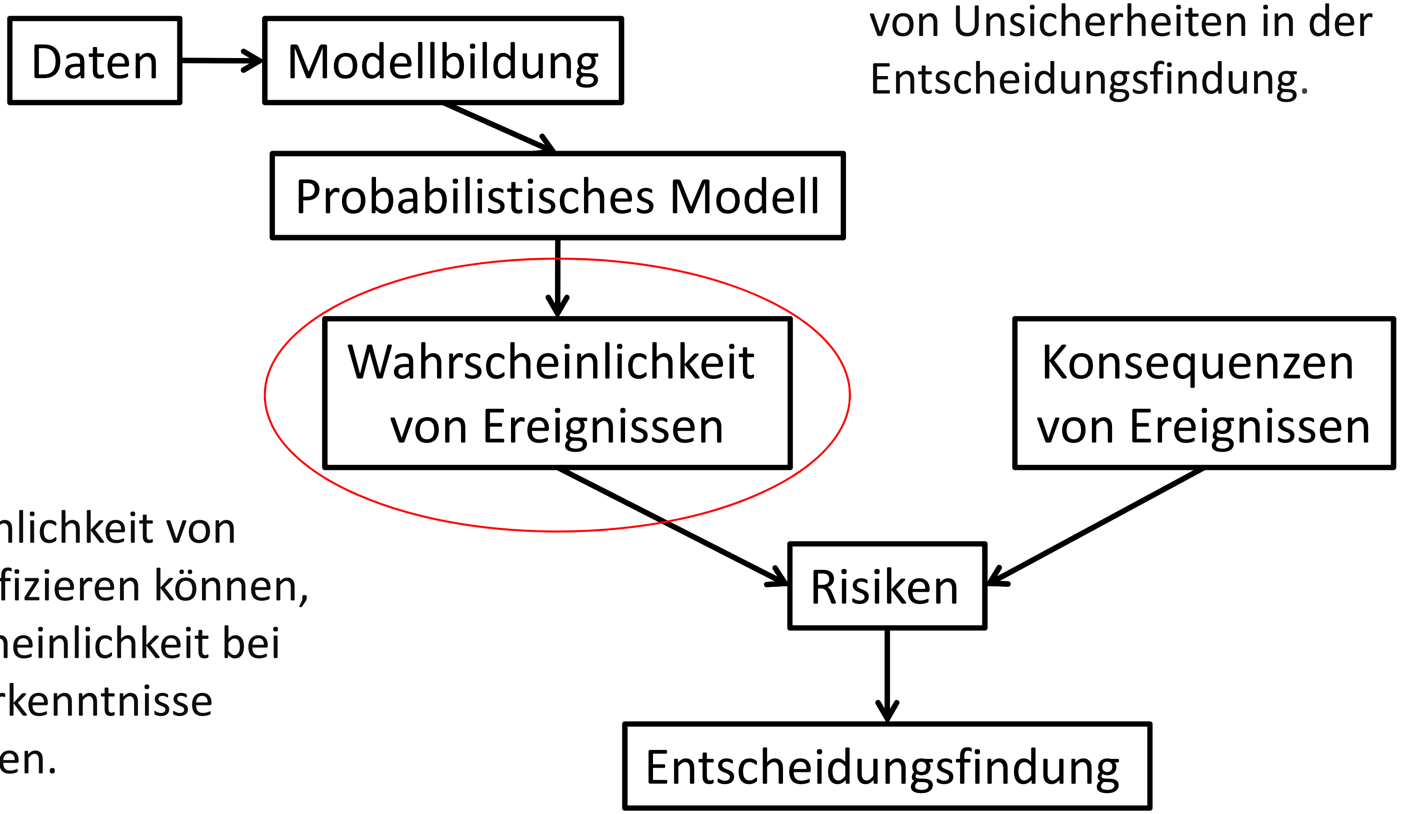
Das mit der Aktivität $R_A$ verbundene Risiko errechnet sich wie folgt:

$$R_A = \sum_{i=1}^{n_E} R_{E_i} = \sum_{i=1}^{n_E} P_{E_i} \cdot C_{E_i}$$

# Übersicht: Wahrscheinlichkeitstheorie

Ziel und Motivation der heutigen Vorlesung

Die Wahrscheinlichkeitstheorie liefert die Grundlagen für die konsistente Berücksichtigung von Unsicherheiten in der Entscheidungsfindung.




