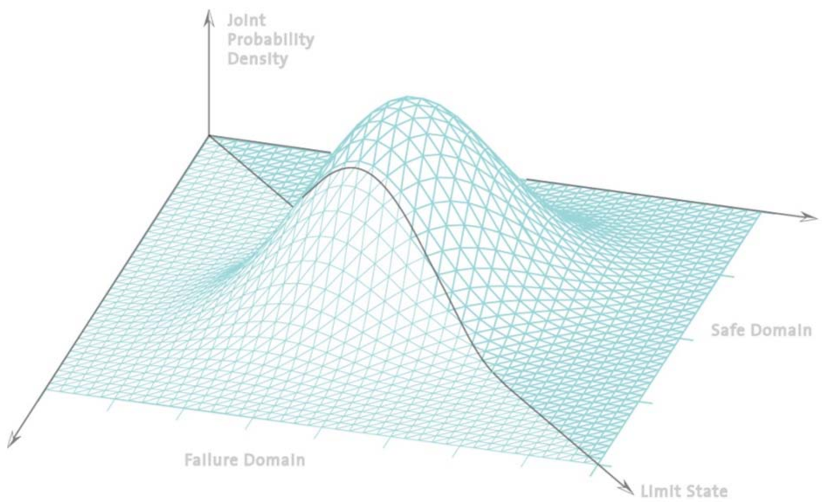


Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Übung 12

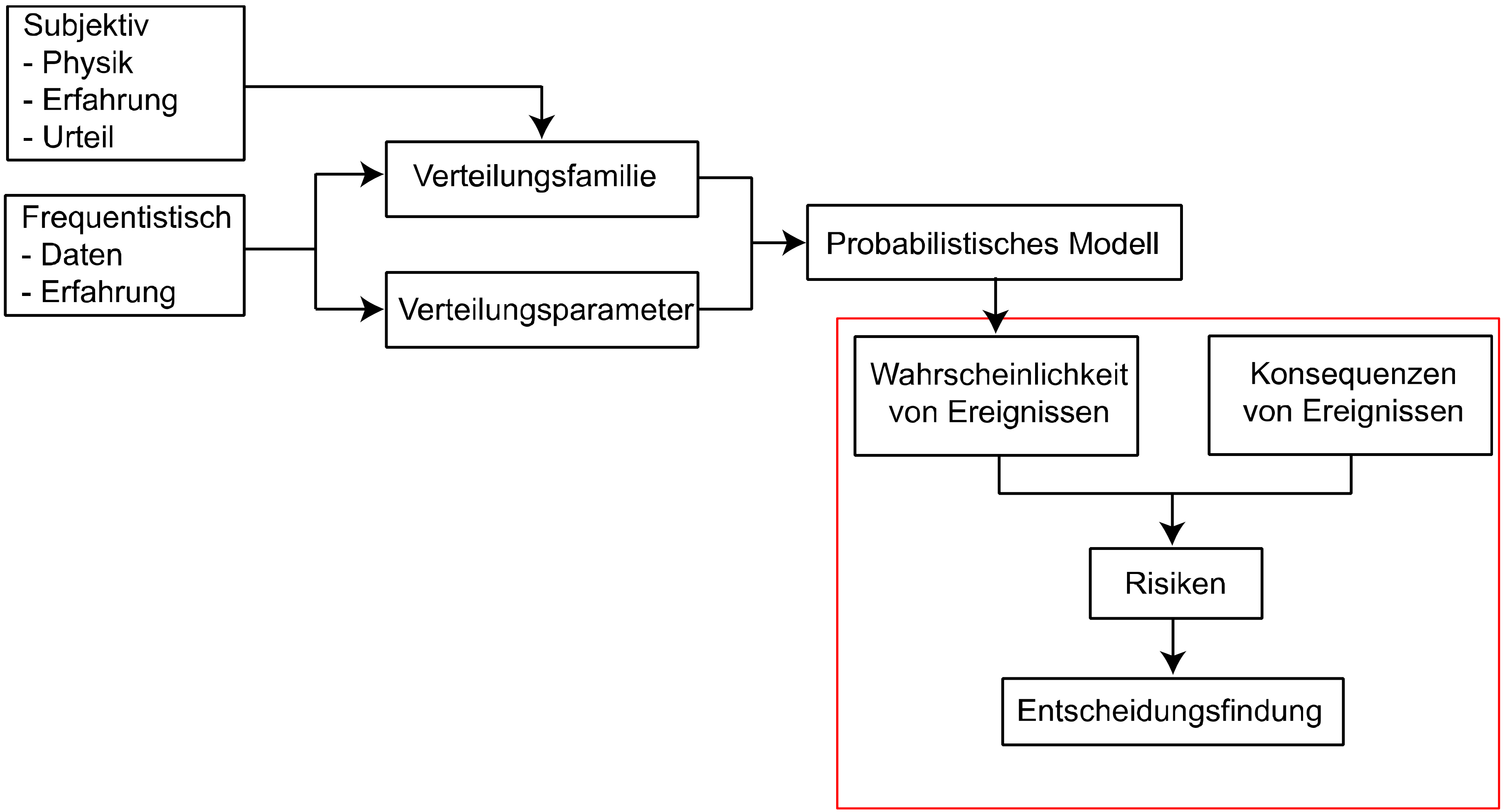
Inhalt der heutigen Übung

- Hausübung F.4 (Zuverlässigkeitsberechnung)

- Bayes'sche Entscheidungsanalyse (Aufgabe G.1)
  - Entscheidungsanalyse bei bekannter Information: A-priori Analyse
  - Entscheidungsanalyse mit zusätzlicher Information: A-posteriori Analyse
  - Entscheidungsanalyse mit „unbekannter" Information: Prä-posteriori Analyse

- Einsatz der gelernten statistischen Methoden an einem Datensatz (Aufgabe G.2)

Übersicht


Subjektiv
- Physik
- Erfahrung
- Urteil
Frequentistisch
- Daten
- Erfahrung
Verteilungsfamilie
Verteilungsparameter
Probabilistisches Modell
Wahrscheinlichkeit von Ereignissen
Konsequenzen von Ereignissen
Risiken
Entscheidungsfindung

Aufgabe G.1

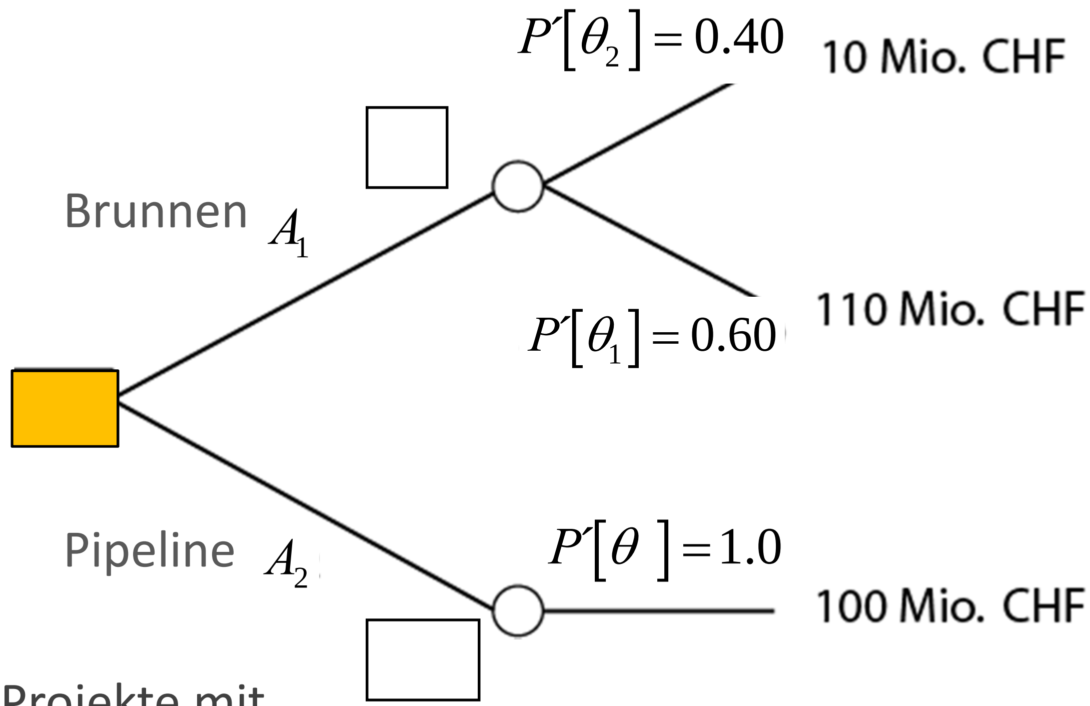
Ein Unternehmen plant den Bau einer Fabrik in einer Wüste. Um die Produktion zu gewährleisten, werden 100 *Kiloliter* Wasser am Tag benötigt. Es bestehen zwei Möglichkeiten, dies zu realisieren:

- ***A1*: Bohren eines Brunnens vor Ort**
- ***A2*: Bau einer Pipeline zur Wasserversorgung**

Die Pipeline kann für 100 Mio. CHF realisiert werden. Der Bau eines Brunnens kostet 10 Mio. CHF. Es kann jedoch nicht garantiert werden, dass der Brunnen ausreichend Wasser führt.

Aufgabe G.1

A-Priori Analyse



a) Aus Erfahrungen früherer Projekte mit ähnlichen geologischen Voraussetzungen kann geschlossen werden, dass ein Brunnen mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% ausreichend Wasser führen wird. Für welche Aktion sollten sich die Geschäftsführer dieses Unternehmens entscheiden?

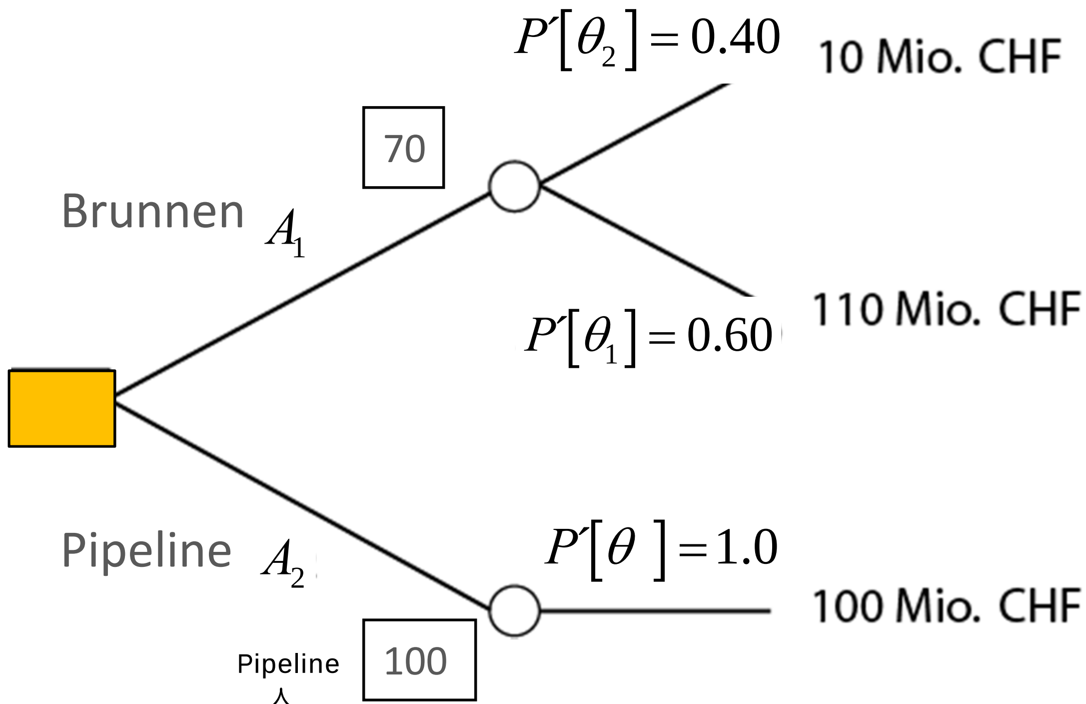
θ_1 : Kapazität des Brunnens < 100 Kiloliter
θ_2 : Kapazität des Brunnens ≥ 100 Kiloliter

θ : Kapazität der Pipeline ≥ 100 Kiloliter

Entscheidungsknoten

Aufgabe G.1

A-Priori Analyse



$$E'[u] = \min \left\{ \overbrace{P'[\theta_1]\cdot 110 + P'[\theta_2]\cdot 10}^{\text{Brunnen}};\ \overbrace{P'[\theta]\cdot 100}^{\text{Pipeline}} \right\}$$

$$= \min \left\{ 0.6\cdot 110 + 0.4\cdot 10;\ 1.0\cdot 100 \right\} = \min\{70\ ;\ 100\} = 70\,Mio.CHF$$

Die Aktion A_1 würde mit den gegebenen A-Priori Wahrscheinlichkeiten geringere Kosten verursachen. Also sollte der Ingenieur sich für die Erschliessung eines Brunnens vor Ort entscheiden.

Aufgabe G.1

θ_1 : Kapazität des Brunnens < 100 Kiloliter
θ_2 : Kapazität des Brunnens ≥ 100 Kiloliter

b) Die Kapazität des Brunnens kann durch eine **Probebohrung** geschätzt werden. Diese Bohrung verursacht **Kosten von 1 Mio. CHF**. Das Verfahren der Probebohrung liefert drei unterschiedliche Indikatoren bezüglich der Kapazität. Die Wahrscheinlichkeitstabelle für dieses Verfahren ist gegeben.

