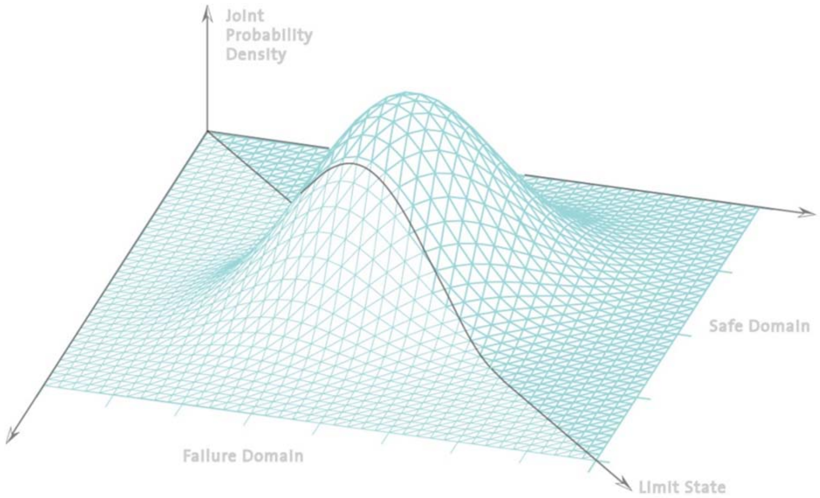


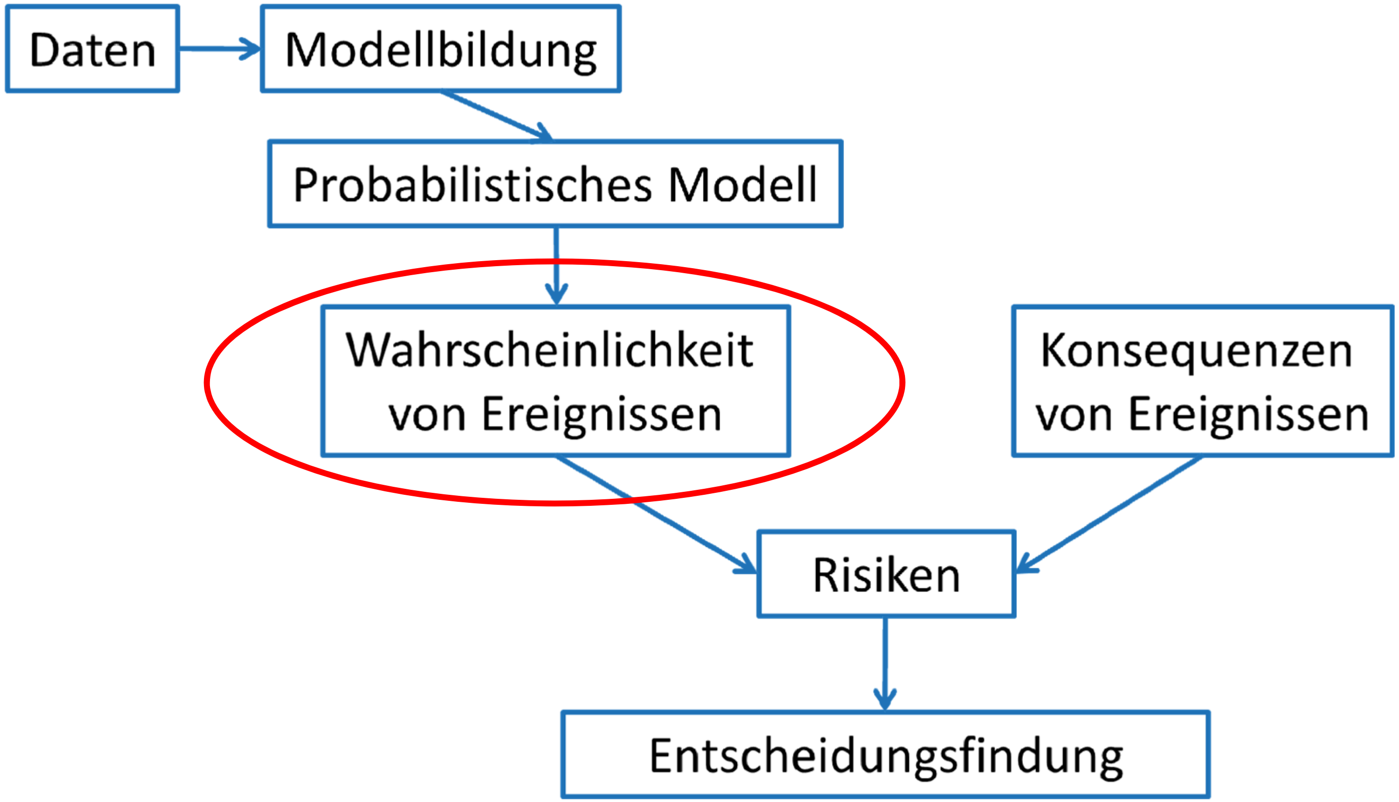
Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Übung 11

Inhalt der heutigen Übung

- Hausübung E.12: Maximum-Likelihood-Methode und χ^2 Test
- Aufgabe F.2: Lineare Grenzzustandsfunktion und Monte Carlo Simulation
- Aufgabe F.3: Nicht lineare Grenzzustandsfunktion
- Vorstellen der Hausübung F.4: Nicht lineare Grenzzustandsfunktion

Berechnung von Wahrscheinlichkeiten



Aufgabe F.2

Ein Junge will ein Computerspiel kaufen, das erst in Kürze in den Läden erhältlich sein wird. Der Preis des Computerspieles wurde noch nicht bekannt gegeben, aber basierend auf verschiedenen Informationen nimmt er an, dass der Preis durch eine Normalverteilung mit μ = 50 CHF, σ = 10 CHF beschrieben werden kann.
Der Junge verfügt momentan über 20 CHF, und er erwartet, dass er bis zum Erscheinen des Computerspieles noch Taschengeld von seinen Eltern bekommt. Er geht davon aus, dass der Taschengeldbetrag durch eine Normalverteilung mit μ = 20 CHF, σ = 5 CHF beschrieben werden kann.

