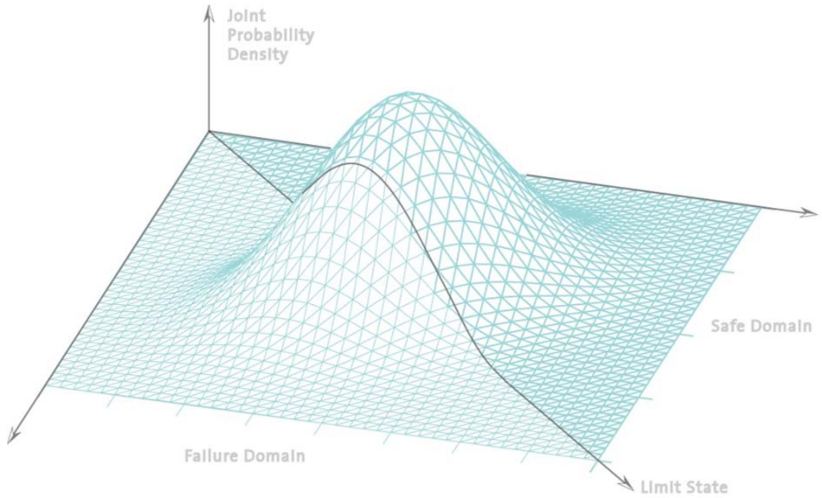


Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Übung 7

Inhalt der heutigen Übung

- Vorrechnen der Hausübung D.9
- Gemeinsames Lösen der Übungsaufgaben
  - D.10: Poissonprozess
  - D.11: Wiederkehrperiode
  - D.12: Extremwertverteilung
- Vorstellen der Hausübung D.13

Zufallsprozesse

Für viele Ingenieurfragen müssen wir die zufälligen Schwankungen über die Zeit spezifischer erfassen können:

Diskreter Zufallsprozess:

Das zufällige Eintreten von Ereignissen zu diskreten Zeitpunkten (Unfälle, Steinschlag, Erdbeben, Stau, Versagen, usw.)
→Poissonprozess, Exponentialverteilung, Gammaverteilung

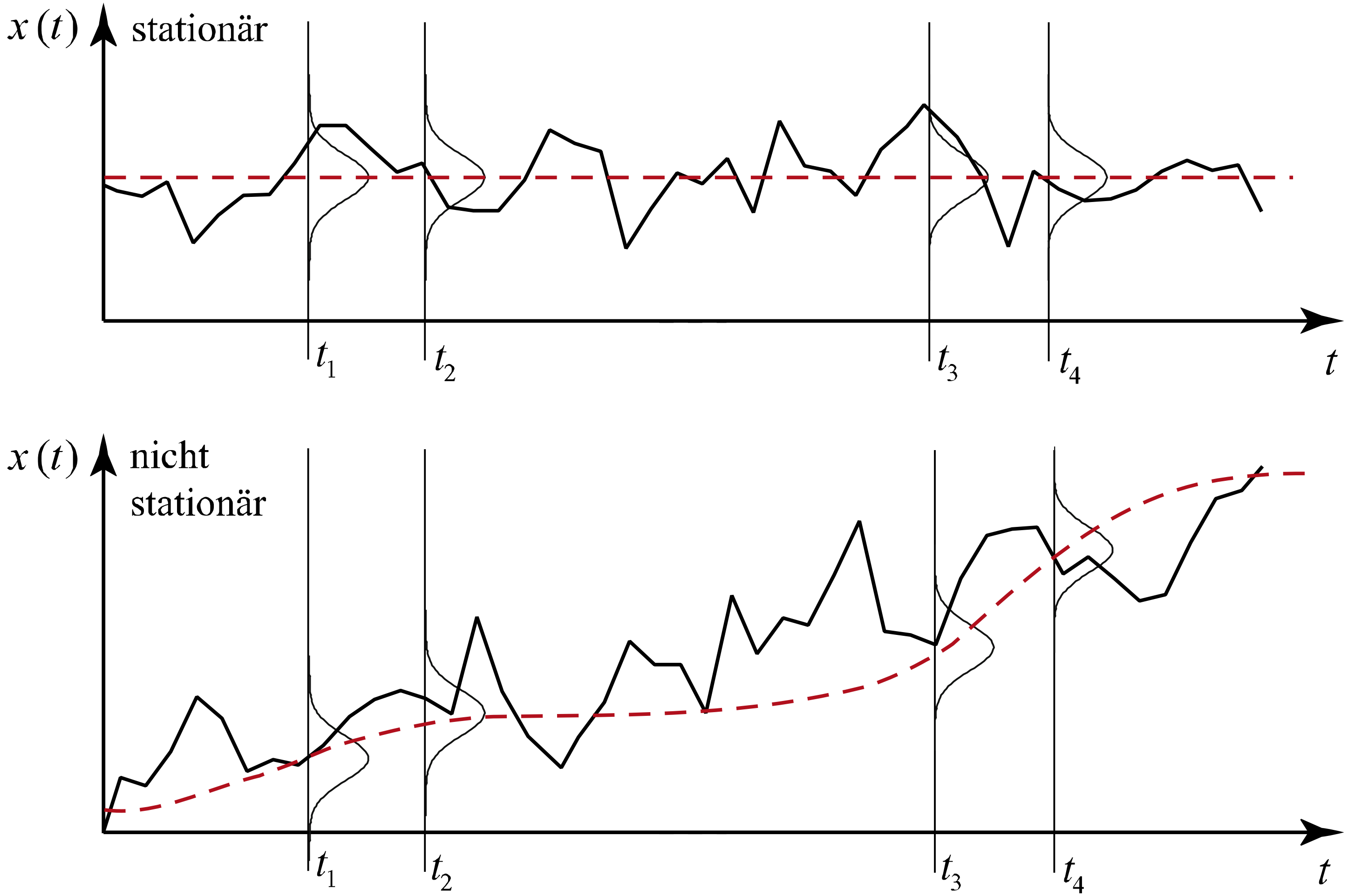
Kontinuierlicher Zufallsprozess:

Die zufälligen Ausprägungen von Ereignissen, welche kontinuierlich über die Zeit eintreten (Winddruck, Wellendruck, Temperaturen, usw.)
→ (Normalprozess)

Hochwasserereignis (diskret)

Belastungsschwankungen aufgrund Wellen (kontinuierlich)

Stationarität



Ergodizität

Beispiel für einen ergodischen Prozess

a) 1000 Würfe mit einem Würfel

b) Ein Wurf mit 1000 Würfeln

⇨ Die Verteilung der Zahlen 1 bis 6 ist in beiden Fällen gleich!