Wir sollten die Eintrittswahrscheinlichkeit von Ereignissen quantifizieren können, und diese Wahrscheinlichkeit bei Auftreten neuer Erkenntnisse aktualisieren können.

# Ereignisraum und Ereignisse

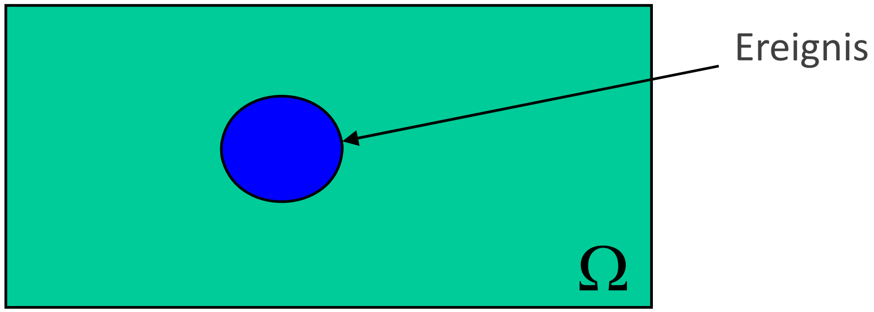
Die Menge aller möglichen Beobachtungen eines Zustandes unserer Umwelt nennen wir den Ereignisraum $\Omega$ .

Dieser Ereignisraum könnte beispielsweise alle Beobachtungen (Messungen, Werte) aus Druckfestigkeitsuntersuchungen an Beton beinhalten und würde folgendermassen geschrieben: $\Omega = ]0;\infty[$

Ein Ereignis beinhaltet eine spezifische Sammlung von Beobachtungen und ist eine Untermenge des Ereignisraumes.

# Ereignisraum und Ereignisse

Der Ereignisraum und die Ereignisse können mit Venn Diagrammen dargestellt werden:



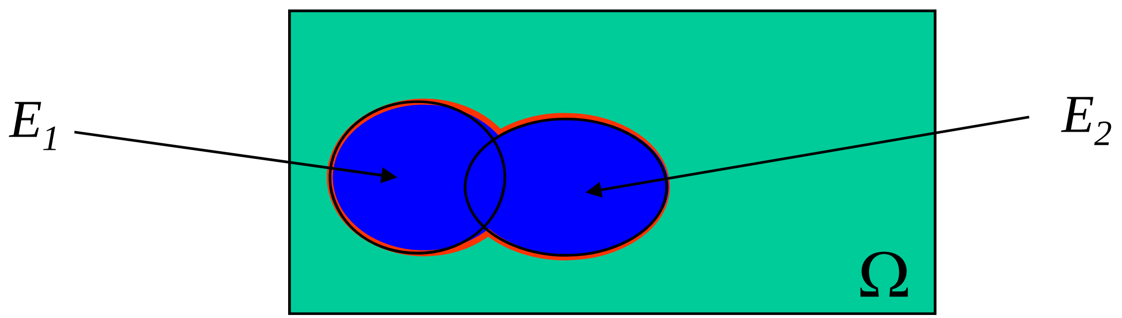

Ein Ereignis ist eine Untermenge des Ereignisraumes.

- Wenn die Untermenge leer ist, ist das Ereignis unmöglich.
- Wenn die Untermenge alle möglichen Beobachtungen enthält, ist das Ereignis sicher.

# Ereignisraum und Ereignisse

Betrachten Sie die zwei Ereignisse $E_1$ und $E_2$.