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass es ihm **nicht** möglich ist, das Computerspiel zu kaufen, wenn dieses in den Läden erhältlich sein wird.

Aufgabe F.2

Stelle die Grenzzustandsfunktion auf.

Preis des Computerspieles:	Zufallsvariable X
Taschengeld:	Zufallsvariable Y

Z sei eine weitere Zufallsvariable und ist wie folgt definiert:

$$Z = 20 + Y - X$$

Wenn $Z \geq 0$, dann kann er das Computerspiel kaufen, sonst nicht.

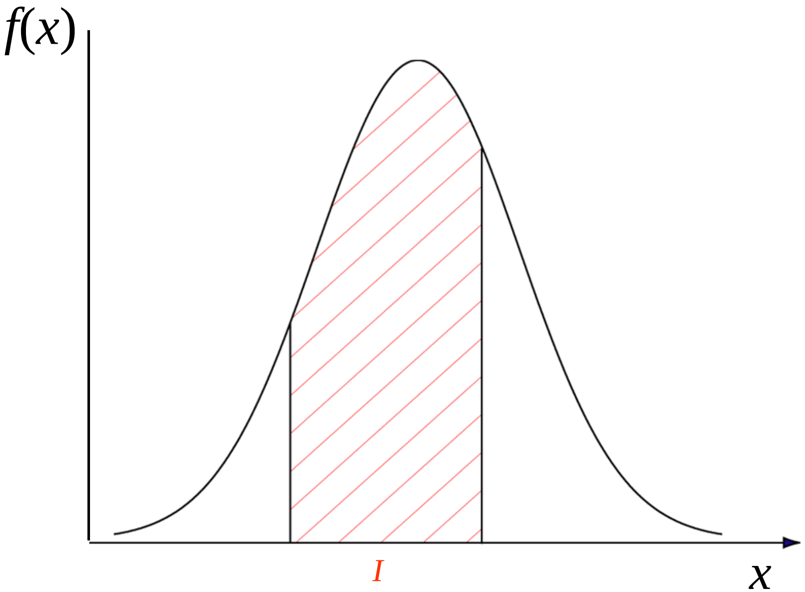
Folglich kann die Wahrscheinlichkeit, dass er das Videospiel nicht kaufen kann, wie folgt beschrieben werden:

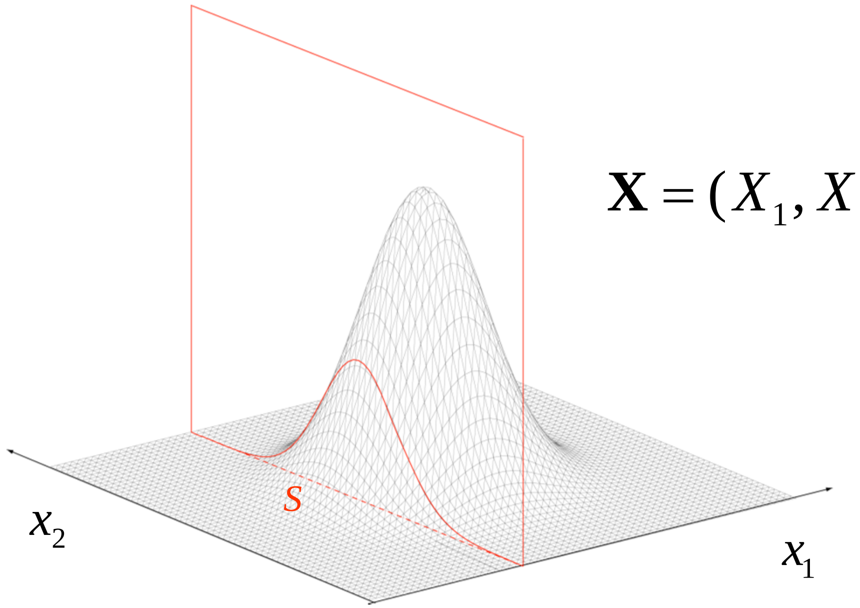
$$\mathrm{P}[Z = 20 + Y - X < 0]$$

Das Problem: Wie bestimme ich diese Wahrscheinlichkeit?

Berechnung der Wahrscheinlichkeit

… durch Integration:





$$\mathbf{X} = (X_1, X_2)$$

$$\mathrm{P}[X \in I] = \int_I f_X(x)dx \qquad \mathrm{P}[\mathbf{X} \in S] = \int_S f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses wird berechnet, indem die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion über den entsprechenden Abschnitt integriert wird.

