MODUL D – LÖSUNGEN

Aufgabe D.1

Die monatlichen Aufwendungen in CHF für den Wasserverbraucheines 2-Personenhaushalts seien durch eine Zufallsvariable X mit der folgenden Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion gegeben:

$$f_X(x) = \begin{cases} cx(15 - \frac{x}{4}) & \text{für } 0 \le x \le 60 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Welchen Wert muss c annehmen?

Die Integration der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion über ihren gesamten Wertebereich muss Eins ergeben:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\; dx = 1 \Rightarrow c\int_0^{60} x(15 - \frac{x}{4})\; dx = c\left[\frac{15}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^3\right]_0^{60} = 1$$

$$\Rightarrow c[(27000 - 18000) - 0] = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{9000}$$

b) Gib die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ der Zufallsvariablen X an.

In Aufgabe a) haben wir die Funktion bereits integriert:

$$F_X(x) = \frac{1}{9000}\left(\frac{15}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^3\right)$$

Über alle Wertebereiche lautet die Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{9000}\left(\frac{15}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^3\right) & 0 \le x \le 60 \\ 1 & 60 < x \end{cases}$$

c) Welche der vier monatlichen Ausgaben 30 CHF, 40 CHF, 50 CHF und 60 CHF überschreitet nicht das 0.9-Quantil der monatlichen Aufwendungen?

Wir integrieren die Funktion von 0 bis α. α ist der gesuchte Parameter, welcher dem zu bestimmenden Wert des 0.9-Quantils entspricht. Er liegt irgendwo zwischen 0 und 60.

$$P(X \le \alpha) = \frac{1}{9000}\int_0^{\alpha} x(15-\frac{x}{4})\,dx = \frac{1}{9000}\left[\frac{15}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^3\right]_0^{\alpha} = 0.9$$

$$\frac{1}{9000}\left(\frac{15}{2}\alpha^2 - \frac{1}{12}\alpha^3\right) = 0.9 \Rightarrow \frac{\alpha^3}{12} - \frac{15}{2}\alpha^2 + 8100 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^3 - 90\cdot\alpha^2 + 97200 = 0 \Rightarrow \alpha = 48.30$$

Somit überschreiten die Werte 30 CHF und 40 CHF nicht das 0.9-Quantil.

d) Wie hoch sind die mittleren monatlichen Aufwendungen für den Wasserverbrauch eines 2-Personenhaushalts?

Da die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion symmetrisch ist, kann der Mittelwert wie folgt berechnet werden:

$$\mu_X = \frac{(0+60)}{2} = 30$$

Alternativ (für nicht symmetrische Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen) kann der Mittelwert wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x\ f_X(x)dx \\ &= \frac{1}{9000}\int_0^{60} x^2(15-\frac{x}{4})\,dx \\ &= \frac{1}{9000}\left[5x^3 - \frac{1}{16}x^4\right]_0^{60} \\ &= \frac{1}{9000}(1080000-810000) = \frac{270000}{9000} = 30 \end{aligned}$$

Aufgabe D.2

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für eine Zufallsvariable ist in der Abbildung 4.2.1 dargestellt ($a=1,\ b=2,\ c=3$ und $d=6$).

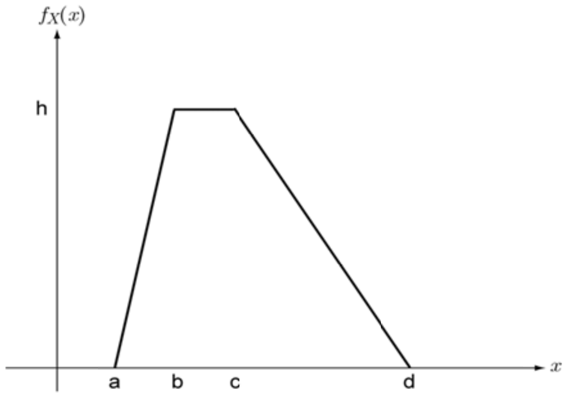


Abbildung D.2.1: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion.

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und die Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion analytisch.

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{h}{(b-a)}(x-a) & a \le x < b \\ h & b \le x < c \\ \dfrac{h}{(d-c)}(d-x) & c \le x < d \\ 0 & d \le x \end{cases}$$

Die Integration der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ergibt die kumulative Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx$$

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & x<a \\ \frac{h}{(b-a)}\left(\frac{1}{2}x^2-ax\right)+C_1 & a\le x<b \\ hx+C_2 & b\le x<c \\ \frac{h}{(d-c)}\left(dx-\frac{1}{2}x^2\right)+C_3 & c\le x<d \\ 1 & d\le x \end{cases} \Rightarrow F_X(x)=\begin{cases} 0 & x<1 \\ h\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)+C_1 & 1\le x<2 \\ hx+C_2 & 2\le x<3 \\ h\left(2x^2-\frac{1}{6}x\right)+C_3 & 3\le x<6 \\ 1 & 1\le x \end{cases}$$