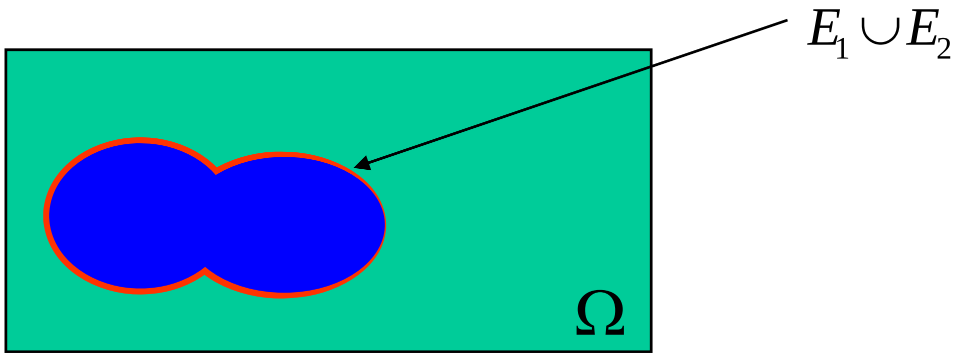
Die Untermenge an Beobachtungen, welche zum Ereignis $E_1$ **und/oder** dem Ereignis $E_2$ gehören, heisst die **Vereinigung** von $E_1$ und $E_2$ und wird geschrieben als $E_1 \cup E_2$ .



# Ereignisraum und Ereignisse

Betrachten Sie die zwei Ereignisse $E_1$ und $E_2$.

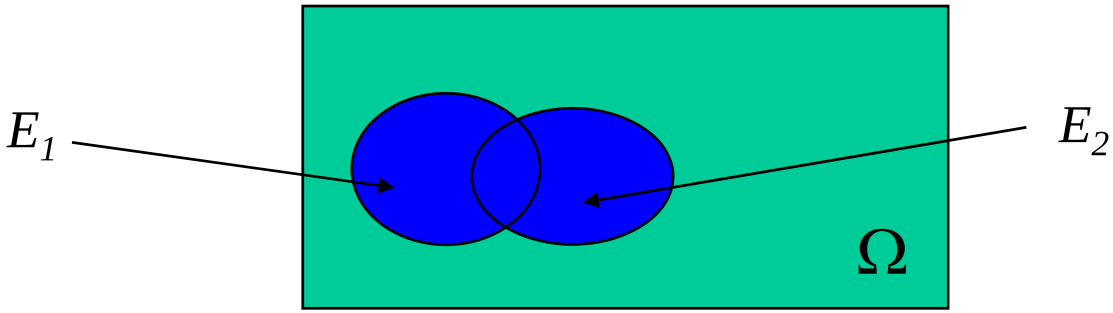
Die Untermenge an Beobachtungen, welche zum Ereignis $E_1$ **und/oder** dem Ereignis $E_2$ gehören, heisst die **Vereinigung** von $E_1$ und $E_2$ und wird geschrieben als $E_1 \cup E_2$ .



# Ereignisraum und Ereignisse

Betrachten Sie die zwei Ereignisse $E_1$ und $E_2$.

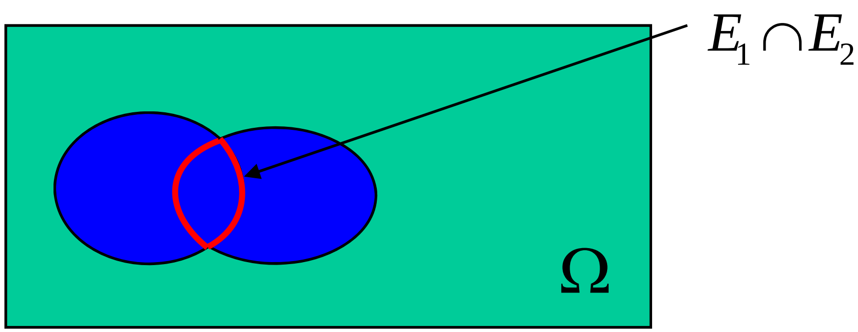
Die Untermenge an Beobachtungen, welche zum Ereignis $E_1$ **und** dem Ereignis $E_2$ gehören, heisst die **Schnittmenge** von $E_1$ und $E_2$ und wird geschrieben als $E_1 \cap E_2$ .



# Ereignisraum und Ereignisse

Betrachten Sie die zwei Ereignisse $E_1$ und $E_2$.

Die Untermenge an Beobachtungen, welche zum Ereignis $E_1$ **und** dem Ereignis $E_2$ gehören, heisst die **Schnittmenge** von $E_1$ und $E_2$ und wird geschrieben als $E_1 \cap E_2$ .

