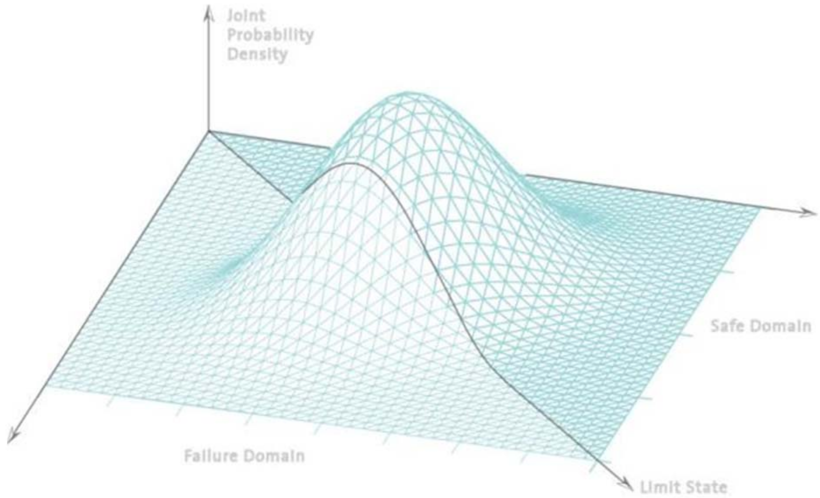


Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

4. Vorlesung

Dr. Jochen Köhler

Wichtig!!!

- Vorlesung Di 22.03.2011
  → HPH G1
- Vorlesung Do 24.03.2011
  → HCI G3
- Übung Di 29.03.2011
- Übung Do 31.03.2011

