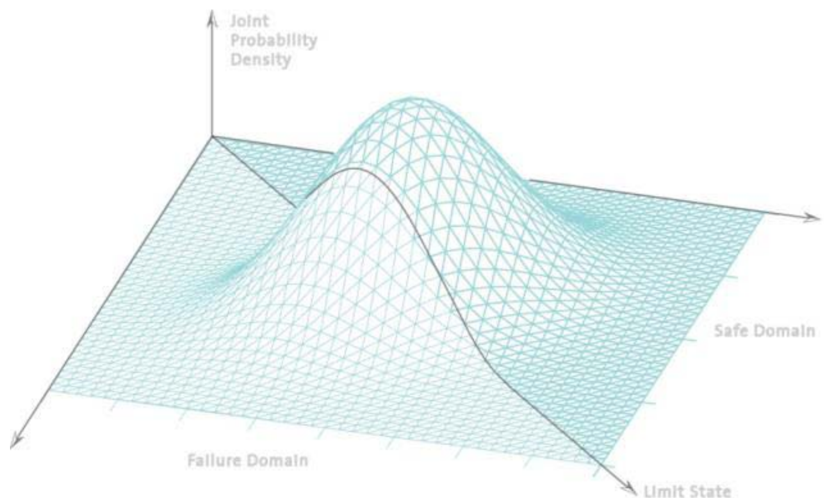


Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

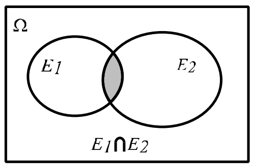
12. Vorlesung

Dr. Jochen Köhler

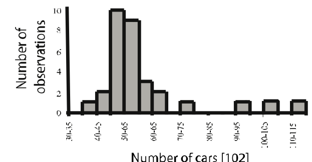
Aufbau der Vorlesung

Modul A
Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

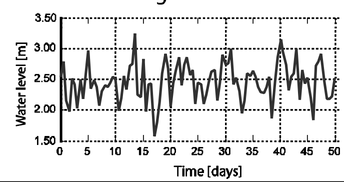
Modul B - Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie



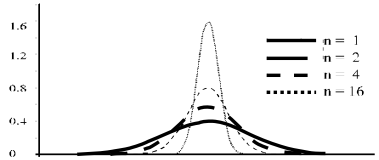
Modul C - Beschreibende Statisktik



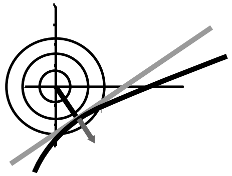
Modul D - Modellierung von Unsicherheiten



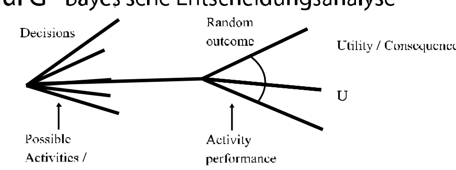
Modul E - Parameterschätzung und Modellerstellung



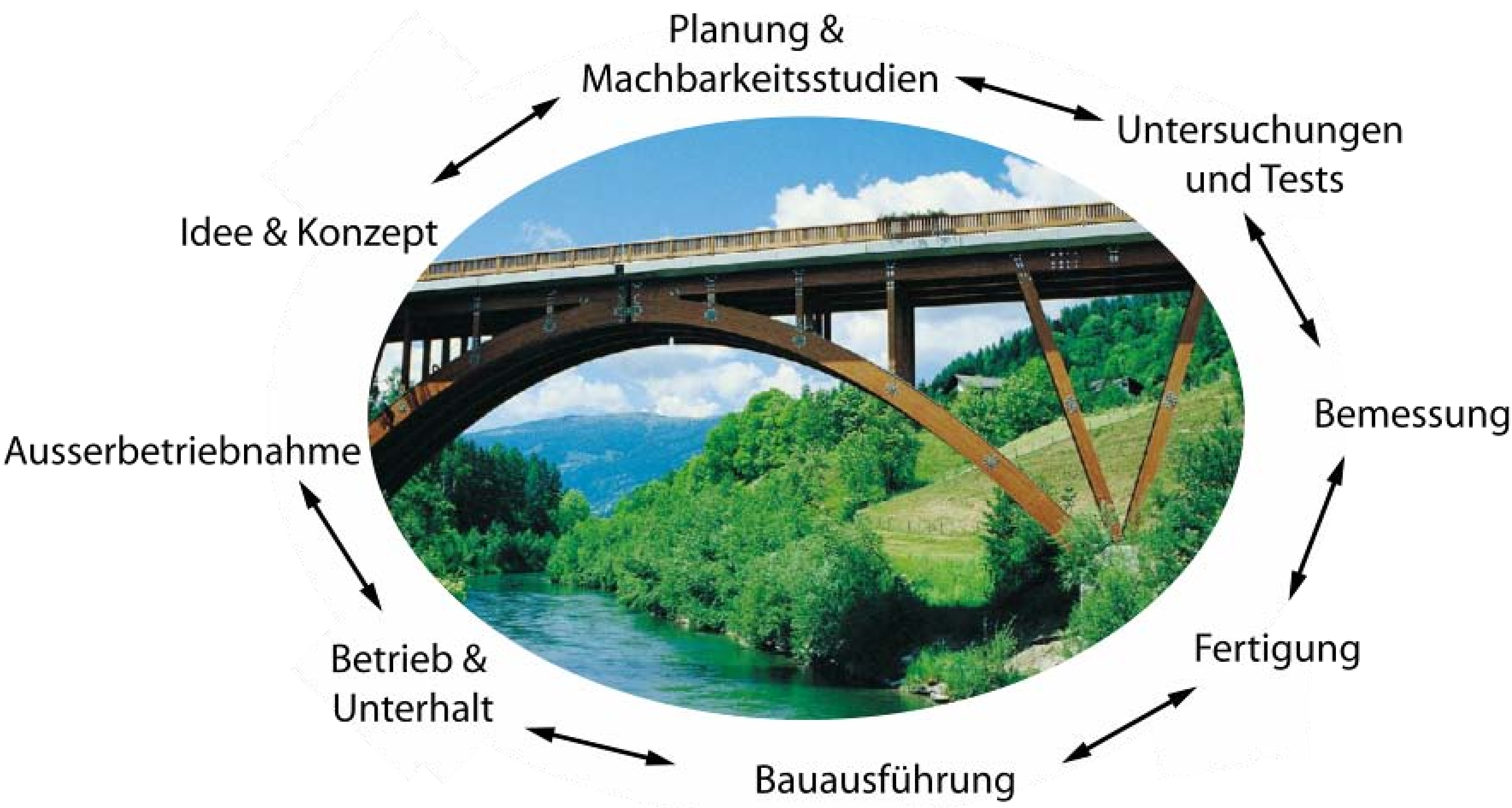
Modul F - Methoden der strukturellen Zuverlässigkeit



Modul G - Bayes'sche Entscheidungsanalyse

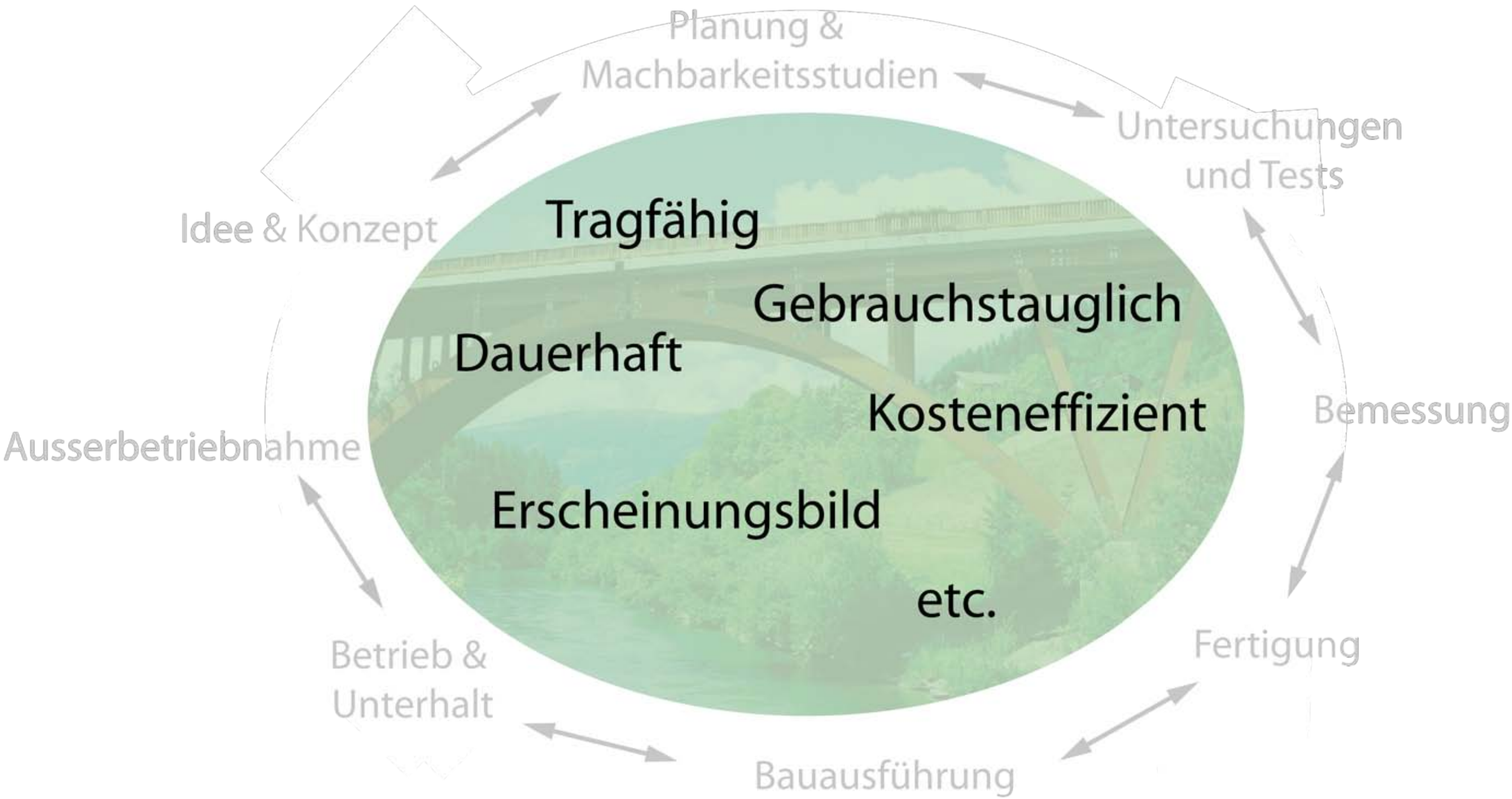


Der ‚Lebenszyklus' eines Bauwerks



Der ‚Lebenszyklus' eines Bauwerks

Der ‚Lebenszyklus' eines Bauwerks



Der ‚Lebenszyklus' eines Bauwerks

Entscheidungen, verbunden mit Unsicherheiten z.B.

