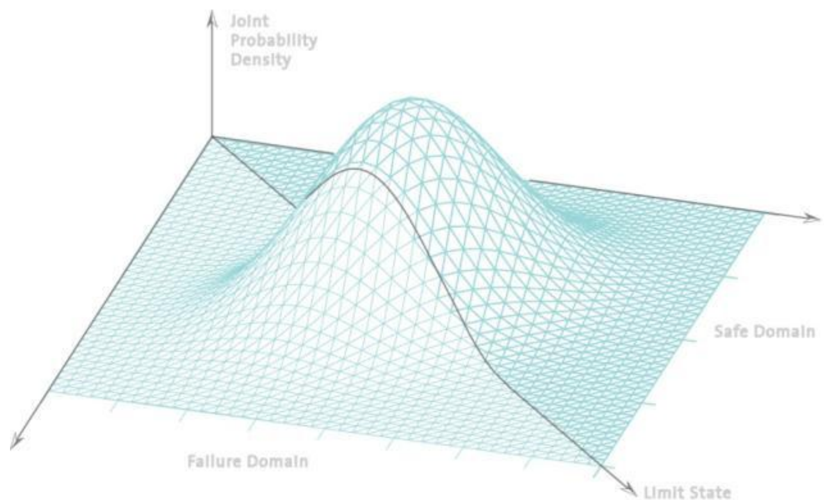


Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Dr. Jochen Köhler

Testatprüfung am Donnerstag 5.Mai

Wann?

Donnerstag, 5. Mai, 8:00 Uhr

Dauer der Prüfung: 60 min

Wo?

- Nachnamen A-C: HPH G3
- Nachnamen D-O: HCI G3
- Nachnamen P-Z: HIL E4

Testatprüfung am Donnerstag 5.Mai

Inhalt

60 min. Multiple Choice

Gesamter Stoff bis einschliesslich Vorlesung 9 und Übung 9.

Hilfsmittel

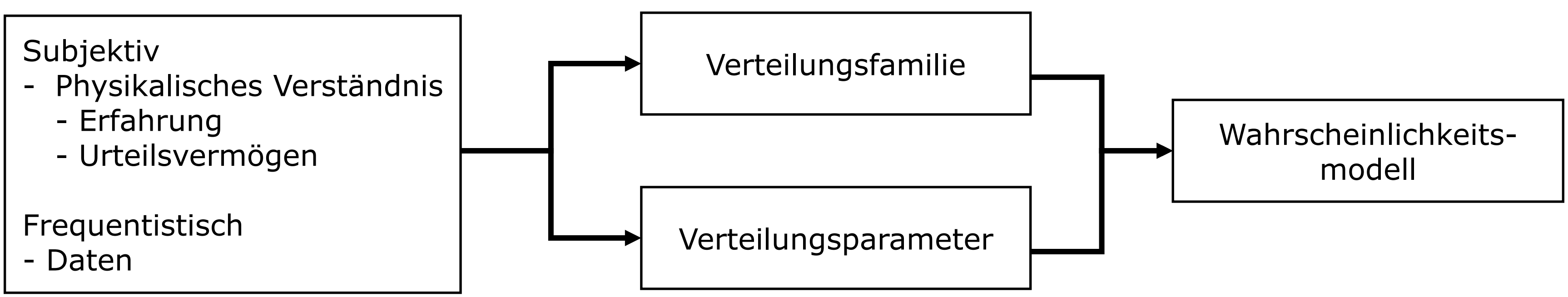
Eine DIN A4 Seite doppelseitig Formelsammlung erlaubt.

Keine weiteren Hilfsmittel erlaubt!

Übersicht: Abschätzung und Modellerstellung

Verschiedene Informationstypen werden bei der Entwicklung eines Ingenieurmodells verwendet.

- subjektive Information
- frequentistische Information



Parameterschätzung für Stichproben

Wenn neue Daten verfügbar sind, ist der erste Schritt, diese zu beurteilen.

Daten/Beobachtungen

n	x_n	$F_X(x_n)$
1	24.4	0.047619048
2	27.6	0.095238095
3	27.8	0.142857143
4	27.9	0.19047619
5	28.5	0.238095238
6	30.1	0.285714286
7	30.3	0.333333333
8	31.7	0.380952381
9	32.2	0.428571429
10	32.8	0.476190476
11	33.3	0.523809524
12	33.5	0.571428571
13	34.1	0.619047619
14	34.6	0.666666667
15	35.8	0.714285714
16	35.9	0.761904762
17	36.8	0.80952381
18	37.1	0.857142857
19	39.2	0.904761905
20	39.7	0.952380952

→ Mittelwert

→ Varianz

→ Median

→

→ Usw..