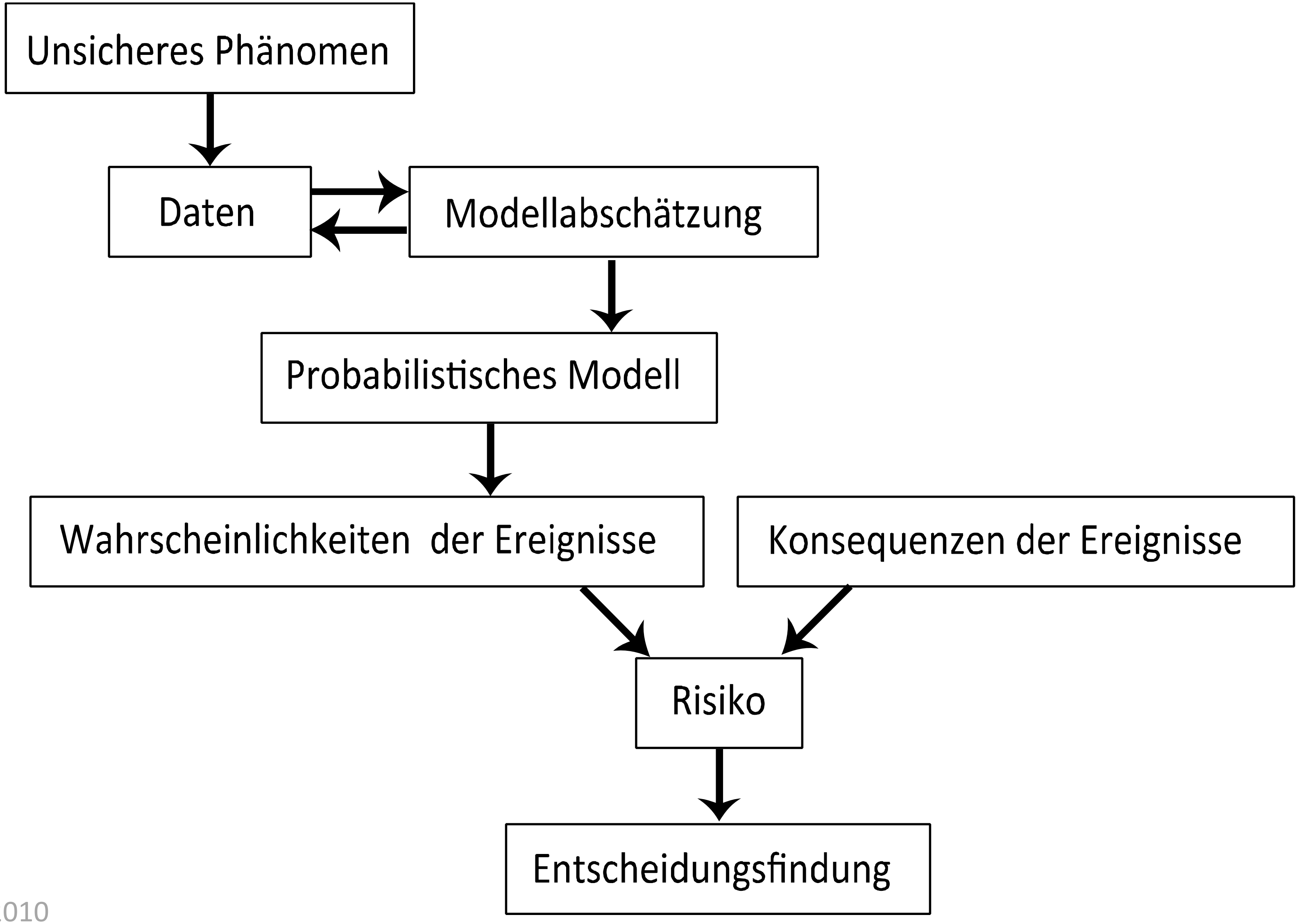
Inhalte der heutigen Vorlesung

- Modellierung von Unsicherheiten - Übersicht

- Unsicherheiten bei Problemen im Ingenieurwesen

- Zufallsvariablen
  - *Diskrete* kumulative Verteilungen und Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen
  - *Kontinuierliche* kumulative Verteilungen und Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen
  - Charakterisierung von Zufallsvariablen
  - Momente von Zufallsvariablen
  - Erwartungswert- und Varianzoperator

Modellierung von Unsicherheiten - Übersicht



Unsicherheiten bei Problemen im Ingenieurwesen

Verschieden Typen von Unsicherheiten beeinflussen die Entscheidungsfindung.

- Unsicherheiten infolge natürlicher Variabilität (Zufall)

- Unsicherheiten infolge von unvollständigem Wissen

Unsicherheiten bei Problemen im Ingenieurwesen

Verschieden Typen von Unsicherheiten beeinflussen die Entscheidungsfindung.

- Unsicherheiten infolge natürlicher Variabilität (Zufall)
  - **Aleatorische Unsicherheit**

- Unsicherheiten infolge von unvollständigem Wissen
  - **Epistemische Unsicherheit**

Unsicherheiten bei Problemen im Ingenieurwesen

Verschieden Typen von Unsicherheiten beeinflussen die Entscheidungsfindung.

- Natürliche Schwankungen – aleatorische Unsicherheit
  - Resultate beim Würfeln
  - Variation von Materialeigenschaften
  - Variation von Windstärken
  - Variation des Niederschlags
- Modellunsicherheit – epistemische Unsicherheit
  - fehlendes Wissen
  - unangebrachte/ungenaue Modelle (Physikalische Modelle)
- Statistische Unsicherheit– epistemische Unsicherheit
  - wenig Information / kleine Anzahl Messungen

Unsicherheiten bei Problemen im Ingenieurwesen

Beispiel: Bemessung eines Dammes.

- Die Bemessung (Höhe) des Dammes bestimmt die Häufigkeit von Überflutungen.
- Falls exakte Modelle zur Verfügung stehen, um zukünftige Wasserstände vorherzusagen, und unser Wissen über die Eingabeparameter perfekt ist, können wir die Häufigkeit von Überflutungen (pro Jahr) berechnen → eine deterministische Welt.
- Aber: Selbst wenn die Welt deterministisch wäre, hätten wir keine perfekten Informationen über sie. Somit können wir die Welt ebenso als zufallsbedingt betrachten.

Unsicherheiten bei Problemen im Ingenieurwesen

- Inhärente physikalische Unsicherheit (aleatorisch = Typ I) ist die Unsicherheit resultierend aus der ‚Tatsache', dass es in unserer Umwelt zufällige Prozesse gibt.

- Ein anderer pragmatischer Standpunkt ist, diesen Unsicherheitstyp als jede Unsicherheit, welche nicht durch Sammeln von zusätzlichen Information reduziert werden kann, zu definieren.