- Umweltbedingungen
- Lasten
- Bauteilwiderstände
- Schädigungsprozesse
- Lebensdauer
- Herstellungskosten
- Betriebskosten
- Kosten der Ausserbetriebnahme

Beispiel – Bemessung einer Brücke

Bemessungsvorgang:

Überblick der Situation
(Was kann alles passieren?)

↓

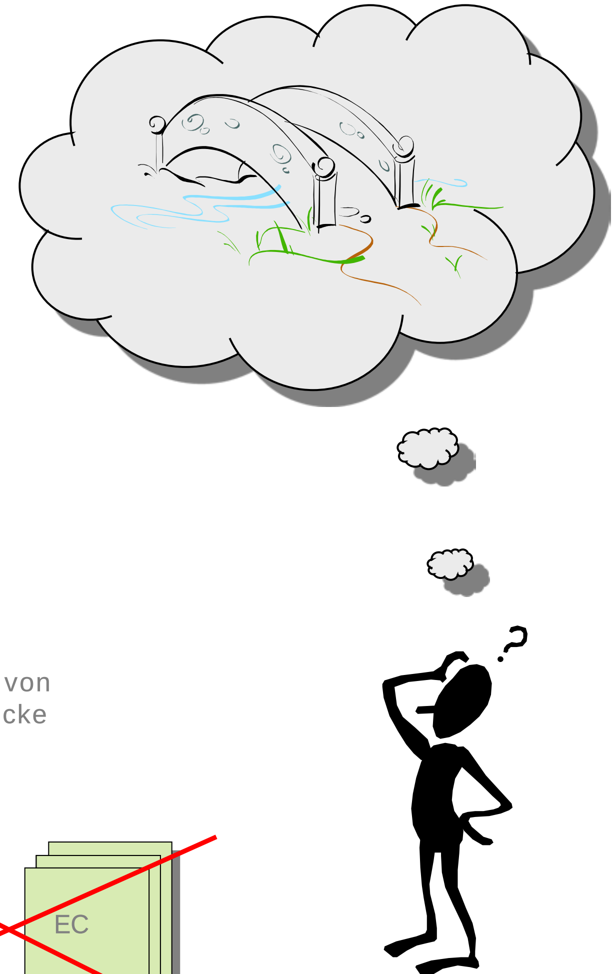
Identifikation von relevanten Bemessungssituationen

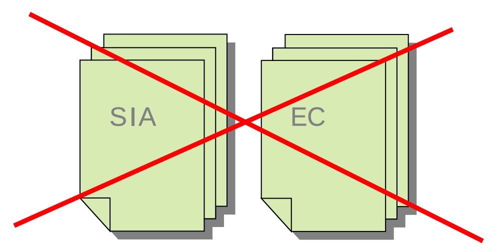
↓

Detailierte Identifikation von Bemessungsstrategien

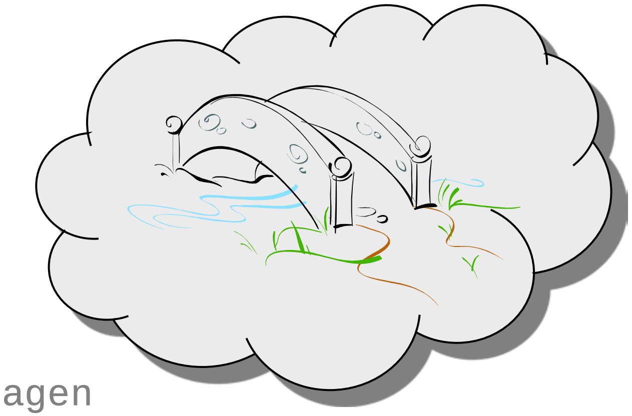
Lastannahmen

z.B. Dimensionierung von Komponenten der Brücke





Beispiel – Bemessung einer Brücke



Dimensionierung von Komponenten :

Erwarteter Nutzen des Bauwerks

Nutzen im Betrieb

Kosten des Tragwerks

Konsequenzen bei Versagen

$$E[B] = I\left(1 - P_F\left(C_D\right)\right) - C_D - C_F P_F\left(C_D\right)$$

Zuverlässigkeit

Risiko

$P_F(.) \rightarrow$ Wahrscheinlichkeit von Komponentenversagen

- Abhängig von den Kosten der Bemessungsalternative C_D

Beispiel – Bemessung einer Brücke

Dimensionierung von Komponenten :

Erwarteter Nutzen des Bauwerks

Nutzen im Betrieb

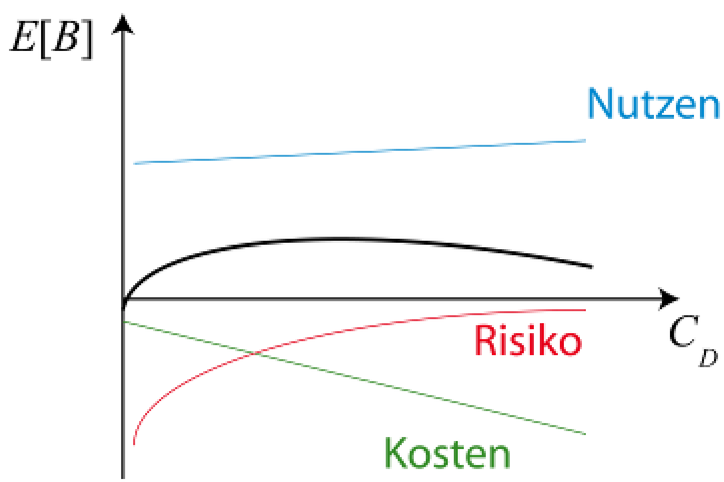
Kosten des Tragwerks

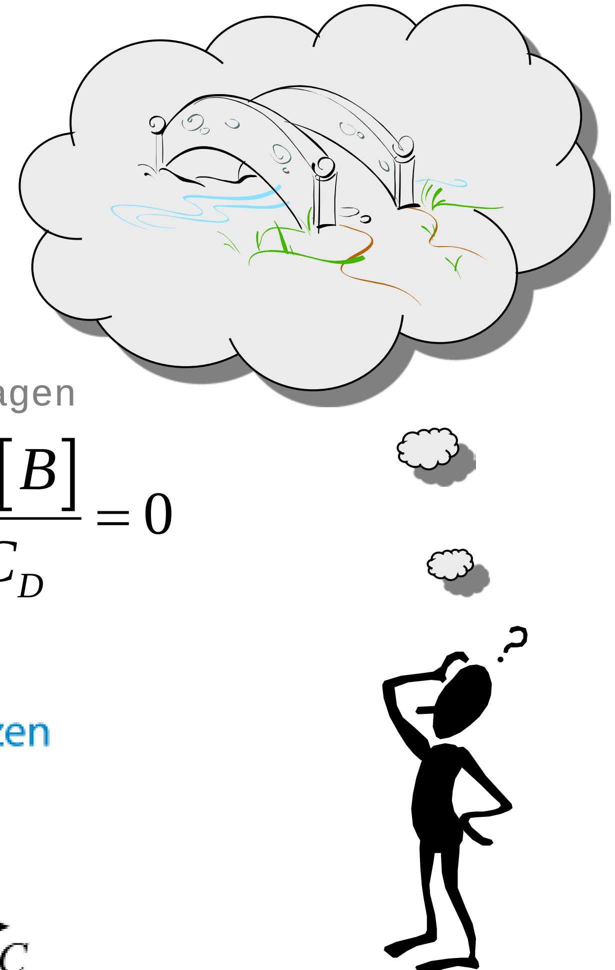
Konsequenzen bei Versagen

$$E[B] = I\left(1 - P_F\left(C_D\right)\right) - C_D - C_F P_F\left(C_D\right) \Rightarrow \frac{\partial E[B]}{\partial C_D} = 0$$

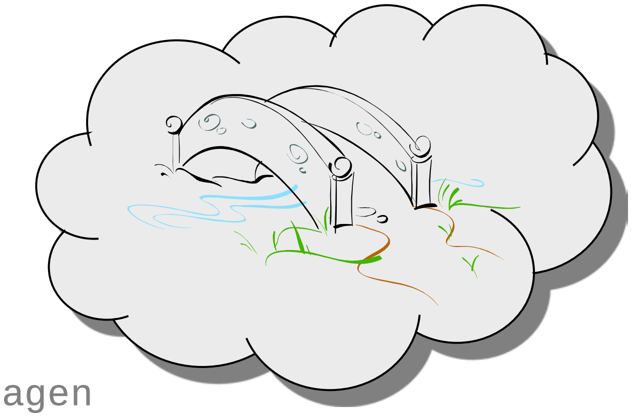
Zuverlässigkeit

Risiko





Beispiel – Bemessung einer Brücke



Dimensionierung von Komponenten :

Erwarteter Nutzen des Bauwerks

Nutzen im Betrieb

Kosten des Tragwerks

Konsequenzen bei Versagen

$$E[B] = I\left(1 - P_F\left(C_D\right)\right) - C_D - C_F P_F\left(C_D\right) \Rightarrow \frac{\partial E[B]}{\partial C_D} = 0$$

Zuverlässigkeit

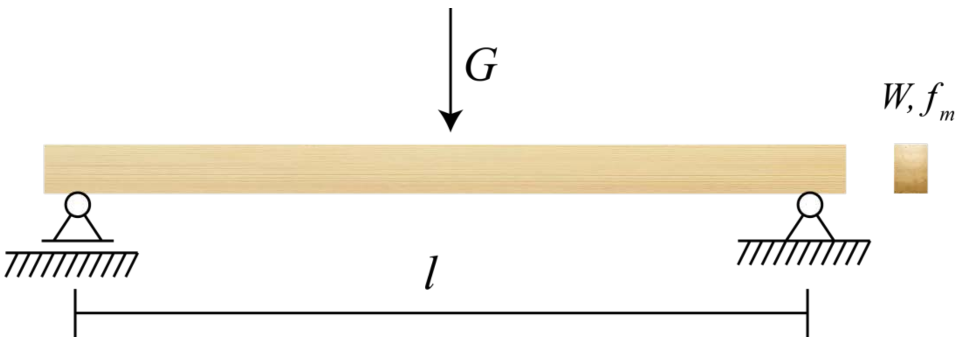
Risiko

Die Versagenswahrscheinlichkeit $P_F(.)$ ist von zentraler Bedeutung für dieses Problem.

