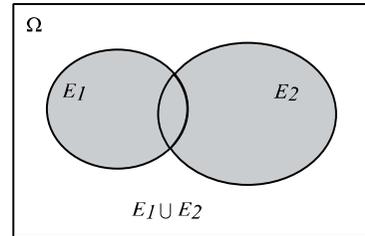


Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

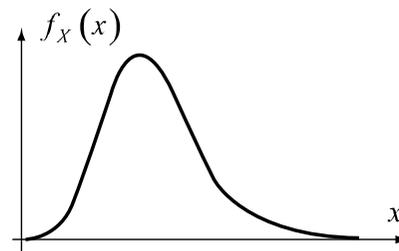
Dr. J. Köhler

Überblick über die Kapitel

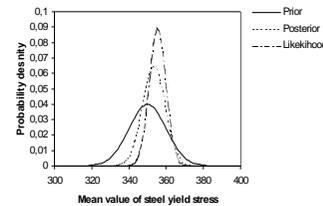
Wahrscheinlichkeitstheorie



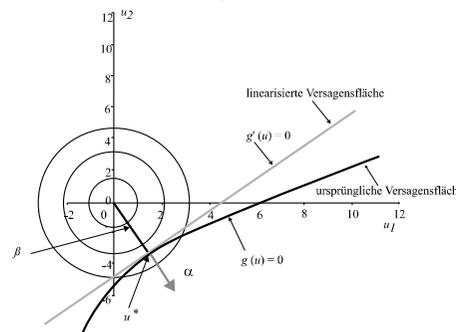
Verteilungsfunktionen, Momente, Extreme



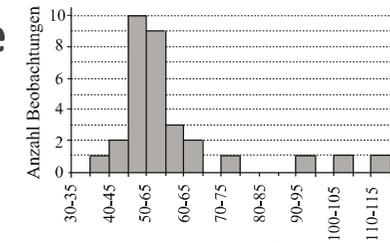
Bayes'sche Modellierung



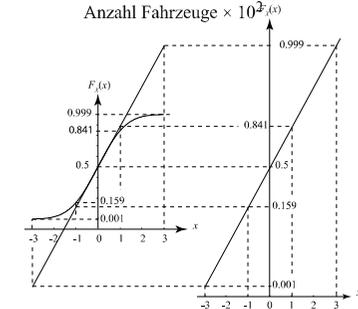
Zuverlässigkeitsanalyse



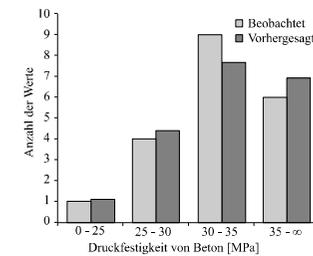
Grafische /numerische Interpretation von Beobachtungen



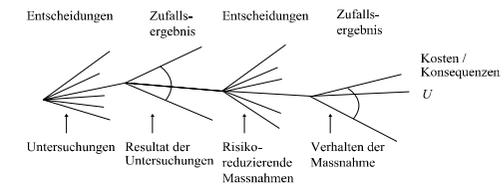
Modellierung und Datenbeschreibung



Modellevaluation



Entscheidungsfindung



Inhalt der heutigen Vorlesung

- Einführung in die Entscheidungstheorie
 - Das Problem
 - Der Entscheidungsbaum
 - A-priori Analyse
 - A-posteriori Analyse
 - Prä-posteriori Analyse

Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

- Das grundlegende Ingenieurproblem

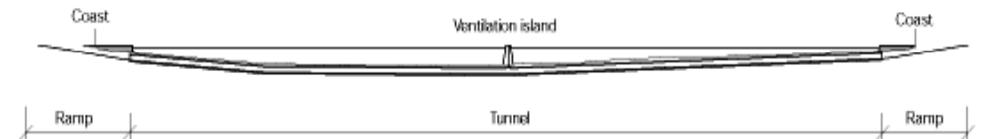
Mehrere mögliche Lösungen sind denkbar

Die vorhandene Information ist unsicher

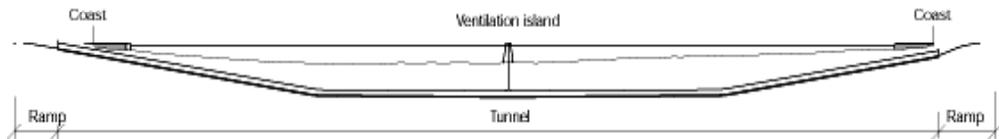
Eine Entscheidung muss getroffen werden!



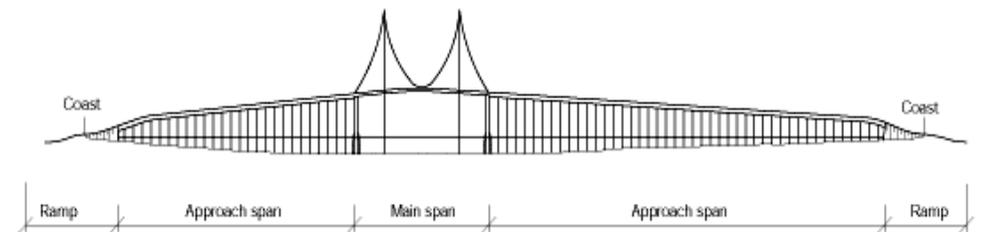
Solution B and F



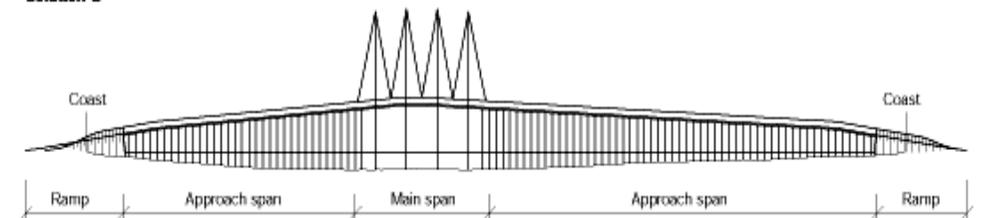
Solution A and E



Solution D



Solution C

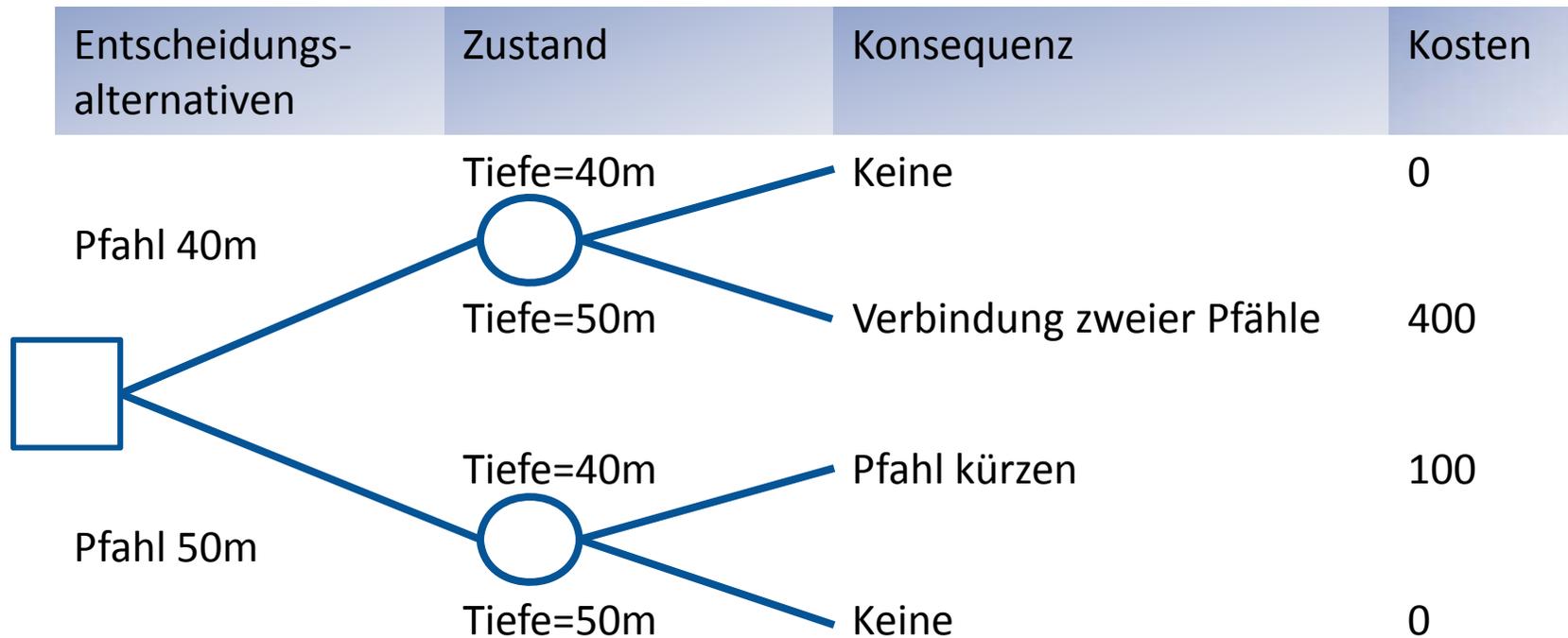
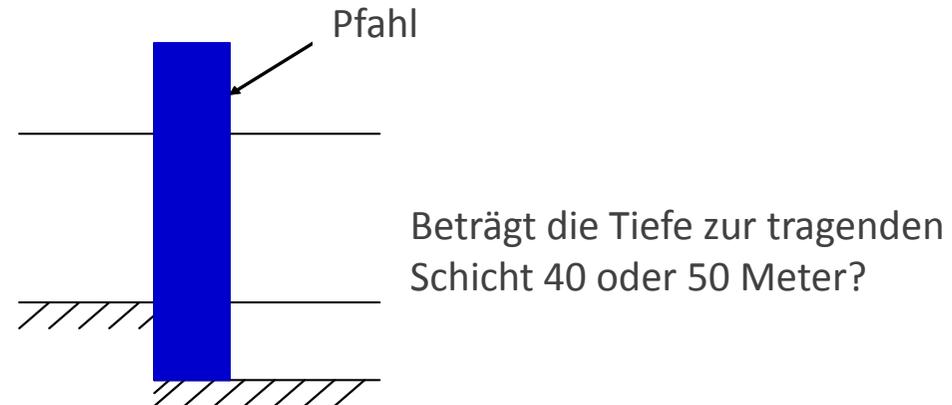


Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

- Vorgehen
 1. Formulierung des Entscheidungsproblems
 - Identifizierung des Entscheidungsträgers und seiner Präferenzen
 - Darstellen des Entscheidungsprozesses
 - Identifizierung aller möglichen Entscheidungsalternativen
 - Identifizierung der Unsicherheiten
 2. Identifizierung potentieller Konsequenzen und ihres Nutzens (Kosten und Ertrag)
 3. Beurteilung der Eintrittswahrscheinlichkeiten der Konsequenzen
 4. Vergleich der unterschiedlichen Entscheidungsalternativen basierend auf dem Erwartungswert ihres Nutzens
 5. Entscheidung und Dokumentation der Annahmen, auf welchen die gewählte Alternative beruht

Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

- Der Entscheidungsbaum



Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

- Zuordnung von Nutzen
 - Der Nutzen spiegelt die Präferenzen des Entscheidungsträgers wider.
 - Nutzenfunktionen können als lineare Funktionen definiert werden, ausgedrückt in monetären Einheiten.
 - Alle monetären Konsequenzen sind in der Nutzenfunktion zu integrieren.

Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

- Zuordnung von Nutzen

$$u(a_i) = \sum_{j=1}^n p_j u(K_j)$$

$u(a_i)$ Nutzen (Kosten und Ertrag) der aus der Handlungsalternativen a_i entsteht

$p_j u(K_j)$ Erwartungswert des Nutzens der Konsequenz K_j

p_j Eintrittswahrscheinlichkeit der Konsequenz K_j

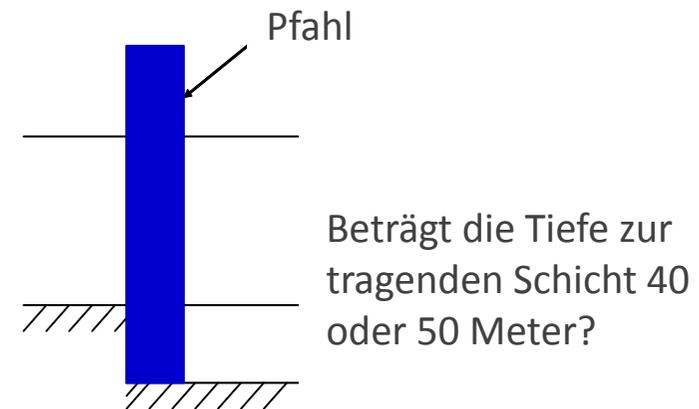
$u(K_j)$ Nutzen der Konsequenz K_j

K_j Potentielle Konsequenz aus der Handlungsalternativen a_i

Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

Die unterschiedlichen Typen der Analyse in der Entscheidungstheorie:

- A-priori Analyse
- A-posteriori Analyse
- Prä-posteriori Analyse



Beispiel

Welche Pfahllänge sollte eingesetzt werden?

Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

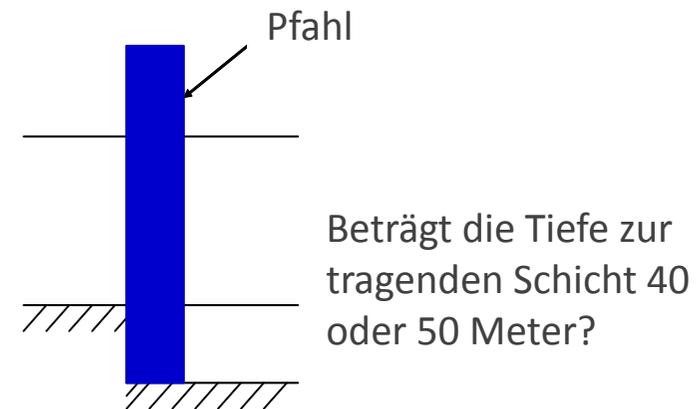
Beispiel

Welche Pfahllänge sollte eingesetzt werden?

Alternativen:

a_0 : Wahl eines Pfahls mit 40 Metern Länge

a_1 : Wahl eines Pfahls mit 50 Metern Länge



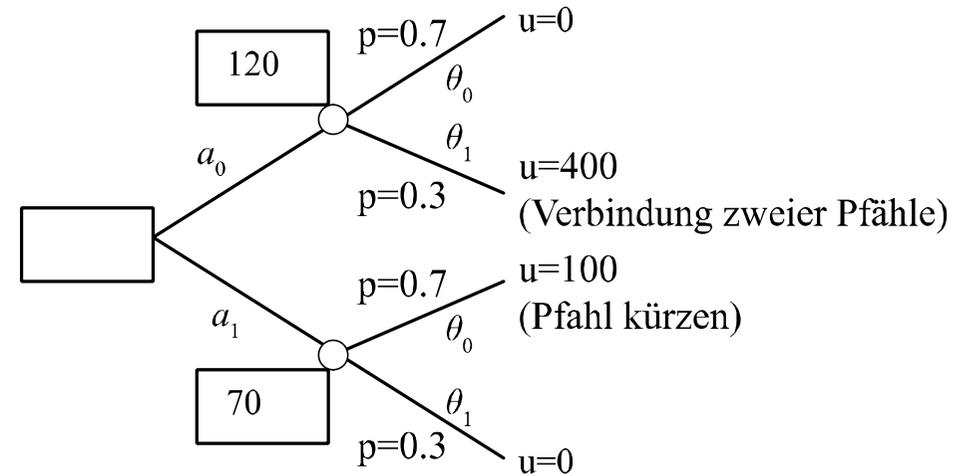
Zustände der Natur (Tiefe des Untergrundes):

θ_0 : Untergrund in 40 Metern Tiefe $P'(\theta_0) = 0.7$

θ_1 : Untergrund in 50 Metern Tiefe $P'(\theta_1) = 0.3$

Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

A-priori Analyse



θ_0 : Untergrund in 40 Metern Tiefe; $P'(\theta_0) = 0.7$

θ_1 : Untergrund in 50 Metern Tiefe; $P'(\theta_1) = 0.3$

a_0 : Wahl eines Pfahls mit 40 Metern Länge

a_1 : Wahl eines Pfahls mit 50 Metern Länge

Wenn Tiefe > Pfahllänge: Verbinden = 400 CHF

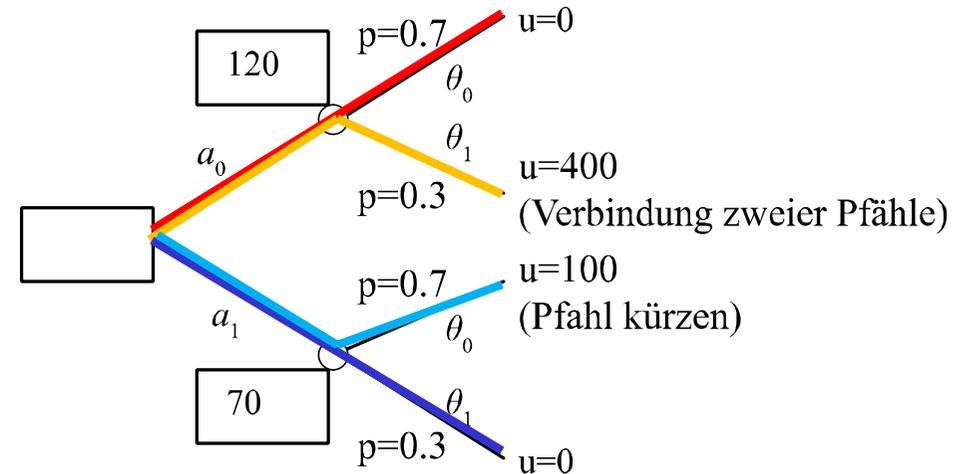
Wenn Pfahllänge > Tiefe: Kürzen = 100 CHF

Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

A-priori Analyse

$$P'(\theta_0) = 0.7$$

$$P'(\theta_1) = 0.3$$



$$E'[u] = \min\{u[a_0], u[a_1]\}$$

$$= \min\{P'[\theta_0] \cdot u[\theta_0|a_0] + P'[\theta_1] \cdot u[\theta_1|a_0],$$

$$P'[\theta_0] \cdot u[\theta_0|a_1] + P'[\theta_1] \cdot u[\theta_1|a_1]\}$$

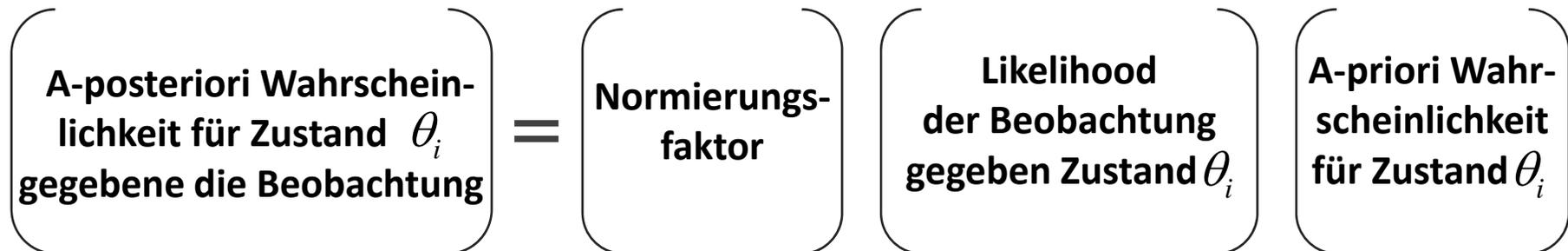
$$= \min\{0.7 \cdot 0 + 0.3 \cdot 400, 0.7 \cdot 100 + 0.3 \cdot 0\}$$

$$= \min\{120, 70\} = 70 \quad \Rightarrow \quad \text{Entscheidung für } a_1: \text{ Pfahl 50 m}$$

Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

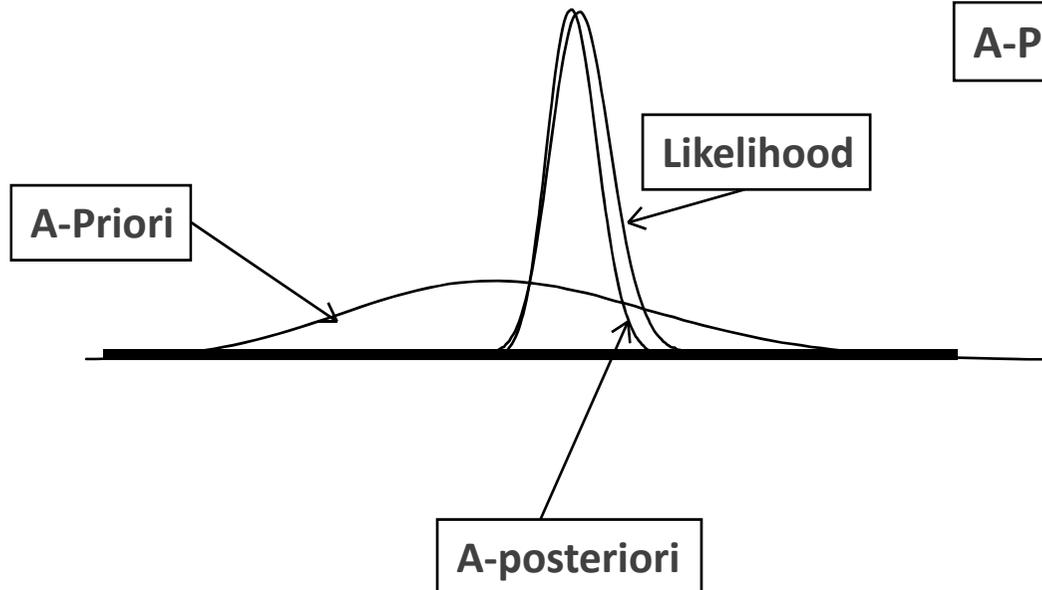
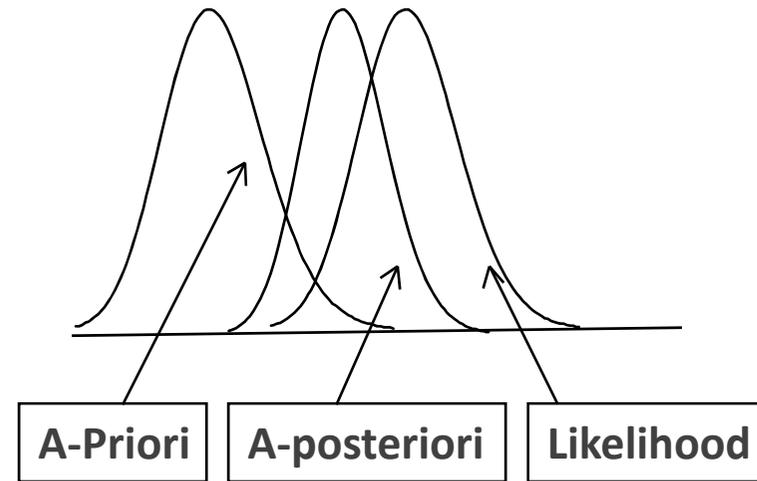
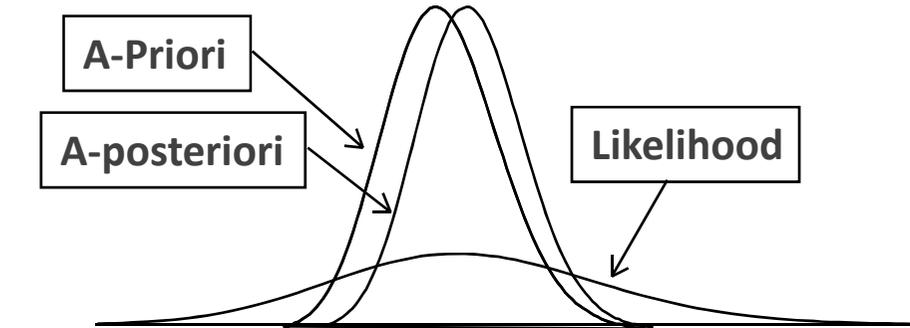
A-posteriori Analyse

$$P''(\theta_i) = \frac{P[z_k | \theta_i] P'[\theta_i]}{\sum_j P[z_k | \theta_j] P'[\theta_j]}$$



Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

A-posteriori Analyse



Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

A-posteriori Analyse - Beispiel

$$P''(\theta_i) = \frac{P[z_k | \theta_i] P'[\theta_i]}{\sum_j P[z_k | \theta_j] P'[\theta_j]}$$

Ultraschalltests werden durchgeführt,
um die Tiefe des Untergrundes festzustellen.

Testresultat \ Wahrer Zustand	θ_0	θ_1
	40 m Tiefe	50 m Tiefe
z_0 40 m Indikation	0.6	0.1
z_1 50 m Indikation	0.1	0.7
z_2 45 m Indikation	0.3	0.2

Likelihoods der verschiedenen Indikationen (Testresultate) je Zustand der Natur.

Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

A-posteriori Analyse - Beispiel

$$P''(\theta_i) = \frac{P[z_k | \theta_i] P'[\theta_i]}{\sum_j P[z_k | \theta_j] P'[\theta_j]}$$

Nehmen wir an, der Test zeigt 45 Meter an:

$$P''[\theta_0] = P[\theta_0 | z_2] \propto P[z_2 | \theta_0] P[\theta_0] = 0.3 \cdot 0.7 = 0.21$$