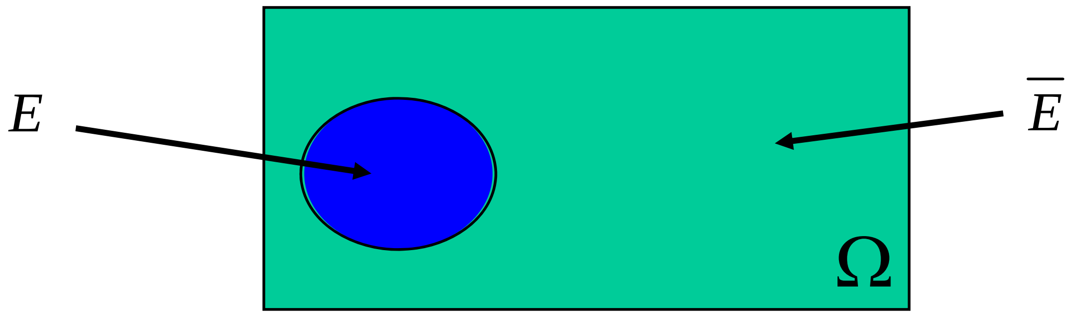


# Ereignisraum und Ereignisse

Das Ereignis, welches alle Beobachtungen in $\Omega$ enthält, welche nicht im Ereignis $E$ enthalten sind, heisst das Komplementärereignis $\overline{E}$.

Daraus folgt $\quad E \cup \overline{E} = \Omega$

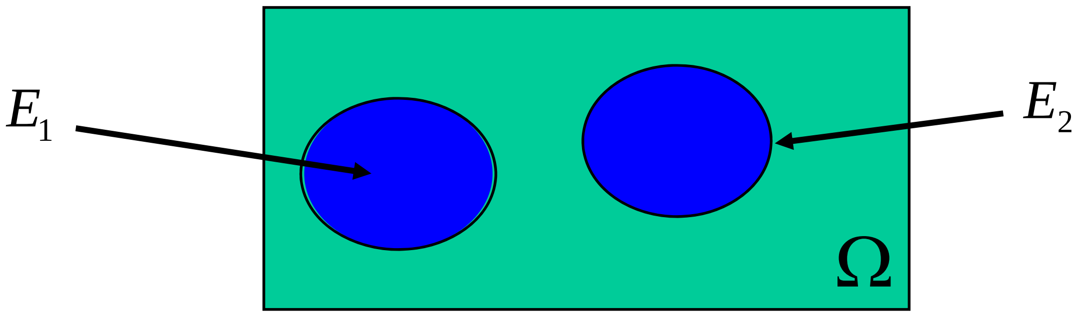
und $\quad E \cap \overline{E} = \emptyset$



# Ereignisraum und Ereignisse

Ereignisse, welche keine gemeinsame Schnittmenge haben, werden sich gegenseitig ausschliessende Ereignisse genannt.

Somit ist $E_1 \cap E_2 = \varnothing$



# Ereignisraum und Ereignisse

Es kann gezeigt werden, dass die Berechnungen von Vereinigungs- und Schnittmengen dem Kommutativ-, dem Assoziativ- und dem Distributivgesetz folgen:

$$E_1 \cap E_2 = E_2 \cap E_1 \qquad \text{Kommutativgesetz}$$

$$\left.\begin{aligned} E_1 \cap (E_2 \cap E_3) &= (E_1 \cap E_2) \cap E_3 \\ E_1 \cup (E_2 \cup E_3) &= (E_1 \cup E_2) \cup E_3 \end{aligned}\right\} \text{Assoziativgesetz}$$

$$\left.\begin{aligned} E_1 \cap (E_2 \cup E_3) &= (E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_3) \\ E_1 \cup (E_2 \cap E_3) &= (E_1 \cup E_2) \cap (E_1 \cup E_3) \end{aligned}\right\} \text{Distributivgesetz}$$