Um die Konstanten in der Verteilungsfunktion zu erhalten, werden die folgenden Randbedingungen (oder Übergangsbedingungen) untersucht:

Für $x=1$ $\quad 0=h\left(\frac{1}{2}-1\right)+C_1 \quad \Rightarrow C_1=\frac{h}{2}$

Für $x=2$ $\quad h\left(\frac{4}{2}-2\right)+C_1=2h+C_2 \Rightarrow C_2=C_1-2h=-\frac{3}{2}h$

Für $x=3$ $\quad 3h+C_2=h\left(6-\frac{9}{6}\right)+C_3 \Rightarrow C_3=C_2-\frac{3}{2}h=-3h$

Einsetzen in die kumulative Verteilungsfunktion ergibt:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & (x \le 1) \\ h\left(\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\right) & (1 < x \le 2) \\ h\left(x - \frac{3}{2}\right) & (2 < x \le 3) \\ h\left(2x - \frac{1}{6}x^2 - 3\right) & (3 < x \le 6) \\ 1 & (6 \le x) \end{cases}$$

b) Bestimme den Modalwert und den Parameter h.

Der Modalwert ist der Wert, bei welchem das Maximum der Dichtefunktion liegt. In diesem Fall ist das Maximum nicht ein einzelner Wert, sondern ein Wertebereich zwischen *b* und *c*.

Um h zu bestimmen, kann eine Gleichung für die Fläche aufgestellt werden – die Fläche unter der Dichtefunktion muss 1 ergeben.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$$

Mit der Trapezformel:

$$\frac{(d-a)+(c-b)}{2}h = 1 \Rightarrow \frac{(6-1)+(3-2)}{2} \cdot h = 1 \Rightarrow 3 \cdot h = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{3}$$

Oder durch Zusammensetzen der einzelnen Flächenteile:

$$\frac{(d-c)}{2}h + (c-b)h + \frac{(b-a)}{2}h = 1$$

$$\frac{(6-3)}{2}h + (3-2)h + \frac{(2-1)}{2}h = 1$$

$$3h = 1$$

$$h = \frac{1}{3}$$

c) Berechne den Mittelwert.

Für a =1, b=2, c=3, d=6 und h=1/3 nimmt die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion folgende Form an:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{(x-1)}{3} & 1 \le x < 2 \\ \frac{1}{3} & 2 \le x < 3 \\ -\frac{(x-6)}{9} & 3 \le x < 6 \\ 0 & 6 \le x \end{cases}$$

Der Mittelwert kann dann wie folgt berechnet werden:

$$\mu_X = E\left[X\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x\ f_X(x)dx = \int_1^2 \frac{x(x-1)}{3}dx + \int_2^3 \frac{x}{3}dx + \int_3^6 \frac{-x(x-6)}{9}dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{6}\right]_1^2 + \left[\frac{x^2}{6}\right]_2^3 - \left[\frac{x^3}{27} - \frac{x^2}{3}\right]_3^6 = \frac{28}{9}$$

d) Berechne den Wert des Medians.

Der Median entspricht dem 0.5-Quantil:

$$P(X \le \alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} f_X(x)dx = F_X(\alpha) = 0.5$$

Die Integration (hier: Einsetzen in die Verteilungsfunktion) erfolgt abschnittsweise:

$$\Rightarrow \left.\frac{(x-1)^2}{6}\right|_1^2 = \frac{1}{6}; \frac{1}{6} < 0.5$$

$$\Rightarrow \left.\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right|_2^3 = \frac{1}{2} - (\frac{2}{3} - \frac{1}{2}) = \frac{2}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = 0.5 \qquad F_X(3) = 0.5$$ Der Median ist 3.

e) Ermittle grafisch den Median aus der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion. Diskutiere wie der Mittelwert grafisch ermittelt werden kann.

Der Median hat den Wert x, bei welchem die Fläche unter der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion halbiert wird (siehe Abbildung D.2.1).

Fläche $$A_1 = (2-1)\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Fläche $$A_2 = (3-2)\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Fläche $$A_3 = (6-3)\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Da $A_1 + A_2 = A_3$, liegt der Median bei x = 3.

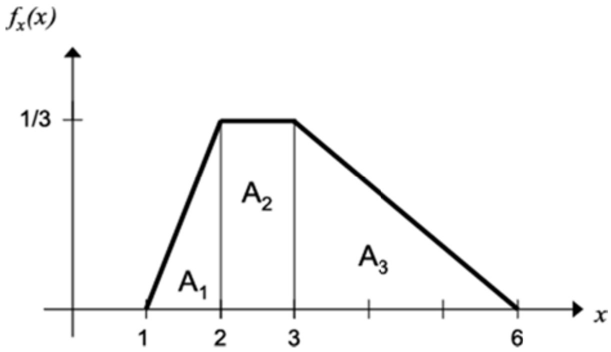


Abbildung D.2.1: Bestimmung des Medians.