⇨ Aus einer ausreichend langen Zeitreihe lassen sich die Eigenschaften des Zufallsprozesses herleiten

⇨ Die gleichen Eigenschaften können auch aus den Realisationen vieler Prozesse zum gleichen Zeitpunkt bestimmt werden

Poissonprozess

Hochwasserereignis (diskret)

Der Poissonprozess beschreibt eine zufällige Abfolge von diskreten Ereignissen. Er unterliegt folgenden Annahmen:

1. Die Wahrscheinlichkeit von zwei oder mehr Ereignissen in einem kleinen Zeitintervall sind vernachlässigbar klein.
2. Die auftretenden Ereignisse sind voneinander unabhängig.

Anzahl Ereignisse in einem bestimmen Zeitintervall: Poissonverteilung

Wartezeit zwischen zwei oder mehr Ereignissen: Exponentialverteilung, Gammaverteilung

Poissonprozess

Poissonverteilung $P_n(t)$

$\nu(t)$ = Intensität (mittlere Anzahl Ereignisse pro Zeiteinheit t)

n = Anzahl Ereignisse

t = Zeitintervall [0;t[

u = Mittlere Anzahl Ereignisse in einem Zeitintervall t

Homogener Poissonprozess

$\nu(t)$ konstant $\quad N(t)$

$\nu(t) = \nu$

$$P_n(t) = \frac{u^n}{n!} e^{-u}$$

$$u = \nu(t)\,t$$

$$E\big(N(t)\big) = u = \nu(t)\,t$$

$$Var\big(N(t)\big) = u = \nu(t)\,t$$

Inhomogener Poissonprozess

$\nu(t)$ nicht konstant $\quad N(t)$

$$P_n(t) = \frac{u^n}{n!} e^{-u}$$

$$u = \int_0^t \nu(\tau)\,d\tau$$

$$E\big(N(t)\big) = u = \int_0^t \nu(\tau)\,d\tau$$

$$Var\big(N(t)\big) = u = \int_0^t \nu(\tau)\,d\tau$$

Poissonprozess

Die Wahrscheinlichkeit von **keinem** Ereignis in einem gegebenen Zeitintervall t :

$$P_0(t) = \frac{u^0}{0!}\exp(-u) = \exp(-u)$$

Homogener Poissonprozess $P_0(t) = \exp(-\nu(t)t)$

Inhomogener Poissonprozess $P_0(t) = \exp\left(-\int_0^t \nu(\tau)d\tau\right)$

Die kumulative Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion der (Warte-)Zeit bis zum **ersten Ereignis** T_1

$$F_{T_1}(t_1) = 1 - P_0(t_1) = 1 - \exp(-u)$$

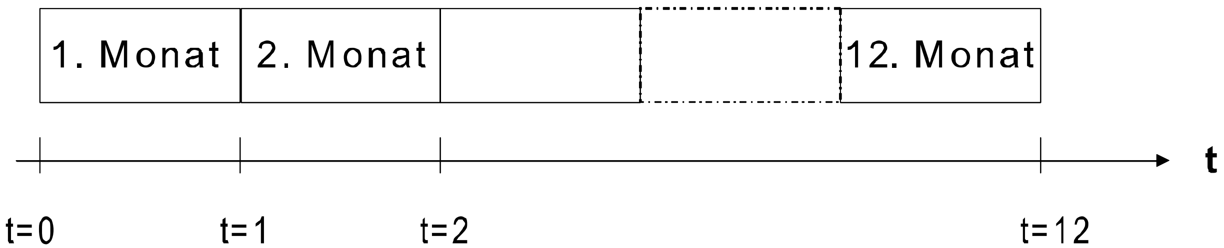
⇨ Exponentialverteilung!

Homogener Poissonprozess $F_{T_1}(t_1) = 1 - \exp(-\nu(t)t_1)$

Inhomogener Poissonprozess $F_{T_1}(t_1) = 1 - \exp(-\int_0^{t_1} \nu(\tau)d\tau)$

Aufgabe D.10

a) Das Auftreten von Regenereignissen in einem Gebiet innerhalb eines Jahres wird durch einen **homogenen** Poissonprozess mit der Intensität $\nu(t)$ (mittlere Anzahl von Regenereignissen pro Zeiteinheit t) angegeben, wobei t in Monaten gemessen wird und im Intervall [0,12] definiert ist.



$$\nu(t) = 2$$

$$P_n(t) = \frac{u^n}{n!} e^{-u}$$

Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass im Zeitintervall vom 3. bis und mit 5. Monat

- kein Regenereignis
- genau ein Regenereignis

stattfindet. Es wird angenommen, dass die Regenereignisse einem homogenen Poissonprozess mit der Intensität $\nu(t) = 2$ folgen.

Aufgabe D.10

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass im Zeitintervall vom 3. bis und mit 5. Monat (⇨ also in einem Zeitraum $t = 3$ Monate)
- kein Regenereignis
- genau ein Regenereignis

stattfindet. Es wird angenommen, dass die Regenereignisse einem homogenen Poissonprozess mit der Intensität $\nu(t) = 2$ folgen.

$$\nu(t) = 2 \qquad u = \nu(t)t = 2 \cdot 3 = 6 \qquad P_n(t) = \frac{u^n}{n!} e^{-u}$$

- kein Regenereignis

$$P_0(t) = \mathrm{e}^{-u} \qquad P_0(3) = \mathrm{e}^{-u} = e^{-6} = 0.0025$$

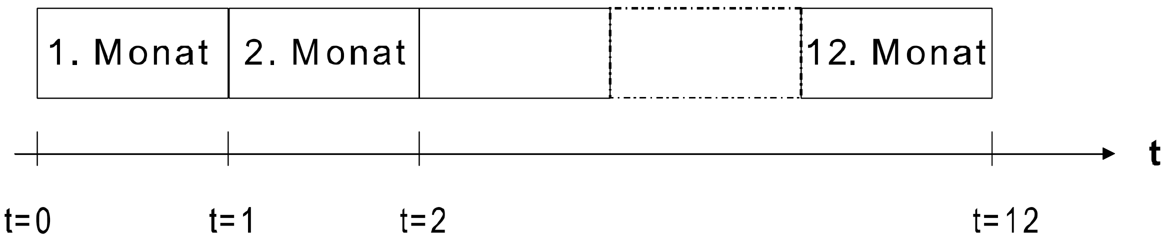
- genau ein Regenereignis

$$P_1(t) = \frac{u^1}{1!} e^{-u} \qquad P_1(3) = \frac{6^1}{1!} e^{-6} = 6e^{-6} = 0.0149$$

Aufgabe D.10

b) Das Auftreten von Regenereignissen in einem Gebiet innerhalb eines Jahres wird nun durch einen **inhomogenen** Poissonprozess mit der Intensität $\nu(\tau)$ angegeben, wobei τ in Monaten gemessen wird und im Intervall [0,12] definiert ist.