Funktion von Stichproben

Stichproben Charakteristik

oder

Stichproben Statistik

Parameterschätzung für Stichproben

Beispiel: Körpergewicht der Studierenden.

	1. Probe
	G [kg]
1	75
2	75
3	80
4	72
5	84
6	90
7	55
8	85
9	69
10	70

Mittelwert	75.5
Standardabweichung	8.99

Parameterschätzung für Stichproben

Beispiel: Körpergewicht der Studierenden.

	1. Probe	2. Probe
	G [kg]	G [kg]
1	75	65
2	75	77
3	80	68
4	72	85
5	84	71
6	90	76
7	55	79
8	85	80
9	69	75
10	70	80

Mittelwert	75.5	75.6
Standardabweichung	8.99	5.47

Parameterschätzung für Stichproben

Beispiel: Körpergewicht der Studierenden.

	1. Probe	2. Probe	3. Probe	4. Probe	5. Probe
	G [kg]	G [kg]	G [kg]	G [kg]	G [kg]
1	75	65	63	72	59
2	75	77	62	78	73
3	80	68	58	59	73
4	72	85	76	65	69
5	84	71	93	90	56
6	90	76	72	76	60
7	55	79	58	62	71
8	85	80	76	77	75
9	69	75	58	57	60
10	70	80	79	63	70

Mittelwert	75.5	75.6	69.5	69.9	66.6
Standardabweichung	8.99	5.47	10.51	9.40	6.34

Parameterschätzung für Stichproben

Die Zufallsvariable X ist beschrieben durch ihre Verteilungsfunktion.

Die Momente der Zufallsvariablen und die Parameter der Verteilungsfunktion sind konstant (aber unbekannt).

Die Stichproben sind Realisationen der Zufallsvariable X :

$X_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$

Diese sind variabel. So auch die Stichproben-Statistiken.

Die Momente der Stichproben wie der Stichprobenmittelwert und die Stichprobenvarianz sind Zufallsvariablen!

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad\qquad S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

Parameterschätzung für Stichproben

Die Stichprobenstatistiken sind Zufallsvariablen, solange die Ergebnisse des Experiments noch nicht realisiert sind.