# Ereignisraum und Ereignisse

Aus den Kommutativ-, dem Assoziativ- und dem Distributivgesetz können die Gesetze von DeMorgan abgeleitet werden:

$$E_1 \cap E_2 = E_2 \cap E_1$$

$$E_1 \cap (E_2 \cap E_3) = (E_1 \cap E_2) \cap E_3$$

$$E_1 \cup (E_2 \cup E_3) = (E_1 \cup E_2) \cup E_3$$

$$\overline{E_1 \cap E_2} = \overline{E}_1 \cup \overline{E}_2$$

$$\overline{E_1 \cup E_2} = \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2$$

$$E_1 \cap (E_2 \cup E_3) = (E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_3)$$

$$E_1 \cup (E_2 \cap E_3) = (E_1 \cup E_2) \cap (E_1 \cup E_3)$$

# Interpretationen von “Wahrscheinlichkeit”

Was ist Wahrscheinlichkeit?

Wir haben alle eine Vorstellung von Wahrscheinlichkeit
und brauchen oft Wörter wie

- Chance

- Möglichkeit

- Häufigkeit

- Wahrscheinlichkeit

Nukleare Unfälle

Aktien-handel

Rauchen

Prüfung bestehen

Strasse überqueren

Jagen

Schwierige Aufgaben meistern

# Interpretationen von “Wahrscheinlichkeit”

Zustände unserer Umwelt für die wir uns interessieren sind beispielsweise

- Der Einsturz einer Brücke aufgrund ausserordentlicher Lasten
- Das Überfüllen eines Wasserrückhaltebeckens
- Das Ausfallen eines Elektrizitätsnetzes
- Das Nichteinhalten eines Zeitplanes

Diese Zustände werden im folgenden „Ereignisse“ genannt.

Wir sind generell daran interessiert, die Eintrittswahrscheinlichkeit solcher Ereignisse innerhalb einer bestimmten Periode zu quantifizieren.

# Interpretationen von “Wahrscheinlichkeit”

Prinzipiell gibt es drei Interpretationen von Wahrscheinlichkeit:

**Frequentistisch**

$$P(A) = \lim \frac{N_A}{n_{\exp}} \qquad \text{für} \quad n_{\exp} \to \infty$$

**Klassisch**

$$P(A) = \frac{n_A}{n_{tot}}$$

**Bayes**

$$P(A) = \quad \text{Grad der persönlichen Überzeugung, dass das Ereignis } A \text{ eintreten wird}$$

# Interpretationen von "Wahrscheinlichkeit"

Betrachten Sie die Wahrscheinlichkeit, „Kopf“ bzw. „Zahl“ zu erhalten, wenn Sie eine Münze werfen:

Frequentistisch

$$P(A) = \frac{510}{1000} = 0.51$$

Klassisch

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

Bayes

$$P(A) = 0.5$$

# Die drei Axiome der Wahrscheinlichkeitstheorie

Die Wahrscheinlichkeitstheorie baut auf den drei Axiomen von Kolmogorov auf:

Axiom 1: $0 \leq P(E) \leq 1$

Axiom 2: $P(\Omega) = 1$

Axiom 3: $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$ wenn $E_1, E_2, \ldots E_n$ sich gegenseitig ausschliessen

# Die drei Axiome der Wahrscheinlichkeitstheorie

Aus Axiom 3: $$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$$ wenn $E_1, E_2, \ldots E_n$ sich gegenseitig ausschliessen.

folgt, dass die **Vereinigung** zweier sich ausschliessender Ereignisse $E_1$ *und* $E_2$ einfach aus der Summe der zwei Wahrscheinlichkeiten besteht.

Wenn $E_1$ *und* $E_2$ sich nicht gegenseitig ausschliessen, dann ist

$$P\left(E_1 \cup E_2\right) = P(E_1) + P\left(E_2\right) - P\left(E_1 \cap E_2\right)$$

# Bedingte Wahrscheinlichkeit und der Satz von Bayes

Hypothesen formulieren

Wissen und Erfahrung nutzen

Mit Daten kombinieren

Lernen, wie Wissen entwickelt werden kann!

# Bedingte Wahrscheinlichkeit und der Satz von Bayes

Bedingte Wahrscheinlichkeiten sind von besonderem Interesse, da sie die Basis für die Verwendung von neuer Information für die Entscheidungsfindung darstellen.