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass in den ersten fünf Monaten des Jahres drei oder mehr Regenereignisse eintreten.

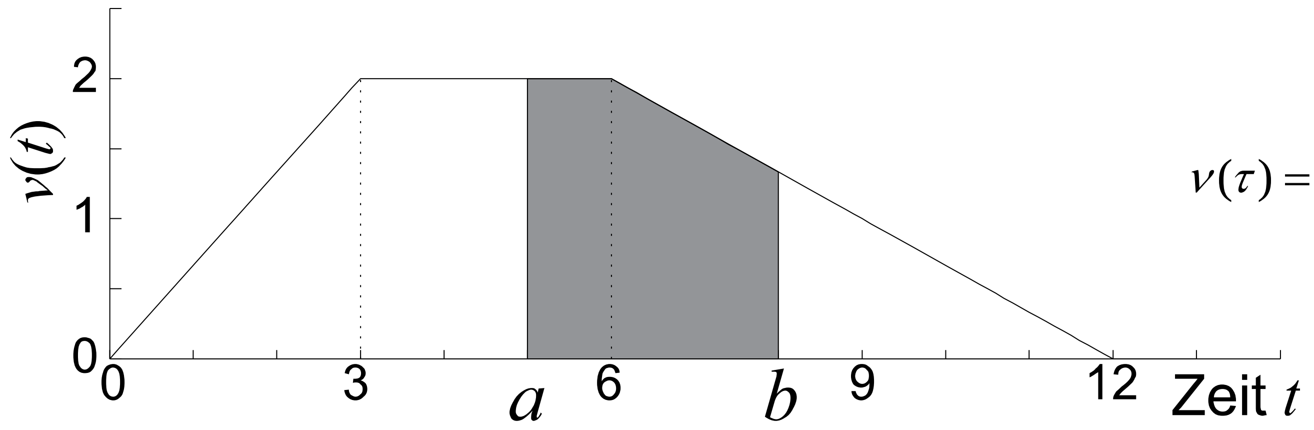


$$\nu(\tau) = \begin{cases} \dfrac{2\tau}{3} & \text{für } 0 \leq \tau \leq 3 \\ 2 & \text{für } 3 < \tau \leq 6 \\ \dfrac{12-\tau}{3} & \text{für } 6 < \tau \leq 12 \end{cases}$$

Unterschied zum homogenen Poissonprozess:
Beim inhomogenen Poissonprozess variiert die Intensität $\nu(\tau)$ mit der Zeit.

Aufgabe D.10

Intensität $\nu(\tau)$ (Mittlere Anzahl Ereignisse pro Zeiteinheit)



$$\nu(\tau) = \begin{cases} \frac{2\tau}{3} & \text{für } 0 \le \tau \le 3 \\ 2 & \text{für } 3 < \tau \le 6 \\ \frac{12-\tau}{3} & \text{für } 6 < \tau \le 12 \end{cases}$$

Der Poisson-Parameter u für ein Zeitintervall $[a, b]$ berechnet sich wie folgt:

$$u = \int_a^b \nu(\tau)\,d\tau$$

Mittlere Anzahl Ereignisse in $[a, b]$

Daraus ergibt sich die Verteilung für die Anzahl Ereignisse n im betrachteten Zeitintervall $[a, b]$:

$$P_n([a,b]) = \frac{u^n}{n!}e^{-u}$$

Aufgabe D.10

$$\nu(\tau) = \begin{cases} \dfrac{2\tau}{3} & \text{für } 0 \le \tau \le 3 \\ 2 & \text{für } 3 < \tau \le 6 \\ \dfrac{12-\tau}{3} & \text{für } 6 < \tau \le 12 \end{cases}$$

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass in den ersten fünf Monaten des Jahres drei oder mehr Regenereignisse eintreten.

Vorgehen:

Zufallsvariable N = Anzahl Regenereignisse in den ersten fünf Monaten

Ermittle den Parameter u des Poissonprozesses

Berechne die Wahrscheinlichkeit:

$$\sum_{n=3}^{\infty} P_n(5) = 1 - \left[P_0(5) + P_1(5) + P_2(5)\right]$$

$$P_n(t) = \frac{u^n}{n!} e^{-u}$$

Aufgabe D.10

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass in den ersten fünf Monaten des Jahres drei oder mehr Regenereignisse eintreten.

$$\nu(\tau) = \begin{cases} \dfrac{2\tau}{3} & \text{für } 0 \le \tau \le 3 \\ 2 & \text{für } 3 < \tau \le 6 \\ \dfrac{12-\tau}{3} & \text{für } 6 < \tau \le 12 \end{cases}$$

Bestimmung des Poisson Parameters $u = \int_a^b \nu(\tau)d\tau$

$$u = \int_0^3 \nu(\tau)d\tau + \int_3^5 \nu(\tau)d\tau =$$

$$\int_0^3 \frac{2\cdot\tau}{3}d\tau + \int_3^5 2d\tau = \left[\frac{2\cdot\tau^2}{6}\right]_0^3 + [2\cdot\tau]_3^5 =$$

$$3+4=\underline{7=u}$$

Aufgabe D.10

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass in den ersten fünf Monaten des Jahres drei oder mehr Regenereignisse eintreten.

$$\nu(\tau) = \begin{cases} \frac{2\tau}{3} & \text{für } 0 \le \tau \le 3 \\ 2 & \text{für } 3 < \tau \le 6 \\ \frac{12-\tau}{3} & \text{für } 6 < \tau \le 12 \end{cases}$$

Berechne die Wahrscheinlichkeit:

$$\sum_{n=3}^{\infty} P_n(5) = 1 - \left[P_0(5) + P_1(5) + P_2(5)\right] = \underline{\underline{0.97}}$$