Versagen

allgemein definiert durch : Bauteilwiderstand < Bauteilbelastung

z.B. bei einem Biegeträger



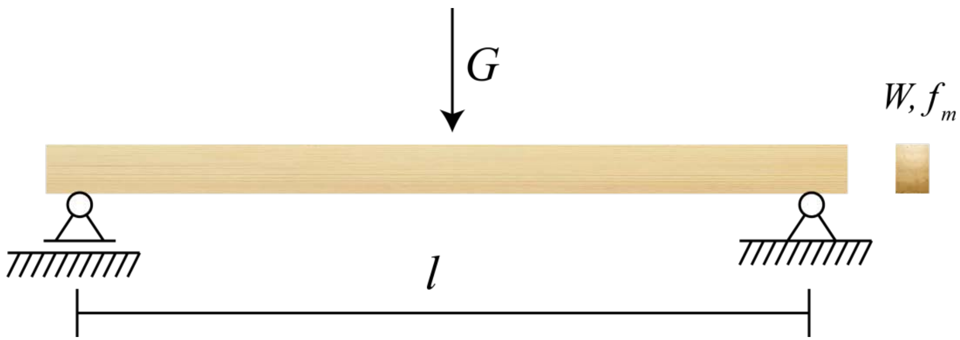
$$\boxed{f_m W = r < s = \frac{G\,l}{4}}$$

Es kann sicher zwischen Versagen und Nicht-Versagen unterschieden werden – wenn alle Einflussgrössen genau bekannt sind.

Versagen

allgemein definiert durch : Bauteilwiderstand < Bauteilbelastung

z.B. bei einem Biegeträger



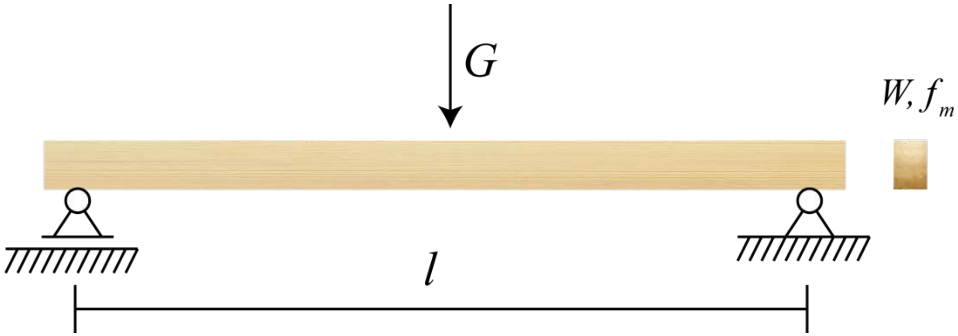
$$\boxed{f_m W = r < s = \frac{G\, l}{4}}$$

Die Einflussgrössen sind aber nie vollständig bekannt!

Versagen

allgemein definiert durch : Bauteilwiderstand < Bauteilbelastung

z.B. bei einem Biegeträger

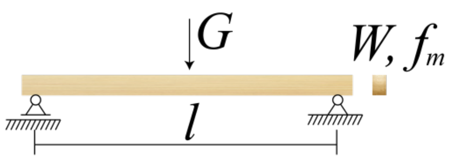


$$\boxed{f_m W = R < S = \frac{G\ l}{4}}$$

z.B. wir wissen: Träger aus Schweizer Fichte
Last G entspricht dem Gewicht einer (beliebigen) Person
$\rightarrow r$, s sind Zufallsvariablen R, S

Versagenswahrscheinlichkeit

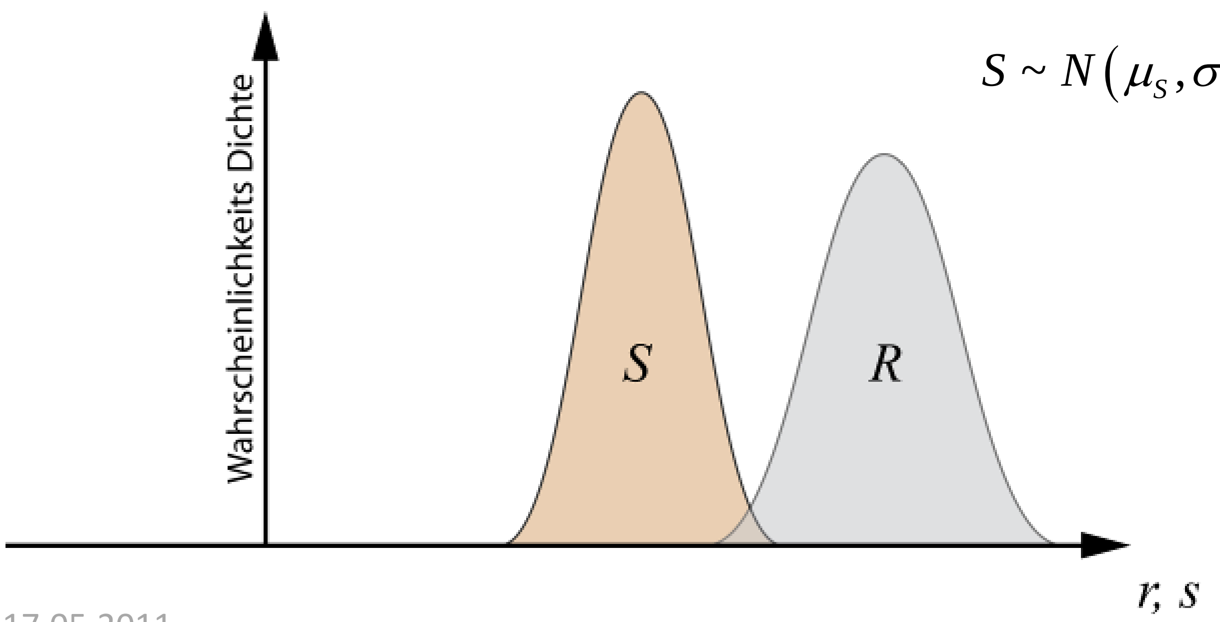
definiert durch : Wahrscheinlichkeit, dass Bauteilwiderstand < Bauteilbelastung