Die erste Probebohrung ergibt eine Indikation I_2.
Sollte der Brunnen zur Wasserversorgung gebohrt werden?

	Kapazität des Brunnens	
Indikator	θ_1 < 100 kl	θ_2 > 100 kl
I_1: Kapazität >105 kl	$P(I_1 \mid \theta_1) = 0.1$	$P(I_1 \mid \theta_2) = 0.8$
I_2 : 95 kl < Kapazität <105 kl	$P(I_2 \mid \theta_1) = 0.2$	$P(I_2 \mid \theta_2) = 0.1$
I_3 : Kapazität < 95 kl	$P(I_3 \mid \theta_1) = 0.7$	$P(I_3 \mid \theta_2) = 0.1$

θ_1 : Kapazität des Brunnens < 100 Kiloliter
θ_2 : Kapazität des Brunnens ≥ 100 Kiloliter

Aufgabe G.1

A-Posteriori Analyse

Durch eine Probebohrung können wir nun unsere A priori Wahrscheinlichkeiten aktualisieren – Dazu verwenden wir den Satz von Bayes.

$$P''(E_i|A) = \frac{P(A|E_i)P'(E_i)}{P(A)} = \frac{P(A|E_i)P'(E_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|E_i)P'(E_i)}$$

A Posteriori

"Likelihood"

A Priori

Gleichung B.15 Skript

$$\underline{P''(\theta_1 \mid I_2)} = \frac{P(I_2 \mid \theta_1) \cdot P'(\theta_1)}{P(I_2 \mid \theta_1)P'(\theta_1) + P(I_2 \mid \theta_2)P'(\theta_2)}$$

A Posteriori Wahrscheinlichkeit = aktualisierte A-Priori Wahrscheinlichkeit

$$\overline{P''(\theta_2 \mid I_2)} = \frac{P(I_2 \mid \theta_2) \cdot P'(\theta_2)}{P(I_2 \mid \theta_1)P'(\theta_1) + P(I_2 \mid \theta_2)P'(\theta_2)}$$

Aufgabe G.1

A-Posteriori Analyse

θ_1 : Kapazität des Brunnens < 100 Kiloliter
θ_2 : Kapazität des Brunnens ≥ 100 Kiloliter

$$P'(\theta_1) = 0.6$$

$$P'(\theta_2) = 0.4$$

	Kapazität des Brunnens	
Indikator	θ_1 < 100 kl	θ_2 > 100 kl
I_1: Kapazität >105 kl	$P(I_1 \vert \theta_1) = 0.1$	$P(I_1 \vert \theta_2) = 0.8$
I_2 : 95 kl < Kapazität <105 kl	$P(I_2 \vert \theta_1) = 0.2$	$P(I_2 \vert \theta_2) = 0.1$
I_3 : Kapazität < 95 kl	$P(I_3 \vert \theta_1) = 0.7$	$P(I_3 \vert \theta_2) = 0.1$

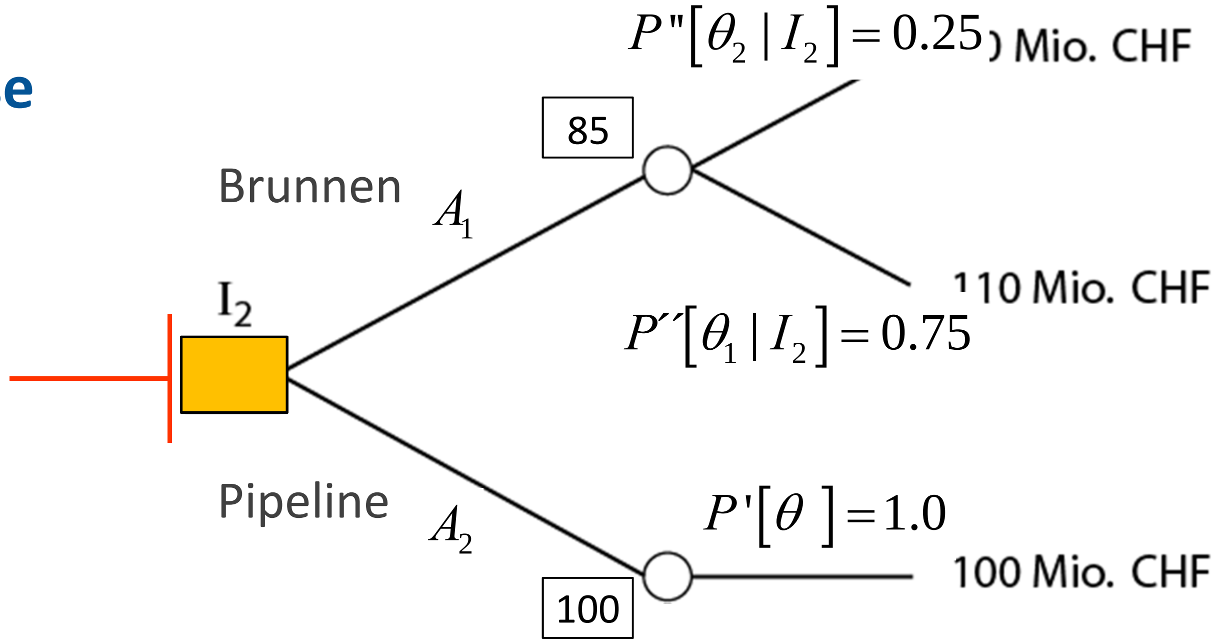
$$P''(\theta_1 \mid I_2) = \frac{0.2 \cdot 0.6}{0.2 \cdot 0.6 + 0.1 \cdot 0.4} = 0.75$$

$$P''(\theta_2 \mid I_2) = \frac{0.1 \cdot 0.4}{0.2 \cdot 0.6 + 0.1 \cdot 0.4} = 0.25$$

Aufgabe G.1

A-Posteriori Analyse

Ergebnis der Probebohrung ist jetzt bekannt



$$E''[u] = \min \left\{ \overbrace{P''[\theta_1 \mid I_2]\cdot(10) + P''[\theta_2 \mid I_2]\cdot(100+10)}^{\text{Brunnen}};\ \overbrace{P'[\theta]\cdot 100}^{\text{Pipeline}} \right\} =$$

$$= \min \left\{0.25\cdot 10 + 0.75\cdot 110;\ 1.0\cdot 100\right\} = \min\left\{85\ ;\ 100\right\} = 85\,Mio.CHF$$

Mit dieser Indikation aus dem Pumpversuch erscheint die Alternative A_1 als die günstigere und sollte folglich gewählt werden.

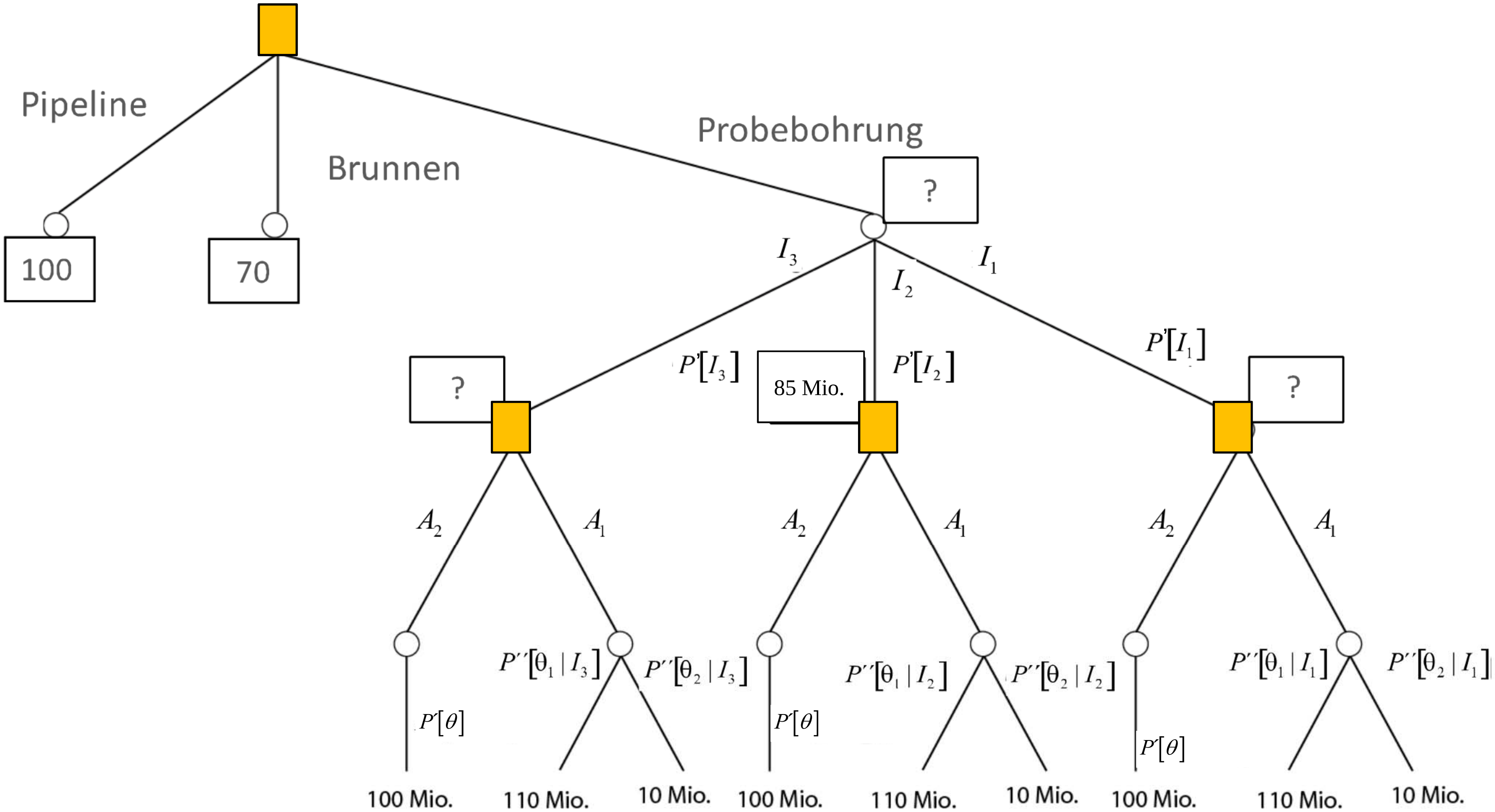
Aufgabe G.1

c) Entscheide, ob überhaupt eine Probebohrung durchgeführt werden sollte.

Betrachten wir dazu zunächst den Entscheidungsbaum.

Aufgabe G.1

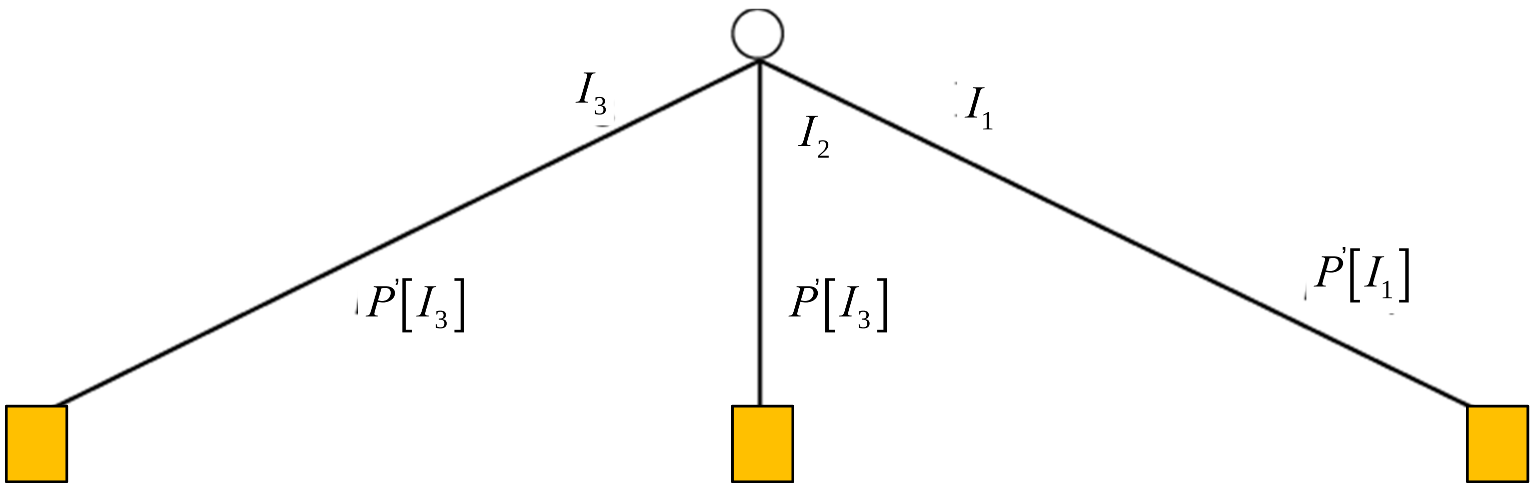
Prä-Posteriori Analyse



Aufgabe G.1

Prä-Posteriori Analyse

Zuerst benötigen wir die Wahrscheinlichkeit, dass die Probebohrung die Indikation I_1, I_2 oder I_3 liefert.