Die bedingte Wahrscheinlichkeit eines Ereignisse, $E_1$ wenn Ereignis $E_2$ eingetreten ist, wird definiert als

$$P(E_1|E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} \qquad \text{nicht definiert wenn } P(E_2) = 0$$

Die Ereignisse werden als unabhängig bezeichnet wenn

$$P(E_1|E_2) = P(E_1)$$

# Bedingte Wahrscheinlichkeit und der Satz von Bayes

Aus $$P(E_1|E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$$

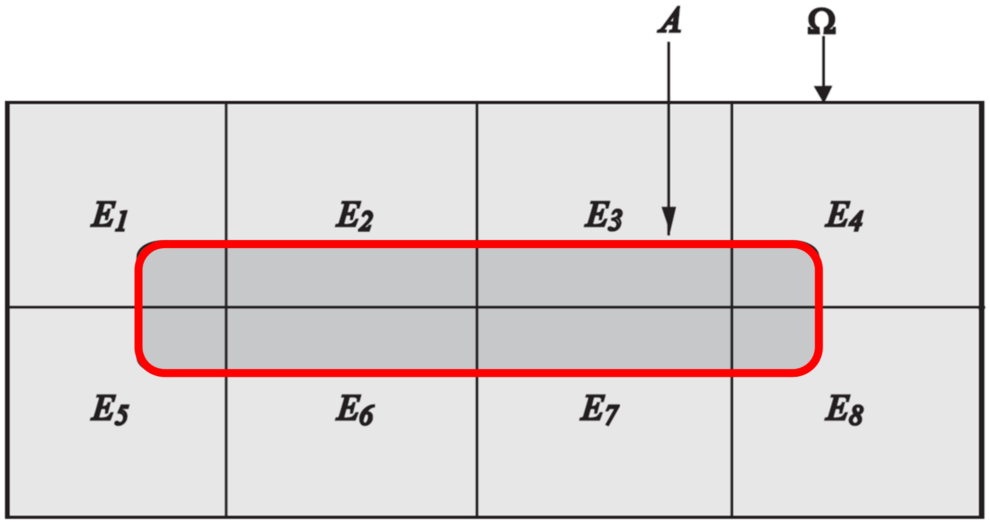
folgt $$P(E_1 \cap E_2) = P(E_2)P(E_1|E_2)$$

und wenn $E_1$ und $E_2$ statistisch unabhängig sind dann

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_2)P(E_1)$$

# Bedingte Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes

Sei der Ereignisraum $\Omega$ aufgeteilt in $n$ sich gegenseitig ausschliessende Ereignisse $E_1, E_2, \ldots, E_n$




$$P(A) = P(A \cap E_1) + P(A \cap E_2) + \ldots + P(A \cap E_n) =$$

$$P(A|E_1)P(E_1) + P(A|E_2)P(E_2) + \ldots + P(A|E_n)P(E_n) =$$

**Satz der totalen Wahrscheinlichkeit** $\sum_{i=1}^{n} P(A|E_i)P(E_i)$

# Bedingte Wahrscheinlichkeit und der Satz von Bayes

Aus $P(A \cap E_i) = P(A|E_i)P(E_i) = P(E_i|A)P(A)$

"Likelihood"

A Priori

folgt

$$P(E_i|A) = \frac{P(A|E_i)P(E_i)}{P(A)} = \frac{P(A|E_i)P(E_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|E_i)P(E_i)}$$

A Posteriori

**Satz von Bayes**

Reverend Thomas Bayes (1702-1764)

# Beispiel

- Sie arbeiten in der Notaufnahme eines Krankenhauses. Eine Person mit einer Fleischwunde klagt über hohes Fieber und Schüttelfrost. Sie sollen beurteilen ob eine Blutvergiftung vorliegt und Sofortmassnahmen eingeleitet werden sollen.
- Der Anteil von Blutvergiftungen von allen Patienten in der Notaufnahme ist 10%.
- 80% der Patienten mit Blutvergiftung hat genau diese Symptome.
- 10% der Patienten ohne Blutvergiftung hat genau diese Symptome.

- Was ist die Wahrscheinlichkeit, das die Person mit den Symptomen unter einer Blutvergiftung leidet und Sofortmassnahmen eingeleitet werden müssen.