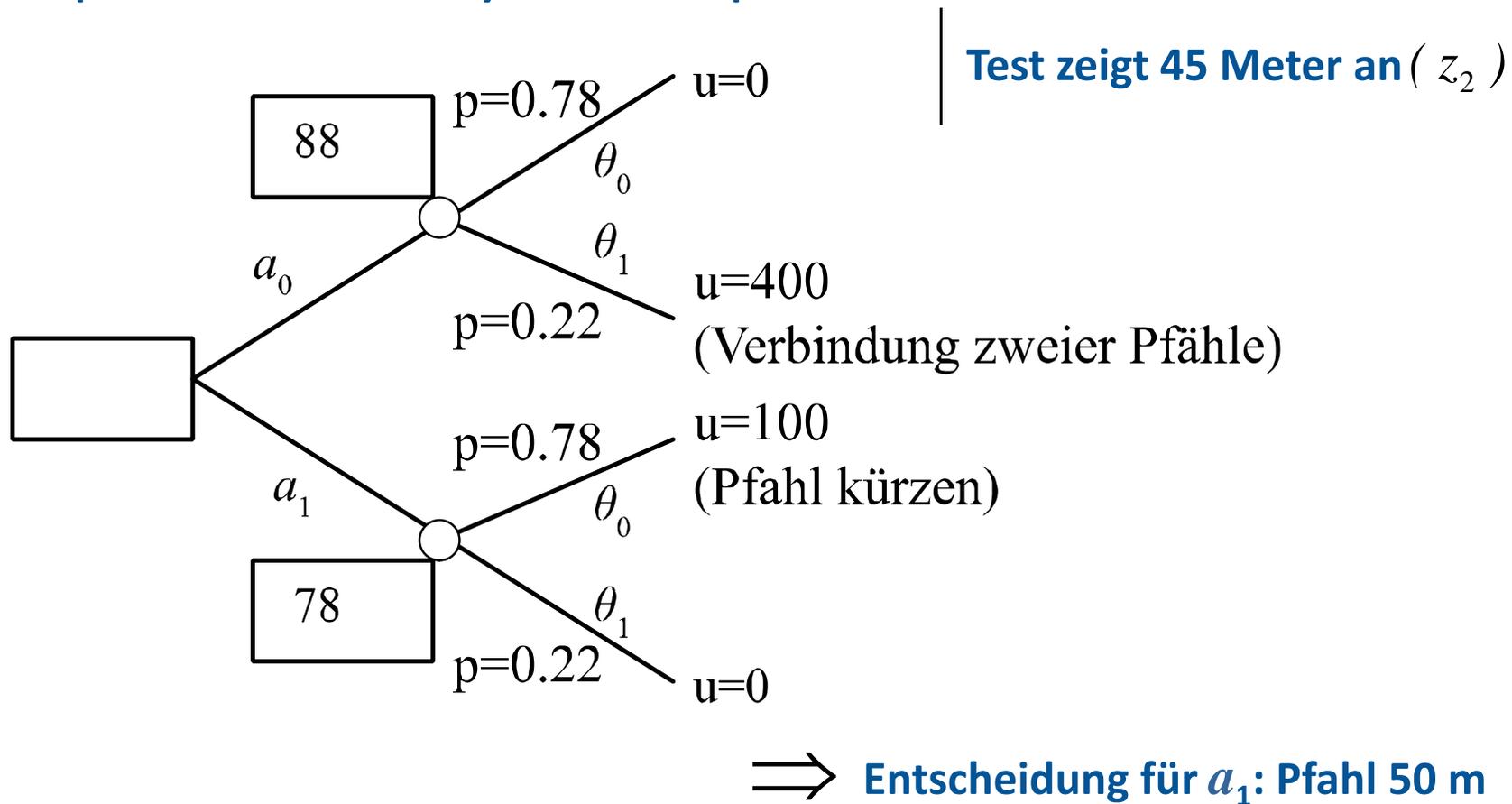
$$P''[\theta_1] = P[\theta_1 | z_2] \propto P[z_2 | \theta_1] P[\theta_1] = 0.2 \cdot 0.3 = 0.06$$

$$P''[\theta_0 | z_2] = \frac{0.21}{0.21 + 0.06} = 0.78$$

$$P''[\theta_1 | z_2] = \frac{0.06}{0.21 + 0.06} = 0.22$$

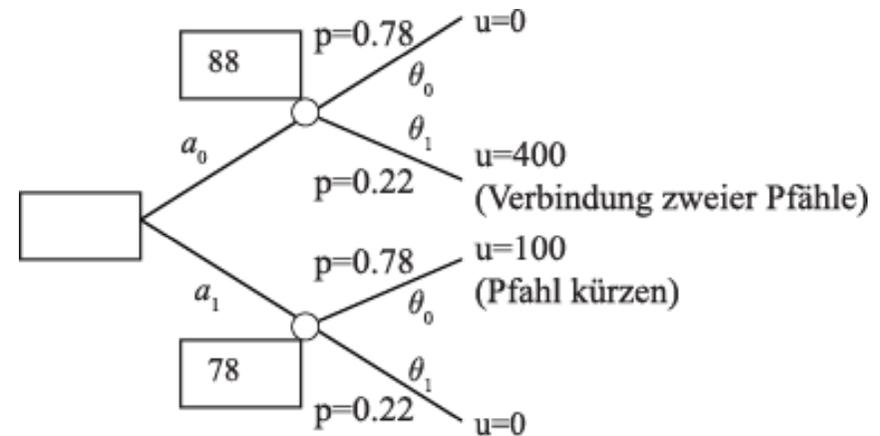
Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

A-posteriori Analyse - Beispiel



Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

A-posteriori Analyse - Beispiel



$$E''[u|z_2] = \min_j \{ E''[u(a_j)|z_2] \}$$

$$= \min \{ P''[\theta_0] \cdot 0 + P''[\theta_1] \cdot 400, P''[\theta_0] \cdot 100 + P''[\theta_1] \cdot 0 \}$$

$$= \min \{ 0.78 \cdot 0 + 0.22 \cdot 400, 0.78 \cdot 100 + 0.22 \cdot 0 \}$$

$$= \min \{ 88, 78 \} = 78$$

⇒ Entscheidung für a_1 : Pfahl 50 m

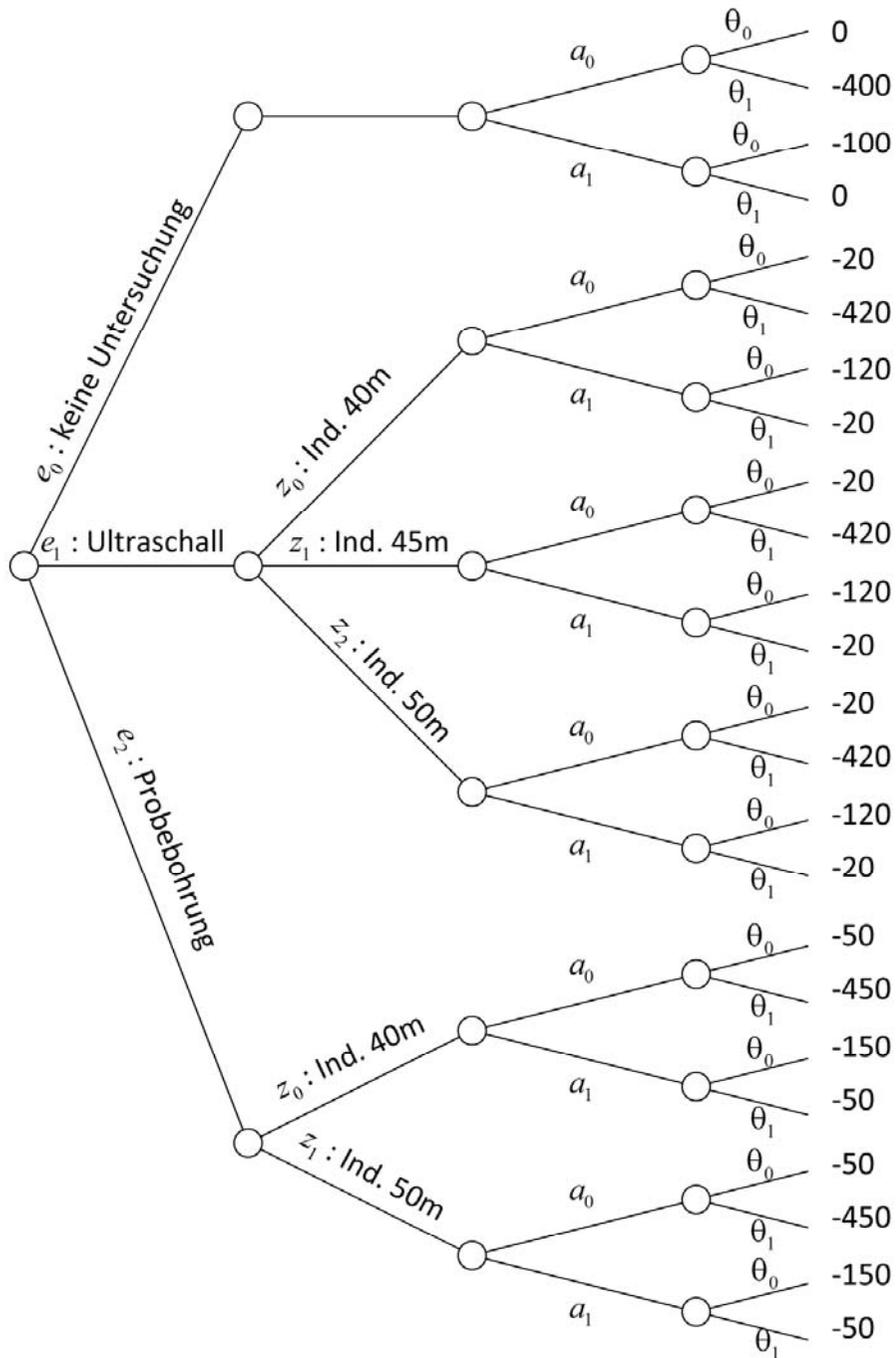
Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

Prä-Posteriori Analyse

- Betrachten wir das gleiche Beispiel – Pfähle
- Nun hat der Ingenieur die Möglichkeit im Vorfeld zwischen verschiedenen Untersuchungsoptionen zu wählen, z.B.:
 - e_0 keine Untersuchungen -> keine Kosten
 - e_1 Ultraschall -> 20 CHF
 - e_2 Probebohrung -> 50 CHF
- Die Möglichen Zusatzuntersuchungen beinhalten Kosten
- Wie kann nun entschieden werden, welche Option die grösste Kosteneffizienz hat?