Aufgabe G.1

$$P(\theta_1) = 0.6$$
$$P(\theta_2) = 0.4$$

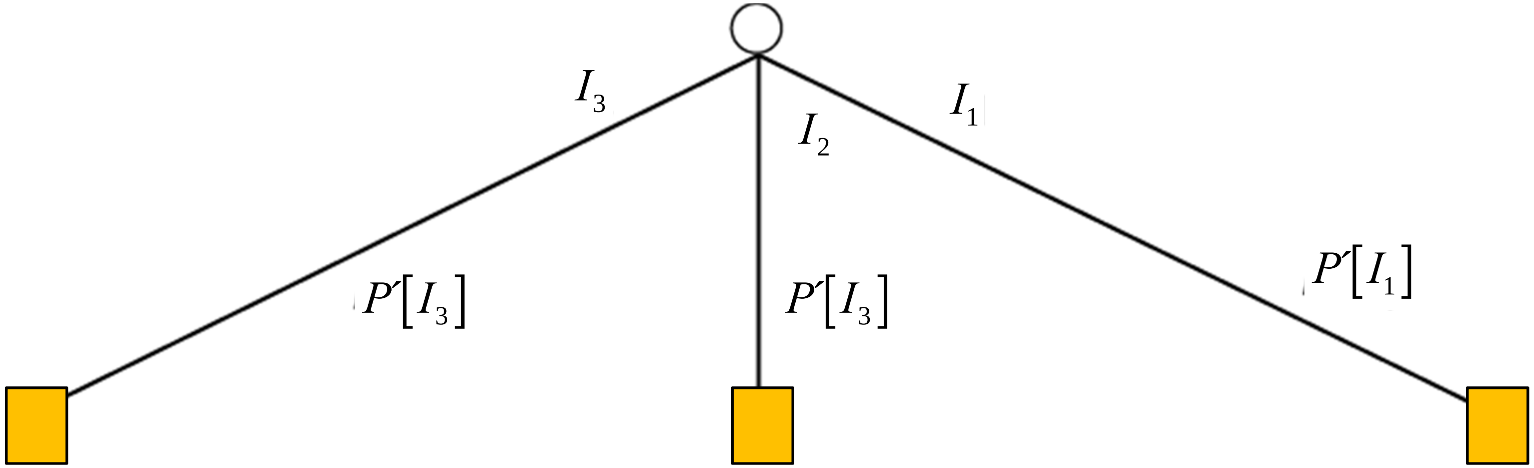
	Kapazität des Brunnens	
Indikator	θ_1 < 100 kl	θ_2 > 100 kl
I_1: Kapazität >105 kl	**0.1**	**0.8**
I_2 : 95 kl < Kapazität <105 kl	**0.2**	**0.1**
I_3 : Kapazität < 95 kl	**0.7**	**0.1**

Prä-Posteriori Analyse

$$P'[I_1] = P[I_1 | \theta_1] \cdot P'[\theta_1] + P[I_1 | \theta_2] \cdot P'[\theta_2] = 0.1 \cdot 0.6 + 0.8 \cdot 0.4 = 0.38$$

$$P'[I_2] = P[I_2 | \theta_1] \cdot P'[\theta_1] + P[I_2 | \theta_2] \cdot P'[\theta_2] = 0.2 \cdot 0.6 + 0.1 \cdot 0.4 = 0.16$$

$$P'[I_3] = P[I_3 | \theta_1] \cdot P'[\theta_1] + P[I_3 | \theta_2] \cdot P'[\theta_2] = 0.7 \cdot 0.6 + 0.1 \cdot 0.4 = 0.46$$



Aufgabe G.1

$$P(\theta_1) = 0.6$$
$$P(\theta_2) = 0.4$$

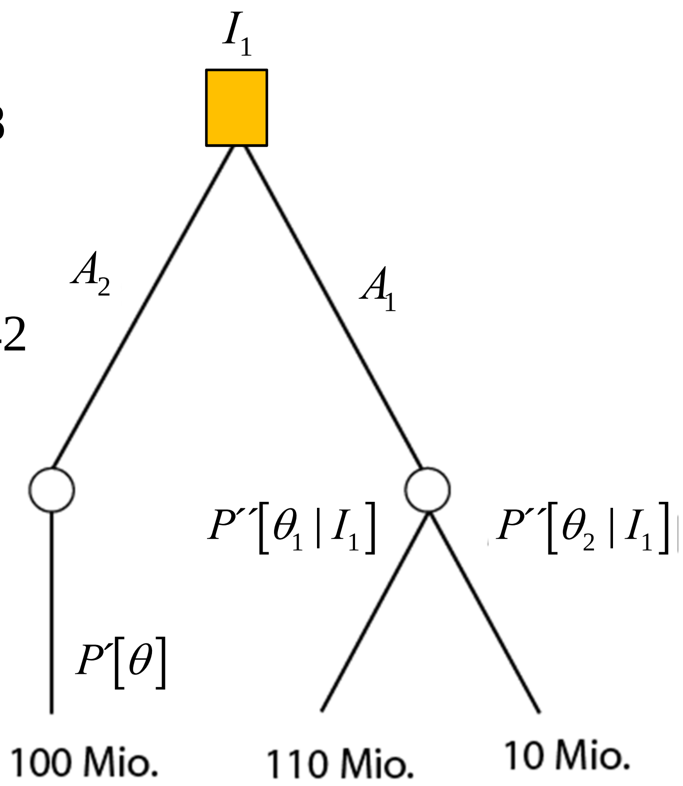
	Kapazität des Brunnens	
Indikator	θ_1 < 100 kl	θ_2 > 100 kl
I_1: Kapazität >105 kl	0.1	0.8
I_2 : 95 kl < Kapazität <105 kl	0.2	0.1
I_3 : Kapazität < 95 kl	0.7	0.1

Prä-Posteriori Analyse

Jetzt müssen wir unsere A-Posteriori Wahrscheinlichkeiten der Zustände für jede Indikation berechnen.

$$P''(\theta_1 \mid I_1) = \frac{P(I_1 \mid \theta_1) \cdot P'(\theta_1)}{P'(I_1)} = \frac{0.1 \cdot 0.6}{0.38} = \frac{0.06}{0.38} = 0.158$$

$$P''(\theta_2 \mid I_1) = \frac{P(I_1 \mid \theta_2) \cdot P'(\theta_2)}{P'(I_1)} = \frac{0.8 \cdot 0.4}{0.38} = \frac{0.32}{0.38} = 0.842$$



Aufgabe G.1

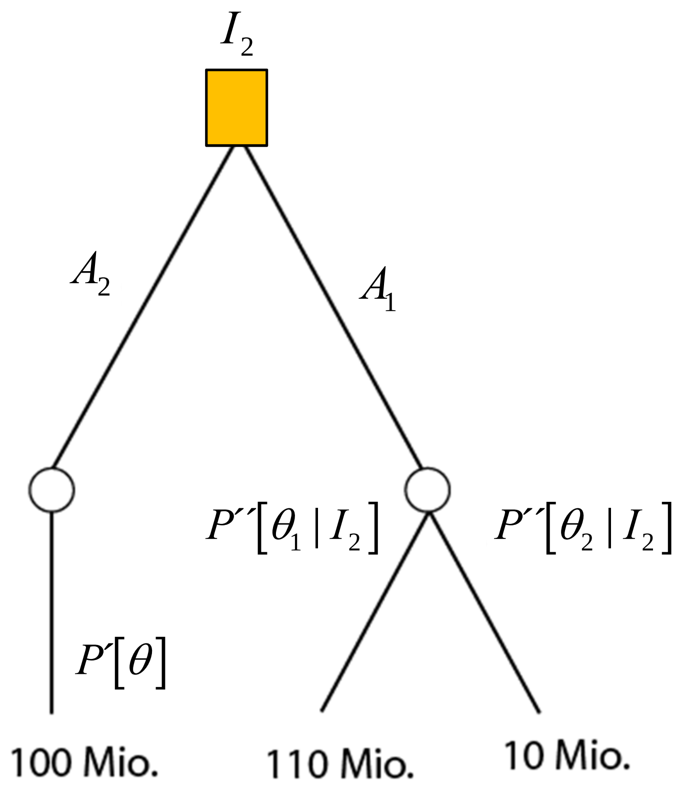
Prä-Posteriori Analyse

$$P(\theta_1) = 0.6$$
$$P(\theta_2) = 0.4$$

	Kapazität des Brunnens	
Indikator	θ_1 < 100 kl	θ_2 > 100 kl
I_1: Kapazität >105 kl	**0.1**	**0.8**
I_2 : 95 kl < Kapazität <105 kl	**0.2**	**0.1**
I_3 : Kapazität < 95 kl	**0.7**	**0.1**

$$P''(\theta_1 \mid I_2) = \frac{P(I_2 \mid \theta_1) \cdot P'(\theta_1)}{P'(I_2)} = \frac{0.2 \cdot 0.6}{0.16} = \frac{0.12}{0.16} = 0.75$$

$$P''(\theta_2 \mid I_2) = \frac{P(I_2 \mid \theta_2) \cdot P'(\theta_2)}{P'(I_2)} = \frac{0.1 \cdot 0.4}{0.16} = \frac{0.04}{0.16} = 0.25$$



Aufgabe G.1

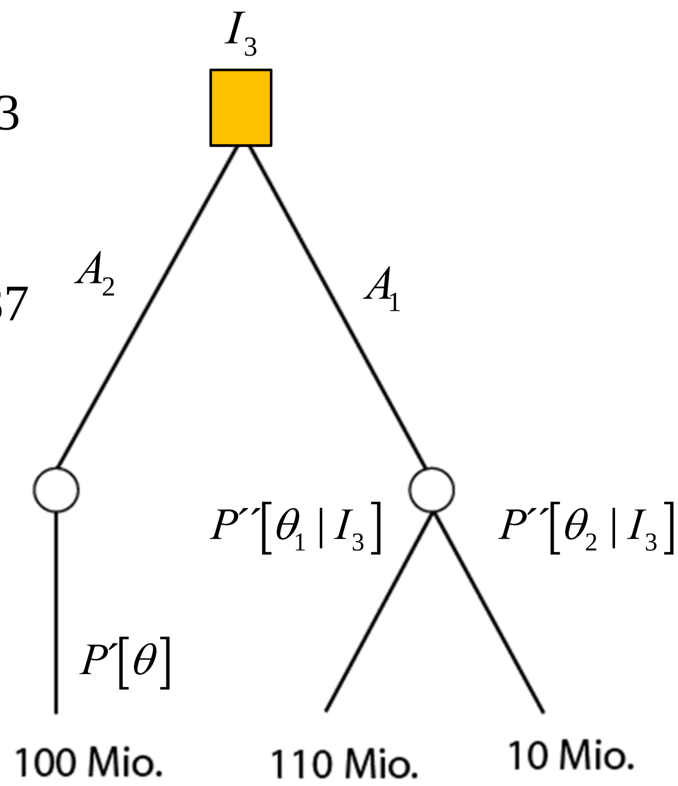
Prä-Posteriori Analyse

$$P(\theta_1) = 0.6$$
$$P(\theta_2) = 0.4$$

	Kapazität des Brunnens	
Indikator	θ_1 < 100 kl	θ_2 > 100 kl
I_1: Kapazität >105 kl	**0.1**	**0.8**
I_2 : 95 kl < Kapazität <105 kl	**0.2**	**0.1**
I_3 : Kapazität < 95 kl	**0.7**	**0.1**

$$P''(\theta_1 \mid I_3) = \frac{P(I_3 \mid \theta_1) \cdot P'(\theta_1)}{P'(I_3)} = \frac{0.7 \cdot 0.6}{0.46} = \frac{0.42}{0.46} = 0.913$$

$$P''(\theta_2 \mid I_3) = \frac{P(I_3 \mid \theta_2) \cdot P'(\theta_2)}{P'(I_3)} = \frac{0.1 \cdot 0.4}{0.46} = \frac{0.04}{0.46} = 0.087$$