- Modellunsicherheiten und statistische Unsicherheiten (epistemisch = Typ II) sind Unsicherheiten, welche reduziert werden können.

Zufallsvariablen

Wahrscheinlichkeitsdichte- und kumulative Verteilungsfunktionen

- Eine Zufallsvariable wird mit einem grossen Buchstaben bezeichnet: X
- Eine Realisation einer Zufallsvariablen wird mit einem kleinen Buchstaben bezeichnet: x

- Wir unterscheiden zwischen

  - *kontinuierlichen* Zufallsvariablen: Können jeden Wert in einem gegebenen Bereich annehmen.

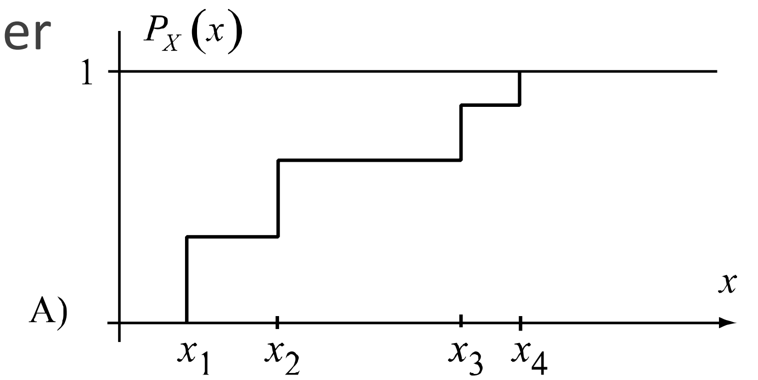
  - *diskreten* Zufallsvariablen: Können nur diskrete Werte annehmen.

Zufallsvariablen

Wahrscheinlichkeitsdichte- und kumulative Verteilungsfunktionen

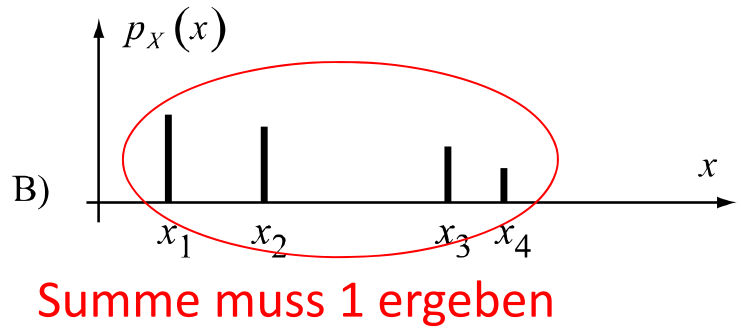
- Die Wahrscheinlichkeit, dass die Realisation einer diskreten Zufallsvariablen X kleiner als x ist, wird durch die kumulative Verteilungsfunktion beschrieben:

$$P_X(x) = \sum_{x_i < x} p_X(x_i)$$



- Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für eine diskrete Zufallsvariable ist definiert durch:

$$p_X(x_i) = P(X = x_i)$$



Zufallsvariablen

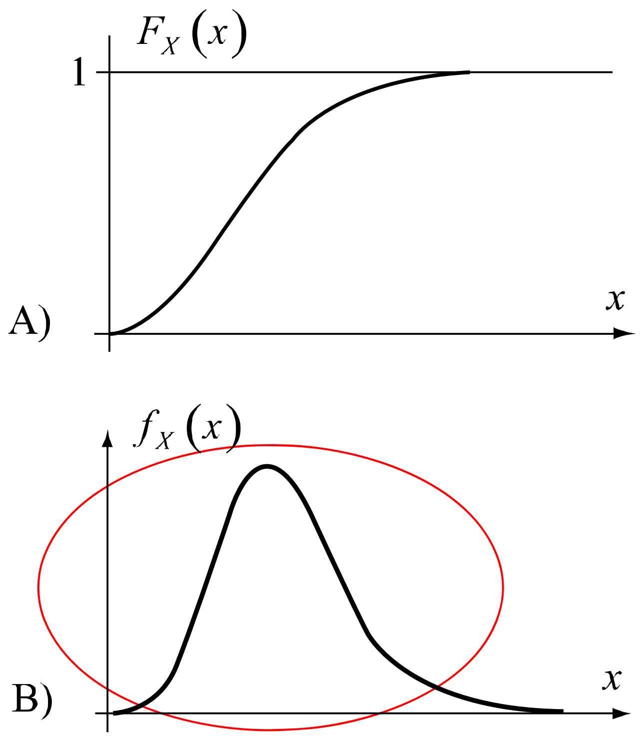
Wahrscheinlichkeitsdichte- und kumulative Verteilungsfunktionen

