MODUL D - Übungsaufgaben

Aufgabe D.1

Die monatlichen Aufwendungen X [CHF] für den Wasserverbrauch eines 2-Personenhaushalts seien durch eine Zufallsvariable mit der folgenden Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion gegeben:

$$f_X(x) = \begin{cases} c \cdot x \cdot (15 - \frac{x}{4}) & \text{für } 0 \le x \le 60 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Welchen Wert muss c annehmen?

b) Gib die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ der Zufallsvariable X an.

c) Welche der vier monatlichen Ausgaben 30CHF, 40 CHF, 50 CHF und 60 CHF überschreitet nicht das0.9-Quantil der monatlichen Aufwendungen?

d) Wie hoch sind die mittleren monatlichen Aufwendungen für den Wasserverbrauch eines 2-Personenhaushalts?

Aufgabe D.2

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für eine Zufallsvariable X ist in Abbildung D.2.1 dargestellt.
($a = 1,\ b = 2,\ c = 3$ und $d = 6$)

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und die Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion analytisch.

b) Bestimme den Modalwert und den Parameter h.

c) Berechne den Mittelwert.

d) Berechne den Wert des Medians.

e) Ermittle grafisch den Medianwert aus der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion. Diskutiere, wie der Mittelwert grafisch ermittelt werden kann.

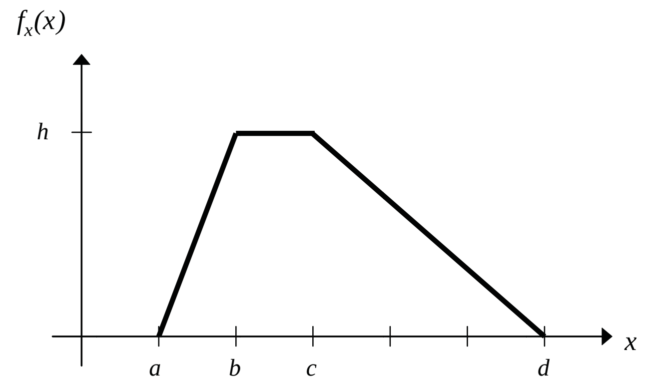


Abbildung D.2.1: *Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion.*

Aufgabe D.3

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer Zufallsvariablen X ist in Abbildung D.3.1 dargestellt. In dem Intervall [0, 4] ist die Funktion linear. In dem Intervall [4, 12] ist die Funktion quadratisch und die x-Achse ist im Punkt Q die Tangente an diese Funktion.

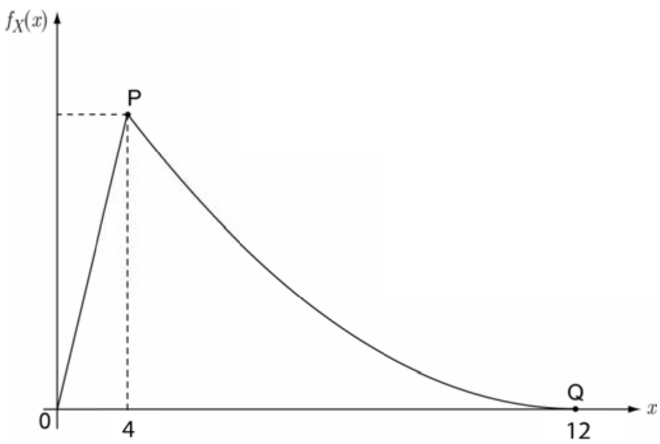


Abbildung D.3.1: *Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion.*

a) Bestimme die Koordinaten des Punktes $P(x, y)$ und beschreibe die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion.

b) Ermittle und zeichne die kumulative Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X mit einigen charakteristischen Werten in der Abbildung.

c) Berechne den Mittelwert der Zufallsvariable X.

d) Berechne die Wahrscheinlichkeit $P(X > 4)$.

Aufgabe D.4

Die Randverteilungsfunktionen eines zwei-dimensionalen Zufallsvektors $Z = (X, Y)^T$ sind wie folgt definiert:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \textit{für } -1 \le x \le 1 \\ 0 & \textit{andere} \end{cases}$$

und

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{4}(2y - y^2) & \textit{für } 0 \le y \le 2 \\ 0 & \textit{andere} \end{cases}$$

Der Korrelationskoeffizient ρ_{XY} zwischen X und Y entspricht $\rho_{XY} = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

a) Berechne den Erwartungswert von $6X - 4Y + 2$.

b) Berechne die Kovarianz $Cov(6X; 4Y)$.

c) Berechne die Varianz von $6X - 4Y + 2$.

d) Berechne den Erwartungswert von $6X^2 - 4Y^2$.

Aufgabe D.5

An einer Wetterstation werden Windgeschwindigkeiten gemessen.

In den vergangenen Jahren wurden die Messungen mit einem weniger genauen Gerät durchgeführt. Wir interessieren uns nun für den Zusammenhang zwischen den Messungen des genauen und des weniger genauen Messgeräts. Dafür wird die multivariate Wahrscheinlichkeit der gemessenen Windgeschwindigkeiten beider Geräte in den nächsten Jahren erfasst.