Der Mittelwert ist – grafisch interpretiert - der Schwerpunkt der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion. Dies bedeutet, dass die Momente benötigt werden, um den Wert des Mittelwertes abzuschätzen. Der Mittelwert liegt dort, wo die Momente der jeweiligen Fläche im Gleichgewicht sind (siehe Abb. D.2.2).

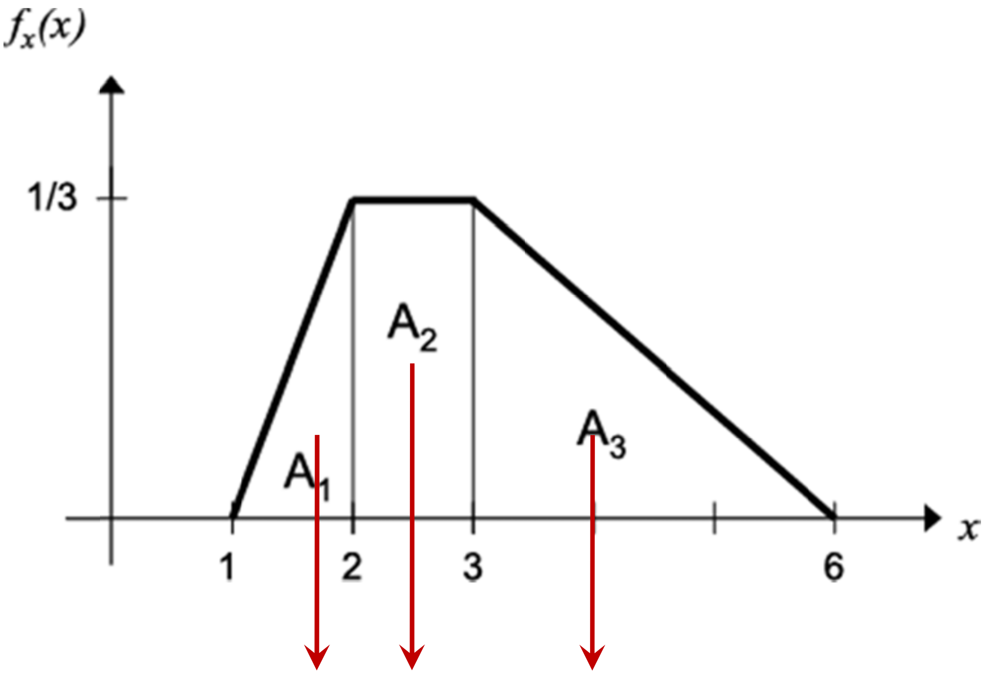


Abbildung D.2.2: Abschätzung des Mittelwertes.

Deshalb sollte in einer grafischen Lösung die Flächen A_i und die zugehörigen "Hebelarme" d_i ermittelt werden, um den Wert x des Mittelwertes zu bestimmen.

Allgemein berechnet sich die Schwerpunktkoordinate x_S einer aus mehreren Teilflächen A_i zusammengesetzten Fläche gemäss der folgenden Formel (x_{S_i} bezeichnet die Koordinaten des Schwerpunkt der Teilfläche i):

$$x_S = \frac{\sum_i x_{S_i} \cdot A_i}{\sum_i A_i}$$

Für den Fall unserer Dichtefunktion ergibt sich:

$$x_S = \frac{\sum_i x_{S_i} \cdot A_i}{\sum_i A_i} = \frac{\left(\frac{2}{3}+1\right)\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{2}+2\right)\cdot\frac{1}{3}+(1+3)\cdot\frac{1}{2}}{1} = 3.11$$

Aufgabe D.3

a) Berechne die Koordinaten von *P (x,y)* und beschreibe dann die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion.

Aufstellen der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion durch die unbekannten a und b:

$$f_X(x) = \begin{cases} ax & (0 < x \leq 4) & \text{linear} \\ k(x-12)^2 & (4 < x \leq 12) & \text{parabolisch} \\ 0 & (\text{sonst}) & \end{cases}$$

Übergangsbedingung im Punkt P (linke Seite = rechte Seite):

$$f_X\left(4_{links}\right) = f_X\left(4_{rechts}\right)$$
$$4a = k(4-12)^2$$
$$\Rightarrow k = \frac{1}{16}a \qquad (1)$$

Da Fläche unter der Dichtefunktion = 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int_0^4 axdx + \int_4^{12} k(x-12)^2 dx \overset{!}{=} 1 \qquad (2)$$

Mit (1) und (2) führt zu:

$$a = \frac{3}{56} \qquad b = \frac{3}{896}$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist nun bestimmt:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{56}x & (0 < x \leq 4) \\ \frac{3}{896}(x-12)^2 & (4 < x \leq 12) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$$

Durch einsetzen für $x = 4$ erhält man die Koordinaten von Punkt P:

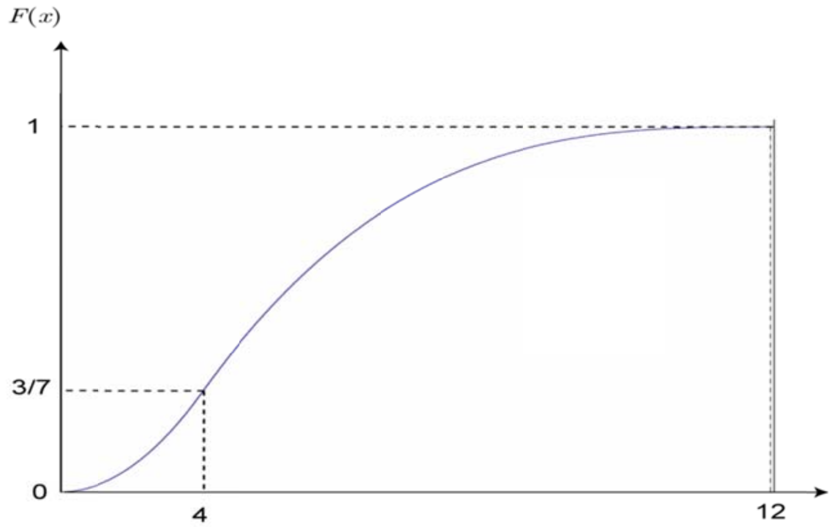
$$P\left(4, \frac{3}{14}\right)$$

b) Beschreibe und zeichne die kumulative Verteilungsfunktion von X anhand einiger charakteristischer Zahlen in der Grafik.

Mit Integration über die jeweiligen Bereiche erhält man:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & (x \le 0) \\ \dfrac{3}{112}x^2 & (0 < x \le 4) \quad \text{parabolisch} \\ \dfrac{(x-12)^3}{896} + 1 & (4 < x \le 12) \quad \text{kubisch} \\ 1 & (12 < x) \end{cases}$$



c) Berechne den Mittelwert von X.

$$\mu_X = E[X] = \int_0^{12} x \cdot f_X(x)dx = \int_0^4 x \cdot \frac{3}{56}xdx + \int_4^{12} x \cdot \frac{3}{896}(x-12)^2 dx \quad = \frac{32}{7}$$

d) Berechne *P[X>4]*.

Da:

$$P[X > a] = 1 - P[X \le a]$$

$$\Rightarrow P[X > 4] = 1 - P[X \le 4] = 1 - F_X(4) = 1 - \int_0^4 \frac{3}{56}xdx = 1 - \left[\frac{3}{112}x^2\right]_0^4 = \frac{4}{7}$$

Aufgabe D.4

a) Die Erwartungswerte von X und Y sind:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)dx = \int_{-1}^{1} x \cdot \frac{1}{2}dx = \left[\frac{1}{4}x^2\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_Y(y)dy = \frac{3}{4} \cdot \int_{0}^{2} y \cdot \left(2y - y^2\right)dy = \frac{3}{4} \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot y^3 - \frac{y^4}{4}\right]_0^2 = 1$$

Der Erwartungswert für $6X - 4Y + 2$ wird wie folgt berechnet:

$$E(6X - 4Y + 2) = 6E(X) - 4E(Y) + 2 = -2$$

b) Die Varianzen für X und Y betragen:

$$Var(X) = E\left[X^2\right] - \left(E\left[X\right]\right)^2 \qquad Var(Y) = E\left[Y^2\right] - \left(E\left[Y\right]\right)^2$$

$$E\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}x^2dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}$$

$$E\left[Y^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot f_Y(y)\,dy = \frac{3}{4} \cdot \int_{0}^{2} y^2 \cdot \left(2y - y^2\right)dy = \frac{3}{4}\left[\frac{y^4}{2} - \frac{y^5}{5}\right]_0^2 = \frac{6}{5}$$

$$Var(X) = \frac{1}{3} \qquad Var(Y) = \frac{1}{5}$$

Daraus ergibt sich die folgende Berechnung der Kovarianz $C_{6X;4Y}$:

$$C_{X,Y} = \rho_{X,Y} \cdot \sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)} = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{1}{45}}$$

$$C_{6X;4Y} = 6 \cdot 4 \cdot C_{X;Y} = 6 \cdot 4 \cdot \sqrt{\frac{1}{45}} = 24 \cdot \sqrt{\frac{1}{45}}$$

c)

$$Var(6X - 4Y + 2) = Var(6X) + Var(4Y) - 2 \cdot C_{6X;4Y} =$$

$$6^2 \cdot Var(X) + 4^2 \cdot Var(Y) - 2 \cdot C_{6X;4Y} = 36 \cdot \frac{1}{3} + 16 \cdot \frac{1}{5} - 2 \cdot 24 \cdot \sqrt{\frac{1}{45}} \cong 8.04$$

d)

$$E(6X^2 - 4Y^2) = 6E\left[X^2\right] - 4E\left[Y^2\right] = 6\frac{1}{3} - 4\frac{6}{5} = -\frac{14}{5}$$