Pre-Posterior Analyse

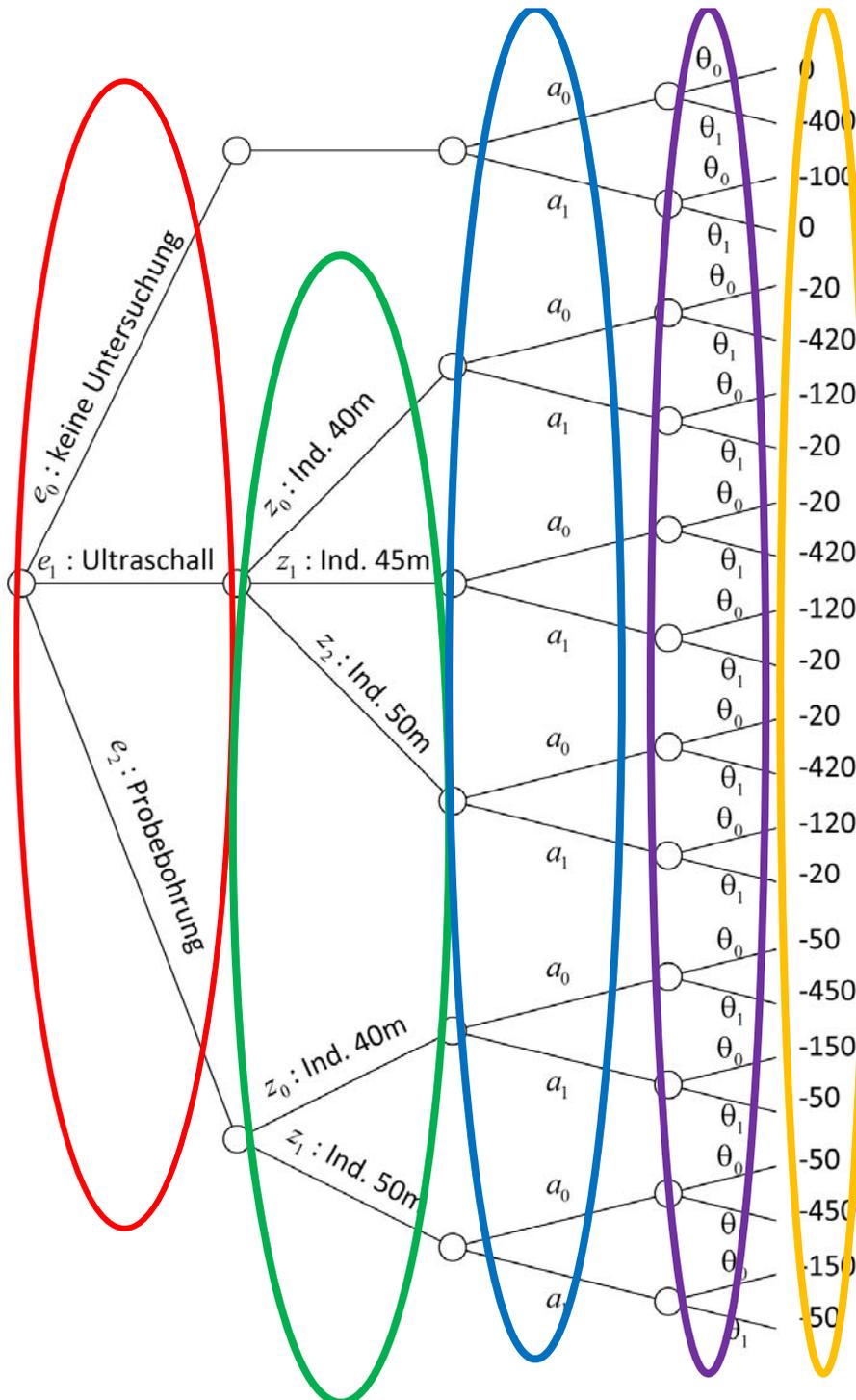
Entscheidungsmodell



Pre-Posterior Analyse

Entscheidungsmodell:

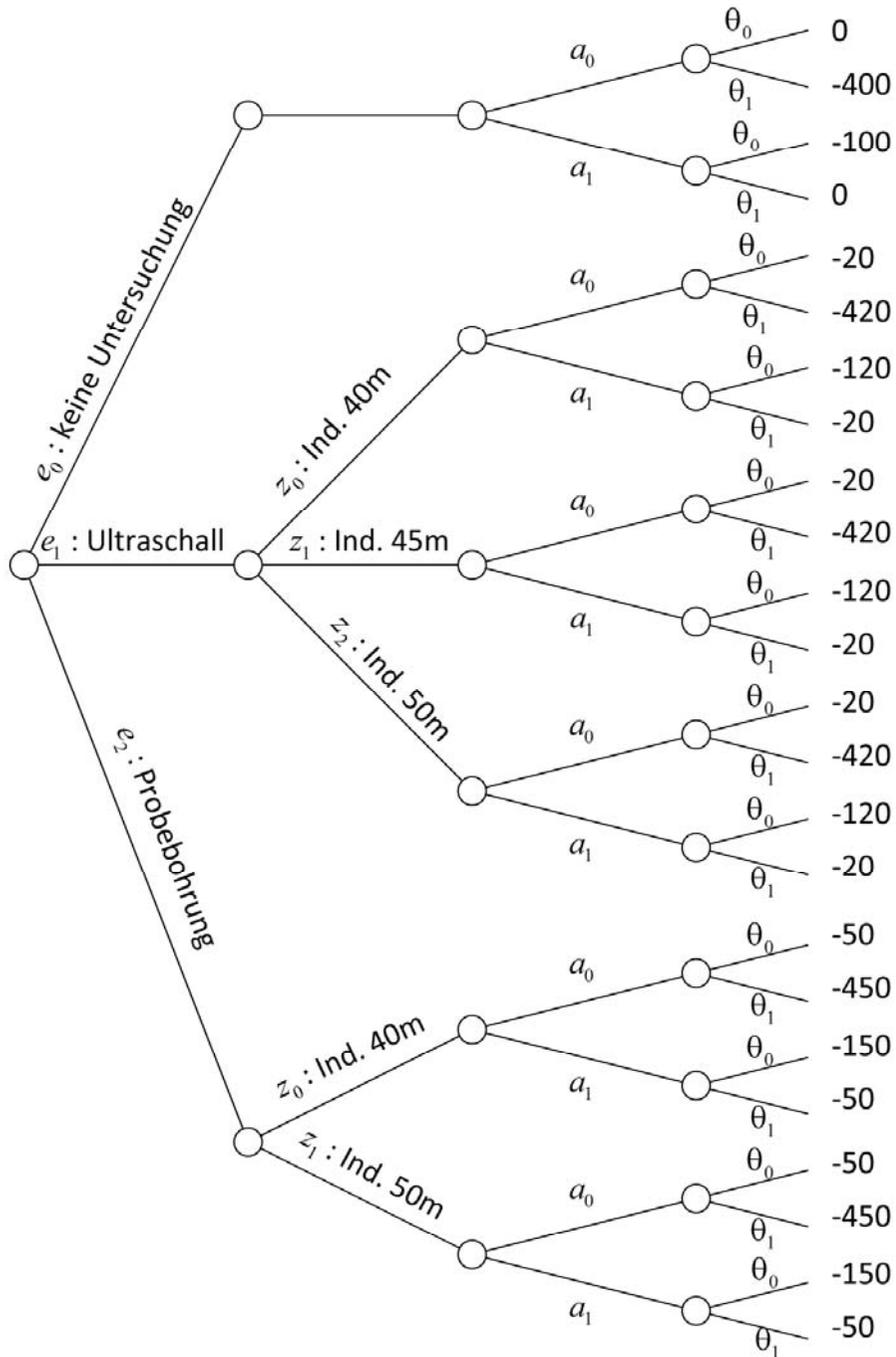
- **Untersuchungsoptionen**
- **Untersuchungsergebnisse**
- **Entscheidungsalternativen**
- **Zustände**
- **Konsequenzen**



Pre-Posterior Analyse

Entscheidungsmodell:

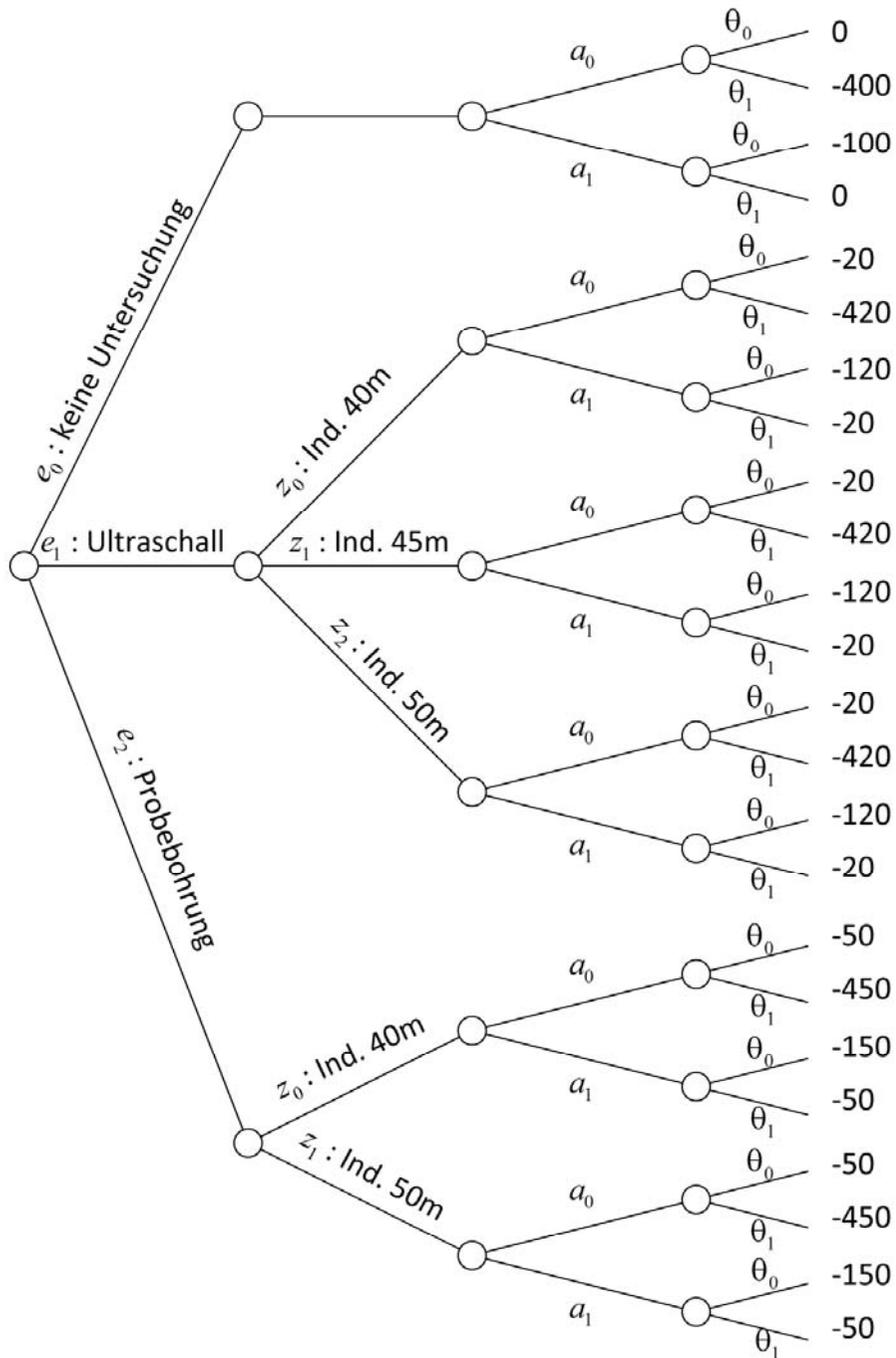
- Untersuchungsoptionen
- Untersuchungsergebnisse
- Entscheidungsalternativen
- Zustände
- Konsequenzen



Pre-Posterior Analyse

Lösen -> von rechts nach links:

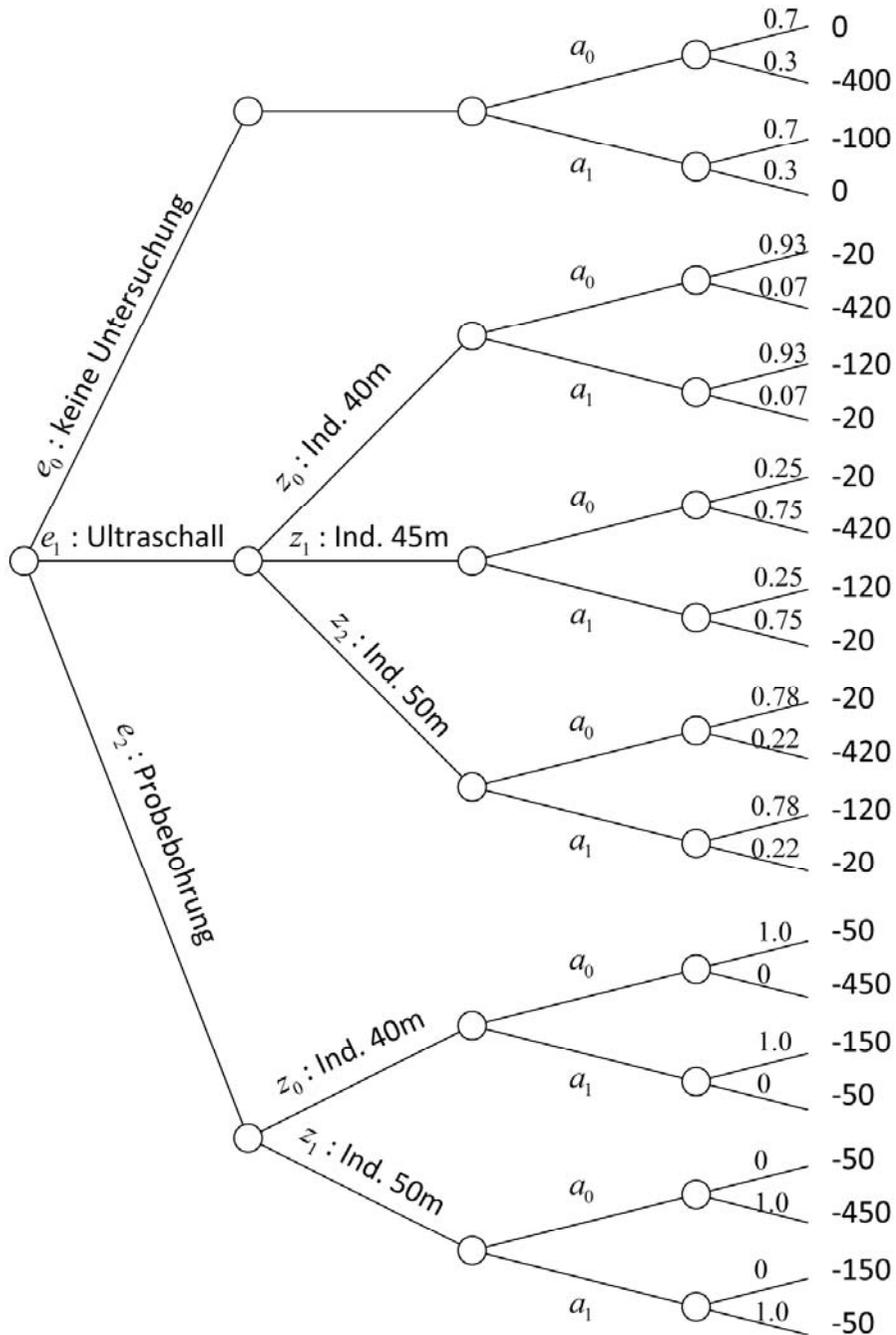
1. Ermitteln der
Wahrscheinlichkeiten



Pre-Posterior Analyse

Lösen -> von rechts nach links:

1. Ermitteln der
Wahrscheinlichkeiten



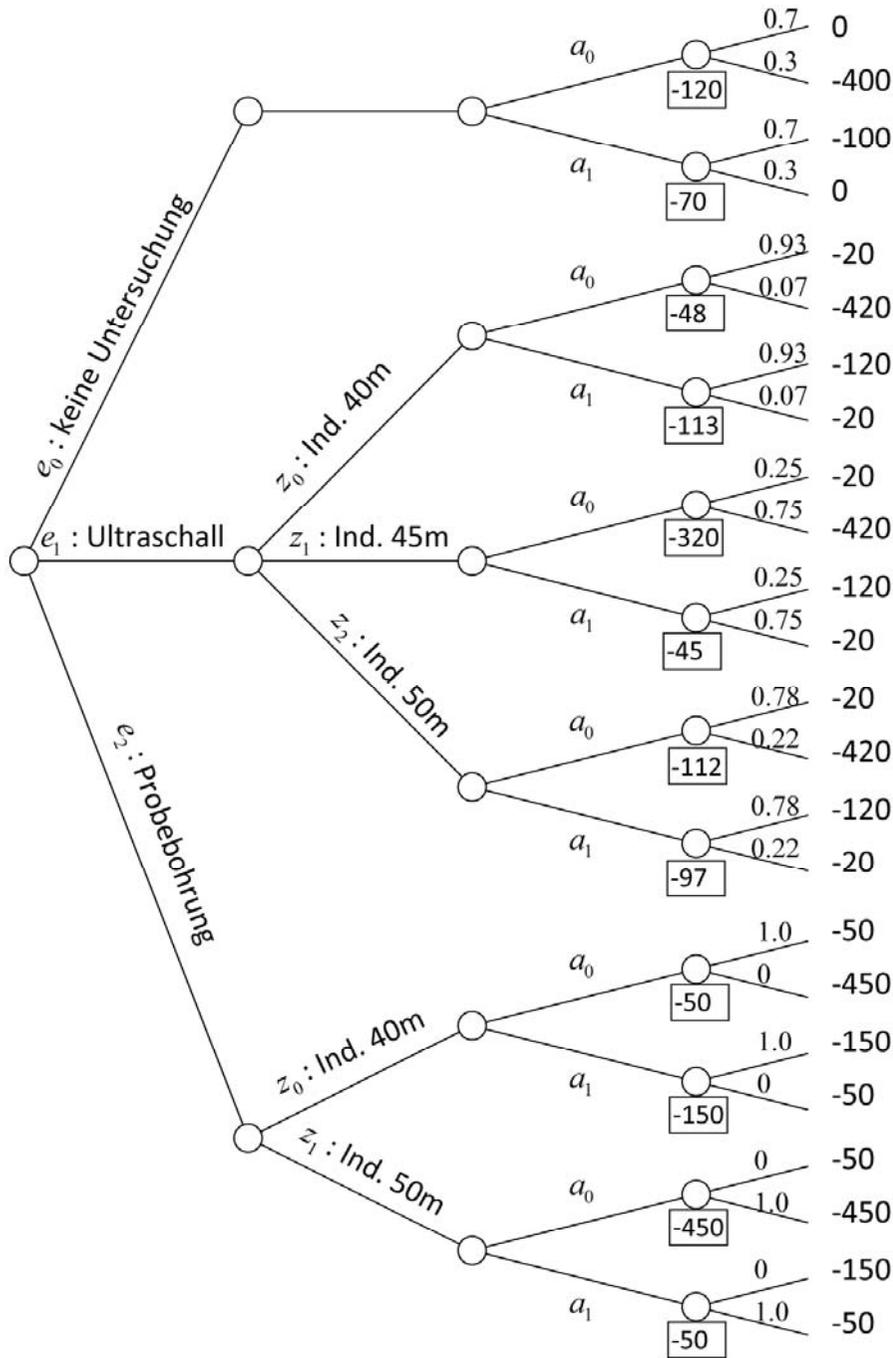
Pre-Posterior Analyse

Lösen -> von rechts nach links:

1. Ermitteln der
Wahrscheinlichkeiten

2. Ermitteln des erwarteten Nutzens

$$E[u|a, z, e] = \sum_i P[\theta_i | z, e] \times u[\theta_i | a, z, e]$$



Pre-Posterior Analysis

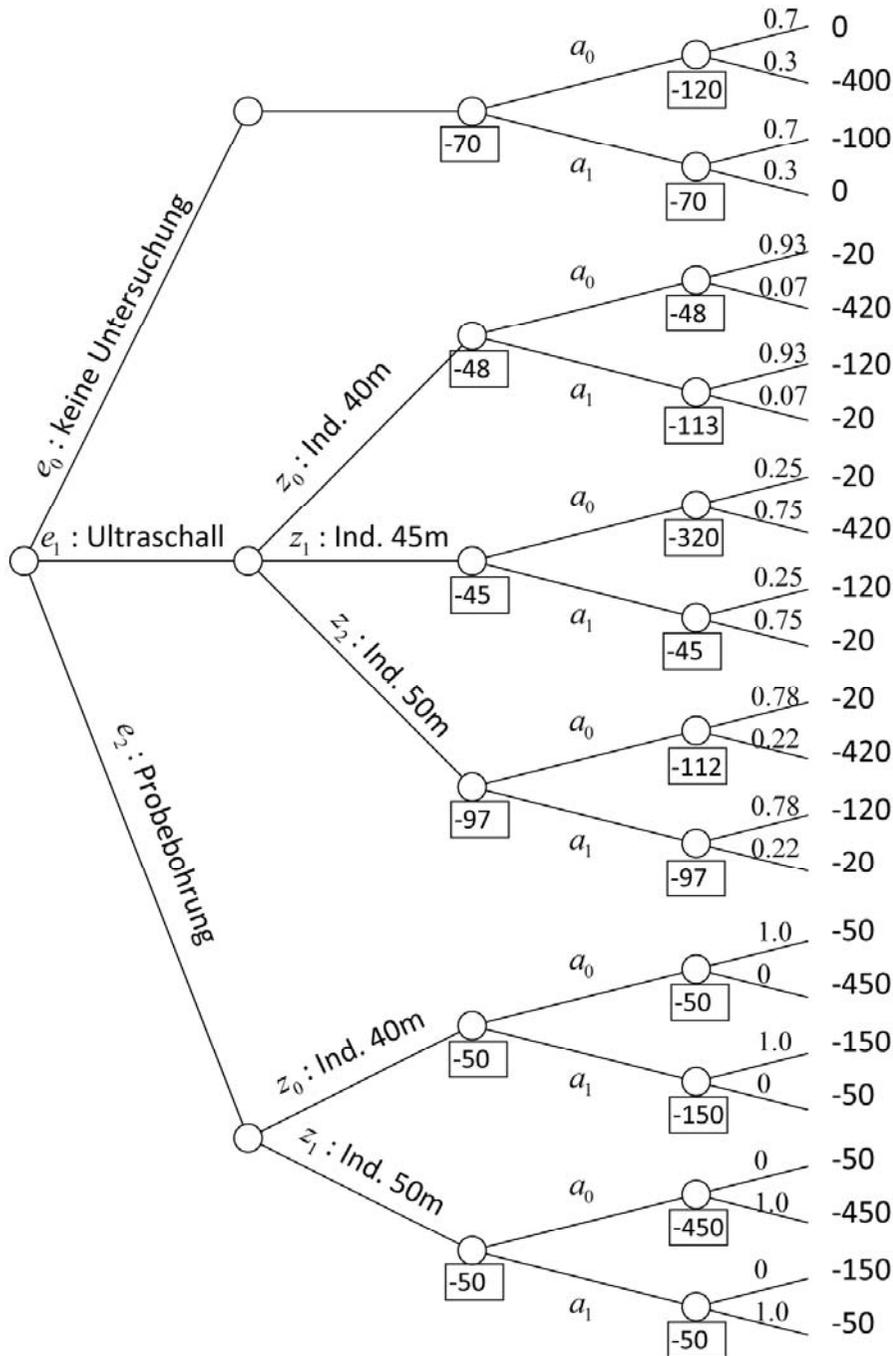
Lösen -> von rechts nach links:

1. Ermitteln der Wahrscheinlichkeiten

2. Ermitteln des erwarteten Nutzens

$$E[u|a, z, e] = \sum_i P[\theta_i | z, e] \times u[\theta_i | a, z, e]$$

3. Welche Entscheidung würde man treffen ?



Pre-Posterior Analysis

Lösen -> von rechts nach links:

1. Ermitteln der Wahrscheinlichkeiten

2. Ermitteln des erwarteten Nutzens

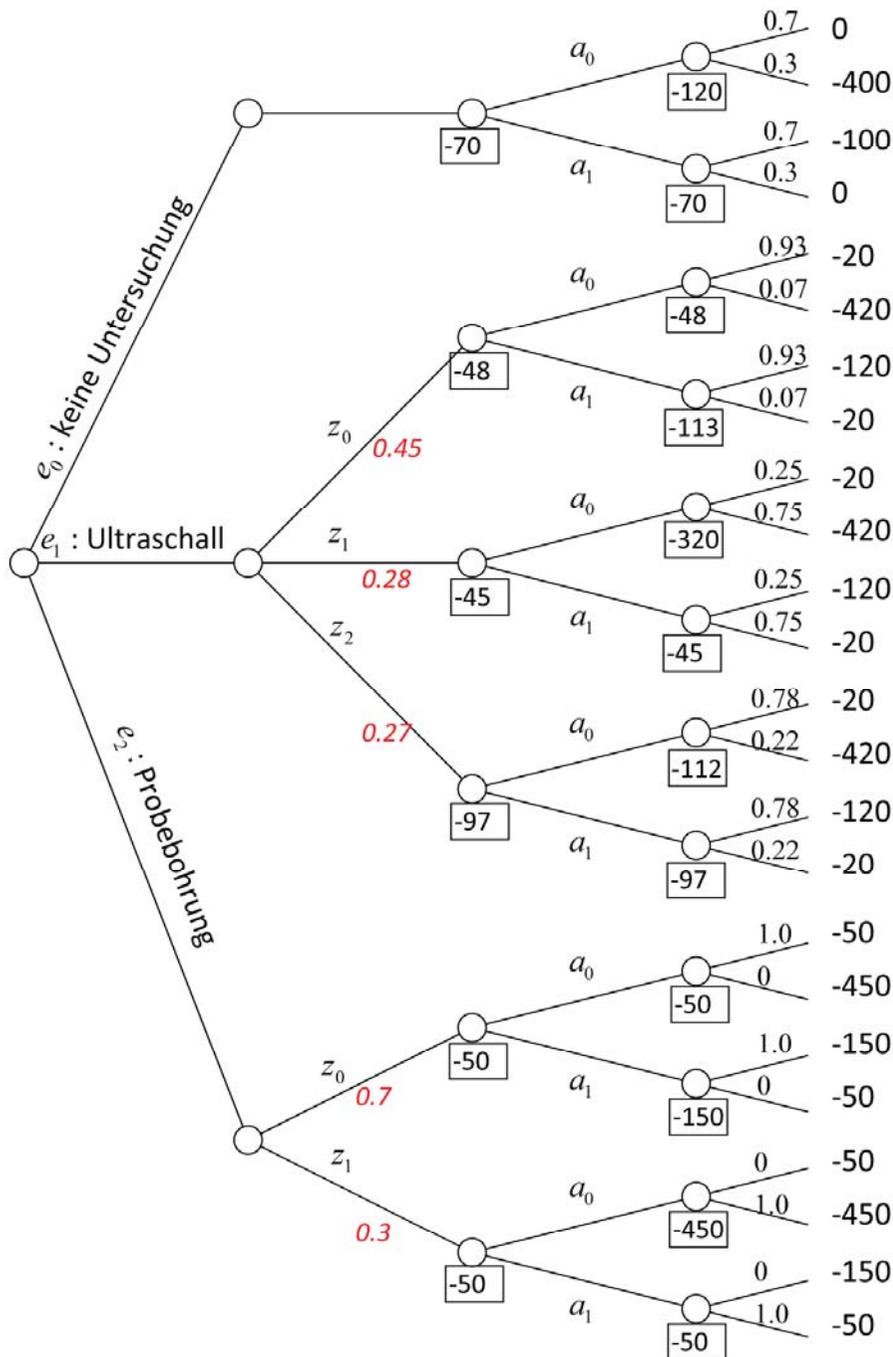
$$E[u|a, z, e] = \sum_i P[\theta_i | z, e] \times u[\theta_i | a, z, e]$$

