

## MODUL G - Übungsaufgaben

### Aufgabe G.1

Ein Unternehmen plant den Bau einer Fabrik in der Wüste. Um die Produktion zu gewährleisten, werden 100 Kiloliter Wasser am Tag benötigt. Es bestehen zwei Möglichkeiten, dies zu realisieren:

- $A_1$ : Bohren eines Brunnens vor Ort
- $A_2$ : Bau einer Pipeline zur Wasserversorgung

Die Pipeline kann für 100 Mio. CHF realisiert werden. Der Bau eines Brunnens kostet 10 Mio. CHF. Es kann jedoch nicht garantiert werden, dass der Brunnen ausreichend Wasser führt. In diesem Fall muss das Unternehmen eine zusätzliche Pipeline bauen.

- a) (A-Priori-Analyse) Aus Erfahrungen früherer Projekte mit ähnlichen geologischen Voraussetzungen kann geschlossen werden, dass ein Brunnen mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% ausreichend Wasser führen wird. Für welche Aktion ( $A_1$  oder  $A_2$ ) sollten sich die Geschäftsführer dieses Unternehmens entscheiden?

Die Kapazität des Brunnens kann durch eine Probebohrung geschätzt werden. Diese Bohrung verursacht Kosten von 1 Mio. CHF. Das Verfahren der Probebohrung liefert drei unterschiedliche Indikatoren bezüglich der Kapazität. Die Wahrscheinlichkeitstabelle für dieses Verfahren ist in Tabelle G.1.1 gegeben.

**Tabelle G.1.1:** Wahrscheinlichkeitstabelle für die Probebohrung.

Indikator	Kapazität des Brunnens	
	$\theta_1$ : weniger als 100 kl	$\theta_2$ : mehr als 100 kl
$I_1$ : Kapazität > 105 kl	0.1	0.8
$I_2$ : 95 kl < Kapazität < 105 kl	0.2	0.1
$I_3$ : Kapazität < 95 kl	0.7	0.1

- b) (A-Posteriori-Analyse) Die erste Probebohrung ergibt eine Indikation  $I_2$ . Sollte der Brunnen zur Wasserversorgung gebohrt werden?
- c) (Prä-posteriori Analyse) Entscheiden Sie, ob überhaupt eine Probebohrung durchgeführt werden sollte.

**Aufgabe G.2**

An der deutschen Nordseeküste wird ein alter Schutzdamm auf seine Qualität überprüft. Dabei soll sichergestellt werden, dass er den neuesten Sicherheitsbestimmungen genügt.

Sie sind der Experte/die Expertin und mit der Beurteilung dieses Schutzdamms beauftragt. Sie sollen überprüfen, ob die Höhe des Damms ausreichend ist und ob der Damm stabil genug ist oder verstärkt werden muss.

Um die notwendige Höhe des Damms bestimmen zu können, soll anhand von Messwerten der letzten 30 Jahre ein Modell für die maximale jährliche Wasserhöhe erstellt werden.

**Tabelle G.2.1:** Messdaten des maximalen jährlichen Wasserstandes

Jahr	Maximaler Wasserstand [m]	Jahr	Maximaler Wasserstand [m]
2009	1.970	1994	2.400
2008	2.830	1993	2.800
2007	2.190	1992	2.300
2006	2.540	1991	2.170
2005	3.570	1990	1.810
2004	2.340	1989	2.640
2003	2.670	1988	2.340
2002	2.780	1987	2.360
2001	2.340	1986	2.550
2000	2.610	1985	1.870
1999	1.970	1984	2.220
1998	3.320	1983	2.800
1997	2.070	1982	2.670
1996	2.170	1981	1.990
1995	2.860	1980	2.000

- Erstellen Sie eine erste Übersicht über die maximale jährliche Wasserhöhe der letzten 30 Jahre.
- Anhand der vorliegenden Daten möchtest du das Intervall bestimmen, in welchem der wahre Mittelwert mit einer Konfidenz von 95% liegt. Da der von Ihnen berechnete Wert für die Stichprobenstandardabweichung  $s_{\text{erwartungstreu}}$  sich gut mit den Angaben der einschlägigen Literatur deckt, gehen Sie davon aus, dass er der wahren Standardabweichung  $\sigma_x$  entspricht.