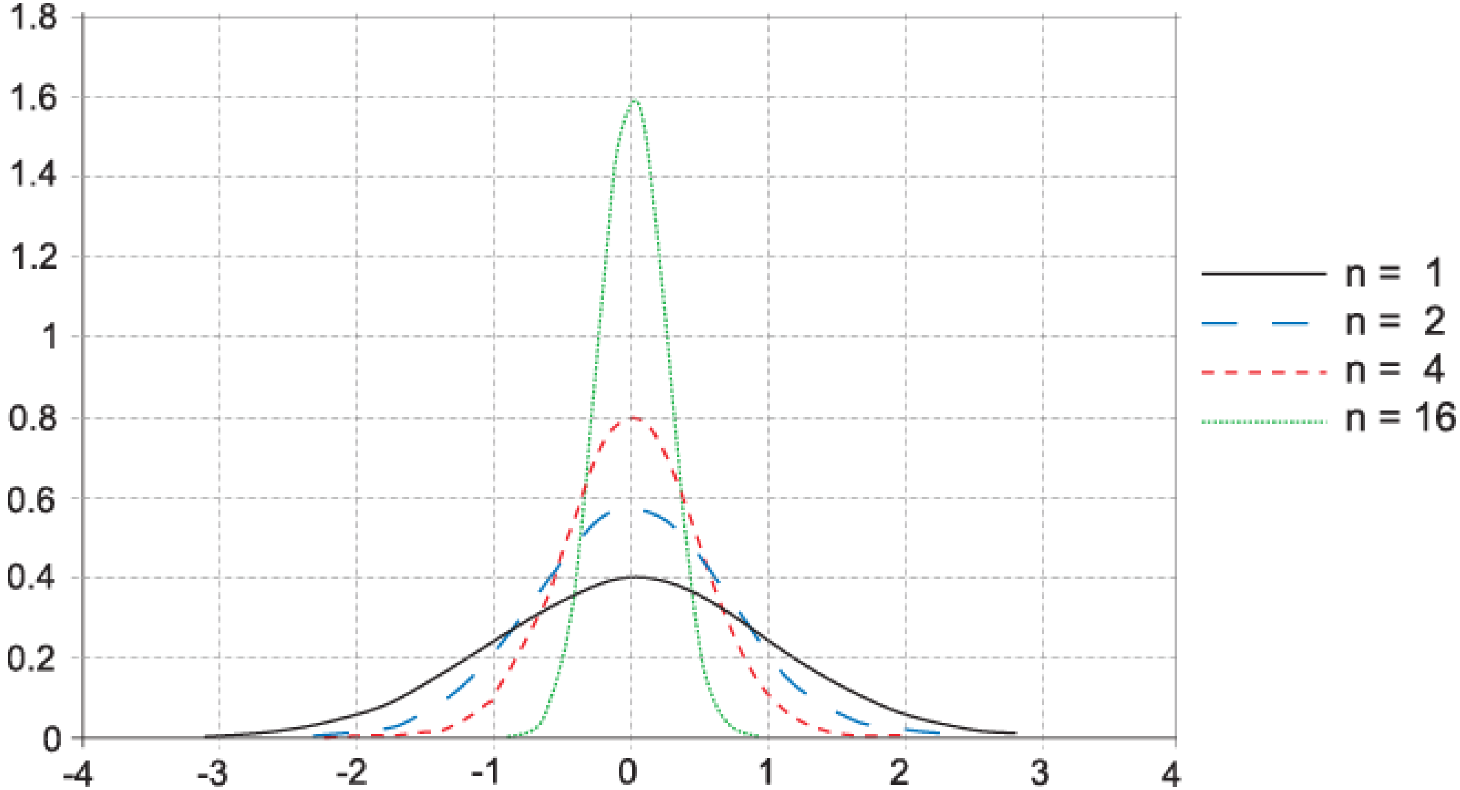
Der Erwartungswert und die Varianz des Stichprobenmittelwertes können folgendermassen bestimmt werden:

$$E\left[\bar{X}\right] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left[X_i\right] = \frac{1}{n} n \cdot \mu_X = \mu_X$$

$$Var\left[\bar{X}\right] = Var\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2} Var\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var\left[X_i\right] = \frac{1}{n}\sigma_X^2$$

Parameterschätzung für Stichproben

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für den Stichprobenmittelwert kann als eine Normalverteilung angenommen werden – Zentraler Grenzwertsatz.



Parameterschätzung für Stichproben

Für die Stichprobenvarianz erhalten wir:

$$E\left[S^2\right] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right] = \frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n}((X_i-\mu)-(\bar{X}-\mu))^2\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} E\left[(X_i-\mu)^2\right] - n\,E\left[(\bar{X}-\mu)^2\right]\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(n\cdot E\left[(X_i-\mu)^2\right] - n\,E\left[(\bar{X}-\mu)^2\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(n\cdot\sigma_X^2 - n\frac{\sigma_X^2}{n}\right)$$

$$= \sigma_X^2 - \frac{1}{n}\sigma_X^2 = \frac{(n-1)}{n}\sigma_X^2$$

Der Erwartungswert der Stichprobenvarianz ist nicht gleich der Varianz der Zufallsvariablen – verzerrt, nicht erwartungstreu (biased).

Parameterschätzung für Stichproben

Wir können nun einfach erwartungstreue / unverzerrte (unbiased) Schätzer für die Varianz bestimmen:

$$S^2_{unbiased} = \frac{n}{n-1} S^2$$

$$= \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

Konfidenzintervalle für Schätzer

- Vorhergehend haben wir gesehen, dass Schätzer z.B. des Mittelwertes mit Unsicherheiten assoziiert sind, und wir haben Ausdrücke erstellt, um ihren Mittelwert und ihre Varianz zu bestimmen.
- Basierend auf diesen Informationen ist es uns möglich das sogenannte Konfidenzintervall der Schätzer zu bestimmen.
- Konfidenzintervalle können als Intervalle verstanden werden, innerhalb welcher z.B. der Mittelwert mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit gefunden werden kann.