3. Welche Entscheidung würde man treffen ?

4. Wie Wahrscheinlich sind die Testergebnisse ?

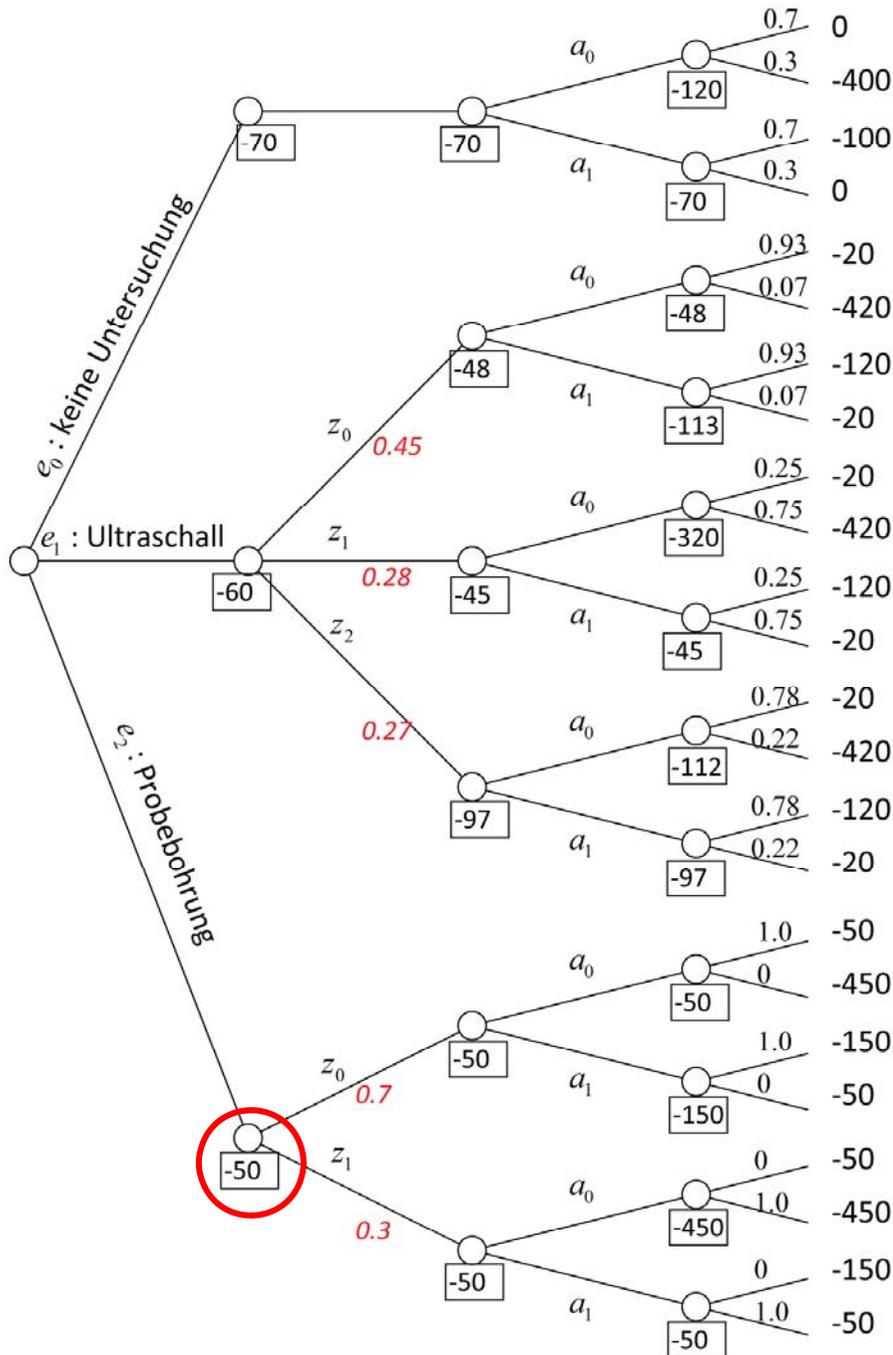
z.B.

$$\begin{aligned} P[z_0 | e_1] &= P[z_0 | e_1, \theta_0] P'[\theta_0] + P[z_0 | e_1, \theta_1] P'[\theta_1] \\ &= (0.6)(0.7) + (0.1)(0.3) = 0.45 \end{aligned}$$



Pre-Posterior Analysis

Lösen -> von rechts nach links:



1. Ermitteln der Wahrscheinlichkeiten

2. Ermitteln des erwarteten Nutzens

$$E[u|a, z, e] = \sum_i P[\theta_i | z, e] \times u[\theta_i | a, z, e]$$

3. Welche Entscheidung würde man treffen ?

4. Wie Wahrscheinlich sind die Testergebnisse ?

5. Erwarteter Nutzen je Untersuchung

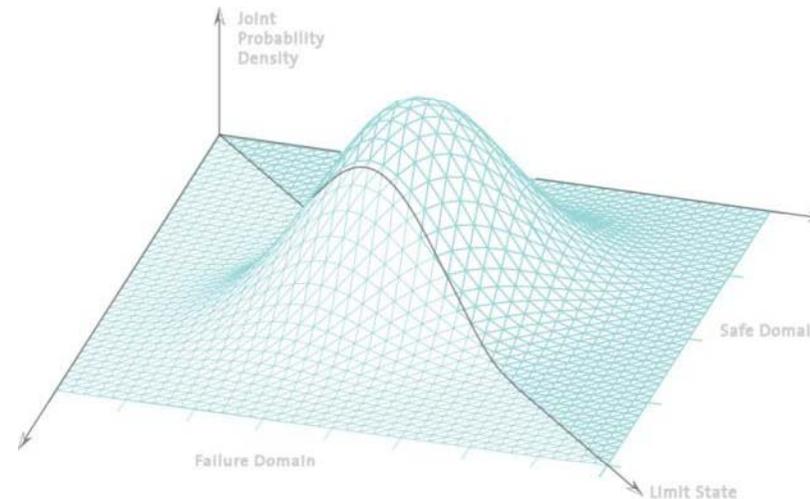
Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen

Zusammenfassung

- Je nach Problemstellung kommen verschiedene Entscheidungsanalysen zum Einsatz.
 - A-priori Analyse: Bei gegebener (Ist-)Information
 - A-posteriori Analyse: Bei neuer Information
 - Prä-posteriori Analyse: Bei mehreren möglichen Zusatzuntersuchungen.
- Es wurden hier die einfachen Grundprinzipien dieser Entscheidungsmodelle vorgestellt.
- Die Prinzipien lassen sich auf beliebig komplexe Problemstellung erweitern.

Zusammenfassung der Vorlesung

- Unsicherheiten im Ingenieurwesen
- Zusammenfassung von Daten – numerisch, graphisch
- Ereignisse und ihre Wahrscheinlichkeiten – bedingte Wahrscheinlichkeit, Satz von Bayes
- Zufallsvariablen und Prozesse
- Momente, Parameter und deren Schätzung
- Hypothesentests und Konfidenz, für Stichprobenstatistiken und Verteilungen
- Methoden der Zuverlässigkeit – Grenzzustände und Wahrscheinlichkeiten
- Entscheidungstheorie



Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Dr. J.Köhler