# Beispiel

- Sie arbeiten in der Notaufnahme eines Krankenhauses. Eine Person mit einer Fleischwunde klagt über hohes Fieber und Schüttelfrost. Sie sollen beurteilen ob eine Blutvergiftung vorliegt und Sofortmassnahmen eingeleitet werden sollen.
- Der Anteil von Blutvergiftungen von allen Patienten in der Notaufnahme ist 10%.
- 80% der Patienten mit Blutvergiftung hat genau diese Symptome.
- 10% der Patienten ohne Blutvergiftung hat genau diese Symptome.

- Was ist die Wahrscheinlichkeit, das die Person mit den Symptomen unter einer Blutvergiftung leidet und Sofortmassnahmen eingeleitet werden müssen.

Blutvergiftung: $BV$
Symptome: $SY$

$\mapsto P(BV) = 0.1$

$\mapsto P(SY|BV) = 0.8$

$\mapsto P(SY|\overline{BV}) = 0.1$

$\mapsto P(BV|SY) = ?$

# Beispiel – Lösung

- Was ist die Wahrscheinlichkeit, das die Person mit den Symptomen unter einer Blutvergiftung leidet und Sofortmassnahmen eingeleitet werden müssen.

$$P(BV)=0.1 \quad P(SY|BV)=0.8 \quad P(SY|\overline{BV})=0.1$$

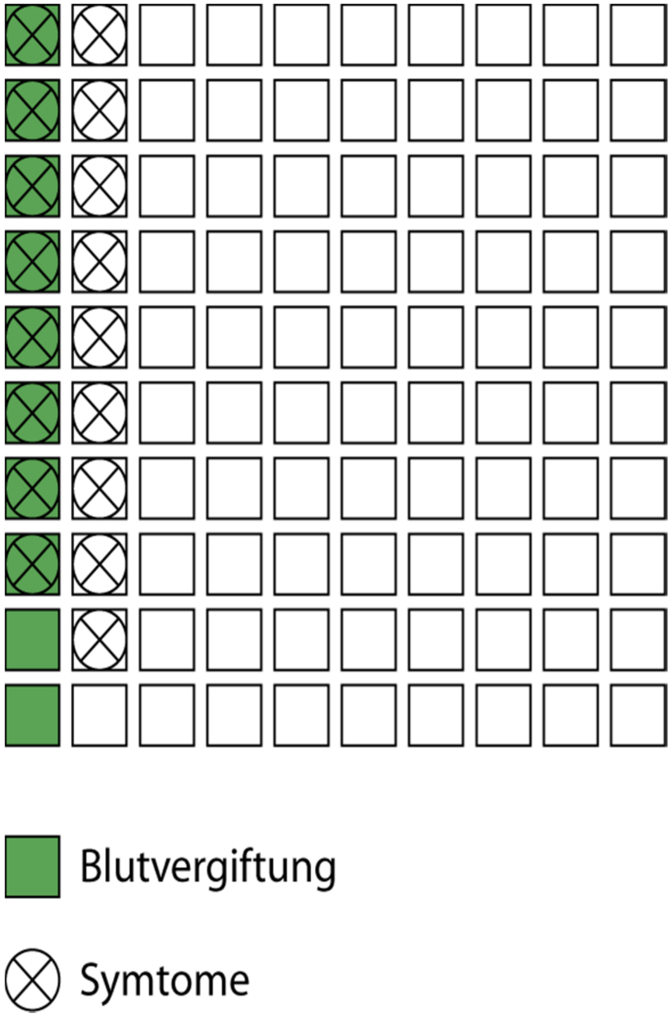
$$P(BV|SY)=\frac{P(SY|BV)P(BV)}{P(SY|BV)P(BV)+P(SY|\overline{BV})P(\overline{BV})}$$

$$=\frac{0.8\cdot 0.1}{0.8\cdot 0.1+0.1\cdot 0.9}$$

$$=0.471$$

Blutvergiftung: $BV$
Symptome: $SY$

# Beispiel – Lösung - Alternativ




10 von 100 haben Blutvergiftung

$$\rightarrow P(BV) = 0.1$$

8 von 10 zeigen die Symptome

$$\rightarrow P(SY \mid BV) = 0.8$$

9 von 90 zeigen Symptome und haben keine Blutvergiftung

$$\rightarrow P(SY \mid \overline{BV}) = 0.1$$

# Aufgabe 2

Eine zerstörungsfreie Prüfmethode wird herangezogen um herauszufinden, ob das Kabel einer Brücke korrodiert (gerostet) ist.