Konfidenzintervalle für Schätzer

Wir können ein Konfidenzintervall z.B. für den Mittelwert erstellen.

Für den Fall, dass der Mittelwert unsicher und die Varianz bekannt ist:

Aufgrund von n Beobachtungen lässt sich der Mittelwert schätzen, als (normalverteilte) Zufallsvariable mit Mittelwert gleich $\bar{X}$ und Standardabweichung $\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Durch Transformation erhalten wir die Standardnormal-verteilte Zufallsvariable

$$\frac{\bar{X} - \mu_X}{\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}}}$$

Konfidenzintervalle für Schätzer

Das zweiseitige und symmetrische Konfidenzintervall des Mittelwertes ist gegeben durch:

Stichprobenmittelwert

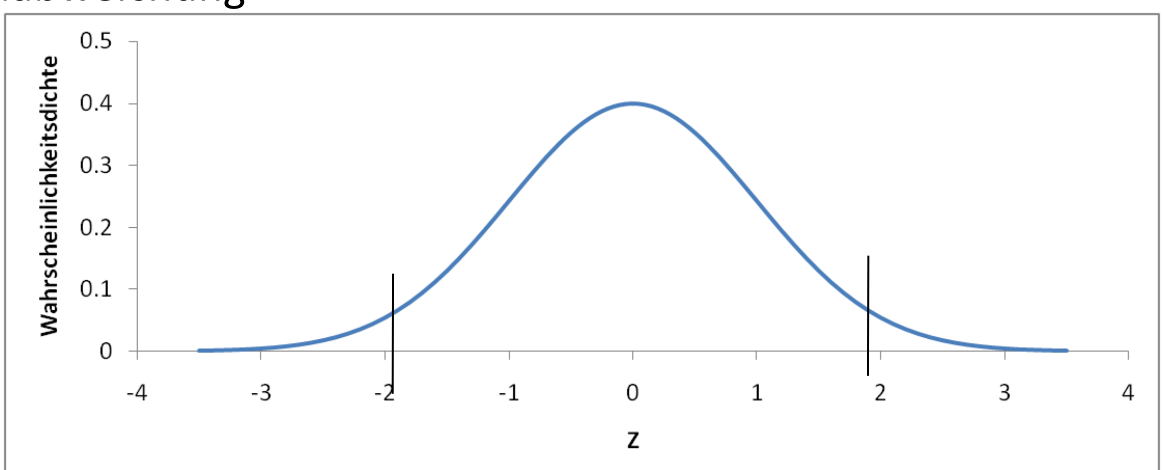
wahrer Mittelwert

$$P\left[-k_{\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu_X}{\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}}} < k_{\alpha/2}\right] = P\left[-k_{\alpha/2}\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}} < \bar{X}-\mu_X < k_{\alpha/2}\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

bekannte Standardabweichung

Anzahl Stichproben

Signifikanzniveau



Konfidenzintervalle für Schätzer

Das Konfidenzintervall definiert ein Intervall, in dem der Stichprobenmittelwert mit der Wahrscheinlichkeit 1-α liegt.

$$P\left[-k_{\alpha/2}\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu_X < k_{\alpha/2}\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

Bekannte Standardabweichung

Stichproben Mittelwert

Wahrer Mittelwert

Anzahl Stichproben

Das Konfidenzintervall kann, durch die Annahme, dass der Mittelwert normalverteilt ist, wie folgt bestimmt werden:

$$k_{\alpha/2} = \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = \Phi^{-1}\left(1-\frac{0.05}{2}\right) = 1.96$$

Konfidenzintervalle für Schätzer

Für den Fall, dass $\alpha = 0.05$, $n = 16$ und $\sigma_X = 20$ erhalten wir

$$P\left[-1.96 < \frac{\bar{X} - \mu_X}{20\dfrac{1}{\sqrt{n}}} < 1.96\right] = 1 - 0.05$$

$$P\left[-9.8 < \bar{X} - \mu_X < 9.8\right] = 0.95$$

Konfidenzintervalle für Schätzer

- Wenn wir beobachten, dass der Stichprobenmittelwert z.B. gleich 400 ist, wissen wir, dass der wahre Mittelwert mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.95 innerhalb des Intervalles liegt.