Aufgabe F.2

Vor dem Integrieren wird die Grenzzustandsfunktion mit den standardnormal verteilten Variablen transformiert:

$$\begin{aligned} X &\sim N(50,10) \\ Y &\sim N(20,5) \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} X &= 50+10U, \quad & U &\sim N(0,1) \\ Y &= 20+5V, \quad & V &\sim N(0,1) \end{aligned}$$

Die Grenzzustandsfunktion lautet demzufolge:

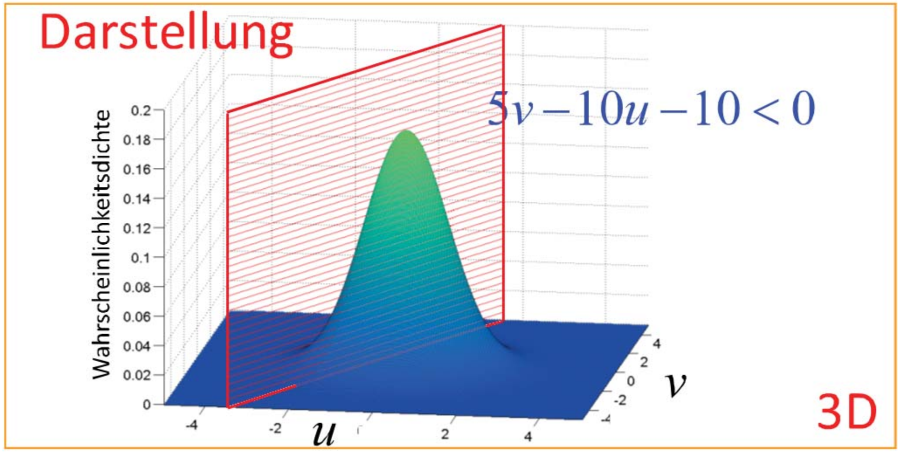
$$\begin{aligned} Z &= 20+Y-X \\ &= 20+(20+5V)-(50+10U) \\ &= 5V-10U-10 \end{aligned}$$

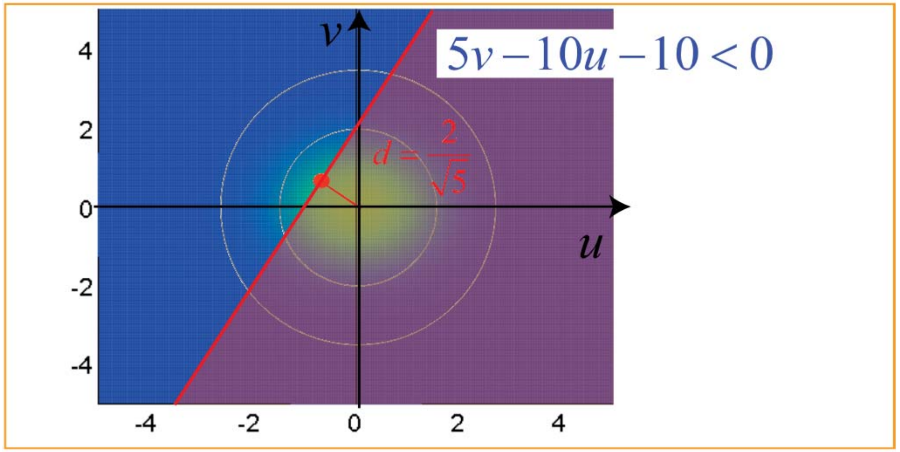
Wir suchen jedoch die Wahrscheinlichkeit:

$$P[Z = 5V-10U-10<0]$$

Aufgabe F.2

$$P[Z = 5V - 10U - 10 < 0] = \int_{5v-10u-10<0} \phi(u)\phi(v)\,du\,dv$$





Abstand d zum Ursprung:

$$d = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

$$d = \sqrt{(0-u)^2 + (0-v)^2} \qquad v = 2u + 2$$

$$d = \sqrt{u^2 + (2u-2)^2}$$

$$d = \sqrt{5u^2 + 8u + 4}$$

Kürzester Abstand d zum Ursprung:

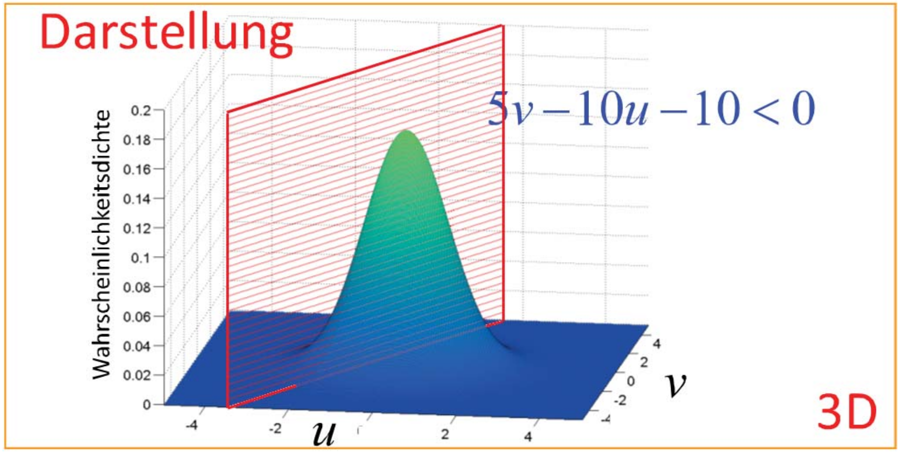
$$d'(u) = \frac{10u+8}{2\cdot\sqrt{5u^2+8u+4}} = \frac{5u+4}{\sqrt{5u^2+8u+4}} = 0$$