Aufgabe D.5

a) $P[N_U = N_G] = 0.2910 + 0.3580 + 0.1135 + 0.0505 = 0.813$

b) Gesucht ist eine bedingte Wahrscheinlichkeit:

$$P[N_G \mid N_U = 2] = \frac{P[N_G \cap (N_U = 2)]}{P[N_U = 2]}$$

Die bedingten Wahrscheinlichkeiten werden wie folgt berechnet:

$$P[N_G = 0 \mid N_U = 2] = \frac{P[(N_G = 0) \cap (N_U = 2)]}{P[N_U = 2]} = \frac{0.01}{0.1785} = 0.056$$

$$P[N_G = 1 \mid N_U = 2] = \frac{P[(N_G = 1) \cap (N_U = 2)]}{P[N_U = 2]} = \frac{0.025}{0.1785} = 0.1401$$

$$P[N_G = 2 \mid N_U = 2] = \frac{P[(N_G = 2) \cap (N_U = 2)]}{P[N_U = 2]} = \frac{0.1135}{0.1785} = 0.6359$$

$$P[N_G = 3 \mid N_U = 2] = \frac{P[(N_G = 3) \cap (N_U = 2)]}{P[N_U = 2]} = \frac{0.03}{0.1785} = 0.1681$$

Aufgabe D.6

a) Gesucht ist die Dichtefunktion der Zufallsvariablen $Z = S + T$. Z ist auf dem Intervall $[0, \infty]$ definiert.

Die Dichtefunktion von T und S sind gegeben durch

$$f_T(t) = \frac{1}{\mu_T} \cdot e^{\frac{-t}{\mu_T}} \ ,(t \geq 0) \text{ und } f_S(s) = \frac{1}{\mu_S} \cdot e^{\frac{-s}{\mu_S}} = \frac{1}{\mu_S} \cdot e^{\frac{-(z-t)}{\mu_S}} \ ,(s \geq 0)$$

wobei $s, t \geq 0$ und $z \geq t$, sonst $s \leq 0$.

Die Berechnung des Faltungsintegrals:

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_0^z f_T(t) f_S(z-t)\,dt \\
&= \int_0^z \left(\frac{1}{\mu_T} e^{\frac{-t}{\mu_T}}\right)\left(\frac{1}{\mu_S} e^{\frac{-(z-t)}{\mu_S}}\right) dt \\
&= \int_0^z \frac{1}{\mu_T \mu_S} e^{\left(-\left(\frac{1}{\mu_T} - \frac{1}{\mu_S}\right) t - \frac{z}{\mu_S}\right)} dt && \leftarrow \ a^x a^y = a^{x+y} \\
&= \int_0^z \frac{1}{\mu_T \mu_S} e^{\left(\left(\frac{-\mu_S+\mu_T}{\mu_T \mu_S}\right) t - \frac{z}{\mu_S}\right)} dt \\
&= \left[\frac{1}{\mu_T \mu_S} \cdot \frac{\mu_T \mu_S}{-\mu_S + \mu_T} e^{\left(\left(\frac{-\mu_S+\mu_T}{\mu_T \mu_S}\right) t - \frac{z}{\mu_S}\right)}\right]_0^z && \leftarrow \ \int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} \\
&= \frac{1}{-\mu_S + \mu_T} e^{\left(\frac{-\mu_S+\mu_T}{\mu_T \mu_S} z - \frac{z}{\mu_S}\right)} - \frac{1}{-\mu_S + \mu_T} e^{\left(-\frac{z}{\mu_S}\right)} \\
&= \frac{1}{\mu_T - \mu_S}\left(e^{\left(\frac{-z\mu_S}{\mu_T \mu_S} + \frac{z\mu_T}{\mu_T \mu_S} - \frac{z}{\mu_S}\right)} - e^{\left(-\frac{z}{\mu_S}\right)}\right) \\
&= \frac{1}{\mu_T - \mu_S}\left(e^{-\frac{z}{\mu_T}} - e^{-\frac{z}{\mu_S}}\right) \\
&= \frac{1}{10 - \frac{1}{12}}\left(e^{-\frac{z}{10}} - e^{-12z}\right) && \leftarrow \ \mu_T = 10,\ \mu_S = \frac{1}{12} \\
&= \underline{\underline{0.1008\left(e^{-\frac{z}{10}} - e^{-12z}\right)}}
\end{aligned}
$$

b) Gesucht ist $P(Z \leq 5) = F_Z(5)$

$$F_Z(z) = \int_0^z f_Z(y)dy$$

$$= \int_0^z 0.1008\left(e^{-\frac{y}{10}} - e^{-12y}\right)dy$$

$$= 0.1008\left[-10e^{-\frac{y}{10}} + \frac{1}{12}e^{-12y}\right]_0^z$$

$$= 0.1008\left[-10e^{-\frac{z}{10}} + \frac{1}{12}e^{-12z} - (-10 + \frac{1}{12})\right]$$

$$= 0.1008\left(9.9167 - 10e^{-\frac{z}{10}} + \frac{1}{12}e^{-12z}\right)$$

und daraus folgt:

$$F_Z(5) = 0.1008\left(9.9167 - 10e^{-\frac{5}{10}} + \frac{1}{12}e^{-12\cdot 5}\right) = 0.389$$

c) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass in den nächsten 5 Jahren für beide Brücken keine Wartungsarbeiten anfallen.