$$R = f_m W; \quad S = \frac{Gl}{4}$$

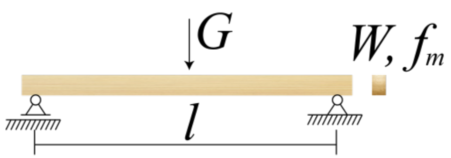
$$P_F = P(R < S) = P(R - S < 0)$$

$$S \sim N(\mu_S, \sigma_S) \quad R \sim N(\mu_R, \sigma_R)$$



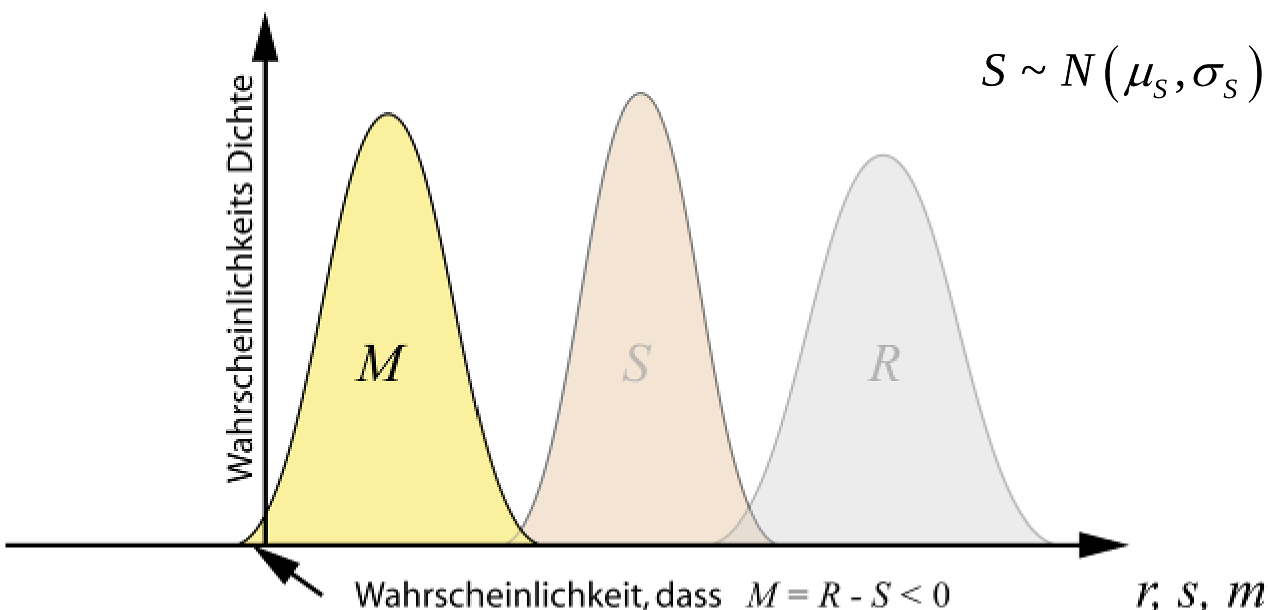
Versagenswahrscheinlichkeit

definiert durch : Wahrscheinlichkeit, dass Bauteilwiderstand < Bauteilbelastung



$$R = f_m W; \quad S = \frac{Gl}{4}$$

$$P_F = P(R < S) = P(R - S < 0)$$



$$S \sim N(\mu_S, \sigma_S) \quad R \sim N(\mu_R, \sigma_R)$$

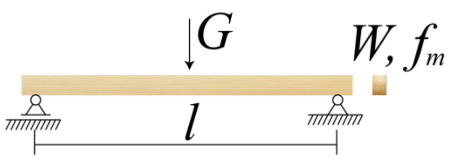
$$M \sim N(\mu_M, \sigma_M)$$

$$\mu_M = \mu_R - \mu_S$$

$$\sigma_M^2 = \sigma_R^2 + \sigma_S^2$$

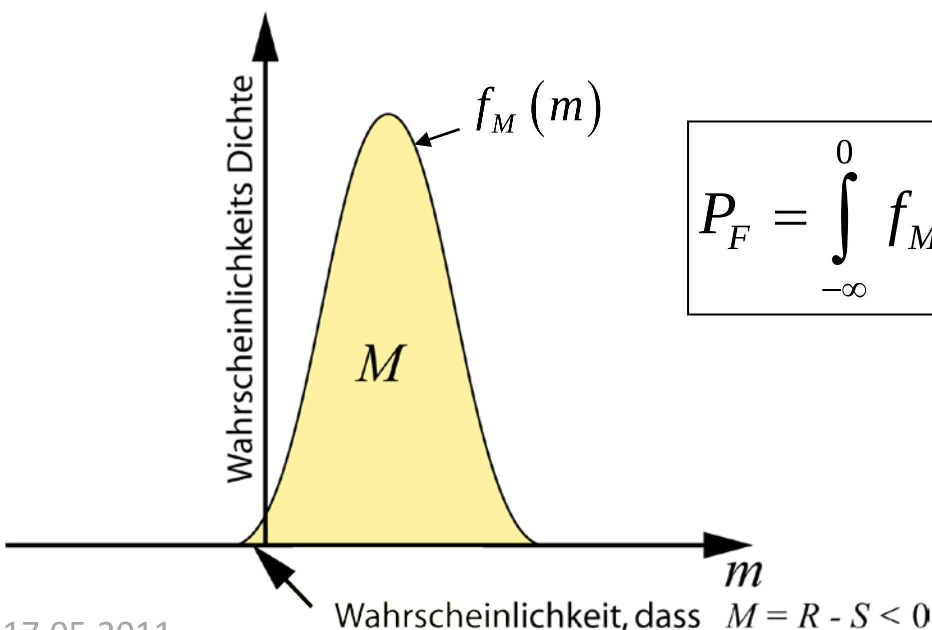
Versagenswahrscheinlichkeit

definiert durch : Wahrscheinlichkeit, dass Bauteilwiderstand < Bauteilbelastung



$$R = f_m W; \quad S = \frac{Gl}{4}$$

$$P_F = P(R < S) = P(R - S < 0) = P(M < 0)$$



$$P_F = \int_{-\infty}^{0} f_M(m)\, dm = \Phi\left(\frac{0 - \mu_M}{\sigma_M}\right) = \Phi(-\beta)$$

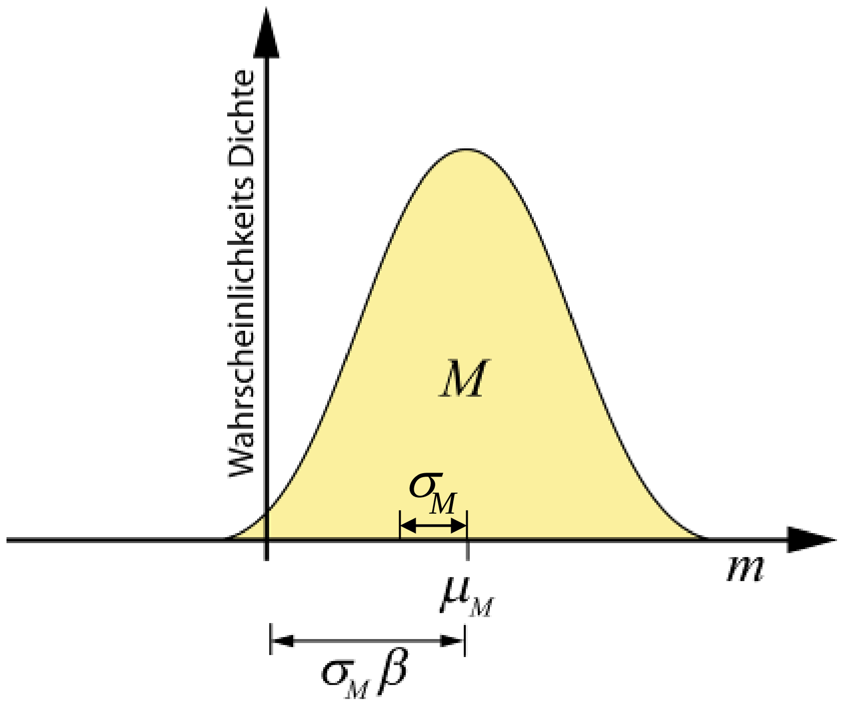
Zuverlässigkeitsindex

Zuverlässigkeitsindex

definiert durch :

$$P_F = \Phi\left(-\frac{\mu_M}{\sigma_M}\right) = \Phi(-\beta)$$

Geometrische Interpretation:

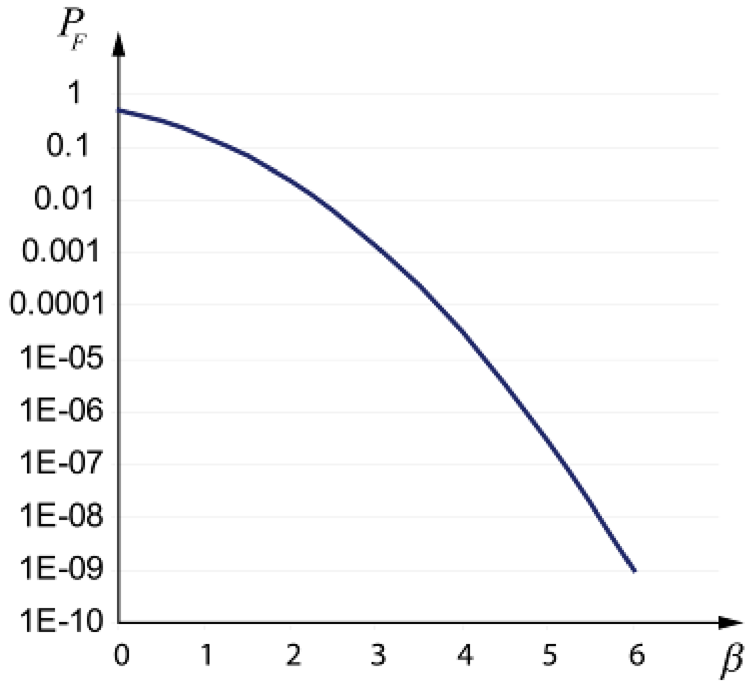


Zuverlässigkeitsindex

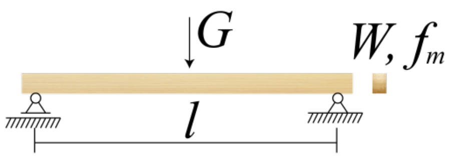
definiert durch :

$$P_F = \Phi\left(-\frac{\mu_M}{\sigma_M}\right) = \Phi(-\beta)$$

Versagenswahrscheinlichkeit vs. Index:



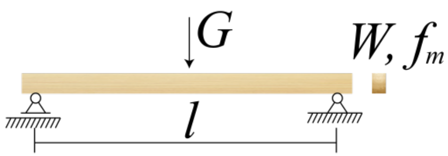
Zurück zum Beispiel:



Bemessungsproblem:

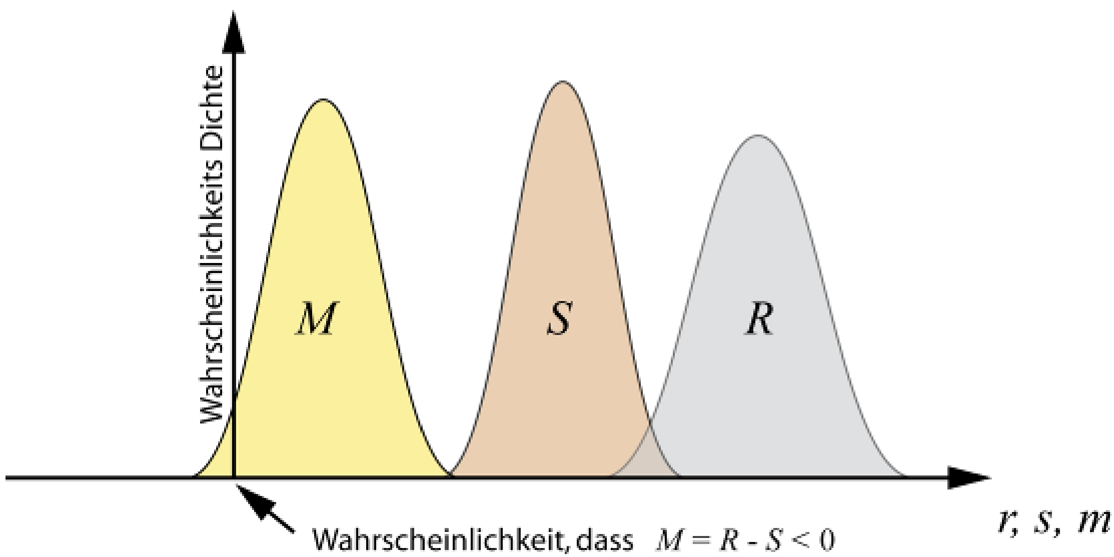
Was ist der richtige Querschnitt?