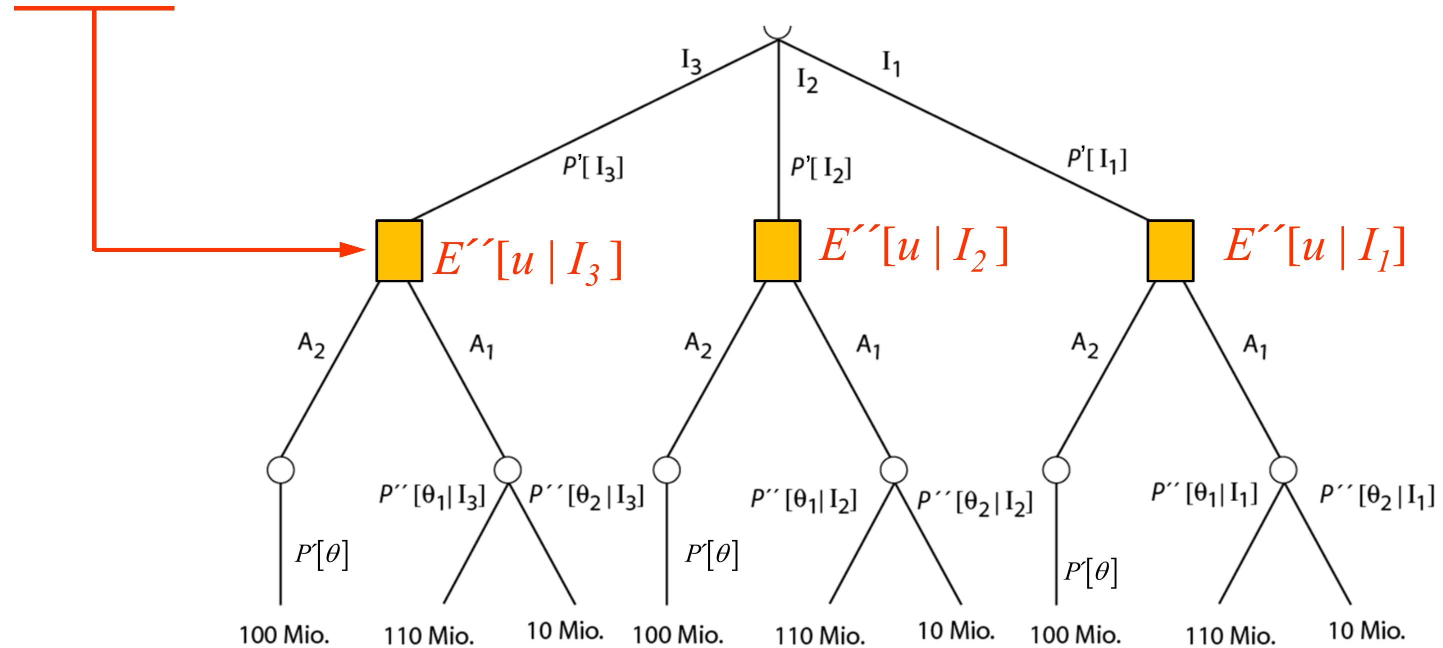
Aufgabe G.1

Prä-Posteriori Analyse

$$E''[u \mid I_1] = \min \left\{ \overbrace{P''(\theta_1 \mid I_1)\cdot 110 + P''(\theta_2 \mid I_1)\cdot 10;}^{\text{Brunnen}} \quad \overbrace{P'[\theta]\cdot 100}^{\text{Pipeline}} \right\}$$

$$E''[u \mid I_2] = \min \left\{ P''(\theta_1 \mid I_2)\cdot 110 + P''(\theta_2 \mid I_2)\cdot 10; \quad P'[\theta]\cdot 100 \right\}$$

$$E''[u \mid I_3] = \min \left\{ P''(\theta_1 \mid I_3)\cdot 110 + P''(\theta_2 \mid I_3)\cdot 10; \quad P'[\theta]\cdot 100 \right\}$$



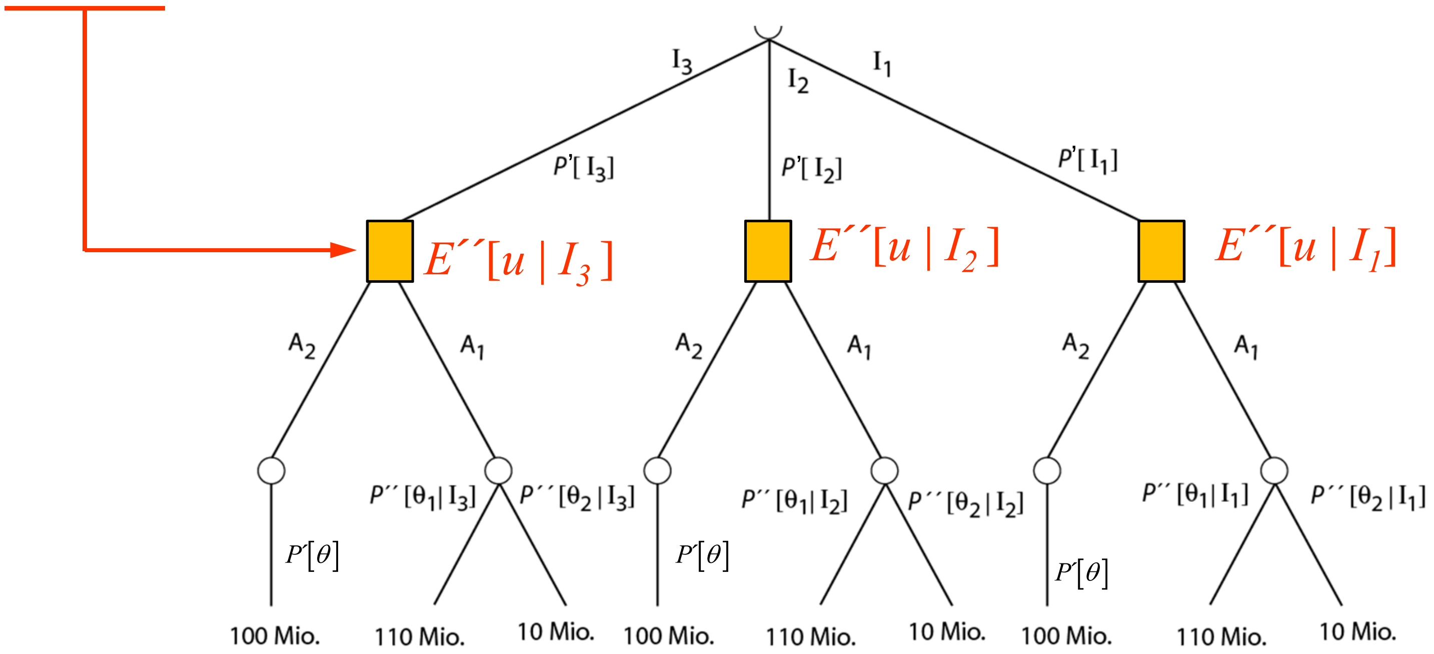
Aufgabe G.1

Prä-Posteriori Analyse

$$E''[u \mid I_1] = \min \; \{\overbrace{0.16 \cdot 110 + 0.84 \cdot 10}^{\text{Brunnen}}; \; \overbrace{1.0 \cdot 100}^{\text{Pipeline}}\} = 26$$

$$E''[u \mid I_2] = \min \; \{0.75 \cdot 110 + 0.25 \cdot 10; \; 1.0 \cdot 100\} = 85$$

$$E''[u \mid I_3] = \min \; \{0.913 \cdot 110 + 0.087 \cdot 10; \; 1.0 \cdot 100\} = 100$$



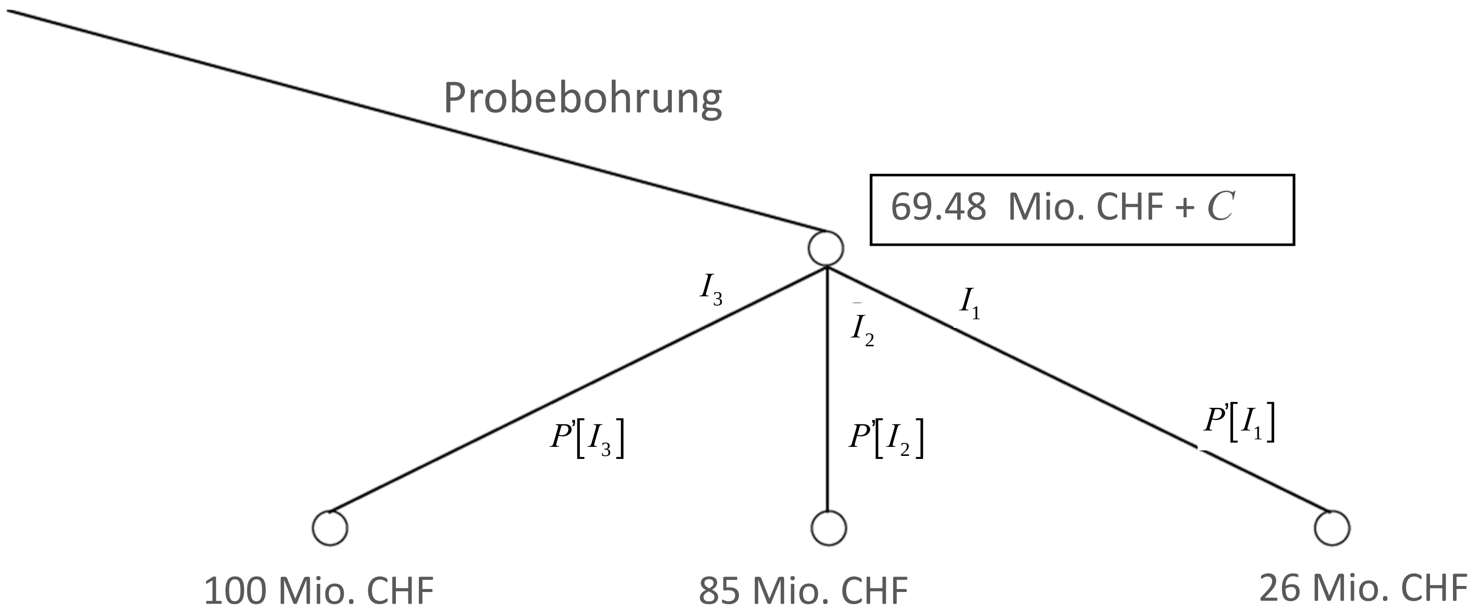
Aufgabe G.1

Prä-Posteriori Analyse

$$E[u] = \left(E''[u \mid I_1] \cdot P'[I_1] + E''[u \mid I_2] \cdot P'[I_2] + E''[u \mid I_3] \cdot P'[I_3]\right) + C$$

$$E[u] = 26 \cdot 0.38 + 85 \cdot 0.16 + 100 \cdot 0.46 = 69.48 + C$$

Wobei C die Kosten für die Probebohrung sind.



Aufgabe G.1

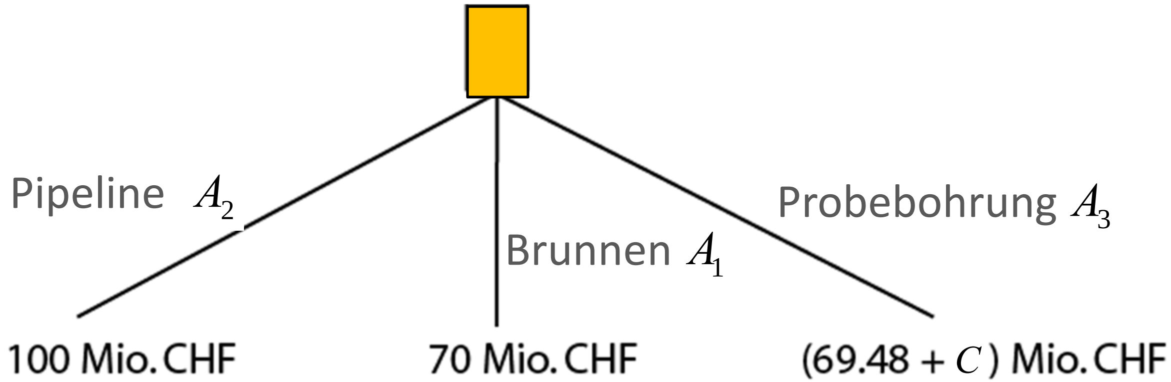
Prä-Posteriori Analyse

Jetzt können wir die Entscheidung fällen!

$$69.48 + C = 70.48 \text{ Mio. CHF}$$

$$\min(A_1, A_2, A_3) = 70 \text{ Mio. CHF}$$

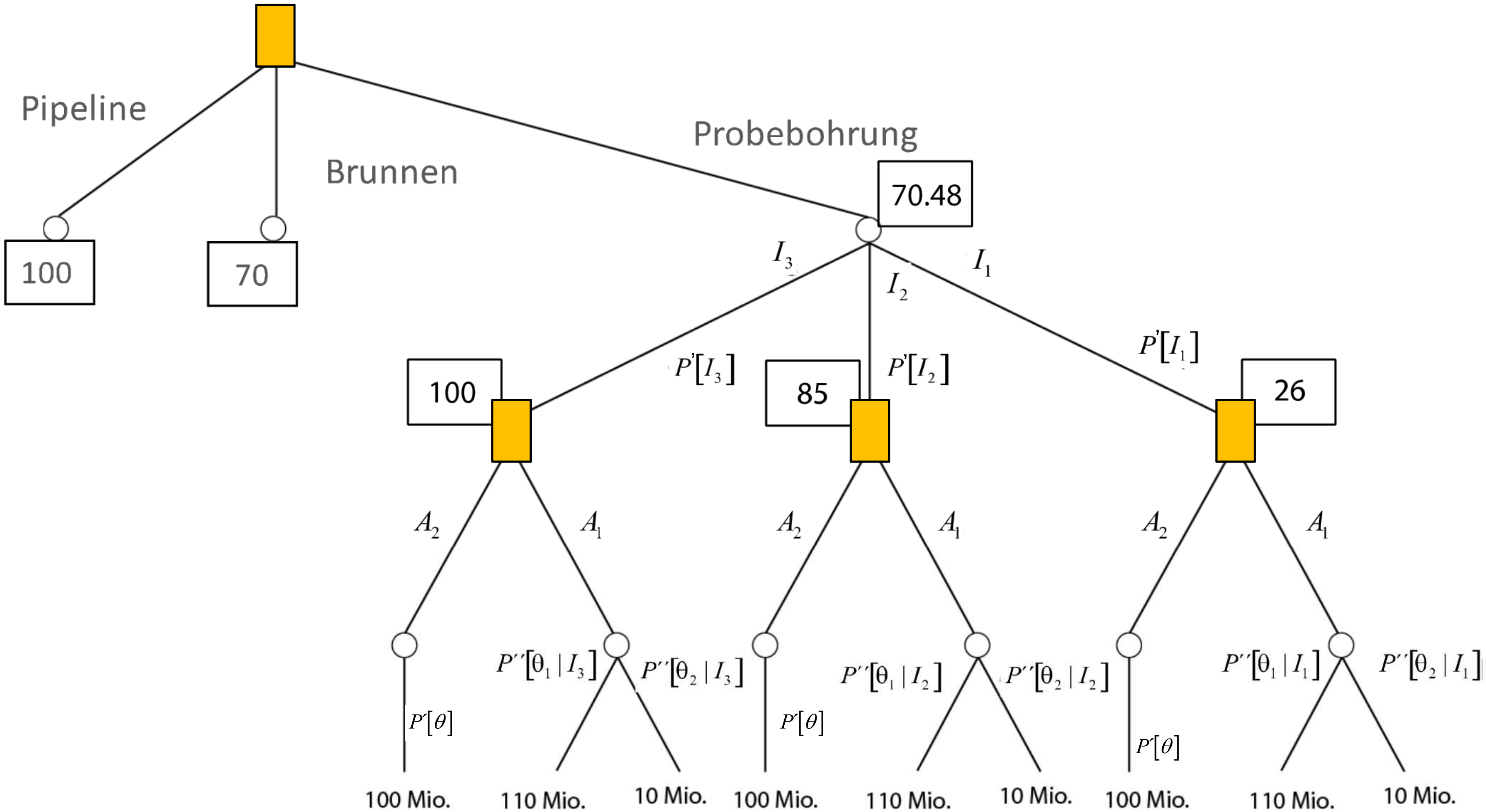
Folglich würden wir uns für den Bau eines Brunnens entscheiden, weil dies mit dem geringsten Risiko verbunden ist.