aus $F_T(t) = 1 - e^{-\frac{1}{\mu_T}t} = 1 - e^{-0.1t}$ folgt

$$P\left[T_1 > 5, T_2 > 5\right] = P\left[T_1 > 5\right]P\left[T_2 > 5\right] = \left(P\left[T > 5\right]\right)^2 = \left(1 - P\left[T \leq 5\right]\right)^2$$

$$= (1 - (1 - e^{-0.1\cdot 5}))^2 = 0.368$$

Aufgabe D.7

Für S_n gilt

$$E[S_n] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] \qquad Var[S_n] = V\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} V[X_i]$$

S_{50} ist normalverteilt, mit $N\left(\mu_{S_n} = 50, \sigma_{S_n} = \sqrt{200}\right)$.

Für $\overline{X}_n$ gilt

$$E\left[\overline{X}_n\right] = \frac{1}{n} E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \qquad V\left[\overline{X}_n\right] = \frac{1}{n^2} V\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$

$\overline{X}_{50}$ ist normalverteilt, mit $N\left(1, \sqrt{\frac{200}{50^2}}\right) = N\left(\mu_{\overline{X}_{50}} = 1, \sigma_{\overline{X}_{50}} = \sqrt{0.08}\right)$.

a) X_1 ist normalverteilt, mit $N\left(\mu_{X_1} = 1, \sigma_{X_1} = 2\right)$. Durch Standardisieren erhalten wir Z, mit $N(0,1)$ über $Z = \frac{X_1 - 1}{2}$. Wir erhalten dann

$$P\left(E[X_1] - 1 \le X_1 \le E[X_1] + 1\right) = P\left(0 \le X_1 \le 2\right) = P\left(-\frac{1}{2} \le Z \le \frac{1}{2}\right)$$

$$P_Z\left(\frac{1}{2}\right) - P_Z\left(-\frac{1}{2}\right) = P_Z\left(\frac{1}{2}\right) - \left(1 - P_Z\left(\frac{1}{2}\right)\right) =$$

$$= P_Z\left(\frac{1}{2}\right) + P_Z\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 2 \cdot \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - 1$$

$$\cong 2 \cdot 0.6915 - 1 = 0.3830$$

b) Durch Standardisieren: Für $n = 50$ erhalten wir $Z = \frac{S_n - 50}{\sqrt{200}}$.

Es folgt: $P\left(49 \le S_n \le 51\right) = P\left(-0.07 \le Z \le 0.07\right) = 2 \cdot \Phi\left(0.07\right) - 1 \cong 2 \cdot 0.528 - 1 = 0.056$

c) Durch Standardisieren: Für $n = 50$ erhalten wir $Z = \frac{\overline{X}_{50} - 1}{\sqrt{0.08}}$.

Es folgt: $P\left(0 \le \overline{X}_{50} \le 2\right) = P\left(-3.5 \le Z \le 3.5\right) = 2 \cdot \Phi\left(3.5\right) - 1 \cong 2 \cdot 0.99977 - 1 = 0.99954$

Aufgabe D.8

Auf das 1000-jährige Hochwasser bemessen heisst, dass das Bauwerk das Hochwasser Q_B schadlos abführen kann. Q_B ist der Abfluss, der im Mittel einmal in 1000 Jahren erreicht oder überschritten wird.

Ereignis H: Überflutung des Bauwerks in einem Jahr ($Qmax > Q_B$)
Ereignis K: keine Überflutung des Bauwerks in einem Jahr ($Qmax < Q_B$)

$$P(H) = \frac{1}{1000} = 0.001 = p_1$$
$$P(K) = 1 - 0.001 = 0.999 = \overline{p}_1$$

a) Das Ereignis Überflutung im 10-ten Jahr einer 10-Jahres-Periode kann durch eine geometrische Verteilung beschrieben werden:

$$P(H_{best.,1}) = (p_1)^1 \cdot (\overline{p}_1)^{10-1} = (0.001) \cdot (0.999)^9 = 0.000991$$

b) Die Jahre des Auftretens spielen keine Rolle $\Rightarrow$ Binomial-Verteilung

$$P(H_{unbest.,2}) = \frac{10!}{2! \cdot (10-2)!} (p_1)^2 \cdot (\overline{p}_1)^{10-2} = 45 \cdot (0.001)^2 \cdot (0.999)^8 = 0.000045$$

c)
$$P(H_{unbest.,0}) = \frac{10!}{0! \cdot (10-0)!} (p_1)^0 \cdot (\overline{p}_1)^{10-0} = (0.001)^0 \cdot (0.999)^{10} = 0.99004$$

d) Ereignis darf 0-mal und 1-mal auftreten.