Beispiel Biegeträger:

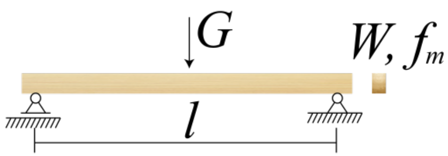


Bemessungsproblem einfach lösbar für gegebene R oder S

$\Rightarrow$ z. B. mit Variation der Bemessungsvariablen W

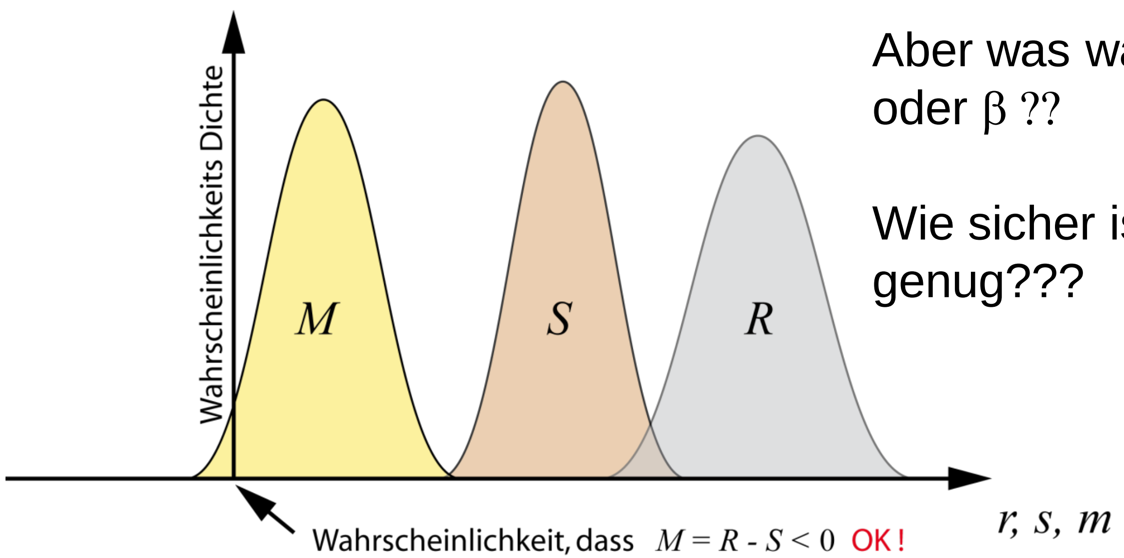


Beispiel Biegeträger:



Bemessungsproblem einfach lösbar für gegebene R oder S

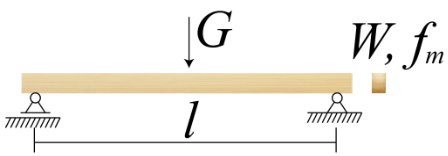
$\Rightarrow$ z. B. mit Variation der Bemessungsvariablen W

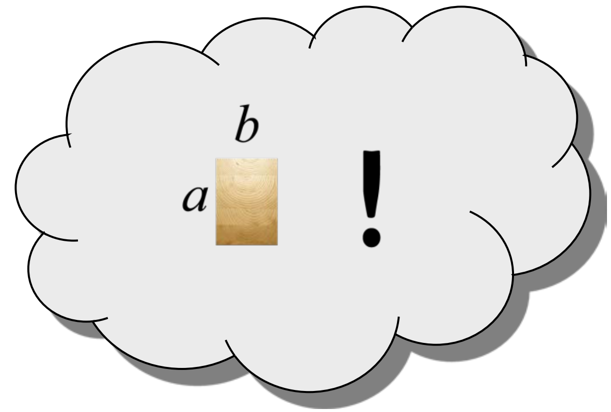


Aber was wählen wir für P_F oder β ??

Wie sicher ist sicher genug???

Beispiel Biegeträger:





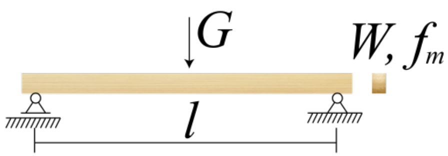
Maximierung des zu erwartenden Nutzens:

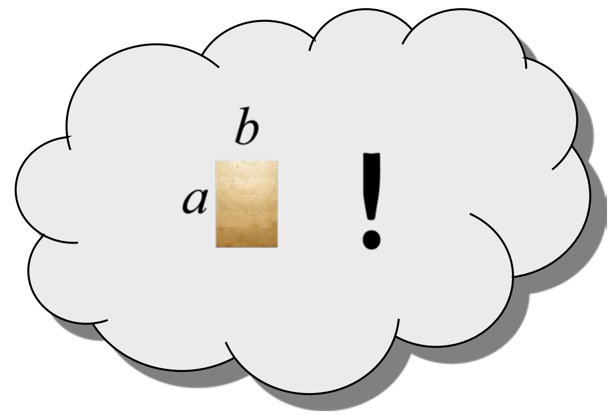
$$E[B] = I\left(1 - P_F\left(C_D\right)\right) - C_D - C_F P_F\left(C_D\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E[B]}{\partial C_D} = 0$$

$$mit \quad C_D \propto (W)$$

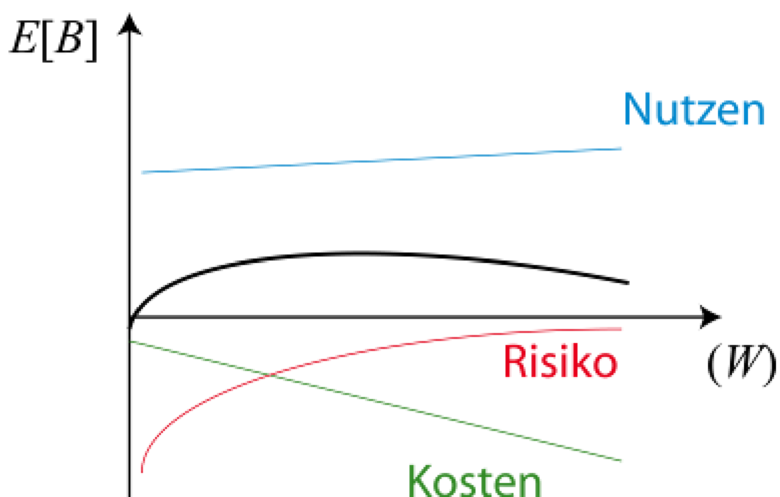
Beispiel Biegeträger:



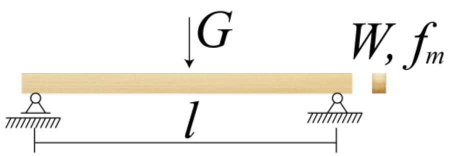


Maximierung des zu erwartenden Nutzens:

$$E[B] = I\left(1 - P_F\left(C_D\right)\right) - C_D - C_F P_F\left(C_D\right)$$



Beispiel Biegeträger:



Erforderliches Wissen zur Lösung des Optimierungsproblems:

Vernünftige Zuverlässigkeit

- Was ist der Nutzen im Betrieb?
- Was sind die Konsequenzen von Versagen?
- Was sind die Konstruktionskosten?

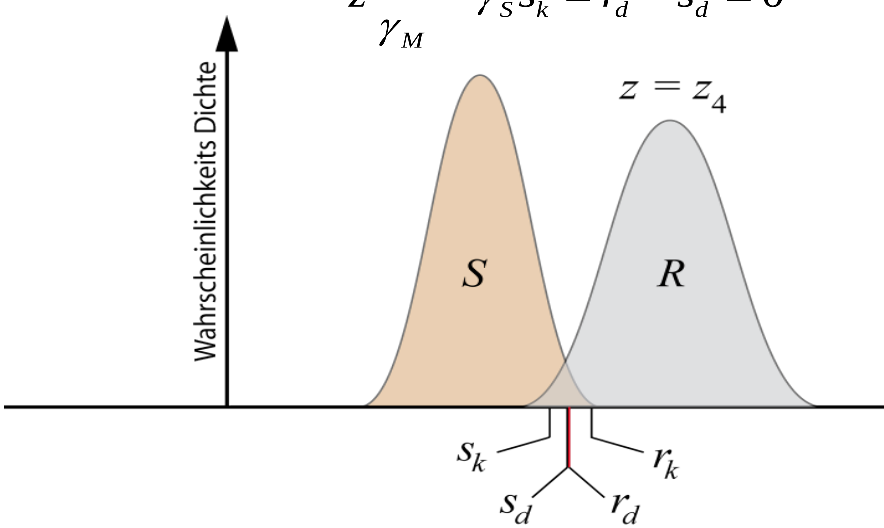
Methoden und Hinweise zur probabilistischen Modellierung

- Was ist die Versagenswahrscheinlichkeit?
  - Was ist die Versagensbedingung?
  - Wie werden die Einflussgrössen quantifiziert?
  - Wie wird die Versagenswahrscheinlichkeit errechnet?

Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Moderne Bemessungsrichtlinien sind semi-probabilistisch, d.h. die entsprechenden Bemessungslösungen lassen sich mit einer Versagenswahrscheinlichkeit in Verbindung bringen.

$$z\frac{r_k}{\gamma_M} - \gamma_S s_k = r_d - s_d = 0$$



$$r_k = \mu_R + k_R \sigma_R$$

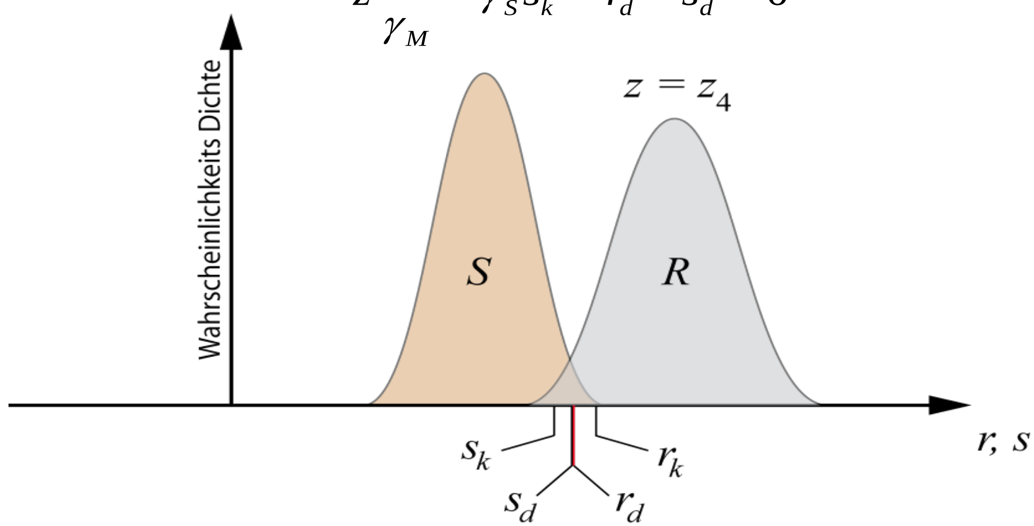
$$s_k = \mu_S + k_S \sigma_S$$

z)	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
15	1.00	0.8413	1.50	0.9332	2.00	0.9772
50	1.01	0.8438	1.51	0.9345	2.10	0.9821356
85	1.02	0.8461	1.52	0.9357	2.20	0.9860966
19	1.03	0.8485	1.53	0.9370	2.30	0.9892759
54	1.04	0.8508	1.54	0.9382	2.40	0.9918025
88	1.05	0.8531	1.55	0.9394	2.50	0.9937903
23	1.06	0.8554	1.56	0.9406	2.60	0.9953388
57	1.07	0.8577	1.57	0.9418	2.70	0.9965330
90	1.08	0.8599	1.58	0.9429	2.80	0.9974449
24	1.09	0.8621	1.59	0.9441	2.90	0.9981342
57	1.10	0.8643	1.60	0.9452	3.00	0.9986501
91	1.11	0.8665	1.61	0.9463	3.10	0.9990324
24	1.12	0.8686	1.62	0.9474	3.20	0.9993129
57	1.13	0.8708	1.63	0.9484	3.30	0.9995166
89	1.14	0.8729	1.64	0.9495	3.40	0.9996631
22	1.15	0.8749	1.65	0.9505	3.50	0.9997674
54	1.16	0.8770	1.66	0.9515	3.60	0.9998409
86	1.17	0.8790	1.67	0.9525	3.70	0.9998922

Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Moderne Bemessungsrichtlinien sind semi-probabilistisch, d.h. die entsprechenden Bemessungslösungen lassen sich mit einer Versagenswahrscheinlichkeit in Verbindung bringen.

$$z\frac{r_k}{\gamma_M} - \gamma_S s_k = r_d - s_d = 0$$



$$r_k = \mu_R + k_R \sigma_R$$

$$s_k = \mu_S + k_S \sigma_S$$

$$k_R = \Phi^{-1}(0.05) = -1.645$$

$$k_S = \Phi^{-1}(0.98) = 2.054$$

Klassische Konzepte:

$$v_0 = \frac{\mu_R}{\mu_S}$$

$$v = \frac{r_k}{s_k}$$

Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Lineare Grenzzustandsfunktion und normalverteilte Zufallsvariablen

$$g(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

Sind die Zufallsvariablen normalverteilt, dann ist die so genannte *Sicherheitsmarge M* auch normalverteilt.

$$M = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \qquad \mu_M = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_{X_i}$$

Korrelationskoeffizient

$$\sigma_M^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_{X_i}^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \rho_{ij} a_i a_j \sigma_{X_i} \sigma_{X_j}$$

Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Lineare Grenzzustandsfunktion und normalverteilte Zufallsvariablen

Die Versagenswahrscheinlichkeit ist dann:

$$P_F = P(g(\mathbf{X}) \leq 0) = P(M \leq 0)$$

Welche sich direkt mit der Standard-Normalverteilung errechnen lässt:

$$P_F = \Phi\left(\frac{0-\mu_M}{\sigma_M}\right) = \Phi(-\beta) \qquad \text{mit} \qquad \beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M}$$

Zuverlässigkeits- oder Sicherheitsindex

Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Invarianzproblem

- Für den einfachen Fall mit zwei Variablen (Widerstand und Einwirkung) lassen sich alternative Grenzzustände definieren.

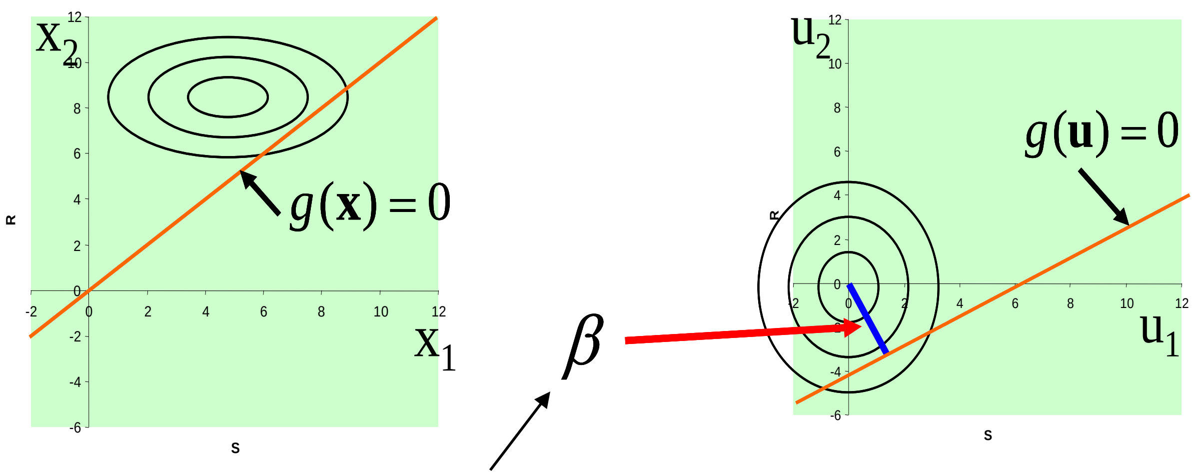
$$M = R - S \qquad\qquad M = \ln\frac{R}{S} = \ln R - \ln S$$

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \qquad\qquad \beta' = \frac{\mu_{\ln(R/S)}}{\sigma_{\ln(R/S)}} \cong \frac{\ln\mu_R - \ln\mu_s}{\sqrt{V_R^2 + V_S^2}}$$

Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Lineare Grenzzustandsfunktion und normalverteilte Zufallsvariablen

  Der Sicherheitsindex β hat eine geometrische Interpretation



$$U_i = \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}}$$

Kürzeste Distanz zwischen dem Ursprung und der Grenzzustandsfunktion im standardisierten normalverteilten Raum.

Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Nicht lineare Grenzzustandsfunktionen

  Grenzzustandsfunktionen sind oft nicht-linear

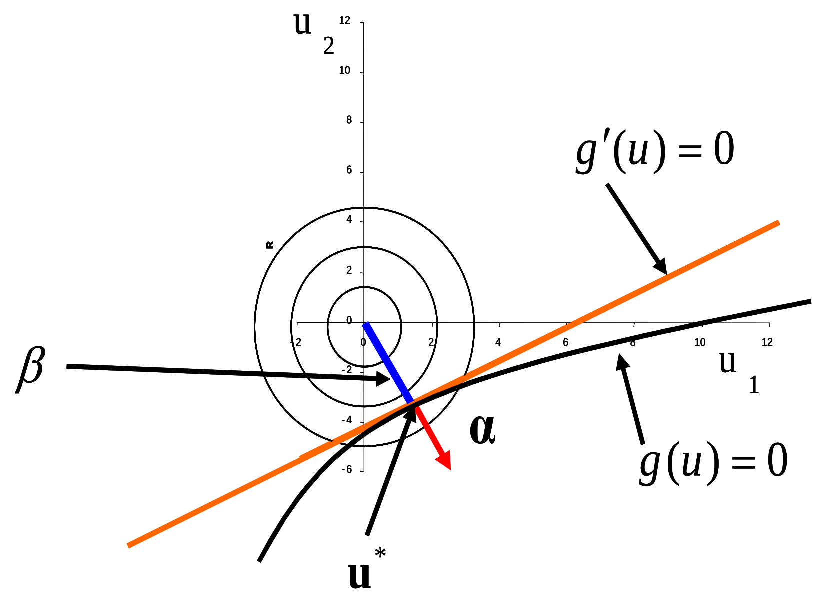
  Es ist möglich solche Grenzzustandsfunktionen zu Linearisieren. Das Resultat hängt jedoch vom Linearisierungs-Punkt und von der Formulierung der Grenzzustandsfunktion ab.

Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Nicht lineare Grenzzustandsfunktionen

  Grenzzustandsfunktionen sind oft nicht-linear

Hasofer und Lind empfehlen im Punkt zu Linearisieren, in dem die Grenzzustands-funktion Null ist und der am nächsten zum Ursprung im standardisierten Normalraum ist.

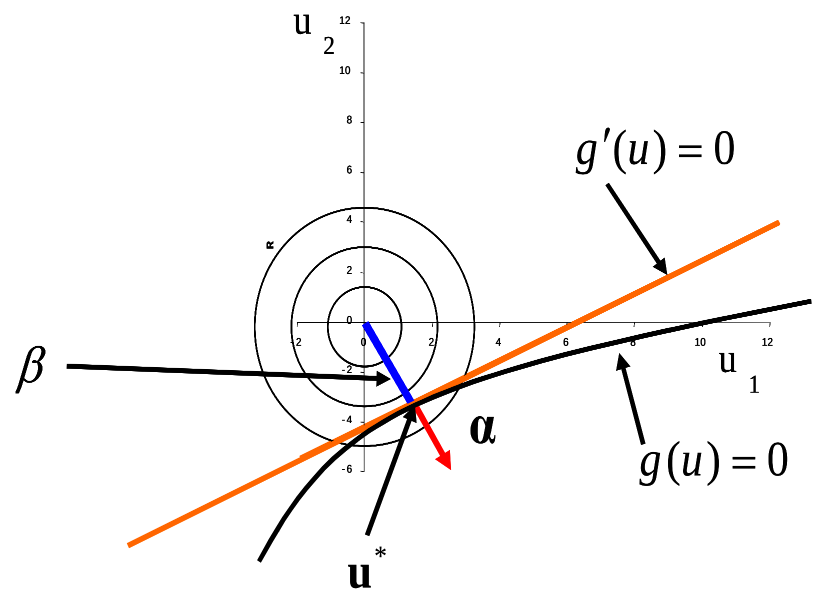


Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Nicht lineare Grenzzustandsfunktionen

Die Identifizierung des Zuverlässigkeitsindexes β kann als Optimierungsproblem gelöst werden:

$$\beta = \min_{\mathbf{u} \in \{g(\mathbf{u})=0\}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$$



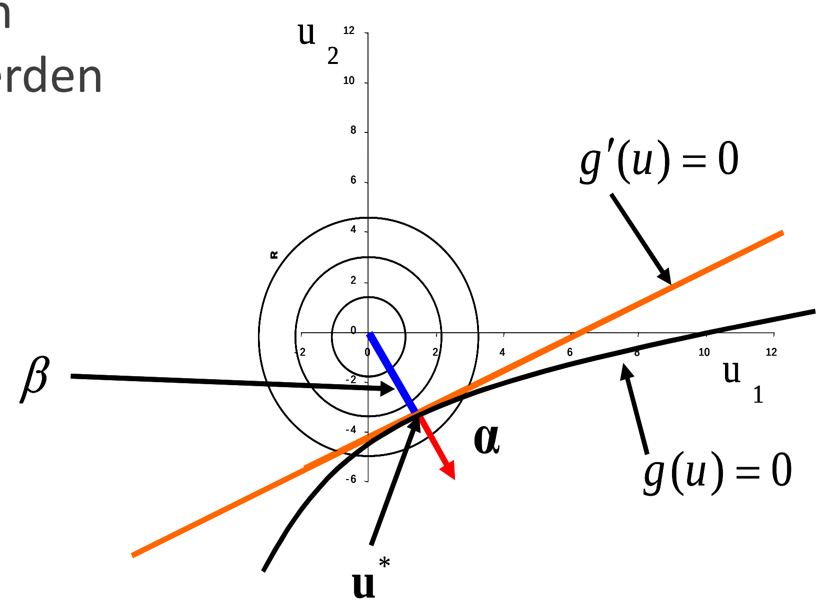
Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Nicht lineare Grenzzustandsfunktionen