$$P_n(t) = \frac{u^n}{n!} e^{-u} \qquad u = 7$$

$$P_0(5) = \frac{u^n}{n!} e^{-u} = \frac{7^0}{0!} e^{-7} = e^{-7} = 0.0009$$

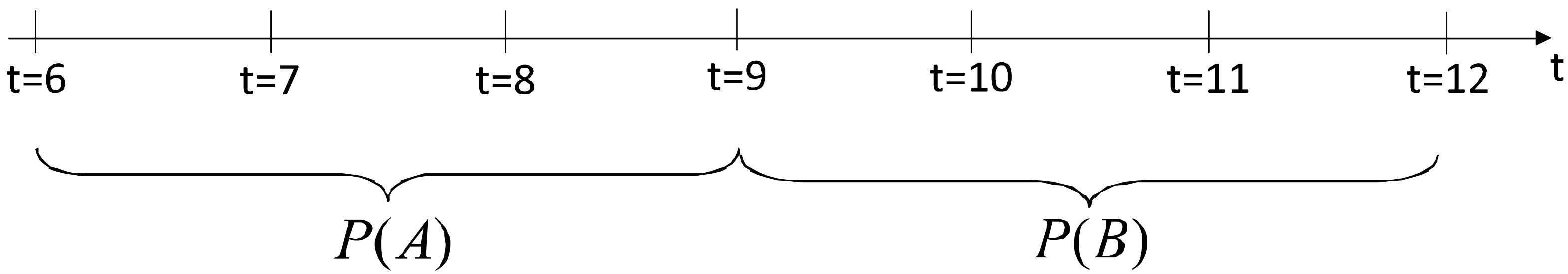
$$P_1(5) = \frac{u^n}{n!} e^{-u} = \frac{7^1}{1!} e^{-7} = 7e^{-7} = 0.0064$$

$$P_2(5) = \frac{u^n}{n!} e^{-u} = \frac{7^2}{2!} e^{-7} = \frac{49}{2} e^{-7} = 0.0223$$

Aufgabe D.10

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von nicht mehr als einem Regenereignis jeweils während der zwei 3-monatigen Zeitintervallen vom 7. bis 9. Monat und vom 10. bis 12. Monat?

7. Monat	8. Monat	9. Monat	10. Monat	11. Monat	12. Monat

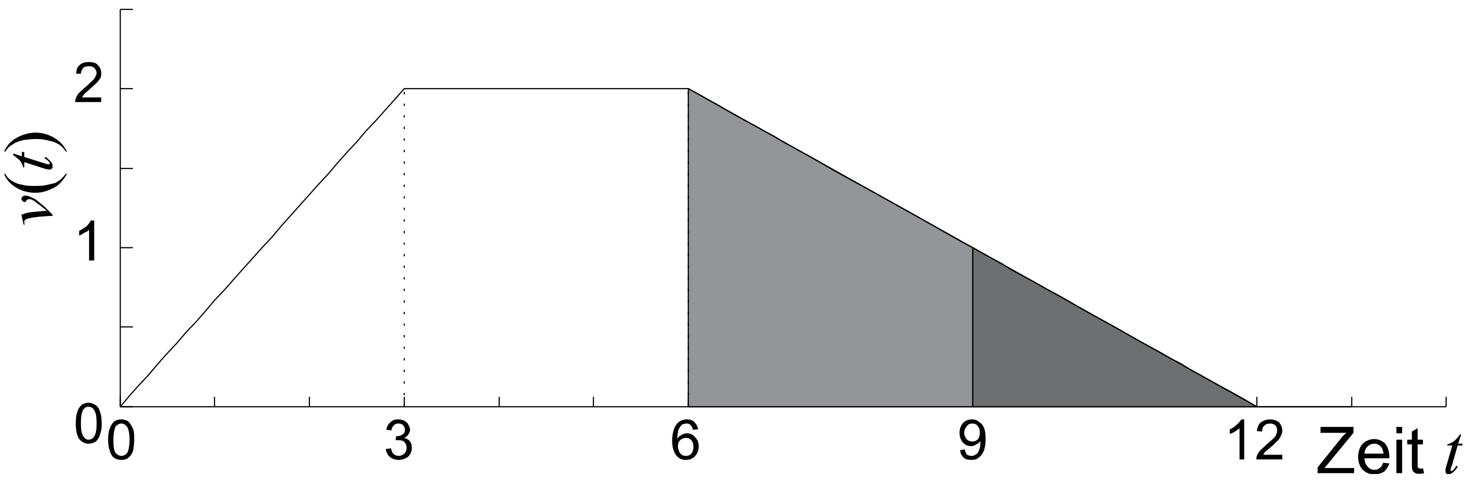


Ereignis A repräsentiert das Eintreten von nicht mehr als einem Regenereignis in den Monaten 7,8 und 9.

Ereignis B repräsentiert das Eintreten von nicht mehr als einem Regenereignis in den Monaten 10, 11 und 12.

$$P[A \cap B] = P(A) \cdot P(B)$$ A und B unabhängig!

Aufgabe D.10



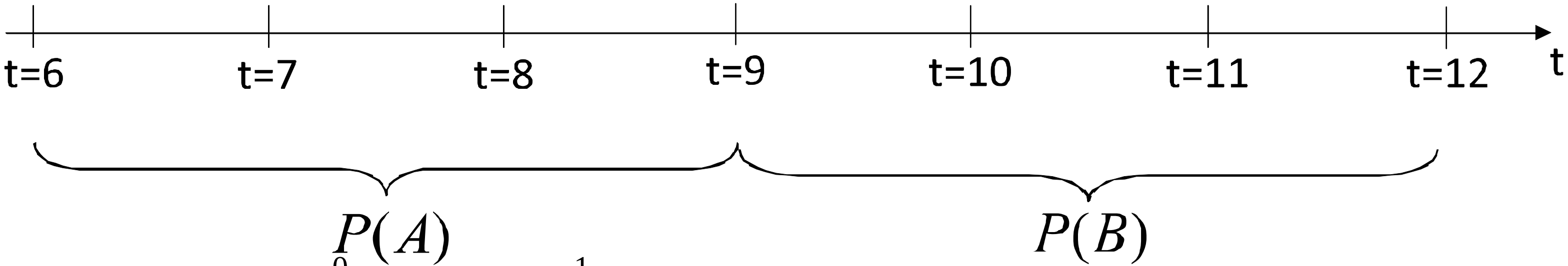
Als Mittelwert des Poissonprozesses ergeben sich für die beiden Intervalle in denen die Ereignisse unabhängig sind:

$$v(\tau)=\begin{cases}\dfrac{2\tau}{3} & \text{für } 0\le\tau\le 3\\ 2 & \text{für } 3<\tau\le 6\\ \dfrac{12-\tau}{3} & \text{für } 6<\tau\le 12\end{cases}\quad \begin{cases} u_{6-9}=\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_6^9(12-\tau)\,d\tau=\dfrac{1}{3}\left(12\cdot\tau-\dfrac{\tau^2}{2}\right)_6^9=\underline{4.5}\\ u_{9-12}=\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_9^{12}(12-\tau)\,d\tau=\dfrac{1}{3}\left(12\cdot\tau-\dfrac{\tau^2}{2}\right)_9^{12}=\underline{1.5}\end{cases}$$

Aufgabe D.10

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von nicht mehr als einem Regenereignis jeweils während der zwei 3-monatigen Zeitintervalle vom 7. bis 9. Monat und vom 10 bis 12 Monat.