Wenn die Probebohrung weniger als 0.52 Mio. CHF kostet, dann lohnt sie sich. Da die Probebohrung aber 1 Mio. CHF kostet sollte diese nicht durchgeführt werden

Aufgabe G.1

Prä-Posteriori Analyse



Aufgabe G.2

An der deutschen Nordseeküste wird ein alter Schutzdamm auf seine Qualität überprüft. Dabei soll sichergestellt werden, dass er den neuesten Sicherheitsbestimmungen genügt.

Sie sind der Experte/die Expertin und mit der Beurteilung dieses Schutzdamms beauftragt. Sie sollen überprüfen, ob die Höhe des Dammes ausreichend ist und ob der Damm stabil genug ist oder verstärkt werden muss.



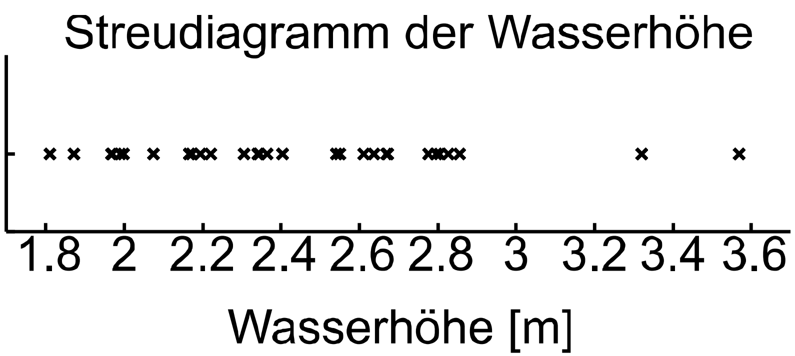

Aufgabe G.2

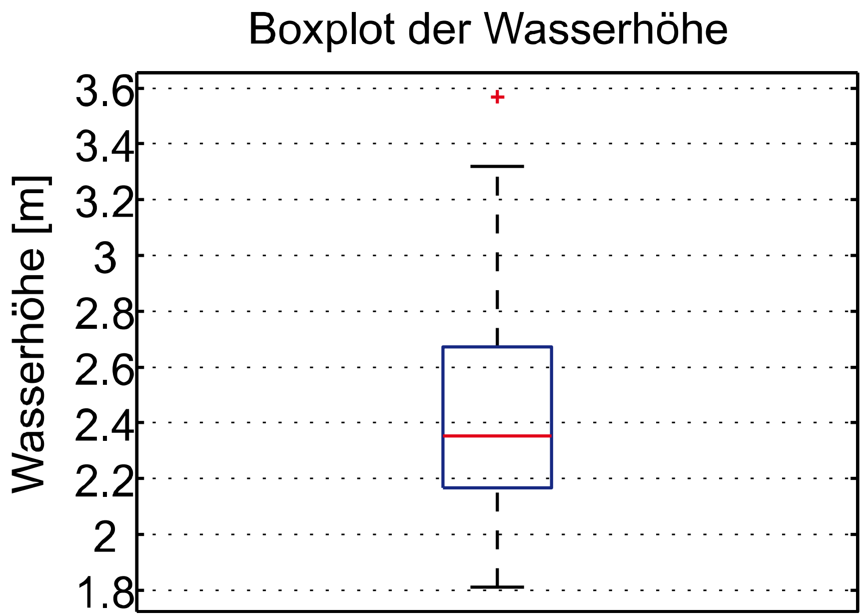
Um die notwendige Höhe des Dammes bestimmen zu können, soll anhand von Messwerten der letzten 30 Jahre ein Modell für die maximale jährliche Wasserhöhe erstellt werden.

Jahr	Maximaler Wasserstand [m]	Jahr	Maximaler Wasserstand [m]
2009	1.970	1994	2.400
2008	2.830	1993	2.800
2007	2.190	1992	2.300
2006	2.540	1991	2.170
2005	3.570	1990	1.810
2004	2.340	1989	2.640
2003	2.670	1988	2.340
2002	2.780	1987	2.360
2001	2.340	1986	2.550
2000	2.610	1985	1.870
1999	1.970	1984	2.220
1998	3.320	1983	2.800
1997	2.070	1982	2.670
1996	2.170	1981	1.990
1995	2.860	1980	2.000

Aufgabe G.2

a) Erstelle eine erste Übersicht über die maximale jährliche Wasserhöhe der letzten 30 Jahre.

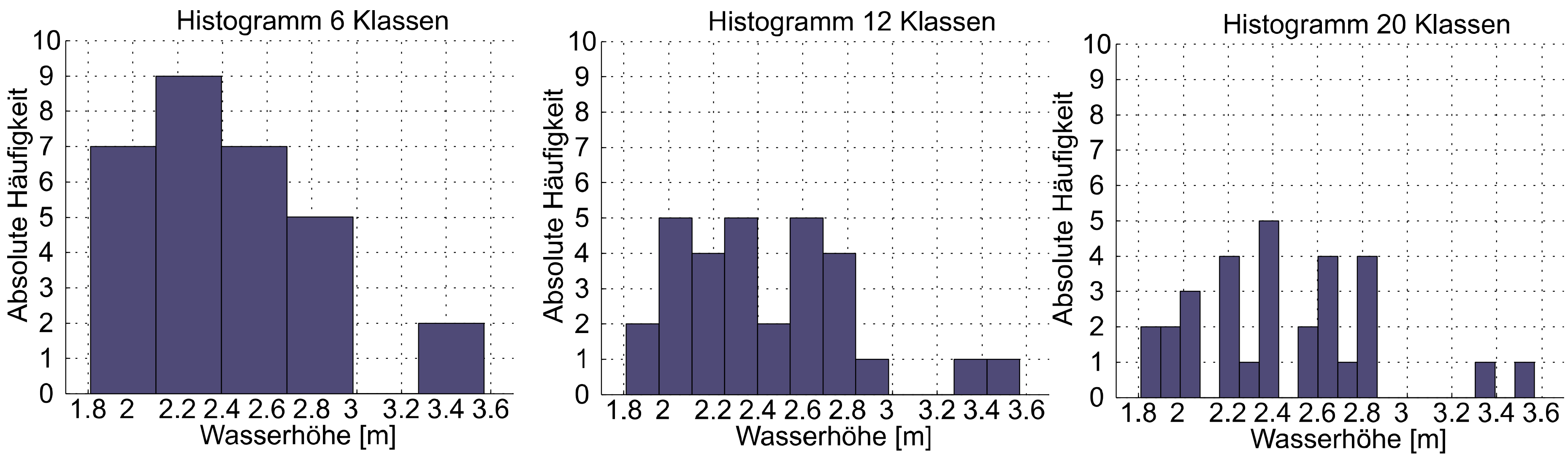




Aufgabe G.2

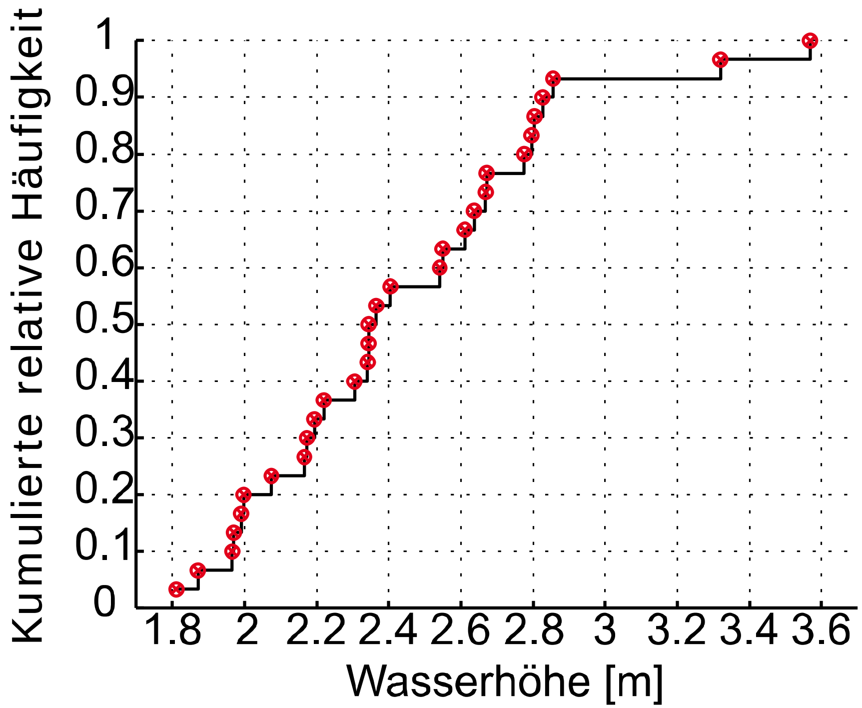
a) Erstelle eine erste Übersicht über die maximale jährliche Wasserhöhe der letzten 30 Jahre.

$$k = 1 + 3.3\log(n) = 5.8745 \approx 6$$



Aufgabe G.2

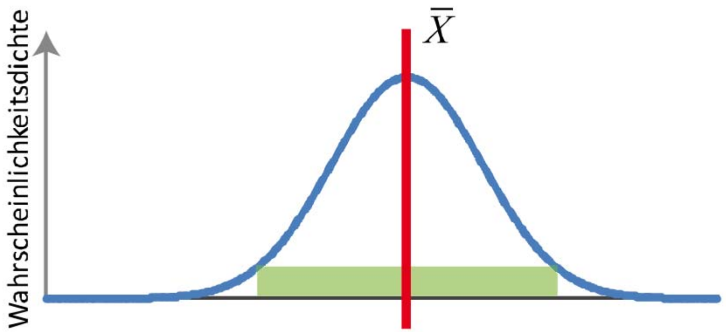
a) Erstelle eine erste Übersicht über die maximale jährliche Wasserhöhe der letzten 30 Jahre.



Aufgabe G.2

b) Anhand der vorliegenden Daten möchtest du das Intervall bestimmen, in welchem der wahre Mittelwert mit einer Konfidenz von 95% liegt. Da der von dir berechnete Wert für die Stichprobenstandard-abweichung $s_{erwartungstreu}$ sich gut mit den Angaben der einschlägigen Literatur deckt, gehst du davon aus, dass er der wahren Standardabweichung σ_X entspricht.

$$P[\bar{X} - \Delta \leq \mu_X \leq \bar{X} + \Delta] = 1 - \alpha = 0.95$$



Konfidenzintervall für den wahren Mittelwert

Aufgabe G.2

$$P[\bar{X} - \Delta \le \mu_X \le \bar{X} + \Delta] = 1 - \alpha = 0.95$$

Nach dem zentralen Grenzwertsatz ist der Stichprobenmittelwert $\bar{X}$

näherungsweise normalverteilt mit dem Erwartungswert $E[\bar{X}] = \mu_X$

und der Varianz $Var[\bar{X}] = \frac{1}{n}\sigma_x^2$

Damit gilt:

$$P\left[-k_{\alpha/2} \le \frac{\bar{X} - \mu_X}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}} \le k_{\alpha/2}\right] = 0.95$$

$$\Rightarrow P[\bar{X} - k_{\alpha/2}\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \le \mu_X \le \bar{X} + k_{\alpha/2}\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}] = 1 - \alpha = 0.95$$

Aufgabe G.2

Der Stichprobenmittelwert berechnet sich zu: $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 2.438\,[m]$

Und gemäss den Annahmen ist die Standardabweichung:

$$\sigma_X = s_{erwartungstreu} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2\right)} = 0.414\,[m]$$

Das Intervall berechnet sich demnach zu:

$$P\left[2.438 - 1.96\frac{0.414}{\sqrt{30}} \le \mu_X \le 2.438 + 1.96\frac{0.414}{\sqrt{30}}\right] = 0.95$$

$$P[2.29 \le \mu_X \le 2.59] = 0.95$$

Der wahre Mittelwert liegt mit einer Konfidenz von 95% im Intervall [2.29m;2.59m].