Das Optimierungsproblem kann durch folgendes Iterationsschema gelöst werden

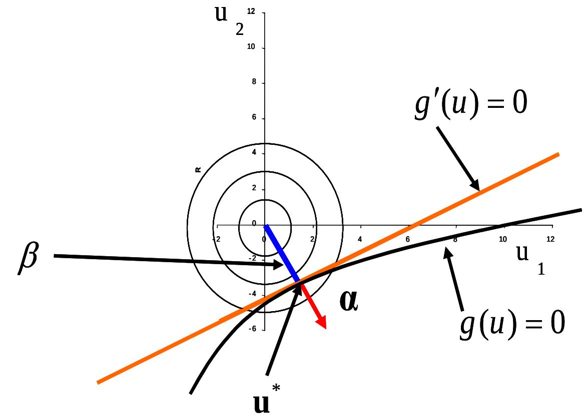
$$\alpha_i = \frac{-\dfrac{\partial g}{\partial u_i}(\beta \boldsymbol{\alpha})}{\left[\sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial g}{\partial u_i}(\beta \boldsymbol{\alpha})^2\right]^{1/2}}, \quad i = 1, 2, ..n$$

$$g(\beta\alpha_1, \beta\alpha_2, ...\beta\alpha_n) = 0$$



Vorausgesetzt die Grenzzustandsfunktion ist differenzierbar!

Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse



Iterationsschritte:

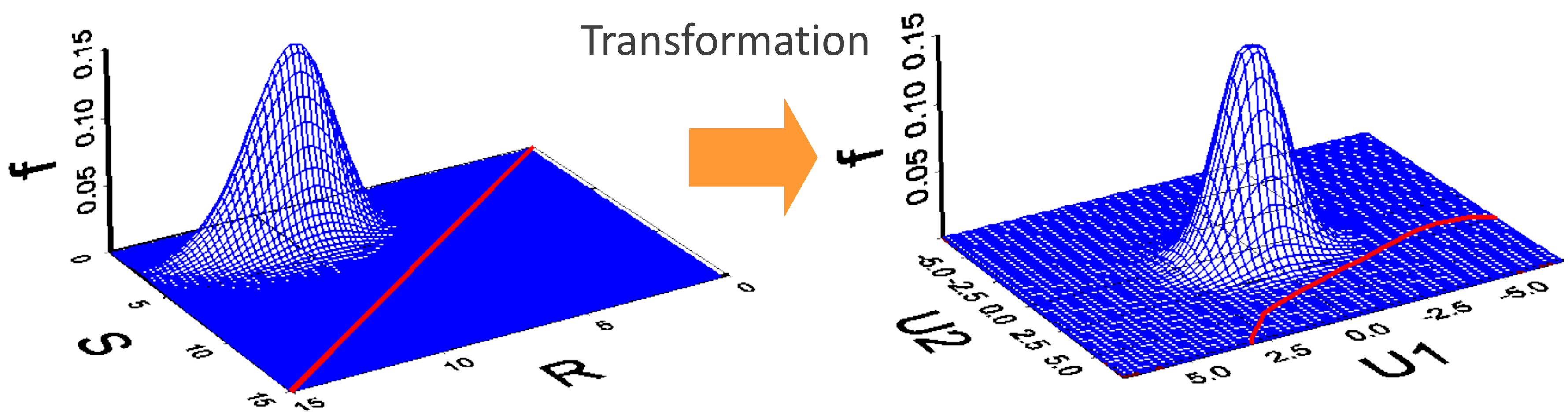
1. Der Linearisierungspunkt wird gewählt als $u^* = \beta \cdot \alpha$
2. Der Normalvektor zur Grenzzustandsfunktion wird um den Linearisierungspunkt ermittelt

$$\alpha_i = \frac{-\dfrac{\partial g}{\partial u_i}(\beta\boldsymbol{\alpha})}{\left[\sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial g}{\partial u_i}(\beta\boldsymbol{\alpha})^2\right]^{1/2}}, \quad i = 1,2,..n$$

3. Der Zuverlässigkeitsindex β wird berechnet von $g(\beta\alpha_1, \beta\alpha_2, \ldots \beta\alpha_n) = 0$
4. Der neue Linearisierungspunkt ist $u^* = \left(\beta\alpha_1, \beta\alpha_2, \ldots \beta\alpha_n\right)^T$
5. Wiederhole ab Schritt 2) bis Konvergenz in β

Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Nicht lineare Sicherheitsmarge



$g(Z)$: Linear

$\mu_{Z_1}, \mu_{Z_2} \in R$

$\sigma_{Z_1}, \sigma_{Z_2} \in R$

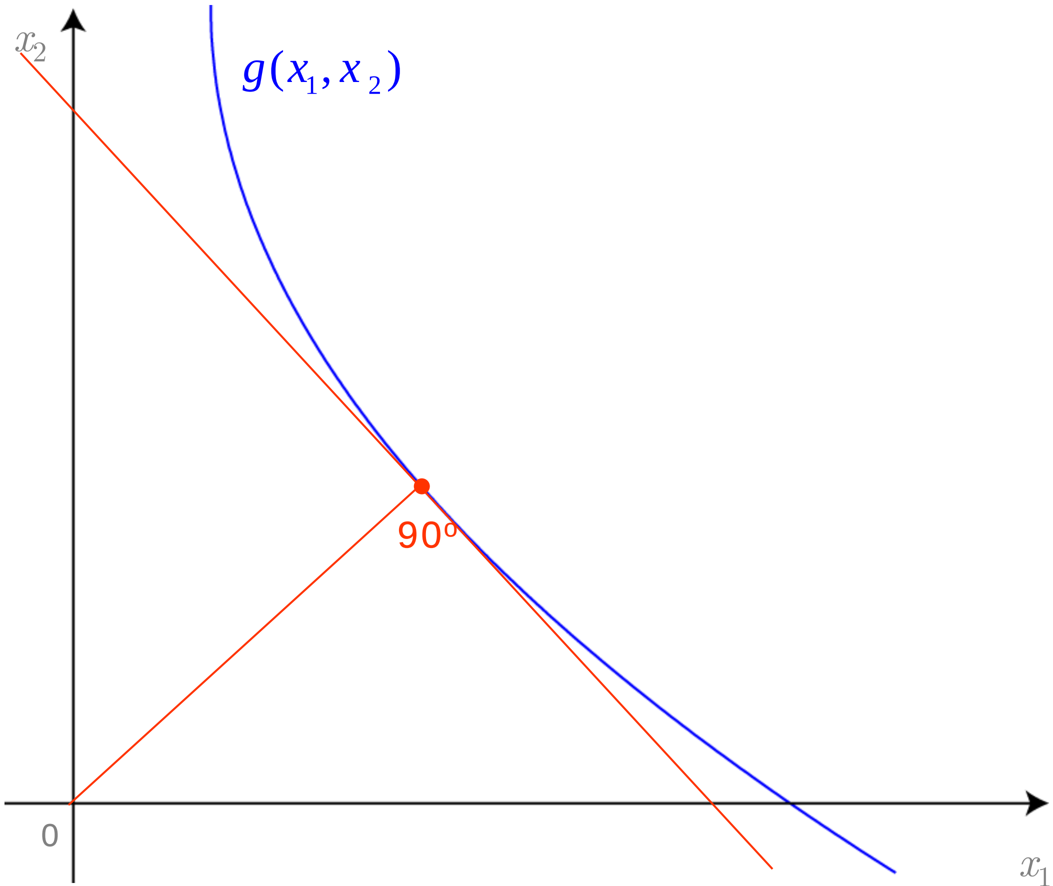
$g(U)$: Nicht linear

$\mu_{Z_1} = \mu_{Z_2} = 0$

$\sigma_{Z_1} = \sigma_{Z_2} = 1$

FORM

First Order Reliability Methods (FORM)
Iterative Bestimmung des Punktes mit geringstem Abstand. Verständnis grafisch:



Wo ist der nächste Punkt?

Bemerkung:

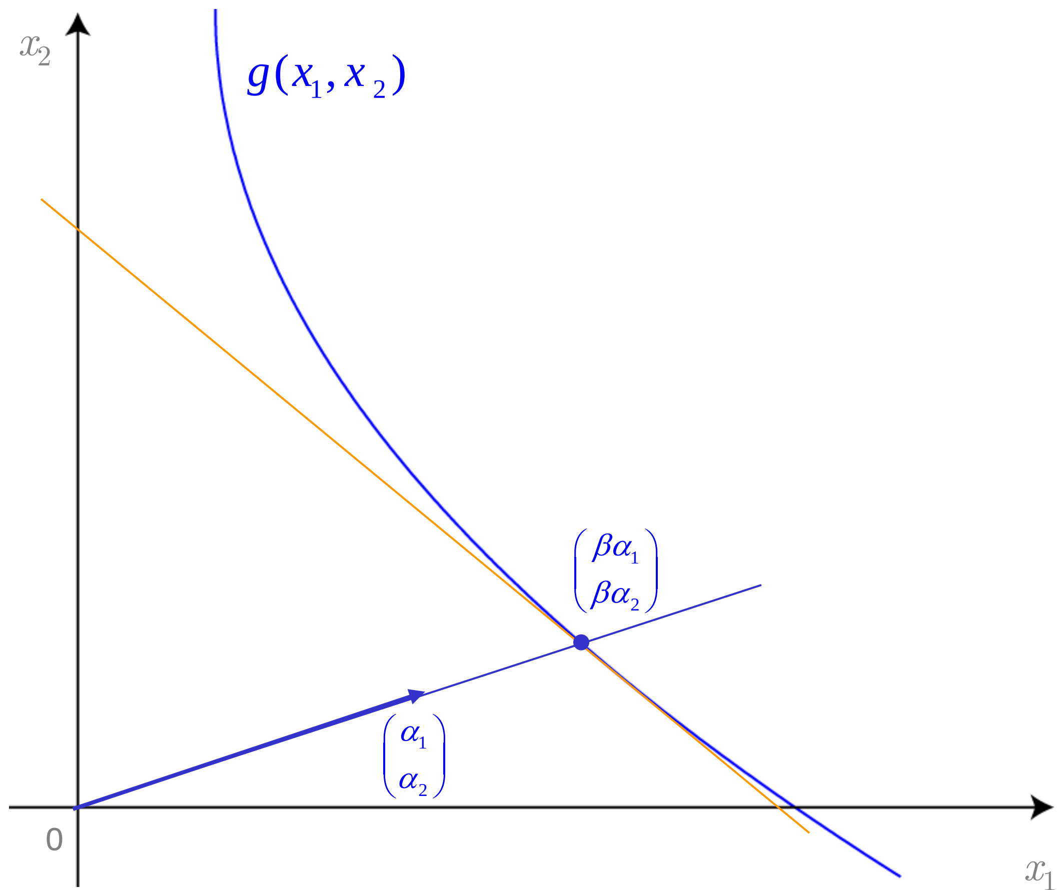
$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

und β erhält man durch:

$$g(\beta\alpha_1, \beta\alpha_2) = 0$$

FORM

First Order Reliability Methods (FORM)
Iterative Bestimmung des Punktes mit geringstem Abstand. Verständnis grafisch:



Wo ist der nächste Punkt?