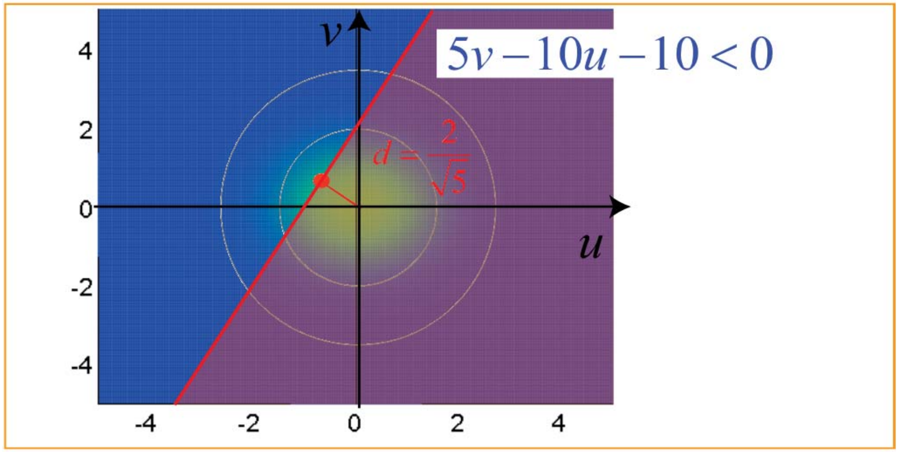
$$5u + 4 = 0 \qquad \rightarrow u = \frac{-4}{5}$$

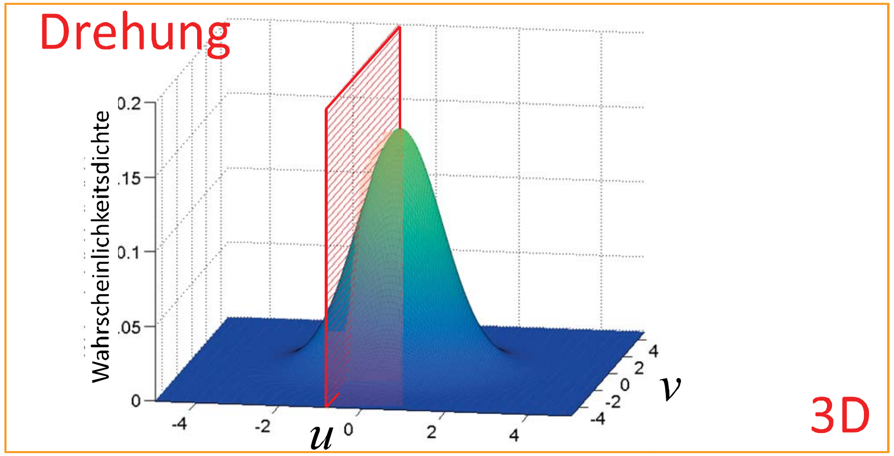
$$d = \sqrt{5u^2+8u+4} = \sqrt{5\left(\frac{-4}{5}\right)^2 + 8\left(\frac{-4}{5}\right) + 4} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