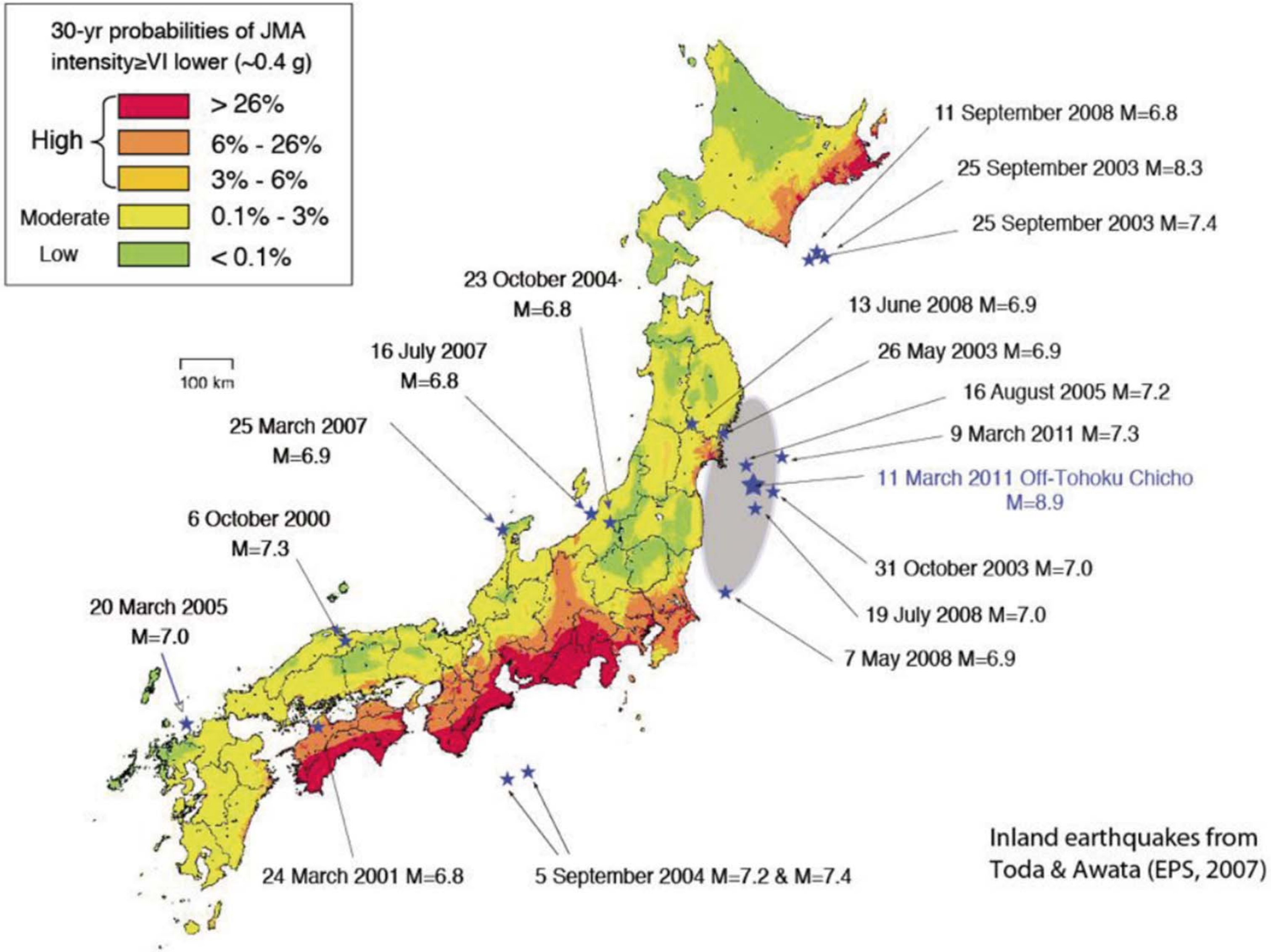
7. Monat	8. Monat	9. Monat	10. Monat	11. Monat	12. Monat



$$P(A)=\frac{4.5^0}{0!}e^{-4.5}+\frac{4.5^1}{1!}e^{-4.5}=\underline{6.11\cdot 10^{-2}}$$

$$P(B)=\frac{1.5^0}{0!}e^{-1.5}+\frac{1.5^1}{1!}e^{-1.5}=\underline{0.558}$$

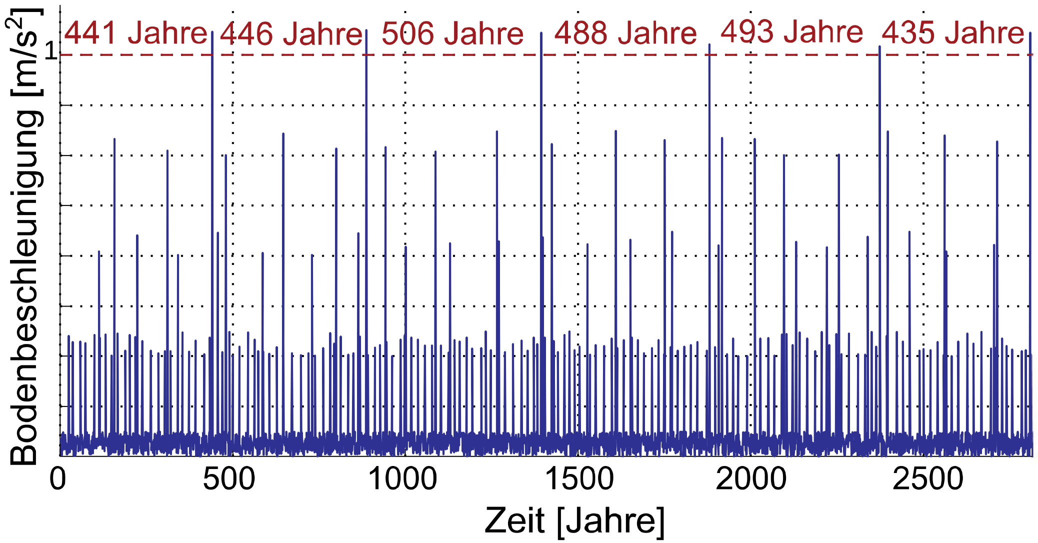
$$P(A\cap B)=6.11\cdot 10^{-2}\cdot 0.558=\underline{\underline{3.41\cdot 10^{-2}}}$$