Bemerkung:

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}\dfrac{\partial g}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial g}{\partial x_2}\end{pmatrix}$$

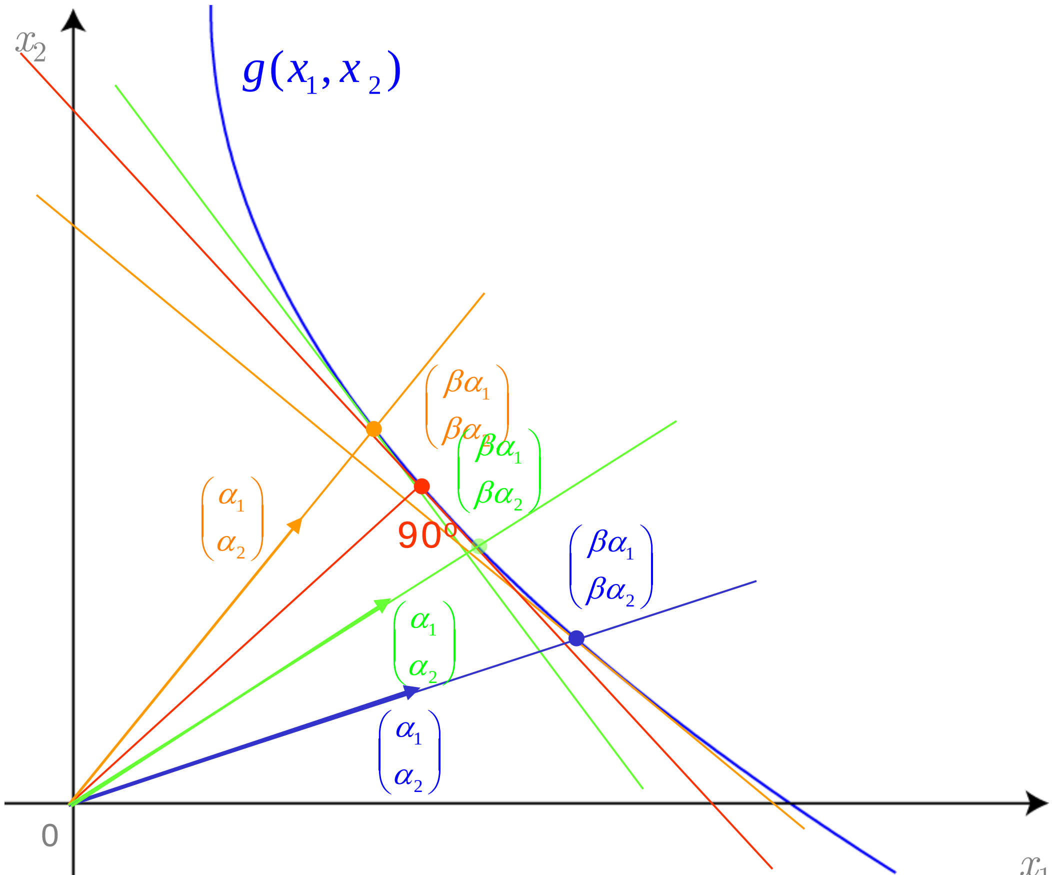
und β erhält man durch:

$$g(\beta\alpha_1, \beta\alpha_2) = 0$$

FORM

First Order Reliability Methods (FORM)

Iterative Bestimmung des Punktes mit geringstem Abstand. Verständnis grafisch:



Wo ist der nächste Punkt?

Bemerkung:

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}\dfrac{\partial g}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial g}{\partial x_2}\end{pmatrix}$$

und β erhält man durch:

$$g(\beta\alpha_1, \beta\alpha_2) = 0$$

Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Beispiel: Zuverlässigkeit eines Stahlstabes

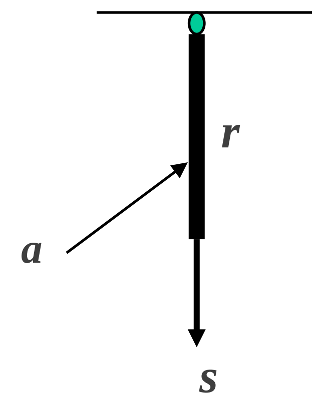
Grenzzustandsfunktion

Fliessgrenze

$$g(\mathbf{x}) = r \cdot a - s$$

Beanspruchung

Querschnittfläche



Es wird angenommen, dass R, S und A normal verteilte Zufallsvariablen sind:

$$U_R = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R} \qquad U_S = \frac{S - \mu_S}{\sigma_S} \qquad U_A = \frac{A - \mu_A}{\sigma_A}$$

$$\mu_R = 350, \sigma_R = 35$$

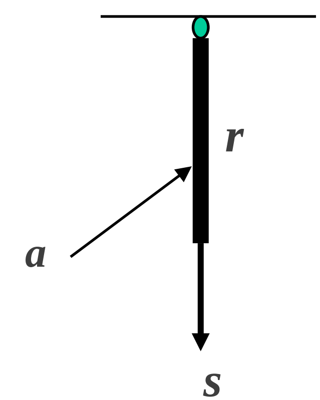
$$\mu_S = 1500, \sigma_S = 300$$

$$\mu_A = 10, \sigma_A = 2$$

Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Beispiel: Zuverlässigkeit eines Stahlstabes

Wir können nun die Grenzzustandsfunktion mit der Variable u ausdrücken



$$g(u) = \overset{\boldsymbol{r}}{(u_R\sigma_R + \mu_R)}\overset{\boldsymbol{a}}{(u_A\sigma_A + \mu_A)} - \overset{\boldsymbol{s}}{(u_S\sigma_S + \mu_S)}$$

$$= (35u_R + 350)(u_A + 10) - (300u_S + 1500)$$
$$= 350u_R + 350u_A - 300u_S + 35u_R u_A + 2000$$

Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Beispiel: Zuverlässigkeit eines Stahlstabes

Der Zuverlässigkeitsindex β kann mittels Iteration ermittelt werden:

$$\alpha_R = -\frac{1}{k}(350 + 35\beta\alpha_A)$$

$$\alpha_A = -\frac{1}{k}(350 + 35\beta\alpha_R)$$

$$\alpha_S = \frac{300}{k}$$

$$k :: \sqrt{\alpha_R^2 + \alpha_A^2 + \alpha_S^2} \overset{!}{=} 1$$

$$\alpha_i = \frac{-\frac{\partial g}{\partial u_i}(\beta\boldsymbol{\alpha})}{\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial u_i}(\beta\boldsymbol{\alpha})^2\right]^{1/2}}, \quad i = 1, 2, ..n$$

$$\beta = \frac{-2000}{350\alpha_R + 350\alpha_A - 300\alpha_S + 35\beta\alpha_R\alpha_A}$$

$$g(\beta\alpha_1, \beta\alpha_2, ...\beta\alpha_n) = 0$$

Iteration	Start	1	2	3	4	5
β	3.0000	3.6719	3.7399	3.7444	3.7448	3.7448
α_R	-0.5800	-0.5701	-0.5612	-0.5611	-0.5610	-0.5610
α_A	-0.5800	-0.5701	-0.5612	-0.5611	-0.5610	-0.5610
α_S	0.5800	0.5916	0.6084	0.6086	0.6087	0.6087

$$g(u) = (u_R\boldsymbol{\sigma}_R + \boldsymbol{\mu}_R)(u_A\boldsymbol{\sigma}_A + \boldsymbol{\mu}_A) - (u_S\boldsymbol{\sigma}_S + \boldsymbol{\mu}_S)$$

$$= (35u_R + 350)(u_A + 10) - (300u_S + 1500)$$

$$= 350\mathrm{u}_R + 350u_A - 300u_S + 35u_Ru_A + 2000$$

Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

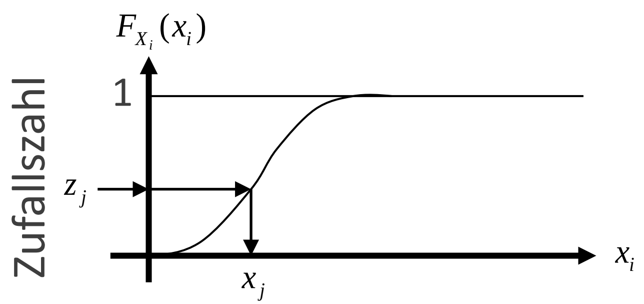
- Monte Carlo Simulation

  Lösung des Integrationsproblems:

$$P_f = \int_{\Omega_f = \{g(\mathbf{x}) \le 0\}} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

1. m Realisationen des Vektors X *werden erzeugt*
2. Für jede Realisation wird die Grenzzustandsfunktion berechnet
3. Die Realisationen für welche die Grenzzustandsfunktion null oder weniger ist werden gezählt n_f
4. Die Versagenswahrscheinlichkeit wird geschätzt mit

$$p_f = \frac{n_f}{m}$$



Z ist eine Zufallszahl gleichmässig zwischen 0 und 1 verteilt.

Grundzüge der Zuverlässigkeitsanalyse

- Monte Carlo Simulation

  m zufällige Realisationen von R und S werden generiert und die Anzahl der Realisationen n_f im Versagensraum werden gezählt.

  Die Versagenswahrscheinlichkeit p_f ist dann gegeben durch:

$$p_f = \frac{n_f}{m}$$