- Die Wahrscheinlichkeit, dass die Realisation einer kontinuierlichen Zufallsvariablen X kleiner als x ist, wird durch die kumulative Verteilungsfunktion beschrieben:

$$F_X(x) = P(X < x)$$

- Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für eine kontinuierliche Zufallsvariable ist definiert durch:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$



Integral muss 1 ergeben

Zufallsvariablen

Momente der Zufallsvariablen und der Erwartungswertoperator

- Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Wahrscheinlichkeitsdichte- und kumulative Verteilungsfunktionen) können durch ihre Parameter oder ihre Momente beschrieben werden.

$$F_X(x, \mathbf{p}) \qquad f_X(x, \mathbf{p})$$

Parameter

- Die Parameter können durch die Momente ausgedrückt werden und umgekehrt.

Zufallsvariablen

Momente von Zufallsvariablen und der Erwartungswertoperator

- Das i-te Moment λ_i einer diskreten Zufallsvariable X ist definiert durch:

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{n} x_j^i \, p_X(x_j)$$

- Der Erwartungswert $E[X]$ einer diskreten Zufallsvariable X entspricht dem ersten Moment und ist definiert durch:

$$\mu_X = E[X] = \sum_{j=1}^{n} x_j \, p_X(x_j)$$

Zufallsvariablen

Momente von Zufallsvariablen und der Erwartungswertoperator

- Das i-te Moment λ_i einer kontinuierlichen Zufallsvariable X ist definiert durch:

$$\lambda_i = \int_{-\infty}^{\infty} x^i f_X(x) dx$$

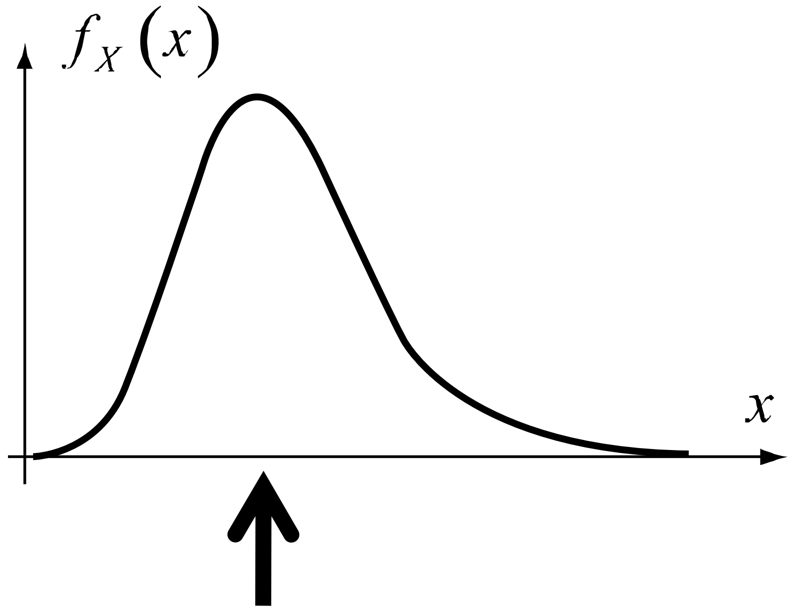
- Der Erwartungswert $E[X]$ einer kontinuierlichen Zufallsvariable X entspricht dem ersten Moment und ist definiert durch:

$$\mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

Zufallsvariablen

Momente von Zufallsvariablen und der Erwartungswertoperator

- Der Erwartungswert (oder Mittelwert) einer Zufallsvariablen kann als Schwerpunkt der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Zufallsvariablen verstanden werden.