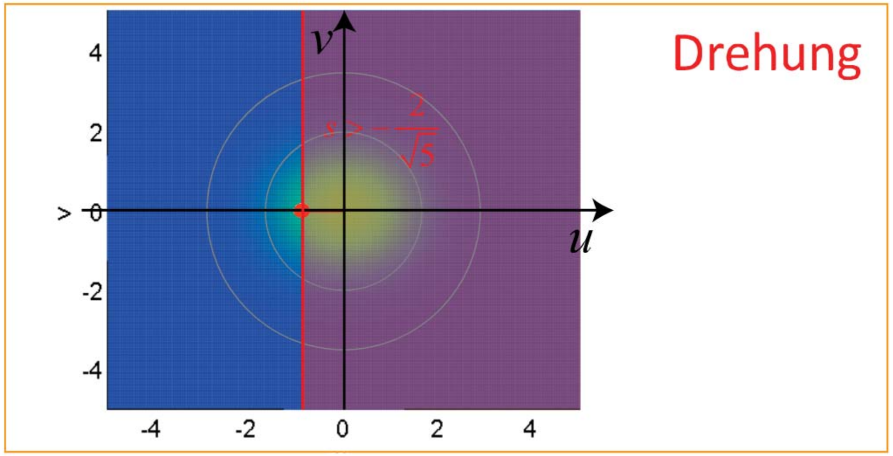
Aufgabe F.2

$$P[Z = 5V - 10U - 10 < 0] = \int_{5v-10u-10<0} \phi(u)\phi(v)\,du\,dv$$



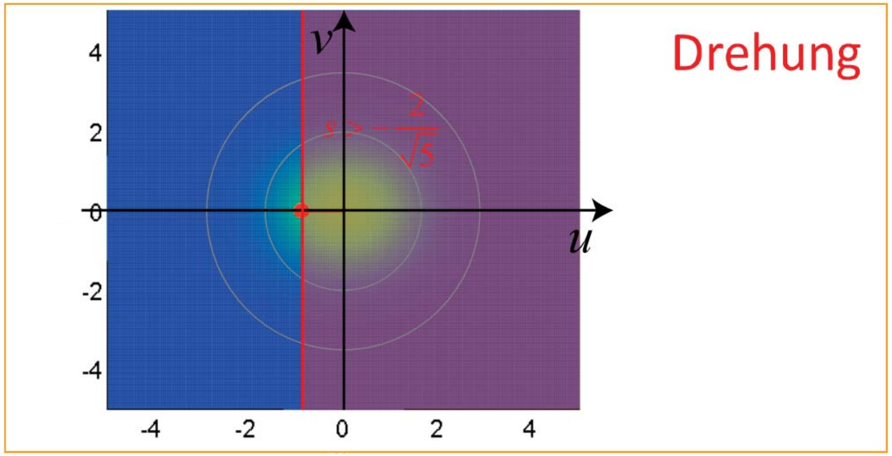


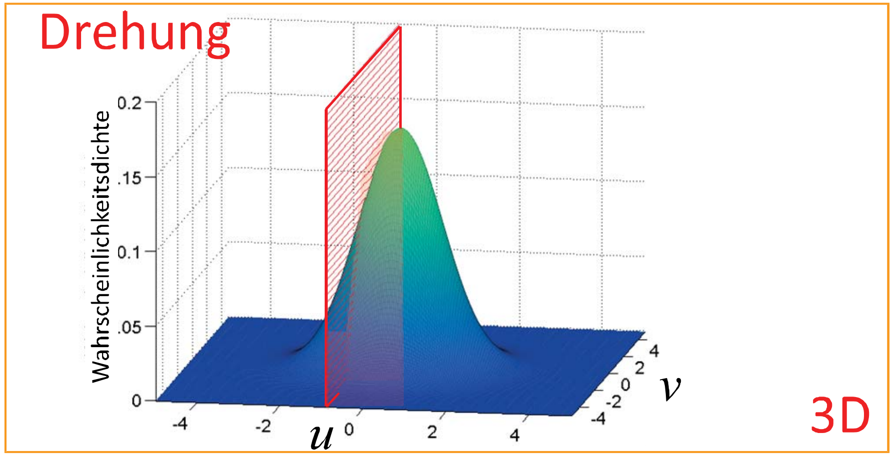


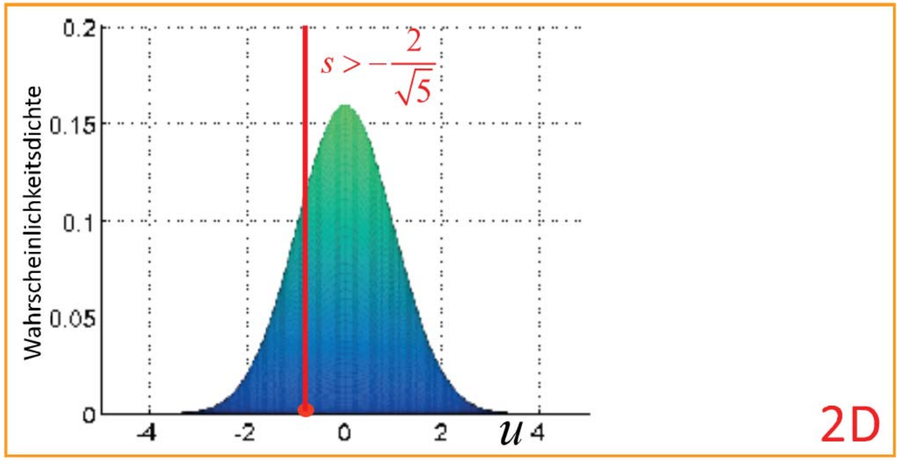


Aufgabe F.2

$$P[Z = 5V - 10U - 10 < 0] = \int_{5v-10u-10<0} \phi(u)\phi(v)\,du\,dv$$

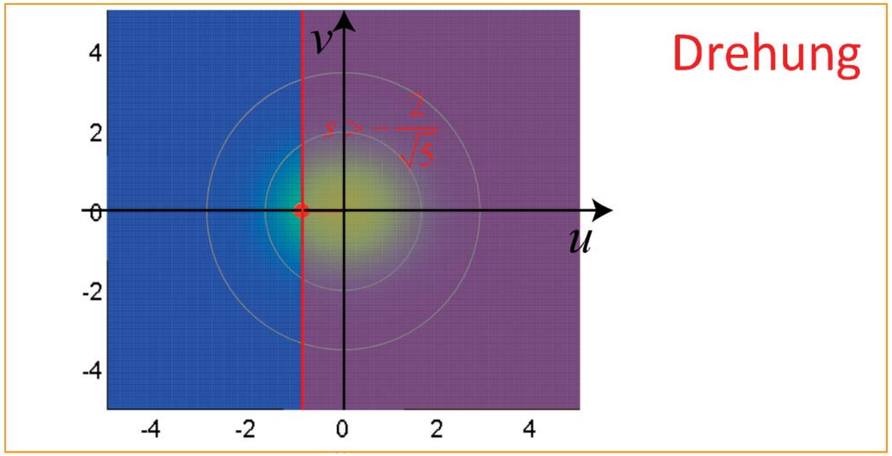






Aufgabe F.2

$$P[Z = 5V - 10U - 10 < 0] = \int_{5v-10u-10<0} \phi(u)\phi(v)dudv$$

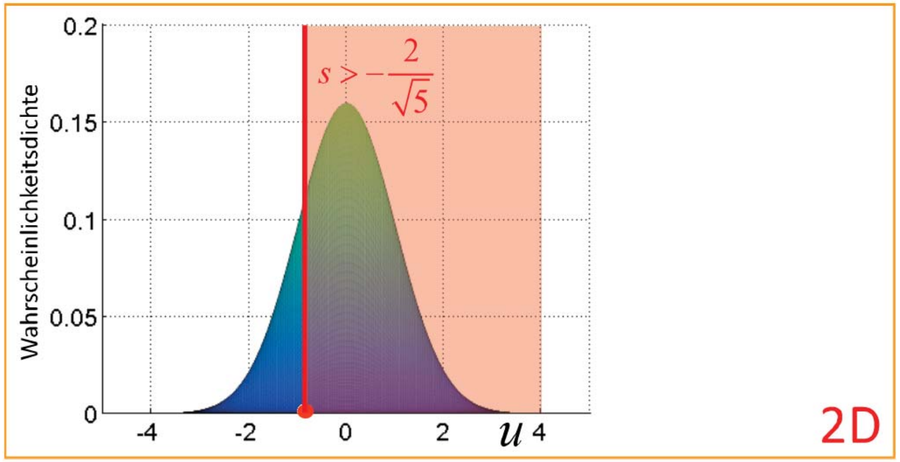


Integration

$$P[Z = 5V - 10U - 10 < 0] = \int_{-2/\sqrt{5}}^{\infty} \phi(s)ds$$

$$= 1 - \Phi(-2/\sqrt{5})$$

$$= 0.8133$$



Die Wahrscheinlichkeit, dass es ihm **nicht** möglich ist, das Computerspiel zu kaufen, wenn dieses in den Läden erhältlich sein wird beträgt 0.8133.

Lineare Grenzzustandsfunktion

Das Ziel ist, die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses (ausgedrückt mit der Grenzzustandsfunktion) zu berechnen.

1) Grenzzustandsfunktion mit normalverteilter Zufallsvariable standardisieren und transformieren (das ist erlaubt, da eine lineare Funktion einer normalverteilten Zufallsvariable ebenfalls normalverteilt ist).

2) Achsen drehen (das ist erlaubt, weil die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer normalverteilten Zufallsvariable symmetrisch ist).

3) Wahrscheinlichkeit berechnen (das ist möglich, weil die Grenzzustandsfunktion linear ist).

✓ Was wäre wenn die Grenzzustandsfunktion nicht linear ist?
-> Das wird in Aufgabe F.3 gelöst…

Aufgabe F.2 Alternative Lösung

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass es ihm **nicht** möglich ist, das Computerspiel zu kaufen, wenn dieses in den Läden erhältlich sein wird.

$$X \sim N(50,10)$$

$$\mathrm{P}[Z = 20 + Y - X < 0]$$