Tabelle D.5.1 zeigt für beide Geräte die multivariaten Wahrscheinlichkeiten der Anzahl Tage pro Jahr, an denen die gemessene Windgeschwindigkeit einen bestimmten Grenzwert überschreitet.

Tabelle D.5.1: *Multivariate Wahrscheinlichkeit von N_G und N_U.*

	$N_G = 0$	$N_G = 1$	$N_G = 2$	$N_G = 3$	$P(N_U)$
$N_U = 0$	0.2910	0.0600	0.0000	0.0000	0.3510
$N_U = 1$	0.0400	0.3580	0.0100	0.0000	0.4080
$N_U = 2$	0.0100	0.0250	0.1135	0.0300	0.1785
$N_U = 3$	0.0005	0.0015	0.0100	0.0505	0.0625
$P(N_G)$	0.3415	0.4445	0.1335	0.0805	$\sum = 1.00$

N_G zeigt darin die Anzahl der Tage, an denen die mit dem genauen Gerät gemessene Windgeschwindigkeit den Grenzwert übersteigt.

N_U zeigt die Anzahl der Tage, an denen die mit dem ungenaueren Gerät gemessene Windgeschwindigkeit den Grenzwert übersteigt.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Anzahl der Tage, an denen Überschreitungen des Grenzwertes von den beiden Geräten gemessen wurden, entspricht.

b) Es gilt die Annahme, dass das genaue Gerät immer die exakte Windgeschwindigkeit misst. Wie gross sind die Wahrscheinlichkeiten, dass die Windgeschwindigkeit den Grenzwert innerhalb eines Jahres 0, 1, 2 und 3 mal überschreitet, wenn nach Angabe des ungenaueren Messgeräts der Grenzwert zwei mal überschritten wird?

Aufgabe D.6

Autobahnbrücken müssen während ihrer Lebensdauer gewartet werden. Die Zeitdauer T zwischen den Wartungseinheiten folgt einer Exponentialverteilung mit einem Mittelwert von 10 Jahren. Die Wartungsarbeiten nehmen einen Zeitraum S in Anspruch, der ebenfalls exponentialverteilt ist mit einem Mittelwert von $1/12$ Jahren.

a) Unter der Annahme, dass T und S unabhängig voneinander sind, soll die Verteilung der Zeit Z zwischen aufeinanderfolgenden Wartungsarbeiten berechnet werden, also $Z = S + T$.

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit $P(Z \leq 5)$?

c) Wir betrachten nun zwei Autobahnbrücken, deren Zeitraum bis zur nächsten Wartung T_1 bzw. T_2 beträgt (unabhängig voneinander und gleiche Verteilung wie T).

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in den nächsten 5 Jahren für beide Brücken KEINE Wartungsarbeiten anfallen?

Aufgabe D.7

Es seien $\{X_i\}_{1 \leq i \leq 50}$ unabhängige und normalverteilte Zufallsvariablen mit Mittelwert $\mu = 1$ und Standardabweichung $\sigma = 2$. Darüber hinaus sind folgende Zufallsvariablen definiert:

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \qquad \text{und} \qquad \bar{X}_n = \frac{1}{n}\left(X_1 + X_2 + \ldots + X_n\right) = \frac{S_n}{n}$$

Dabei ist $n = 50$.

Bestimme zuerst die Parameter der Normalverteilung von S_n sowie $\bar{X}_n$ und berechne dann:

a) $P\left(E\left[X_1\right] - 1 \leq X_1 \leq E\left[X_1\right] + 1\right)$.

b) $P\left(E\left[S_n\right] - 1 \leq S_n \leq E\left[S_n\right] + 1\right)$.

c) $P\left(E\left[\bar{X}_n\right] - 1 \leq \bar{X}_n \leq E\left[\bar{X}_n\right] + 1\right)$.

Aufgabe D.8

Die Hochwasserentlastungsanlage eines Rückhaltebeckens ist auf ein 1000-jähriges Hochwasser Q_B bemessen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Staudamm wie folgt überflutet wird:

a) genau einmal im 10-ten Jahr während eines 10-Jahre-Zeitraums?

b) während eines 10-Jahre-Zeitraums irgendwann zweimal?

c) während eines 10-Jahre-Zeitraums überhaupt nicht?

d) während eines 10-Jahre-Zeitraums höchstens einmal?

e) während eines 100-Jahre-Zeitraums insgesamt 10mal?

f) während eines 1000-Jahre-Zeitraums einmal oder öfter?

Es wird angenommen, dass das Hochwasserereignis höchstens einmal pro Jahr auftritt.

Aufgabe D.9

Aus Daten der letzten Jahre ist ersichtlich, dass von allen eingereichten Projektvorschlägen eines Planungsbüros im Umweltingenieurwesen 27% erfolgreich einen Zuschlag erhalten haben.

Als neuer Besitzer dieses Planungsbüros setzt du dich nun mit der Wirtschaftsplanung der kommenden Jahre auseinander. In diesem Zusammenhang interessiert dich, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass

a) spätestens der 12. Projektvorschlag einen Zuschlag erhält.