$$P(H_{unbest.,1}) = \frac{10!}{1! \cdot (10-1)!} (p_1)^1 \cdot (\overline{p}_1)^{10-1} = 10 \cdot (0.001)^1 \cdot (0.999)^9 = 0.00991$$
$$P(H_{unbest.,0}) = \frac{10!}{0! \cdot (10-0)!} (p_1)^0 \cdot (\overline{p}_1)^{10-0} = (0.001)^0 \cdot (0.999)^{10} = 0.99004$$
$$P(H_{\max,1}) = P(H_{unbest.,0}) + P(H_{unbest.,1}) = 0.99004 + 0.00991 = 0.99995$$

e) Die Auftretenshäufigkeit hat keinen Einfluss auf das Ergebnis. Mit Hilfe der Binomialverteilung ergibt sich daher:

$$P(H_{unbest.,10}) = \frac{100!}{10! \cdot (100-10)!} (p_1)^{10} \cdot (\overline{p}_1)^{100-10} = 1.58 \cdot 10^{-17}$$

f) Verwendet man die Binomialverteilung erhält man:

$$P(H_{unbest.,0}) = \frac{1000!}{0! \cdot (1000-0)!} (p_1)^0 \cdot (\overline{p}_1)^{1000-0} = (0.001)^0 \cdot (0.999)^{1000} = 0.368$$

Und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist die Wahrscheinlichkeit des Komplementärereignisses:

$$P(H_{unbest.,\geq 1}) = 1 - 0.368 = 0.632$$

Aufgabe D.10

a) Konstante Intensität (mittlere Auftretensrate von Regenereignissen pro Zeiteinheit): $\nu(t) = 2$
$t = 3$ Monate (3.,4. und 5. Monat)

$$u = \nu(t) \cdot t = 2 \cdot 3 = 6 \qquad P_n(t) = \frac{u^n}{n!} e^{-u}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass kein Regenereignis stattfindet, beträgt:

$$P_0(t) = \mathrm{e}^{-u}$$

$$P_0(3) = \mathrm{e}^{-u} = e^{-6} = 0.0025$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass genau ein Regenereignis stattfindet, ist:

$$P_1(t) = \frac{u^1}{1!} e^{-u}$$

$$P_1(3) = \frac{6^1}{1!} e^{-6} = 6 \cdot e^{-6} = 0.0149$$

b) Die Intensität $\nu(t)$ eines Regenereignisses innerhalb der ersten 5 Monate wird folgendermassen berechnet:

Der Poissonparameter ergibt sich durch abschnittsweise Integration in den Intervallen (0≤ τ < 3) und (3 ≤ τ <5):

$$u = \int_0^3 \frac{2 \cdot \tau}{3} d\tau + \int_3^5 2 \; d\tau = 7 .$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass 3 oder mehr Regenereignisse in den ersten 5 Monaten stattfinden, beträgt:

$$\sum_{i=3}^{\infty} P_N(5) = 1 - \left[P_0(5) + P_1(5) + P_2(5) \right]$$

$$P_0(5) = \frac{u^n}{n!} \cdot e^{-u} = \frac{7^0}{0!} \cdot e^{-7} = e^{-7}$$

$$P_1(5) = \frac{u^n}{n!} \cdot e^{-u} = \frac{7^1}{1!} \cdot e^{-7} = 7 \cdot e^{-7}$$

$$P_2(5) = \frac{u^n}{n!} \cdot e^{-u} = \frac{7^2}{2!} \cdot e^{-7} = \frac{49}{2} e^{-7}$$

$$P_{N\geq 3}(5) = 1 - P_{N\leq 2}(5) = 1 - \left(\frac{7^0}{0!}e^{-7} + \frac{7^1}{1!}\cdot e^{-7} + \frac{7^2}{2!}\cdot e^{-7}\right) = 0.97\,.$$

Wobei die Zufallsvariable *N* die Anzahl Regenereignisse in den ersten 5 Monaten repräsentiert.

c) Die Ereignisse in den Monaten 7 bis 9 (Ereignis *Y*) und 10 bis 12 (Ereignis *Z*) sind unabhängig, da sich die beiden Zeiträume nicht überschneiden. Der Poissonparameter für die Monate 7, 8, 9 und für die letzten drei Monate berechnet sich wie folgt:

$$u_Y = \frac{1}{3}\int_6^9 (12-\tau)\, d\tau = 4.5$$

$$u_Z = \frac{1}{3}\int_9^{12} (12-\tau)\, d\tau = 1.5\,.$$

Als Wahrscheinlichkeit des gesuchten Ereignisses erhält man somit:

$$P[Y \cap Z] = \left(\frac{4.5^0}{0!}e^{-4.5} + \frac{4.5^1}{1!}\cdot e^{-4.5}\right)\cdot\left(\frac{1.5^0}{0!}e^{-1.5} + \frac{1.5^1}{1!}\cdot e^{-1.5}\right) = 0.034\,.$$

Aufgabe D.11

a) Die Zeit zwischen poissonverteilten Prozessen ist exponentialverteilt.