$$Y \sim N(20,5)$$

Bestimmung der Versagenswahrscheinlichkeit P_F:

$$P_F = P[Z < 0] = P\left[\frac{Z-\mu_Z}{\sigma_Z} < \frac{0-\mu_Z}{\sigma_Z}\right]$$

$$P_F = \Phi\left(\frac{0-\mu_Z}{\sigma_Z}\right) = \Phi(-\beta)$$

(Skript Gleichung F.9)

Zuverlässigkeitsindex

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z}$$

(Skript Gleichung F.10)

Aufgabe F.2 Alternative Lösung

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass es ihm **nicht** möglich ist, das Computerspiel zu kaufen, wenn dieses in den Läden erhältlich sein wird.

$$X \sim N(50,10) \qquad \mathrm{P}[Z = 20 + Y - X < 0]$$

$$Y \sim N(20,5)$$

Bestimmung von Mittelwert μ_Z und Standardabweichung σ_Z der Zufallsvariablen Z (Z wird auch Sicherheitsmarge genannt).

$$\mu_Z = 20 + E(Y) - E(X) = 20 + 20 - 50 = -10$$

$$\sigma_Z = \sqrt{Var(Y) + Var(X)} = \sqrt{10^2 + 5^2} = \sqrt{125} = 5 \cdot \sqrt{5}$$

(Skript Gleichung D.25)

Aufgabe F.2 Alternative Lösung

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass es ihm **nicht** möglich ist, das Computerspiel zu kaufen, wenn dieses in den Läden erhältlich sein wird.

$$\mu_Z = -10$$

$$\mathrm{P}[Z = 20 + Y - X < 0]$$

$$\sigma_Z = 5 \cdot \sqrt{5}$$

Bestimmung des Zuverlässigkeitsindex β :

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{-10}{5\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

(Skript Gleichung F.10)

Bestimmung der Versagenswahrscheinlichkeit P_F :

$$P_F = \Phi(-\beta) = \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \Phi(0.89) = 0.8133$$

(Skript Gleichung F.9)

Aufgabe F.2 Alternative Lösung

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass es ihm **nicht** möglich ist, das Computerspiel zu kaufen, wenn dieses in den Läden erhältlich sein wird.