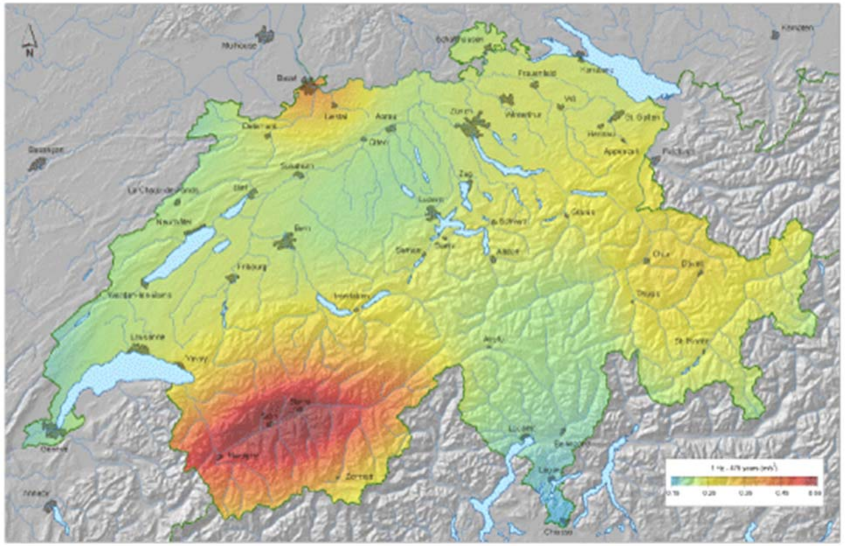
Quelle: http://www.seismo.ethz.ch/Earthquake_Talk_2011_03_17_de

Aufgabe D.11

Eine Erdbebengefahrenkarte repräsentiert die Bodenbeschleunigung (m/s^2) für eine mittlere Wiederkehrperiode von 475 Jahren.



Mittlere Wiederkehrperidode = 475 Jahre



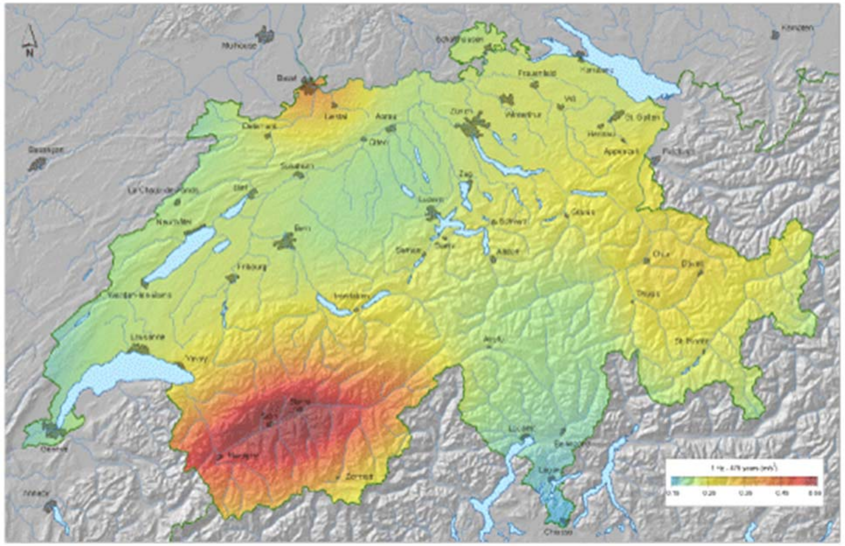
Erdbebengefährdung der Schweiz:
Horizontale Bodenbeschleunigung (m/s^2),
10% Überschreitungswahrscheinlichkeit
in 50 Jahren
www.earthquake.ethz.ch

Aufgabe D.11

Eine Erdbebengefahrenkarte repräsentiert die Bodenbeschleunigung (m/s^2) für eine mittlere Wiederkehrperiode von 475 Jahren.

a) Zeigen Sie, dass die Wiederkehrperiode von 475 Jahren einer Überschreitungswahrscheinlichkeit von 0.1 in 50 Jahren entspricht.

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Beben mit einer Wiederkehrperiode von 475 Jahren tatsächlich innerhalb der 475 Jahre auftritt?



Erdbebengefährdung der Schweiz: Horizontale Bodenbeschleunigung (m/s^2), 10% Überschreitungswahrscheinlichkeit in 50 Jahren
www.earthquake.ethz.ch

Es wird angenommen, dass das Auftreten der Erdbeben einem homogenen Poissonprozess folgt.

Aufgabe D.11

a) Bestätige diese Beziehung:
Ereignis mit einer Wiederkehrperiode von 475 Jahren = Ereignis mit einer Überschreitungswahrscheinlichkeit von 0.1 in 50 Jahren

Wiederkehrperiode T_R = 475 Jahre

Jährliche Überschreitungswahrscheinlichkeit: $p = \frac{1}{T_R} = \frac{1}{475}$

Durchschnittliche Wartezeit bis zu einem Ereignis: $E[T] = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{475}} = 475$

Die Zeit zwischen Ereignissen des homogenen Poissonprozessen ist exponentialverteilt.

Aufgabe D.11

a) Bestätige diese Beziehung:
Ereignis mit einer Wiederkehrperiode von 475 Jahren = Ereignis mit einer Überschreitungswahrscheinlichkeit von 0.1 in 50 Jahren.

Der Erwartungswert einer exponentialverteilten Zufallsvariable T ist gegeben als:

$$E[T] = \frac{1}{\nu(t)} = 475 \qquad \nu(t) = \frac{1}{E[T]} = \frac{1}{T_R} = \frac{1}{475}$$

Die Wahrscheinlichkeit $P(T \leq 50)$, dass ein Ereignis in 50 Jahren überschritten wird, kann folgendermassen berechnet werden:

$$P\left[T \leq 50\,Jahre\right] = 1 - e^{-\nu(t)\cdot t} = 1 - e^{-\frac{1}{475}\cdot 50} = 0.1$$

(Skript Gleichung D.65)

Aufgabe D.11

b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Erdbeben mit einer Wiederkehrperiode von 475 Jahren in den nächsten 475 Jahren auftritt?

Die Wahrscheinlichkeit $P(T \leq 475)$, dass ein Ereignis innerhalb eines Zeitraums von 475 Jahren auftritt (überschritten wird), kann folgendermassen berechnet werden:

$$P\left[T \leq 475 \ Jahre\right] = 1 - e^{-\nu \cdot t} = 1 - e^{-\frac{1}{475} \cdot 475} = 1 - e^{-1} = 0.632$$

Aufgabe D.12

Es wird angenommen, dass der jährliche maximale Abfluss X eines bestimmten Flusses einer Gumbel max Verteilung mit dem Mittelwert μ_X=10‘000 m^3/s und der Standardabweichung σ_X =3‘000 m^3/s folgt.