Jährliche Auftretenswahrscheinlichkeit: $p = \frac{1}{T} = \frac{1}{475}$

Durchschnittliche Zeit bis zu einem Auftreten: $E[N] = \frac{1}{p} = u = \frac{1}{\frac{1}{475}} = 475$

Die Wahrscheinlichkeit $P_A(50)$ dass Ereignis *A* in 50 Jahren auftritt kann folgendermassen berechnet werden:

$$P[T \leq 50\,Jahren] = 1 - e^{-\nu(t)\cdot t} = 1 - e^{-\frac{1}{475}\cdot 50} = 0.10$$

b) Die Wahrscheinlichkeit $P_A(475)$, dass Ereignis *A* in 475 Jahren auftritt kann folgendermassen berechnet werden:

$$P[T \leq 475\ Jahren] = 1 - e^{-\nu(t)\cdot t} = 1 - e^{-\frac{1}{475}\cdot 475} = 1 - e^{-1} = 0.632$$

Aufgabe D.12

$$-\infty < x < \infty$$

$$F_X(x) = \exp\left(-\exp\left(-\alpha(x-u)\right)\right)$$

$$\mu_X = u + \frac{0.577216}{\alpha}$$

$$\sigma_X = \frac{\pi}{\alpha\sqrt{6}}$$

μ_X – Mittelwert
σ_X – Standartabweichung
u – Parameter der Verteilung
α – Parameter der Verteilung

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die jährliche maximale Überschwemmung 15'000 $\frac{m^3}{s}$ übersteigt.

$$P[\,jährliches\ \max \geq 15000] = 1 - F_X\left(x = 15000\right) = 1 - e^{-e^{-\alpha(15000-u)}}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{\sigma_x\sqrt{6}} = \frac{\pi}{3.000\,\sqrt{6}} = 4.2752\,10^{-4}$$

$$u = \mu_x - \frac{0,57722}{\alpha} = 10.000 - \frac{0.57722}{4.2752\,10^{-4}} = 8649.809$$

$$1 - F_X\left(x = 15.000\right) = 1 - e^{-e^{-4.2752\cdot 10^{-4}\,(15000-8649.81)}} = 1 - e^{-e^{-2.715}} = 1 - 0.9359 = 0.0641$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die jährliche maximale Überschwemmung 15'000 $\frac{m^3}{s}$ überschreitet, beträgt 0.0641.

b) Wie gross ist der jährliche maximale Abfluss, welche der Wiederkehrperiode T von 100 Jahren entspricht?

$$1 - \frac{1}{100} = F_X\left(x\right) = e^{-e^{-\alpha(x-u)}} = 0.99 \Leftrightarrow \ln\left(-\ln\left(0.99\right)\right) = -\alpha\left(x-u\right) \Leftrightarrow \frac{\ln\left(-\ln\left(0.99\right)\right)}{-\alpha} + u = x$$

.

$$\Leftrightarrow \frac{\ln\left(-\ln\left(0.99\right)\right)}{-4,2752\,10^{-4}} + 8649.809 = x \Leftrightarrow 10760.08 + 8649.809 = x \Leftrightarrow 19409.889 = x$$

Die Überschwemmung, welche der Wiederkehrperiode von 100 Jahren entspricht, ist 19'410 $\frac{m^3}{s}$

c) Finde die kumulative Verteilungsfunktion, welche den jährlichen maximalen Abfluss des Flusses über einen Zeitraum von 20 Jahren beschreibt. Es wird angenommen, dass die jährlichen Maxima unabhängige Zufallsvariablen sind.

$$F_Y(y) = P[Y \le y] = [F_X(x)]^{20} = F_Y(y) = \left(e^{-e^{-\alpha(x-u)}}\right)^{20} = F_Y(y) = e^{-20e^{-\alpha(x-u)}}$$

d) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der 20-jährige maximale Abfluss 15‘000 $\frac{m^3}{s}$ überschreitet?

$$1 - F_Y(15000) = 1 - e^{-20e^{-4.2756\cdot10^{-4}(15000-8649.81)}} = 1 - e^{-1.324} = 1 - 0.266 = 0.734$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der 20-jährige maximale Abfluss 15‘000 $\frac{m^3}{s}$ überschreitet, beträgt 0.734.