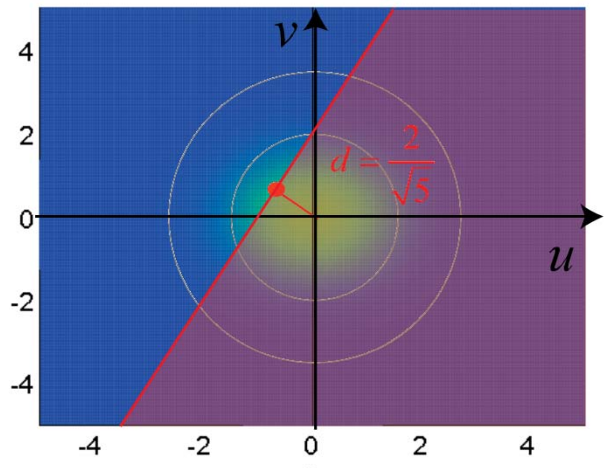
$$\mu_Z = -10$$

$$\mathrm{P}[Z = 20 + Y - X < 0]$$

$$\sigma_Z = 5 \cdot \sqrt{5}$$

Bestimmung des Zuverlässigkeitsindex β :

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{-10}{5\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$



Bestimmung der Versagenswahrscheinlichkeit P_F :

$$P_F = \Phi(-\beta) = \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \Phi(0.89) = 0.8133$$

Aufgabe F.2 Alternative Lösung 2

Die Wahrscheinlichkeit, dass er das Videospiel **nicht** kaufen kann, wie folgt beschrieben werden:

$$\mathrm{P}[Z = 20 + Y - X < 0]$$

Das Problem: Wie bestimme ich diese Wahrscheinlichkeit?

… durch Integration, der alternativen Lösung oder durch **Monte Carlo Simulation**:

Wie bei der Integration wird die Grenzzustandsfunktion mit den standardnormal verteilten Variablen transformiert:

$$\begin{matrix} X \sim N(50,10) \\ Y \sim N(20,5) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} X = 50 + 10U, & U \sim N(0,1) \\ Y = 20 + 5V, & V \sim N(0,1) \end{matrix}$$

$$\Longrightarrow \quad Z = 5V - 10U - 10$$

Aufgabe F.2 Alternative Lösung 2

Gegeben: Transformierte Grenzzustandsfunktion $Z = 5V - 10U - 10$

1. Simulation von gleichverteilten Zufallsvariablen auf dem Intervall [0,1], z.B.

Simulation	Zufallsvariable für U	Zufallsvariable für V
1	0.3707	0.8360
2	0.9510	0.7798
3	0.1650	0.6328
4	0.9095	0.1533
5	0.2806	0.1658

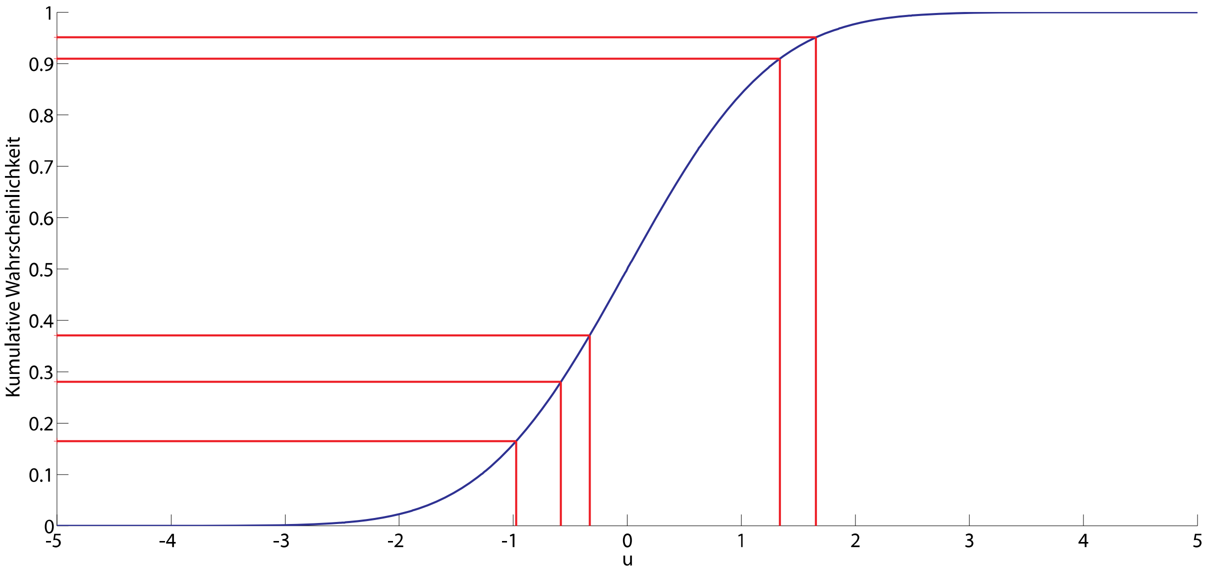
1. Gegeben der Realisationen im Schritt 1, ermittle mit Hilfe der Inversen der Standardnormalverteilungsfunktion den Wert der Realisationen von U und V; z.B. für die erste Realisation:

$$u = \Phi^{-1}(0.3707) = -\Phi^{-1}(1-0.3707) = -\Phi^{-1}(0.6293) = -0.33$$

Aufgabe F.2 Alternative Lösung 2

2. Gegeben der Realisationen im Schritt 1, ermittle mit Hilfe der Inversen der Standardnormalverteilungsfunktion den Wert der Realisationen von U:

Sim.	ZV für U	$U = \Phi^{-1}(\cdot)$
1	0.3707	-0.3300
2	0.9510	1.6546
3	0.1650	-0.9741
4	0.9095	1.3377
5	0.2806	-0.5811