Aufgabe D.12

Es wird angenommen, dass der jährliche maximale Abfluss X eines bestimmten Flusses einer Gumbel max Verteilung mit dem Mittelwert μ_X=10‘000 m^3/s und der Standardabweichung σ_X =3‘000 m^3/s folgt.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der jährliche maximale Abfluss 15‘000 m^3/s übersteigt.

b) Wie gross ist der jährliche maximale Abfluss, welcher einer Wiederkehrperiode von 100 Jahren entspricht?

c) Finde die kumulative Verteilungsfunktion, welche den jährlichen maximalen Abfluss des Flusses über einen Zeitraum von 20 Jahren beschreibt. Es wird angenommen, dass die jährlichen Maxima unabhängige Zufallsvariablen sind.

d) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der 20-jährige maximale Abfluss 15‘000 m^3/s überschreitet?

Aufgabe D.12

Es wird angenommen, dass der jährliche maximale Abfluss X eines bestimmten Flusses einer Gumbel max Verteilung mit dem Mittelwert μ_X=10‘000 m^3/s und der Standardabweichung σ_X =3‘000 m^3/s folgt.

Hinweis: Die Gumbel max Verteilungsfunktion hat folgende Form:

$$-\infty < x < \infty$$

$$F_X(x) = \exp\left(-\exp\left(-\alpha(x-u)\right)\right)$$

$$\mu_X = u + \frac{0.577216}{\alpha}$$

$$\sigma_X = \frac{\pi}{\alpha\sqrt{6}}$$

μ_X – Mittelwert

σ_X – Standardabweichung

u – Parameter der Verteilung

α – Parameter der Verteilung

(Skript Tabelle D.2)

Aufgabe D.12

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der jährliche maximale Abfluss 15'000 m^3/s übersteigt.

$$F_X(x) = \exp\left(-\exp\left(-\alpha(x-u)\right)\right)$$

$$P[\textit{jährliches Max} > 15'000] = 1 - F_X\left(15'000\right) = 1 - e^{-e^{-\alpha(15'000-u)}}$$

Parameter u und α ermitteln:

$$\mu_X = u + \frac{0.577216}{\alpha}$$

$$\sigma_X = \frac{\pi}{\alpha\sqrt{6}}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{\sigma_x\sqrt{6}} = \frac{\pi}{3'000\sqrt{6}} = \underline{4.2752 \cdot 10^{-4}}$$

$$u = \mu_x - \frac{0.57722}{\alpha} = 10'000 - \frac{0.57722}{4.2752 \cdot 10^{-4}} = \underline{8'649.809}$$

Aufgabe D.12

$$\alpha = 4.2752 \cdot 10^{-4}$$

$$u = 8'649.809$$

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der jährliche maximale Abfluss 15‘000 m^3/s übersteigt.

$$1 - F_X\left(15'000\right) = 1 - e^{-e^{-\alpha(15'000-u)}}$$

$$= 1 - e^{-e^{-4.2752 \cdot 10^{-4}\,(15'000-8'649.81)}} = 1 - e^{-e^{-2.715}}$$

$$= 1 - 0.9359 = \underline{\underline{0.0641}}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die jährliche maximale Überschwemmung 15‘000 m^3/s überschreitet, beträgt 0.0641.

Aufgabe D.12

b) Wie gross ist der jährliche maximale Abfluss, welcher einer Wiederkehrperiode von 100 Jahren entspricht?

Wiederkehrperiode = 100 Jahre

jährliche Überschreitungswahrscheinlichkeit: $p = \frac{1}{T} = \frac{1}{100}$

$$1 - P[\,jährliches\ Max > x\,] = 1 - P(X \leq x) = F_X(x)$$

$$1 - \frac{1}{100} = F_X(x)$$

Aufgabe D.12

$$\alpha = 4.2752 \cdot 10^{-4}$$

$$u = 8'649.809$$

b) Wie gross ist der jährliche maximale Abfluss, welcher einer Wiederkehrperiode von 100 Jahren entspricht?

$$1 - \frac{1}{100} = F_X(x) = e^{-e^{-\alpha(x-u)}} = 0.99$$

$$\Leftrightarrow \ln(-\ln(0.99)) = -\alpha(x-u) \Leftrightarrow \frac{\ln(-\ln(0.99))}{-\alpha} + u = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(-\ln(0.99))}{-4.2752\,10^{-4}} + 8649.809 = x \Leftrightarrow 10'760.08 + 8'649.809 = x$$

$$\Leftrightarrow x = \underline{\underline{19'409.889}}$$

Die Überschwemmung, welche einer Wiederkehrperiode von 100 Jahren entspricht, ist 19‘410 m^3/s.

Aufgabe D.12

c) Finde die kumulative Verteilungsfunktion, welche den jährlichen maximalen Abfluss des Flusses über einen Zeitraum von 20 Jahren beschreibt. Es wird angenommen, dass die jährlichen Maxima unabhängige Zufallsvariablen sind.

Extremwertverteilungen

Wenn die Extremwerte innerhalb einer Periode T eines ergodischen Zufallsprozesses $X(t)$ unabhängig sind und der Verteilung

$$F_{X,T}^{\max}(x)$$

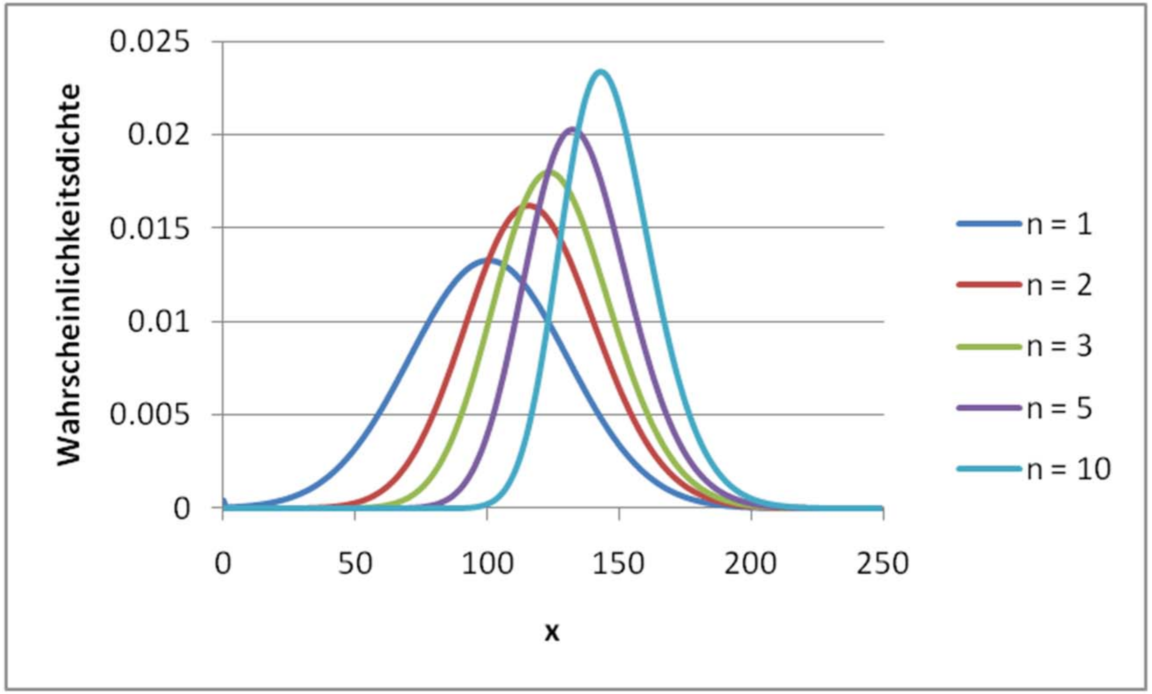
folgen, dann werden die Extremwerte des gleichen Prozesses innerhalb der Periode