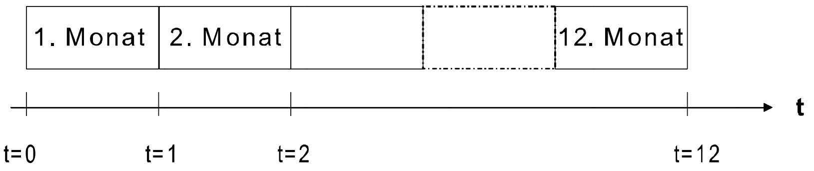
b) nur der letzte der nächsten 10 Projektvorschläge erfolgreich sein wird.

c) höchstens 2 der nächsten 13 Projektvorschläge erfolgreich sein werden.

Bitte berechne die gesuchten Wahrscheinlichkeiten.

Aufgabe D.10

Das voneinander unabhängige Auftreten von Regenereignissen innerhalb eines Jahres in einem Gebiet wird durch einen Poissonprozess mit der Intensität $v(t)$ (d.h der mittleren Auftretensrate von Regenereignissen pro Zeiteinheit *t*), mit *t* = 0, 1, 2..., 13 für die entsprechenden Zeitintervalle beschrieben. Hierbei beschreibt *t* jeweils ein Zeitintervall von einem Monat.



a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass im Zeitintervall vom 3. Bis und mit 5. Monat

- kein Regenereignis
- genau ein Regenereignis

stattfindet. Es wird angenommen, dass die Regenereignisse einem homogenen Poissonprozess mit der Intensität $v(t) = 2$ folgen.

Für die Aufgabe D.10 b) und c) wird angenommen, dass die Regenereignisse einem inhomogenen Poissonprozess (siehe Hinweis) folgen, für welchen die Intensität für die jeweiligen Monate wie folgt definiert ist:

$$v(t) \begin{cases} = \dfrac{2t}{3} & \text{für } 0 \le t \le 3 \\ = 2 & \text{für } 3 < t \le 6 \\ = \dfrac{12-t}{3} & \text{für } 6 < t \le 12 \end{cases}$$

b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass in den ersten 5 Monaten des Jahres drei oder mehr Regenereignisse eintreten.

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von nicht mehr als einem Ereignis jeweils während der zwei 3-monatigen Zeitintervalle vom 7. bis zum 9. Monat und vom 10. bis zum 12. Monat?

Hinweis Poissonprozess: $P_n(t) = \dfrac{u^n}{n!} e^{-u}$

Für inhomogene Poissonprozesse wird angenommen, dass $v(t)$ variabel mit der Zeit ist. Der Poisson-Parameter u kann für jedes Zeitintervall (t_1, t_2) auf folgende Weise berechnet werden:

$$u = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt$$

Aufgabe D.11

Eine Erdbebengefahrenkarte repräsentiert die Bodenbeschleunigung (m/s^2) für eine mittlere Wiederkehrperiode von 475 Jahren.

Für gewöhnliche Bauwerke ist eine Lebenszeit von 50 Jahren vorgesehen. Die Erdbeben mit einer Wiederkehrperiode von 475 Jahren resultieren in Bodenbeschleunigungsparametern, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.1 überschritten werden.

a) Zeige, dass die Wiederkehrperiode von 475 Jahren einer Überschreitungswahrscheinlichkeit von 0.1 in 50 Jahren entspricht.

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Beben mit einer Wiederkehrperiode von 475 Jahren tatsächlich innerhalb der 475 Jahre auftritt?

Es wird angenommen, dass das Auftreten der Erdbeben einem homogenen Poissonprozess folgt.

Aufgabe D.12

Es wird angenommen, dass der jährliche maximale Abfluss X eines bestimmten Flusses einer Gumbel max Verteilung mit dem Mittelwert $\mu_X = 10'000 \frac{m^3}{s}$ und der Standardabweichung σ_X = 3'000 $\frac{m^3}{s}$ folgt.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der jährliche maximale Abfluss 15'000 $\frac{m^3}{s}$ übersteigt.

b) Wie gross ist der jährliche maximale Abfluss, der mit einer Wiederkehrperiode T von 100 Jahren überschritten wird?

c) Finde die kumulative Verteilungsfunktion, welche den jährlichen maximalen Abflusses des Flusses über einen Zeitraum von 20 Jahren beschreibt. Es wird angenommen, dass die jährlichen Maxima unabhängige Zufallsvariablen sind.

d) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der 20-jährige maximale Abfluss 15'000 $\frac{m^3}{s}$ überschreitet?

Hinweis Die Gumbel max Verteilung hat folgende Form:

$$-\infty < x < \infty$$

$$F_X(x) = \exp\left(-\exp\left(-\alpha(x-u)\right)\right)$$

$$\mu_X = u + \frac{0.577216}{\alpha}$$

$$\sigma_X = \frac{\pi}{\alpha\sqrt{6}}$$

μ_X – Mittelwert
σ_X – Standardabweichung
u – Parameter der Verteilung
α – Parameter der Verteilung