$$P\left[-9.8 < \overline{X} - \mu_X < 9.8\right] = 0.95$$

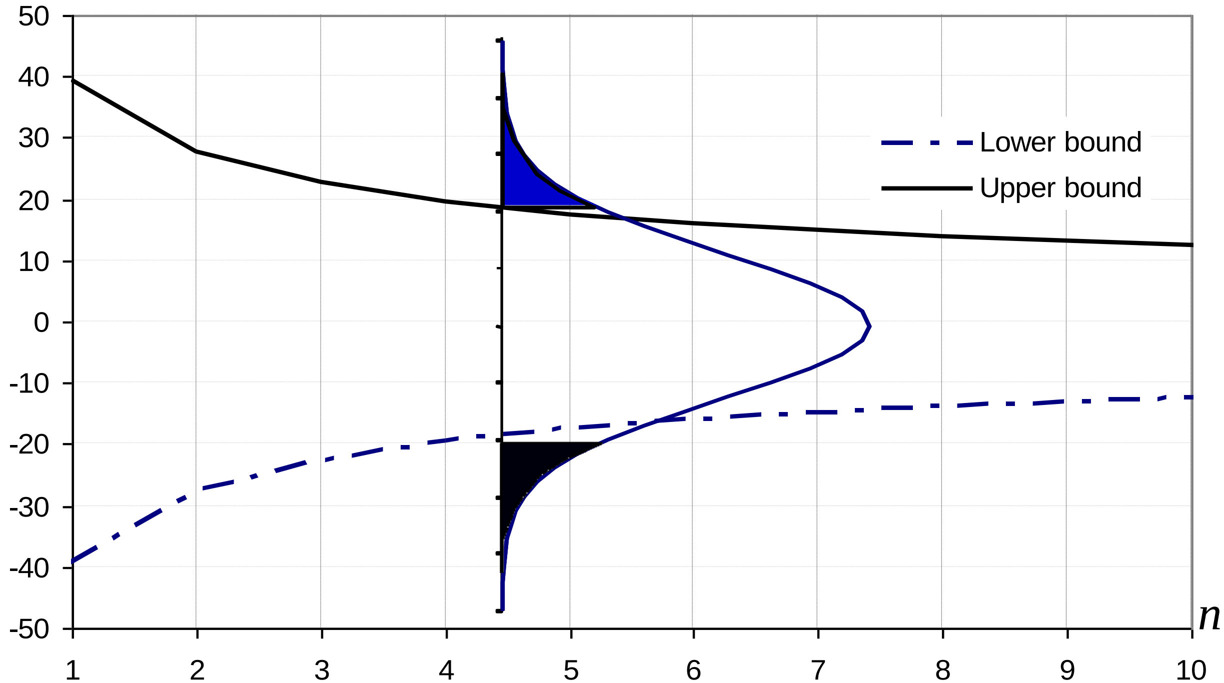
$$390.2 < \mu_X < 409.8$$

- Normalerweise werden Konfidenzintervalle für Mittelwert, Varianz und charakteristische Werte (Fraktilwerte) in Betracht gezogen.
- Das Konfidenzintervall repräsentiert / beschreibt die (statistische) Unsicherheit, welche durch zu wenig Daten entsteht.

Konfidenzintervalle für Schätzer

Die Anzahl verfügbarer Daten hat einen signifikanten Einfluss auf das Konfidenzintervall.

Unter Verwendung des vorherigen Beispiels (σ_X = 20) ist in der folgenden Grafik die Abhängigkeit des Konfidenz-intervalls von der Anzahl der Experimente n illustriert.



Statistische Signifikanztests

Dilemma:

Man muss einfache Rückschlüsse ziehen, die jedoch nur auf einer begrenzten Datenmenge mit einer hohen Variabilität basieren.

Beispiele:

Es sollen ein paar "vor Ort" – Tests durchgeführt werden, um ein Modell für die Bodenfestigkeiten zu verifizieren.

Das Verkehrsaufkommen auf einer Brücke soll beobachtet werden, um zu überprüfen, ob die vorherigen Annahmen diesbezüglich zutreffend sind.

Grundwasserproben sollen entnommen werden, um die Trinkwasserqualität zu bestätigen.

Statistische Signifikanztests

Es ist wichtig, dass diese Rückschlüsse anhand konsistenter und transparenter Grundlagen gezogen werden. So sollten die Rückschlüsse alle Beweismittel (Daten) berücksichtigen und gegebene Abhängigkeiten (welcher Beweis bedingt welchen Rückschluss) mit einbeziehen.