Auf Grund von Experimenten kann man annehmen, dass das Kabel mit einer Wahrscheinlichkeit von 1% korrodiert ist.

Ist das Kabel angerostet, so wird dies vom Prüfgerät zuverlässig angezeigt. Allerdings zeigt dieses Gerät in 10% aller Fälle auch einen Korrosionszustand an, obwohl das Kabel nicht angerostet ist.

Das zerstörungsfreie Prüfverfahren zeigt Korrosion an - Wie gross ist nun aber die Wahrscheinlichkeit, dass das Kabel tatsächlich korrodiert ist?

# Aufgabe 3 - Lösung

Auf Grund von Experimenten kann man annehmen, dass das Kabel mit einer Wahrscheinlichkeit von 1% korrodiert ist. $P(C) = 0.01$

Ist das Kabel angerostet, so wird dies vom Prüfgerät zuverlässig angezeigt.

$$P(I_C | C) = 1$$

Allerdings zeigt dieses Gerät in 10% aller Fälle auch einen Korrosionszustand an, obwohl das Kabel nicht angerostet ist.

$$P(I_C | \bar{C}) = 0.1$$

$$P(C | I_C) = \frac{P(I_C | C) P(C)}{P(I_C)} = \frac{P(I_C | C) P(C)}{P(I_C | C) P(C) + P(I_C | \bar{C}) P(\bar{C})}$$

# Aufgabe 3 - Lösung

Versuchen wir zu rechnen! Mit 1000 Kabeln.

Annahme: 1 % korrodiert

- 10 korrodiert, 990 nicht korrodiert.

Anzeige Gerät:

- 10 korrodiert.

Das Gerät zeigt 10 % von den nicht korrodierten 990 Kabeln als korrodiert an:

- 99 „korrodiert".

Fazit:

- 99 + 10 = 109 als korrodiert angezeigt.
- Korrodiert sind jedoch nur 10!

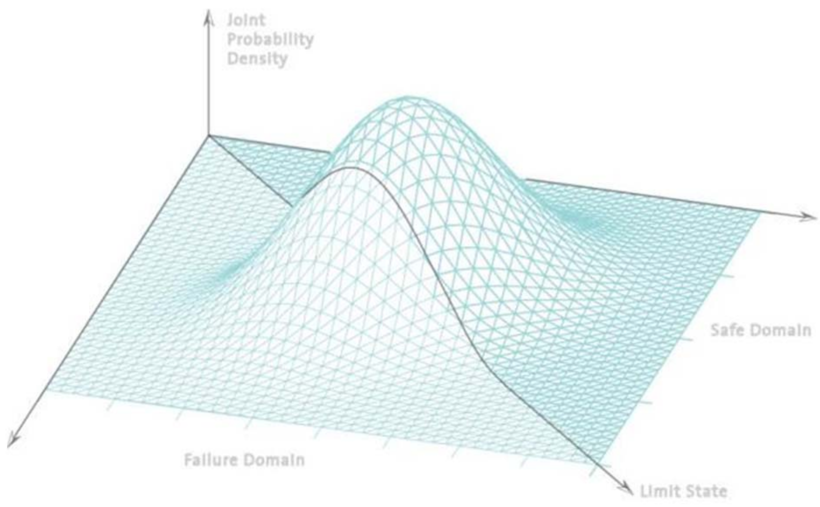
# Aufgabe 3 - Lösung

99 + 10 = 109 als korrodiert angezeigt.

Korrodiert sind jedoch nur 10!

Die Wahrscheinlichkeit, dass Korrosion vorliegt, wenn das Prüfverfahren Korrosion anzeigt ist somit:

$$\frac{10}{10+99} = 0{,}0917$$




# Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Dr. Jochen Köhler