- c) Überprüfen Sie anhand geeigneter Wahrscheinlichkeitspapiere, welche Verteilung am besten zu diesen Daten passt.
- d) Sollte der Vergleich verschiedener Wahrscheinlichkeitspapiere nicht eindeutig sein, eignet sich auch ein Vergleich der Likelihoods.

Schätzen Sie hierfür zuerst die Parameter der Lognormalverteilung und der Gumbel Max Verteilung mit der Methode der Momente.

Berechnen Sie anschliessend die jeweilige Log - Likelihood und entscheiden Sie auf dieser Basis, welche Verteilungsfunktion die Daten besser repräsentiert.

- e) Führe für die Gumbel Max Verteilung einen Chi-Quadrat-Test auf einem Signifikanzniveau von 10% durch, um beurteilen zu können, ob das Modell verwendet werden kann, um die Messdaten zu repräsentieren.

**Tabelle G.2.1:** Tabelle für Chi-Quadrat-Test

Intervall	Häufigkeit	Wahrscheinlichkeit P [Stichprobe in diesem Intervall]	Erwartete Häufigkeit	Normalisierte Quadrate der Differenzen
0-2.3				
2.3-2.5				
2.5-2.7				
2.7-∞				
Summe				

- f) Der Schutzdamm hat eine Höhe von 5 Metern. Falls der jährliche maximale Wasserstand höher ist als der Schutzdamm, wird von einem Versagen des Dammes gesprochen. Berechne die Versagenswahrscheinlichkeit  $p_f$ .
- g) Der Damm erstreckt sich über eine Länge von mehreren hundert Metern. Aufgrund Erosion und anderen altersbedingten Schäden ist die Höhe des Dammes nicht überall gleich. Seine Höhe kann mit einer Lognormalverteilung mit  $\mu = 5[m]$ ,  $\sigma = 0.5[m]$  beschrieben werden.

Die Sicherheitsmarge berechnet sich demnach zu  $M = D - W$  wobei  $D =$  Dammhöhe und  $W =$  Wasserhöhe sind. Berechne die Versagenswahrscheinlichkeit  $p_f$  anhand einer Monte Carlo Simulation.

- h) Nebst der Dammhöhe soll auch die Stabilität des Dammes evaluiert werden.

Es wird angenommen, dass die jährliche maximale Belastung  $L$  mit einer normalverteilten Zufallsvariablen modelliert werden kann.

Der Mittelwert ist  $\mu_L = 6'000 \frac{kN}{m^2}$  und die Standardabweichung ist  $\sigma_L = 1'500 \frac{kN}{m^2}$ .

Die Belastbarkeit des Dammes  $R$  kann ebenfalls mit einer normalverteilten Zufallsvariablen modelliert werden.

Der Mittelwert ist  $\mu_R = 12'000 \frac{kN}{m^2}$  und die Standardabweichung ist  $\sigma_R = 3'000 \frac{kN}{m^2}$ .

Die Grenzzustandsfunktion der Stabilität des Dammes ist definiert als:

$$M = R - L. \quad \text{D.h. der Damm bricht (versagt) bei } M < 0.$$

Berechnen Sie die Versagenswahrscheinlichkeit des Dammes mit diesen Annahmen.

- i) Wenn es zu einem Stabilitätsversagen des Dammes kommt, dann entstehen Schäden von 6 Mio. Euro.

Es steht zur Diskussion, den Damm zu verstärken, so dass seine Belastbarkeit geringfügig steigt.

Der Mittelwert ist  $\mu_R = 15'000 \frac{kN}{m^2}$  und die Standardabweichung ist  $\sigma_R = 2'000 \frac{kN}{m^2}$ .

Die hierfür notwendigen Kosten betragen, diskontiert und auf ein Jahr umgerechnet, 0.2 Mio. Euro.

Berechnen Sie die neue Versagenswahrscheinlichkeit eines verstärkten Dammes, und vergleichen Sie das Risiko der zwei Varianten „belassen“ und „verstärken“.

Eine Annahme hierbei ist, dass über die Lebensdauer des Dammes mit dem gleichen Schadenerwartungswert gerechnet werden kann.