Aufgabe G.2

c) Überprüfe anhand geeigneter Wahrscheinlichkeitspapiere, welche Verteilung am besten zu diesen Daten passt.

Beispiel:

- Gumbelverteilung

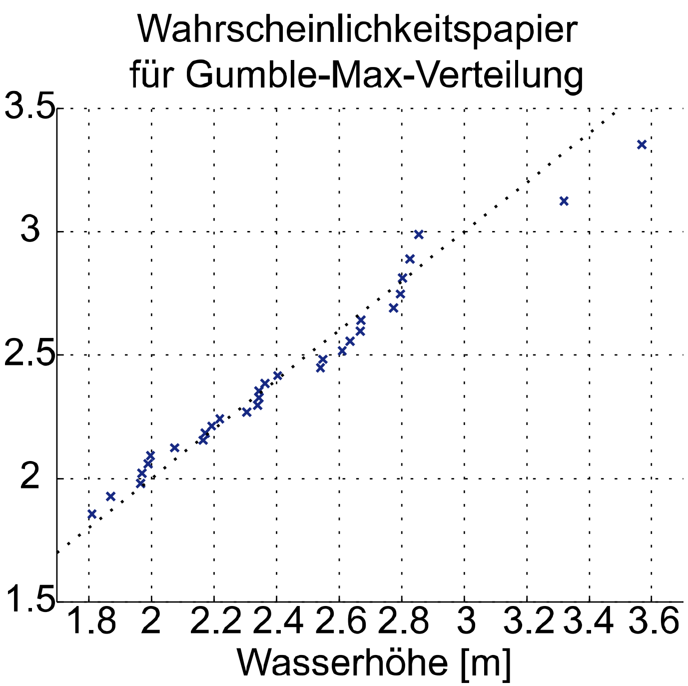
$$F_X(x) = \exp\left(-\exp(-a(x-b))\right)$$

$$\longrightarrow \quad -\ln\Big(\underbrace{-\ln\left(F_X(x)\right)}_{=y}\Big) = a(x-b) = ax - ab$$

Aufgabe G.2

c) Überprüfe anhand geeigneter Wahrscheinlichkeitspapiere, welche Verteilung am besten zu diesen Daten passt.

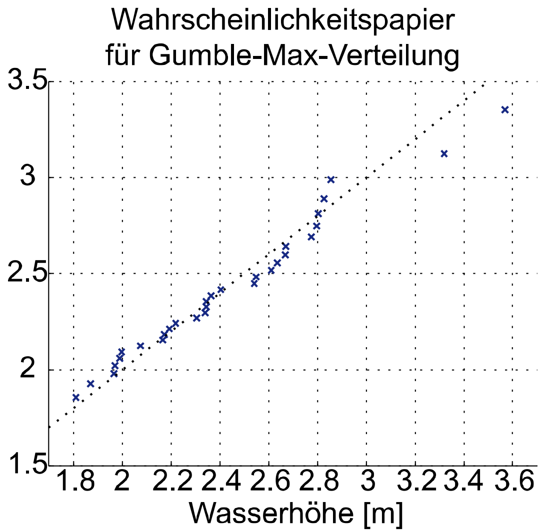
Beispiel: Gumbelverteilung

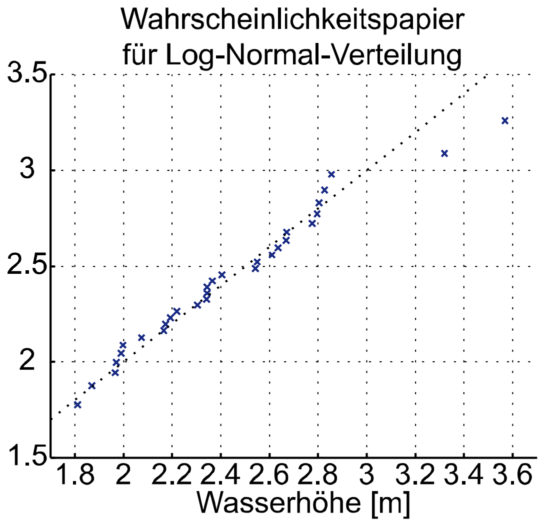


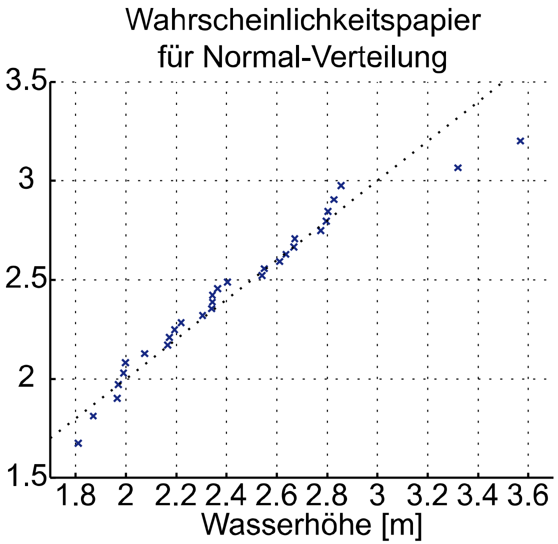
i	$\hat{x}^o$	$F_X(\hat{x}^o)=\frac{i}{N+1}$	$-\ln\left(-\ln\left(F_X(\hat{x}^o)\right)\right)$
1	1.81	0.032	-1.234
2	1.87	0.065	-1.008
3	1.97	0.097	-0.848
4	1.97	0.129	-0.717
5	1.99	0.161	-0.601
6	2.00	0.194	-0.496
…	…	…	…
…	…	…	…
…	…	…	…
28	2.86	0.903	2.285
29	3.32	0.935	2.708
30	3.57	0.968	3.418

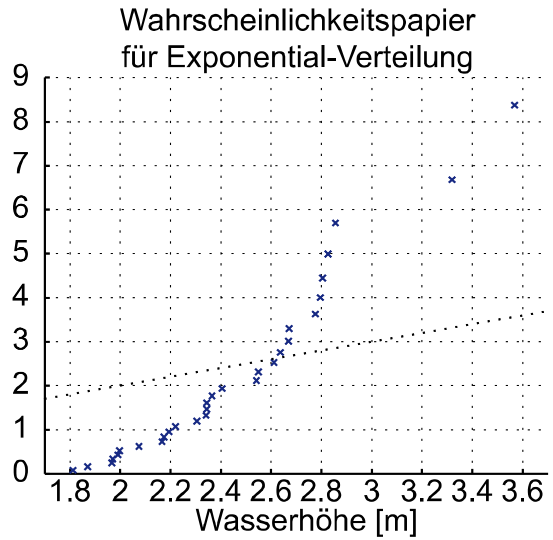
Aufgabe G.2

c) Überprüfe anhand geeigneter Wahrscheinlichkeits-papiere, welche Verteilung am besten zu diesen Daten passt.









Aufgabe G.2

d) Sollte der Vergleich verschiedener Wahrscheinlichkeitspapiere nicht eindeutig sein, eignet sich auch ein Vergleich der Likelihoods.

Schätze hierfür zuerst die Parameter der Lognormalverteilung und der Gumbel Max Verteilung mit der Methode der Momente.

Berechne anschliessend die jeweilige Likelihood und entscheide auf dieser Basis, welche Verteilungsfunktion die Daten besser repräsentiert.

Aufgabe G.2

d) Schätzen der Parameter α und u der Gumbel-Max-Verteilung mit der Methode der Momente:

Gumbel-Max-Verteilung: $$f_x(x) = \alpha \cdot \mathrm{e}^{-\alpha(x-u)-\mathrm{e}^{-\alpha(x-u)}}$$

$$\mu = u + \frac{0.577216}{\alpha} \qquad \sigma = \frac{\pi}{\alpha\sqrt{6}}$$

Skript Tabelle D.2

$$\mu = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i = 2.4385 \qquad \sigma = s_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i^2 - \mu^2} = 0.4060$$

$$\alpha = \frac{\pi}{\sigma \cdot \sqrt{6}} = 3.1590 \qquad u = \mu - \frac{0.577216}{\alpha} = 2.2558$$

Aufgabe G.2

d) Schätzen der Parameter λ und ζ der Lognormalverteilung mit der Methode der Momente:

Lognormalverteilung $f_X(x) = \frac{1}{x\zeta\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x) - \lambda}{\zeta} \right)^2 \right)$

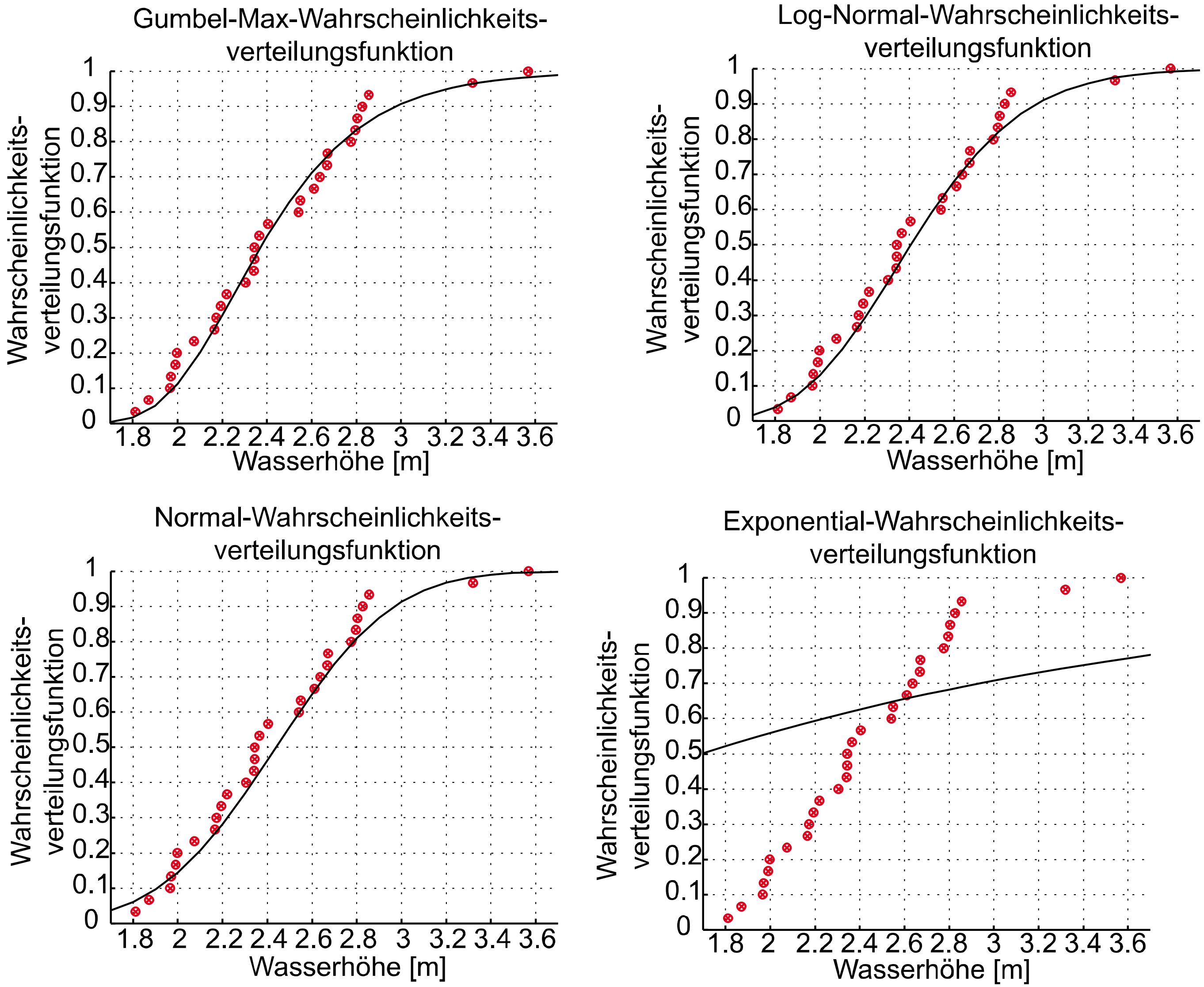
$$\mu = \exp(\lambda + \frac{\zeta^2}{2}) \qquad \sigma = \exp(\lambda + \frac{\zeta^2}{2})\sqrt{\exp(\zeta^2) - 1}$$

Skript Tabelle D.1

$$\frac{\sigma}{\mu} = \frac{s_x}{\overline{x}} = \nu = \sqrt{\exp(\zeta^2) - 1} \quad \Rightarrow \quad \zeta = \sqrt{\ln\left(\nu^2 + 1\right)} = 0.165348$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \ln(\mu) - \frac{\zeta^2}{2} = 0.87771$$

Aufgabe G.2


Gumbel-Max-Wahrscheinlichkeits-verteilungsfunktion
Log-Normal-Wahrscheinlichkeits-verteilungsfunktion
Normal-Wahrscheinlichkeits-verteilungsfunktion
Exponential-Wahrscheinlichkeits-verteilungsfunktion
Wahrscheinlichkeits-verteilungsfunktion
Wasserhöhe [m]
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1
1.8 2 2.2 2.4 2.6 2.8 3 3.2 3.4 3.6