Zufallsvariablen

Momente von Zufallsvariablen und der Erwartungswertoperator

- Die Varianz einer kontinuierlichen Zufallsvariablen ist als das zweite zentrale Moment definiert.

$$\underbrace{\sigma_X^2 = Var}_{\text{Varianz}}\left[X\right] = E\left[(X-\mu_X)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\underbrace{\mu_X}_{\text{Mittelwert}})^2 f_X(x)\, dx$$

- Für eine diskrete Zufallsvariable entsprechend:

$$\sigma_X^2 = Var\left[X\right] = \sum_{j=1}^{n} (x_j-\mu_X)^2 p_X(x_j)$$

- Die Standardabweichung ist als Quadratwurzel der Varianz definiert.

Zufallsvariablen

Momente von Zufallsvariablen und der Erwartungswertoperator

- Das Verhältnis zwischen der Standardabweichung und dem Erwartungswert einer Zufallsvariablen wird als Variationskoeffizient V_X bezeichnet und ist definiert als:

$$V_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X}$$

dimensionslos

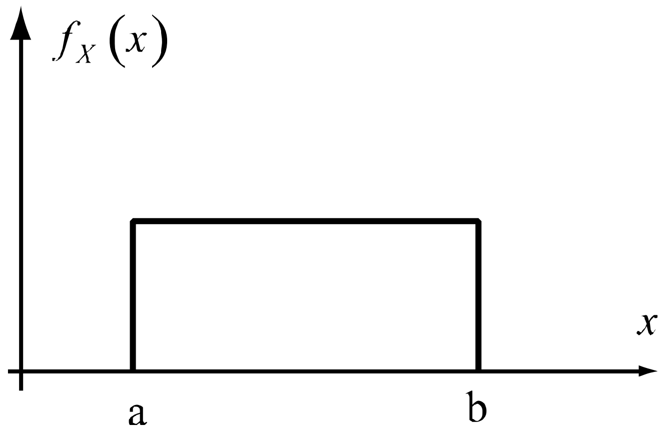
- Der Variationskoeffizient ist nützlich, um die Variabilität der Zufallsvariablen um ihren Erwartungswert zu beschreiben.

Zufallsvariablen

Beispiel: Gleichverteilte Zufallsvariable

Wahrscheinlichkeitsdichte- und Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion

$$f_X(x\;;a,b) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & x > b \end{cases}$$



$$F_X(x;a,b) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \int_a^x f_X(y;a,b)\;dy = \int_a^x \dfrac{1}{b-a}\;dy = \dfrac{(x-a)}{(b-a)}, & a \le x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

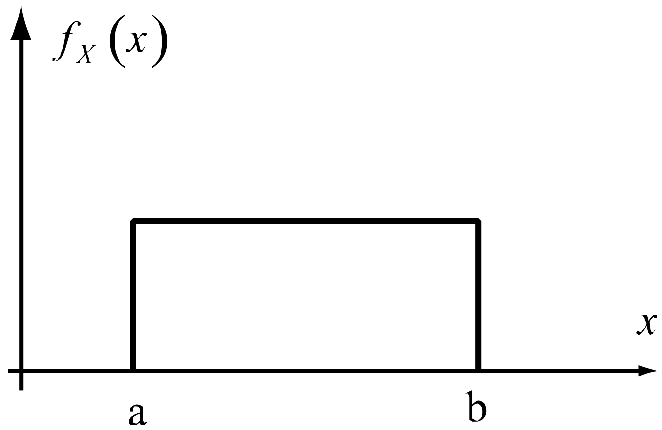
Zufallsvariablen

Beispiel: Gleichverteilte Zufallsvariable

Wahrscheinlichkeitsdichte- und Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion

$$\mu_X = E[X] = \int_a^b x \; f_X(x;a,b)\; dx$$

$$= \int_a^b \frac{x}{b-a}\, dx = \left.\frac{x^2}{2(b-a)}\right|_a^b = \frac{(b+a)}{2}$$



$$\sigma_X^2 = E\left[(X-\mu_X)^2\right] = \int_a^b (x-\mu_X)^2 \; f_X(x;a,b)\; dx$$

$$= \int_a^b \frac{(x-\mu_X)^2}{(b-a)}\, dx = \left.\frac{\frac{1}{3}x^3 - x^2\mu_X + x\mu_X^{\;2}}{(b-a)}\right|_a^b = \frac{1}{12}(b-a)^2$$