$$n \cdot T$$

folgender Verteilung folgen:

$$F_{X,nT}^{\max}(x) = \left[F_{X,T}^{\max}(x) \right]^n$$

Skript, Gleichung D.78



Aufgabe D.12

c) Finde die kumulative Verteilungsfunktion, welche den jährlichen maximalen Abfluss des Flusses über einen Zeitraum von 20 Jahren beschreibt. Es wird angenommen, dass die jährlichen Maxima unabhängige Zufallsvariablen sind.

Für unabhängige Zufallsvariablen ist die kumulative Verteilungsfunktion der grössten Extremwerte innerhalb eines Zeitintervalls nT gegeben als:

$$F_{X,nT}^{\max}(x) = \left[F_{X,T}^{\max}(x) \right]^n$$

Skript, Gleichung D.78

Für das 20jährige Abfluss-Maximum (y) mit n=20 bedeutet dies:

$$F_Y(y) = P[Y \le y] = \left[F_X(x) \right]^{20} = \left(e^{-e^{-\alpha(x-u)}} \right)^{20} = e^{-20e^{-\alpha(x-u)}}$$

Aufgabe D.12

$$\alpha = 4.2752 \cdot 10^{-4}$$

$$u = 8'649.809$$

d) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der 20-jährige maximale Abfluss 15‘000 m^3/s überschreitet?

$$\left[F_X(x)\right]^{20} = \left(e^{-e^{-\alpha(x-u)}}\right)^{20} = e^{-20e^{-\alpha(x-u)}}$$

$$1 - F_Y(15'000) = 1 - e^{-20e^{-4.2756\cdot 10^{-4}(15'000-8'649.81)}}$$

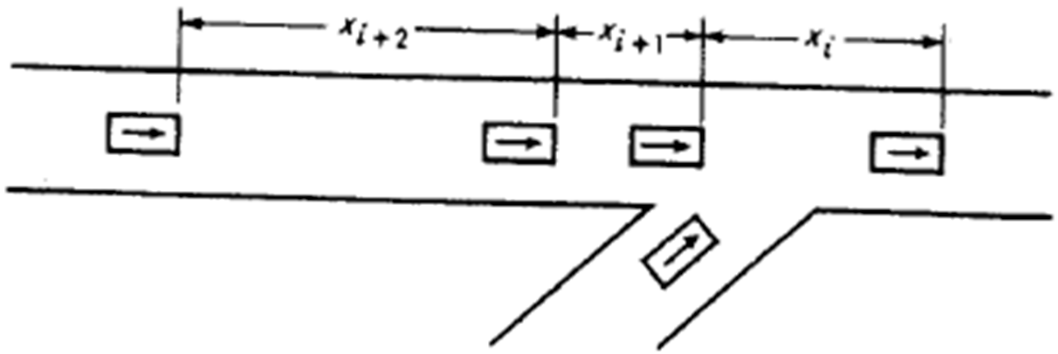
$$= 1 - e^{-1.324} = 1 - 0.266 = \underline{\underline{0.734}}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die 20-jährige maximale Überschwemmung 15‘000 m^3/s überschreitet, beträgt 0.734.

Hausübung D.13

Der Verkehr auf einer Hauptstrasse kann als homogener Poissonprozess modelliert werden. Die Intensität $\nu = 5$ gibt dabei an, wie viele Fahrzeuge pro Minute an einem bestimmten Punkt vorbeikommen.

a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der zeitliche Abstand zwischen zwei beliebigen Fahrzeugen (x_i in der Grafik) kleiner/gleich 10 Sekunden ist.

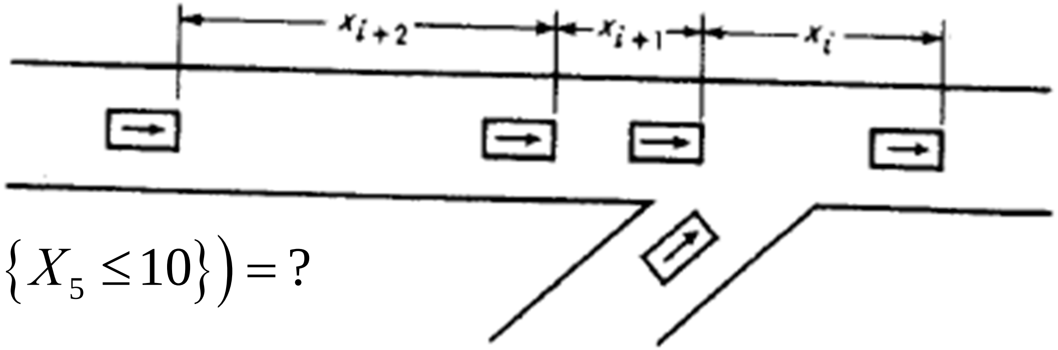


Tipp:
X_i ist die Wartezeit bis zum nächsten Ereignis
⇨ Exponentialverteilung

Hausübung D.13

b) Ein Autofahrer möchte von einer Nebenstrasse in die Hauptstrasse einbiegen (siehe Grafik). Damit dies möglich ist, benötigt er eine Lücke von mehr als 10 Sekunden zwischen zwei Fahrzeugen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass 5 Fahrzeuge auf der Hauptstrasse vorbeifahren, ohne dass eine Möglichkeit zur Auffahrt besteht?

Tipp:
Die einzelnen Abstände sind voneinander unabhängig!



$$P\left(\{X_1 \le 10\} \cap \{X_2 \le 10\} \cap \ldots \cap \{X_5 \le 10\}\right) = ?$$

c) Bestimme die Verteilung des maximalen Abstandes zum vorherigen Fahrzeug x_i in einer Kolonne von 5 oder 10 Fahrzeugen. Stelle die zwei Dichtefunktionen in einer gemeinsamen Grafik dar.

Tipp: Bestimme zunächst die kumulativen Verteilungsfunktionen!