Ein häufig angewandter und hilfreicher Weg, um solche Rückschlüsse zu unterstützen ist folgender:

1. Formulieren einer Hypothese
2. Hypothesentest

Im Folgenden wird ein genauer Blick auf diesen Ansatz geworfen…

Statistische Signifikanztests

1. Der erste Schritt liegt in der Formulierung einer Null-Hypothese H_0.
   Man legt fest, dass eine Stichprobenstatistik (z.B. Stichprobenmittelwert) einem bestimmten Wert entspricht.

2. Der Folgeschritt beinhaltet die Formulierung einer Entscheidungsregel, nach der die Null-Hypothese entweder akzeptiert oder abgelehnt wird.
   Kann man auf Beweise (Testergebnisse) zugreifen, wird diese Entscheidungsregel häufig anhand eines Intervalls Δ bestimmt, innerhalb dessen die beobachtete Stichprobenstatistik liegen muss, damit die Null-Hypothese akzeptiert werden kann.
   Eine Ablehnung der Null-Hypothese bedingt die Akzeptanz der Testhypothese H_1.

3. Nun wählt man ein Signifikanzniveau für die Testdurchführung, wobei α die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Hypothese abgelehnt wird, obwohl sie zutrifft (Fehler 1. Art). Auf diesem Weg beeinfluss α ebenso die Wahrscheinlichkeit, dass die Null-Hypothese akzeptiert wird, obwohl sie nicht zutrifft (Fehler 2. Art).

Statistische Signifikanztests

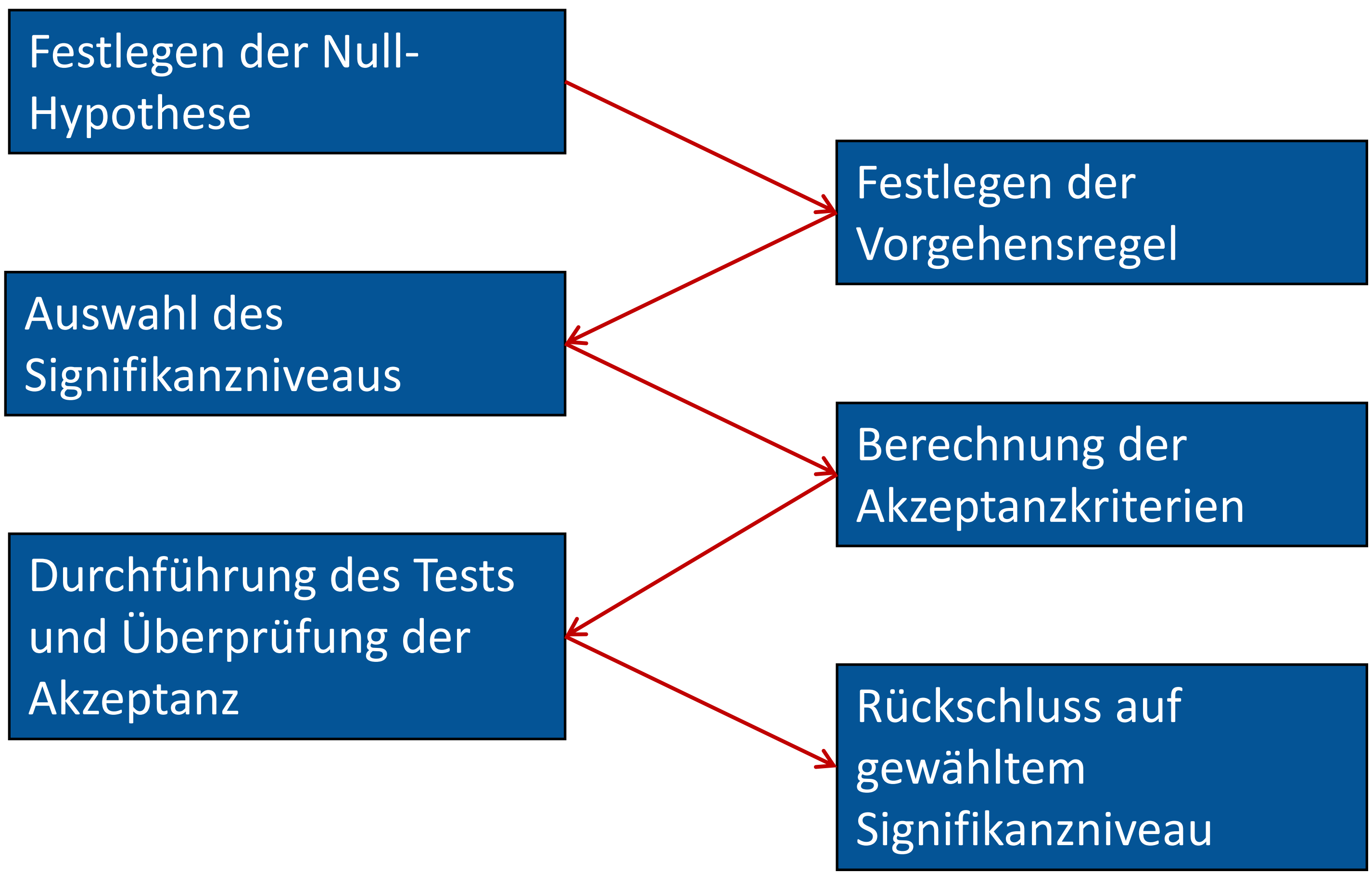
4. Nun muss man den zu α gehörigen Wert von Δ berechnen.
   Bei Bedarf kann man auch die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2. Art berechnen.