Aufgabe G.2

d) Berechne anschliessend die jeweilige Likelihood und entscheide auf dieser Basis, welche Verteilungsfunktion die Daten besser repräsentiert.

$$L(\boldsymbol{\theta} \,|\, \hat{\mathbf{x}}) = \prod_{i=1}^{n} f_X(\hat{x}_i \,|\, \boldsymbol{\theta})$$

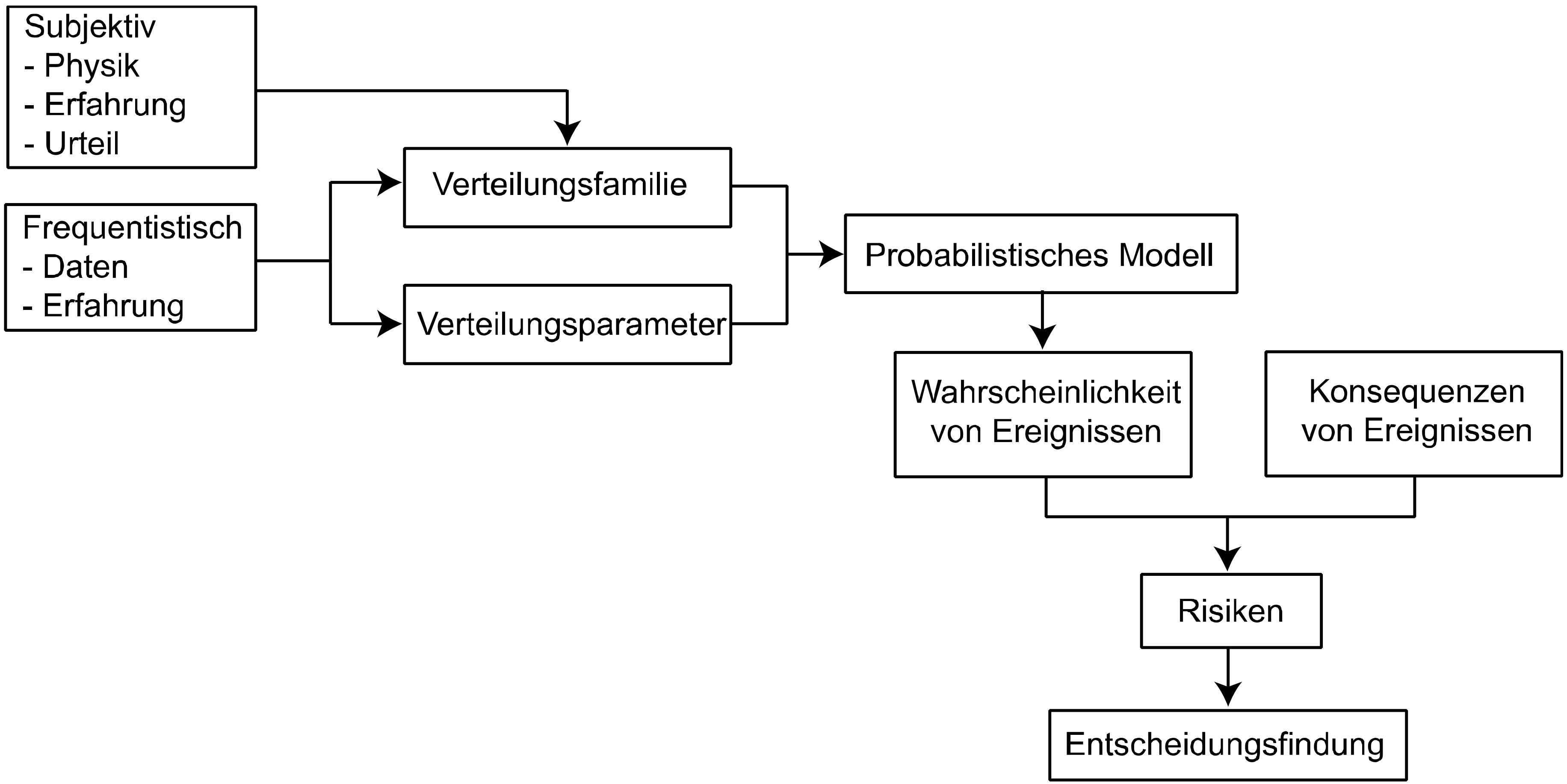
Gumbel Max: $9.0869 \cdot 10^{-07}$

Lognormal: $6.6767 \cdot 10^{-07}$

Normal: $1.7925 \cdot 10^{-07}$

Exponential: $2.2772 \cdot 10^{-25}$

Übersicht


Subjektiv
- Physik
- Erfahrung
- Urteil
Frequentistisch
- Daten
- Erfahrung
Verteilungsfamilie
Verteilungsparameter
Probabilistisches Modell
Wahrscheinlichkeit von Ereignissen
Konsequenzen von Ereignissen
Risiken
Entscheidungsfindung

Aufgabe G.2

e) Führe für die **Gumbel Max Verteilung** einen Chi-Quadrat-Test auf einem Signifikanzniveau von 10% durch, um beurteilen zu können, ob das Modell verwendet werden kann um die Messdaten zu repräsentieren.

$$\varepsilon_{\mathrm{m}}^2 = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} \frac{\left(N_i - n \cdot p_i\right)^2}{n \cdot p_i}$$

Intervall	Häufigkeit	Wahrscheinlichkeit P [Stichprobe in diesem Intervall]	Erwartete Häufigkeit	Normalisierte Quadrate der Differenzen
0-2.3	11	0.4191	12.5727	0.1967
2.3-2.5	6	0.2107	6.3214	0.0163
2.5-2.7	6	0.1523	4.5682	0.4487
2.7-∞	7	0.2179	6.5376	0.0327
Summe	30	1.0000	30.0000	0.6945

Aufgabe G.2

Stichprobenstatistik: 0.6945

Anzahl Freiheitsgrade: 4-1-2 = 1

Signifikanzniveau: 10%

Da $\varepsilon^2 =$ 0.6945 < χ=2.7055, kann die Gumbelverteilung auf dem 10%-Signifikanzniveau akzeptiert werden.

v \ $F(q)$	0.75	0.90	0.95	0.98	0.99	0.995	0.999
1	1.3233	2.7055	3.8415	5.4119	6.6349	7.8794	10.8276
2	2.7726	4.6052	5.9915	7.8240	9.2103	10.5966	13.8155
3	4.1083	6.2514	7.8147	9.8374	11.3449	12.8382	16.2662
4	5.3853	7.7794	9.4877	11.6678	13.2767	14.8603	18.4668
5	6.6257	9.2364	11.0705	13.3882	15.0863	16.7496	20.5150

Aufgabe G.2

f) Der Schutzdamm hat eine Höhe von 5 Metern. Falls der jährliche maximale Wasserstand höher ist als der Schutzdamm, wird von einem Versagen des Dammes gesprochen. Berechne die Versagenswahrscheinlichkeit p_f.

Versagen wenn jährlicher maximaler Wasserstand > 5 m

$$p_f = P(X > 5\ [\mathrm{m}]) = \int_{5m}^{\infty} 3.1590\, e^{-3.1590(x-2.2558)-e^{-3.1590(x-2.2558)}}\, dx$$

$$= 1 - F_X\left(5\ [m]\right)$$

$$= 1 - 0.999828 = 1.7183 \cdot 10^{-4}$$

Aufgabe G.2

g) Der Damm erstreckt sich über eine Länge von mehreren hundert Metern. Aufgrund Erosion und anderen altersbedingten Schäden ist die Höhe des Dammes nicht überall gleich. Seine Höhe kann mit einer Lognormalverteilung mit $\mu = 5[\mathrm{m}],\ \sigma = 0.5[\mathrm{m}]$ beschrieben werden.
Die Sicherheitsmarge berechnet sich demnach zu $M = D - W$
wobei $D =$ Dammhöhe und $W =$ Wasserhöhe . Berechne die Versagenswahrscheinlichkeit p_f anhand einer Monte Carlo Simulation.

D Dammhöhe: Lognormalverteilung, $\mu = 5[\mathrm{m}],\ \sigma = 0.5[\mathrm{m}]$

W Wasserhöhe: Gumbel-Max-Verteilung mit Parametern

$\alpha = 3.1590,\ u = 2.2558$

Aufgabe G.2

Monte Carlo Simulation

Wasserhöhe:

Gumbel-Max-Verteilung $F_W(w) = \exp\left(-\exp\left(\alpha \cdot (w-u)\right)\right)$

Mit den Parametern $\alpha = 3.1590,\ u = 2.2558$

Dammhöhe:

Log-Normal-Verteilung $F_D(d) = \Phi\left(\frac{\ln(d)-\lambda}{\zeta}\right)$

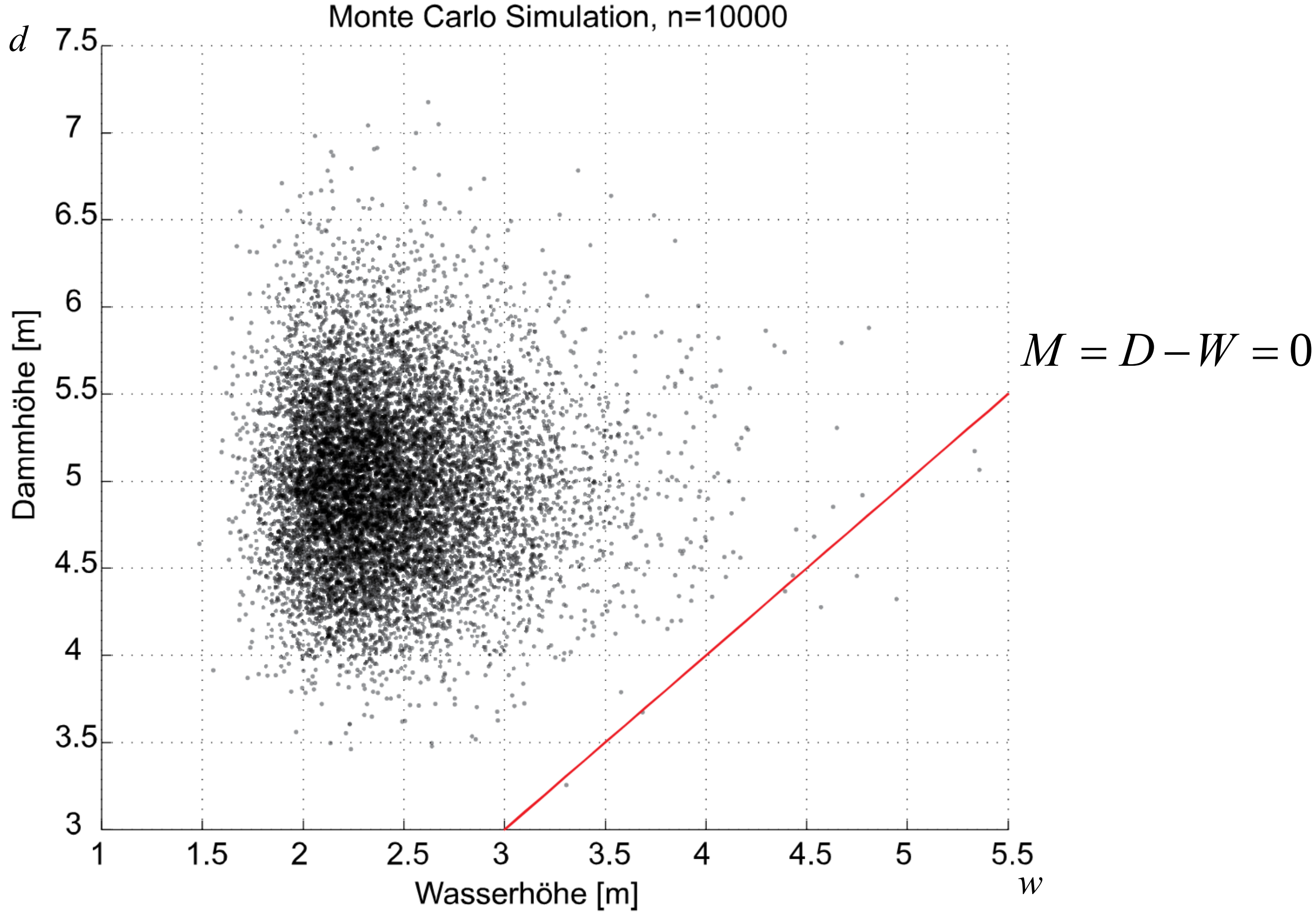
Mit dem Mittelwert $\mu = 5[\mathrm{m}]$ und Standardabweichung $\sigma = 0.5[\mathrm{m}]$ ergeben sich die Parameter

$$\lambda = \ln\left(\frac{\mu^2}{\sqrt{\sigma^2+\mu^2}}\right) = 1.6045 \qquad \zeta = \sqrt{\ln\left(\frac{\sigma^2}{\mu^2}+1\right)} = 0.0998$$