5. Die geplanten Tests werden durchgeführt und die beobachteten Stichprobenstatistiken beurteilt. Eine Ablehnung oder Akzeptanz der Null-Hypothese wird geprüft.

6. Sollte die Null-Hypothese von den Ergebnissen der Stichprobe nicht gestützt werden, wird sie auf dem Signifikanzniveau von α abgelehnt – sonst wird sie akzeptiert.

Statistische Signifikanztests

Grafische Darstellung des Vorgehens bei Hypothesentests:



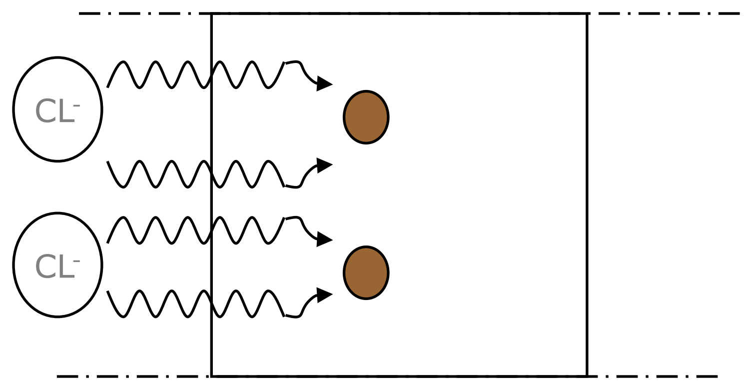
Statistische Signifikanztests

Typische Anwendungen im Ingenieurbereich:

- Testen des Mittelwertes – mit bekannter Varianz
- Testen des Mittelwertes – mit unbekannter Varianz
- Testen der Varianz
- Testen zweier oder mehrerer Datensätze

Statistische Signifikanztests

Beispiel: Chlorid bedingte Korrosion an Betonkonstruktionen



Man betrachte beispielsweise die Situation, in der beurteilt werden soll, ob die Chlorid-Konzentration an der Oberfläche einer Betonkonstruktion mit den vorher angenommenen Bemessungsgrundlagen übereinstimmt.

Statistische Signifikanztests

Testen des Mittelwertes – mit bekannter Varianz

Bemessungsgrundlage: Mittelwert der Oberflächen-Chlorid-Konzentration: 0,3%

Null-Hypothese

Die Standardabweichung der Oberflächen-Chlorid-Konzentration sei bekannt und entspricht 0,04%.

Festlegung des Annahmebereichs:

Die Null-Hypothese wird auf dem Signifikanzniveau α akzeptiert, falls

$$0.3 - \Delta \leq \bar{X} \leq 0.3 + \Delta$$

Statistische Signifikanztests

Testen des Mittelwertes – mit bekannter Varianz

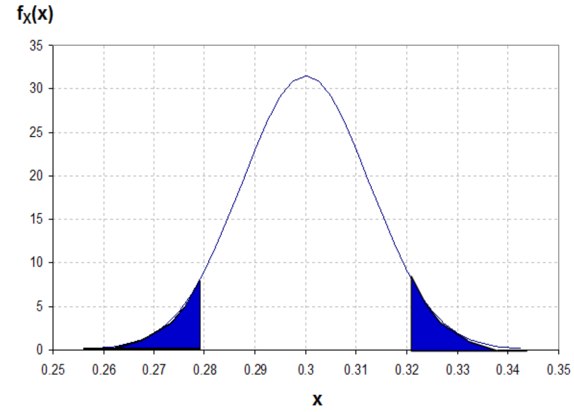
Das Akzeptanzkriterium bei gegebenem α kann wie folgt berechnet werden:

$$P\left(0.3-\Delta \leq \bar{X} \leq 0.3+\Delta\right)=1-\alpha$$

Wählt man $\alpha=0.1$ und $n=10$ Versuche und nimmt man an, dass der Stichprobenmittelwert normalverteilt ist, erhält man:

$$\Phi\left(\frac{x_U-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_L-\mu}{\sigma}\right)=$$

$$\Phi\left(\frac{(0.3+\Delta)-0.3}{\frac{0.04}{\sqrt{10}}}\right)-\Phi\left(\frac{(0.3-\Delta)-0.3}{\frac{0.04}{\sqrt{10}}}\right)=0.9 \quad \Rightarrow \quad \Delta=0.0208$$



Statistische Signifikanztests

Testen des Mittelwertes – mit bekannter Varianz

Liegt der Stichprobenmittelwert innerhalb von $[0.28 \leq \bar{x} \leq 0.32]$, sollte die Null-Hypothese H_0 akzeptiert werden.

Nimmt man an, dass 10 Versuche durchgeführt wurden und daraus folgenden Ergebnisse entstanden sind:

$$\hat{x} = (0.33, 0.32, 0.25, 0.31, 0.28, 0.27, 0.29, 0.3, 0.27, 0.28)^T$$

Bei einem Stichprobenmittelwert von $\bar{x}$=0.29, kommt man zu dem Schluss, dass die Null-Hypothese auf einem Signifikanzniveau von 0.1 akzeptiert werden sollte.

Statistische Signifikanztests

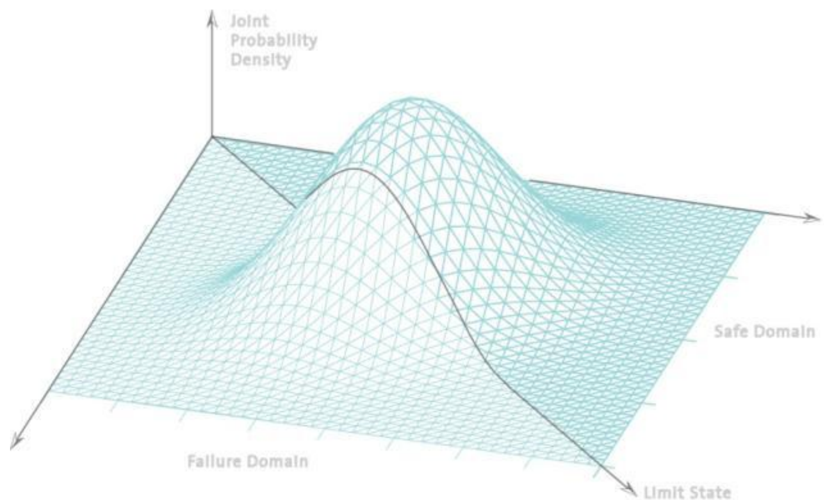
Besondere Bemerkungen:

Statistische Signifikanztests können für eine Vielzahl unterschiedlicher Problemstellungen formuliert werden.

Man sollte aufpassen, dass man die Aussage dieser Tests nicht überschätzt, da die Hypothesen auf unterschiedlichen Wegen und mit unterschiedlichen Signifikanzniveaus formuliert werden können. Es sollte deshalb zum Prinzip werden, alles zu überprüfen.

Unterschiedliche Herangehensweisen verursachen einen direkten Effekt auf die Wahrscheinlichkeit, dass Fehler der 1. oder 2. Art entstehen. Dies kann signifikante ökonomische Konsequenzen nach sich ziehen.

Die Formulierung der Hypothese und die Wahl des Signifikanzniveaus sollte als Entscheidungsproblem behandelt werden – dazu später mehr…



Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Jochen Köhler