Aufgabe G.2

Monte Carlo Simulation

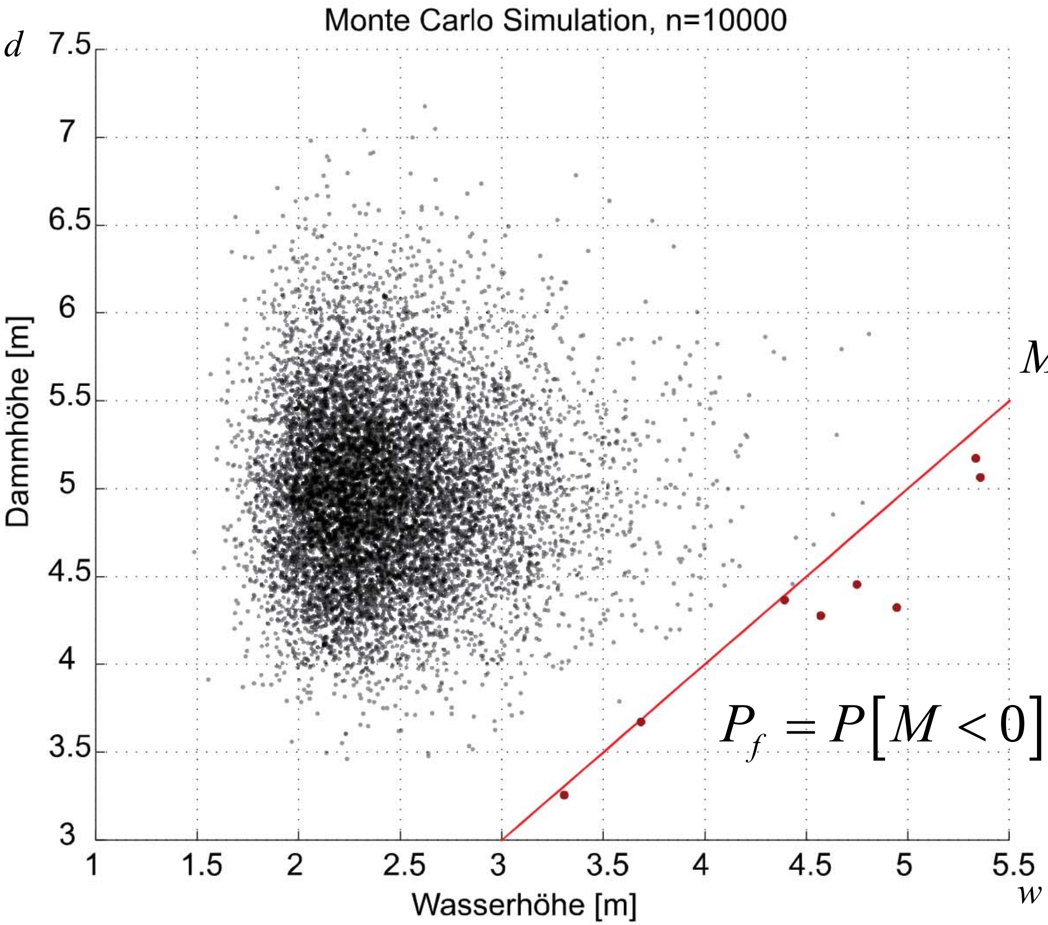
Simulation von 10‘000 Realisationen der Zufallsvariablen für die Wasserhöhe und die Dammhöhe:



Aufgabe G.2

Monte Carlo Simulation

Simulation von 10‘000 Realisationen der Zufallsvariablen für die Wasserhöhe und die Dammhöhe:



$$M = D - W = 0$$

$$P_f = P[M<0] = \frac{n_f}{N} = \frac{8}{10'000}$$

Aufgabe G.2

h) Neben der Dammhöhe soll auch die **Stabilität des Dammes** evaluiert werden.

Es wird angenommen, dass die jährliche maximale Belastung (Einwirkung) mit einer normalverteilten Zufallsvariablen modelliert werden kann mit Mittelwert $\mu_L = 6'000 \frac{kN}{m^2}$ und Standardabweichung $\sigma_L = 1'500 \frac{kN}{m^2}$.

Die Belastbarkeit (Widerstand) des Dammes kann ebenfalls mit einer normalverteilten Zufallsvariablen modelliert werden mit Mittelwert $\mu_R = 12'000 \frac{kN}{m^2}$ und Standardabweichung $\sigma_R = 3'000 \frac{kN}{m^2}$.

Die Grenzzustandsfunktion der Stabilität des Dammes ist definiert als:

$M = R - L$ das heisst der Damm bricht (versagt) wenn $M < 0$

Aufgabe G.2

h) Berechne die Versagenswahrscheinlichkeit des Dammes mit diesen Annahmen.

$$\mu_M = \mu_R - \mu_L = 12000 - 6000 = 6000 \frac{kN}{m^2}$$

$$\sigma_M = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_L^2} = 3354.1 \frac{kN}{m^2}$$

$$\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M} = \frac{6000}{3354.1} = 1.789$$

$$p_f = \Phi(-\beta) = \Phi(-1.789) = 1 - \Phi(1.789) = 1 - 0.9633 = 3.67 \cdot 10^{-2}$$

Aufgabe G.2

i) Wenn es zu einem Stabilitätsversagen des Dammes kommt, dann entstehen Schäden von 6 Mio. Euro.

Es steht zur Diskussion, den Damm zu verstärken, so dass seine Belastbarkeit geringfügig steigt.

$$\mu_R = 15'000 \frac{kN}{m^2} \quad \sigma_R = 2'000 \frac{kN}{m^2}$$

Die hierfür notwendigen Kosten betragen, diskontiert und auf ein Jahr umgerechnet, 0.2 Mio. Euro.

Berechne die neue Versagenswahrscheinlichkeit eines verstärkten Dammes, und vergleiche das Risiko der zwei Varianten „belassen“ und „ verstärken “.

Eine Annahme hierbei ist, dass über die Lebensdauer des Dammes mit dem gleichen Schadenerwartungswert gerechnet werden kann.

Aufgabe G.2

i) Konsequenzen 6 Mio. Euro
Kosten einer Verstärkung: 0.2 Mio. Euro/Jahr
Belastbarkeit nach einer Verstärkung:

$$\mu_R = 15'000 \frac{kN}{m^2}, \ \sigma_R = 2'000 \frac{kN}{m^2}$$

Berechnen der neuen Versagenswahrscheinlichkeit:

$$\mu_M = \mu_R - \mu_L = 15000 - 6000 = 9000 \frac{kN}{m^2}$$

$$\sigma_M = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_L^2} = 2500 \frac{kN}{m^2}$$

$$\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M} = \frac{9000}{2500} = 3.6$$

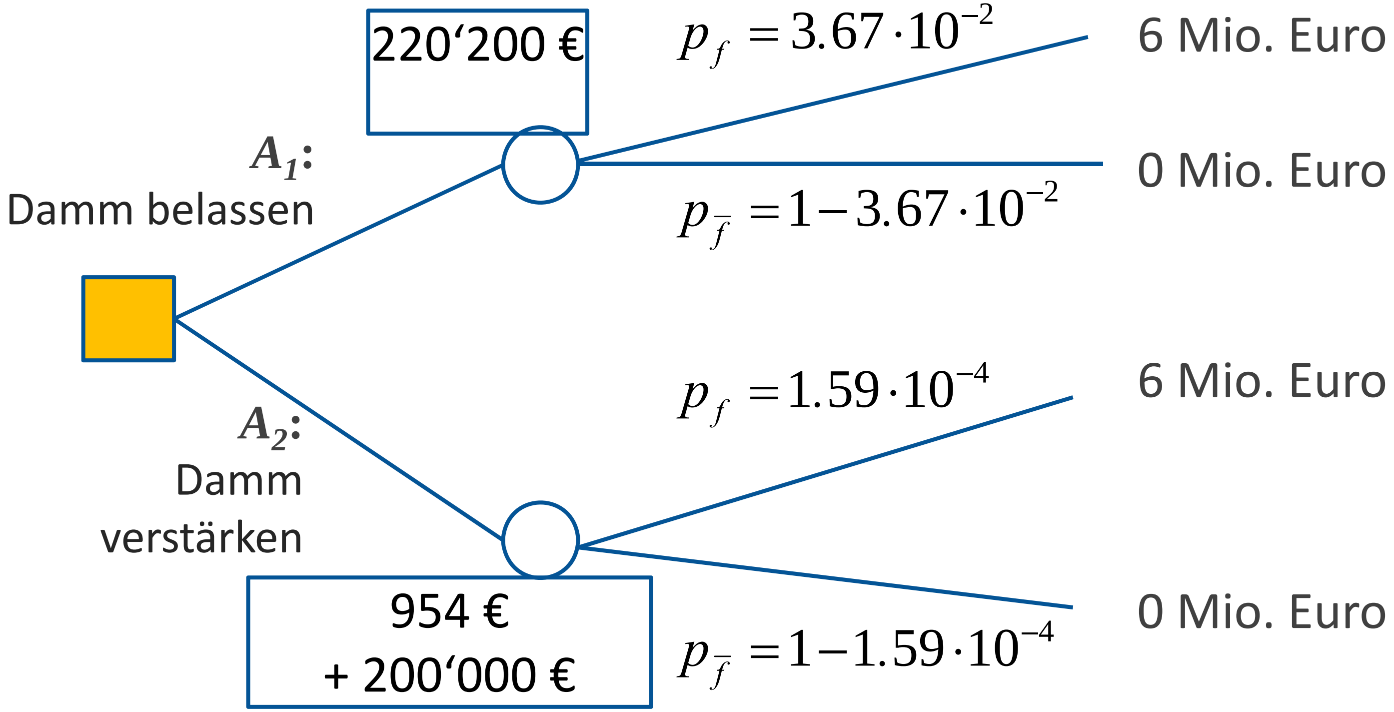
$$p_f = \Phi(-\beta) = \Phi(-3.6) = 1 - \Phi(3.6) = 1 - 0.999841 = 1.59 \cdot 10^{-4}$$

Aufgabe G.2

i) Konsequenzen: 6 Mio. Euro.
jährliche Kosten: 200'000 Euro.

$$p_{f_{alt}} = 3.67 \cdot 10^{-2}$$

$$p_{f_{neu}} = 1.59 \cdot 10^{-4}$$

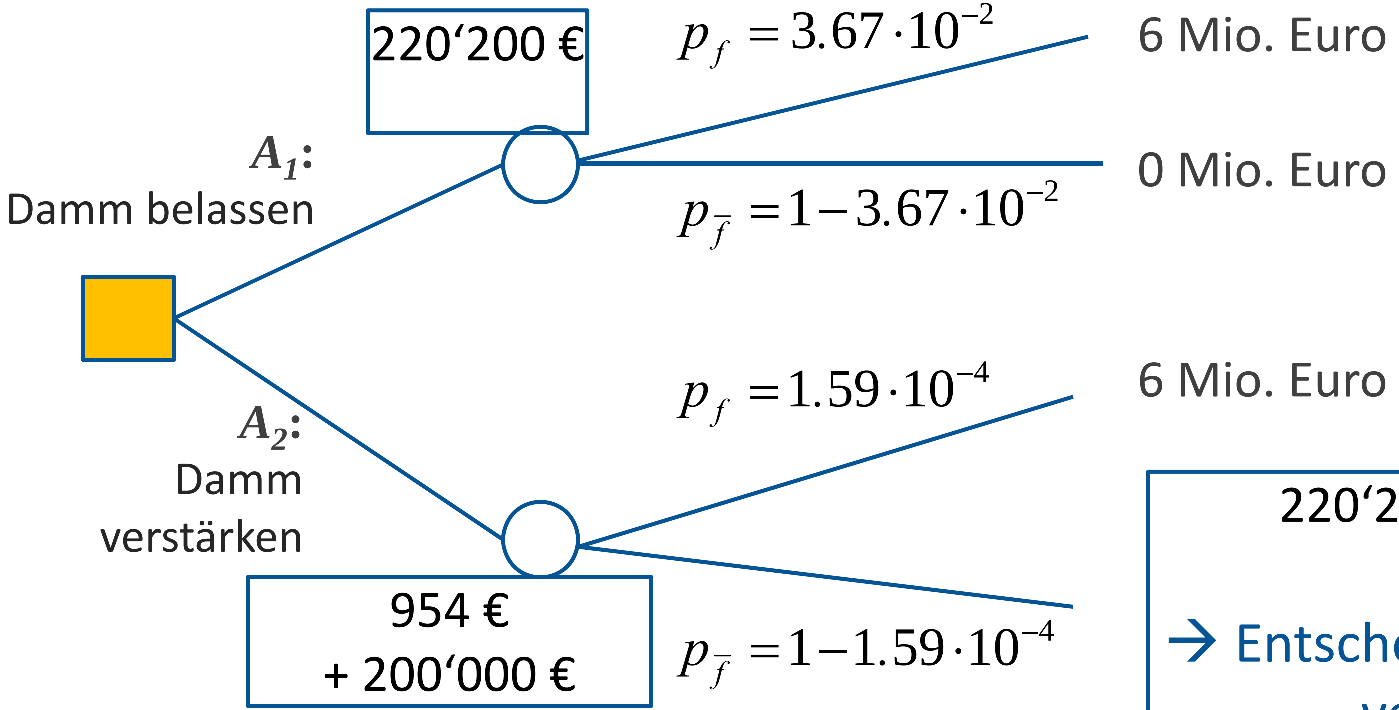


Aufgabe G.2

i) Konsequenzen: 6 Mio. Euro.
jährliche Kosten: 200‘000 Euro.

$$p_{f_{alt}} = 3.67 \cdot 10^{-2}$$

$$p_{f_{neu}} = 1.59 \cdot 10^{-4}$$



220‘200 > 200‘954 Euro
→ Entscheidung für Damm verstärken