Aufgabe F.2 Alternative Lösung 2

2. Gegeben der Realisationen im Schritt 1, ermittle mit Hilfe der Inversen der Standardnormalverteilungsfunktion den Wert der Realisationen von U und V:

Sim.	ZV für U	U
1	0.3707	-0.3300
2	0.9510	1.6546
3	0.1650	-0.9741
4	0.9095	1.3377
5	0.2806	-0.5811

Sim.	ZV für V	V
1	0.8360	0.9782
2	0.7798	0.7715
3	0.6328	0.3393
4	0.1533	-1.0224
5	0.1658	-0.9709

Aufgabe F.2 Alternative Lösung 2

3. Gegeben der Realisationen von U und V aus Schritt 2, werden die Wert der Zufallsvariablen Z berechnet: $Z = 5V - 10U - 10$

Sim.	ZV für U	U	ZV für V	V	Z
1	0.3707	-0.3300	0.8360	0.9782	-1.8092
2	0.9510	1.6546	0.7798	0.7715	-22.6887
3	0.1650	-0.9741	0.6328	0.3393	1.4375
4	0.9095	1.3377	0.1533	-1.0224	-28.4887
5	0.2806	-0.5811	0.1658	-0.9709	-9.0439

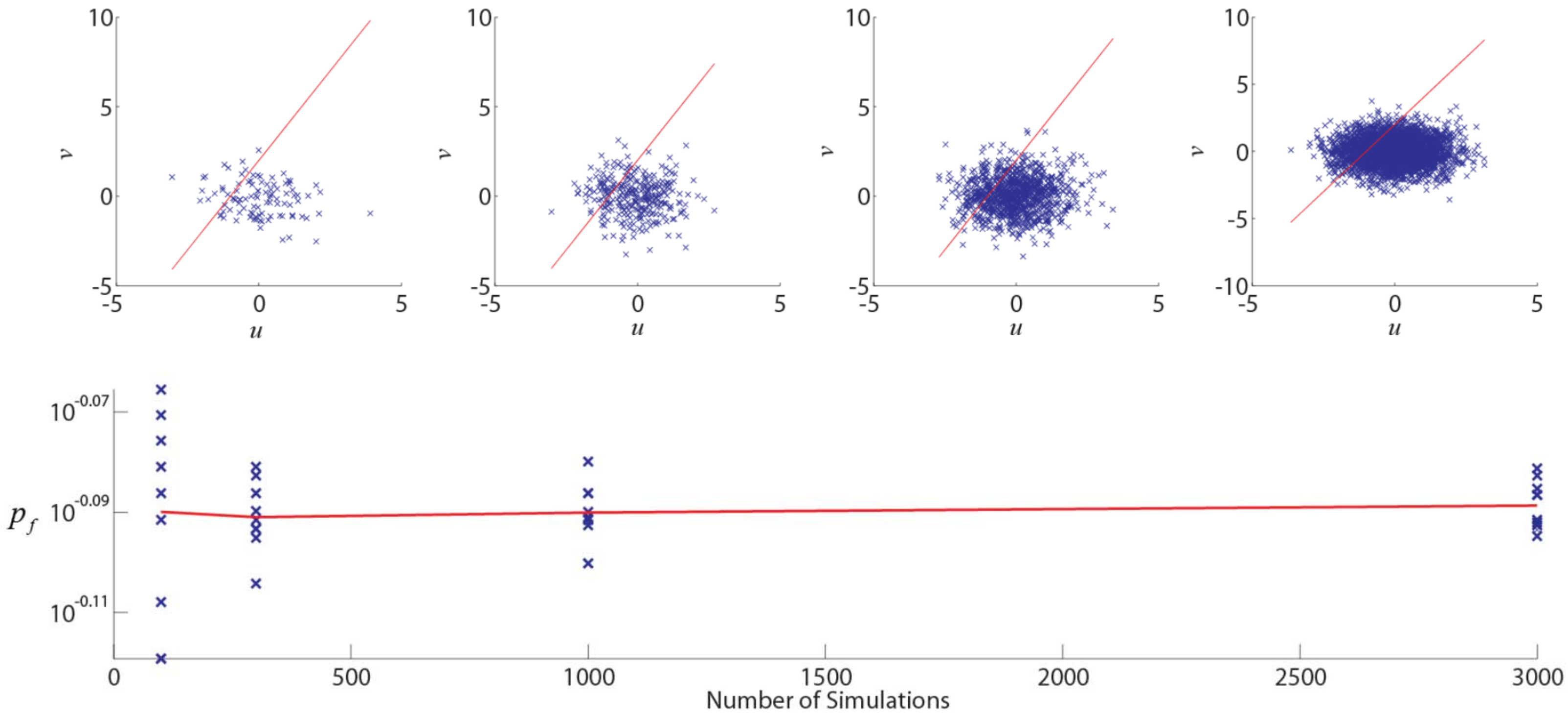
3. Die Realisationen, für welche die Grenzzustandsfunktion null oder weniger ist, werden gezählt, d.h. $n_f = 4.$

4. Die Wahrscheinlichkeit, dass er das Videospiel **nicht** kaufen kann wird geschätzt mit

$$p_f = \frac{n_f}{m} = \frac{4}{5}.$$

Aufgabe F.2 Alternative Lösung 2

ABER **5** Simulationen sind noch wenig!
Das Ganze für mehr Simulationen ergibt:



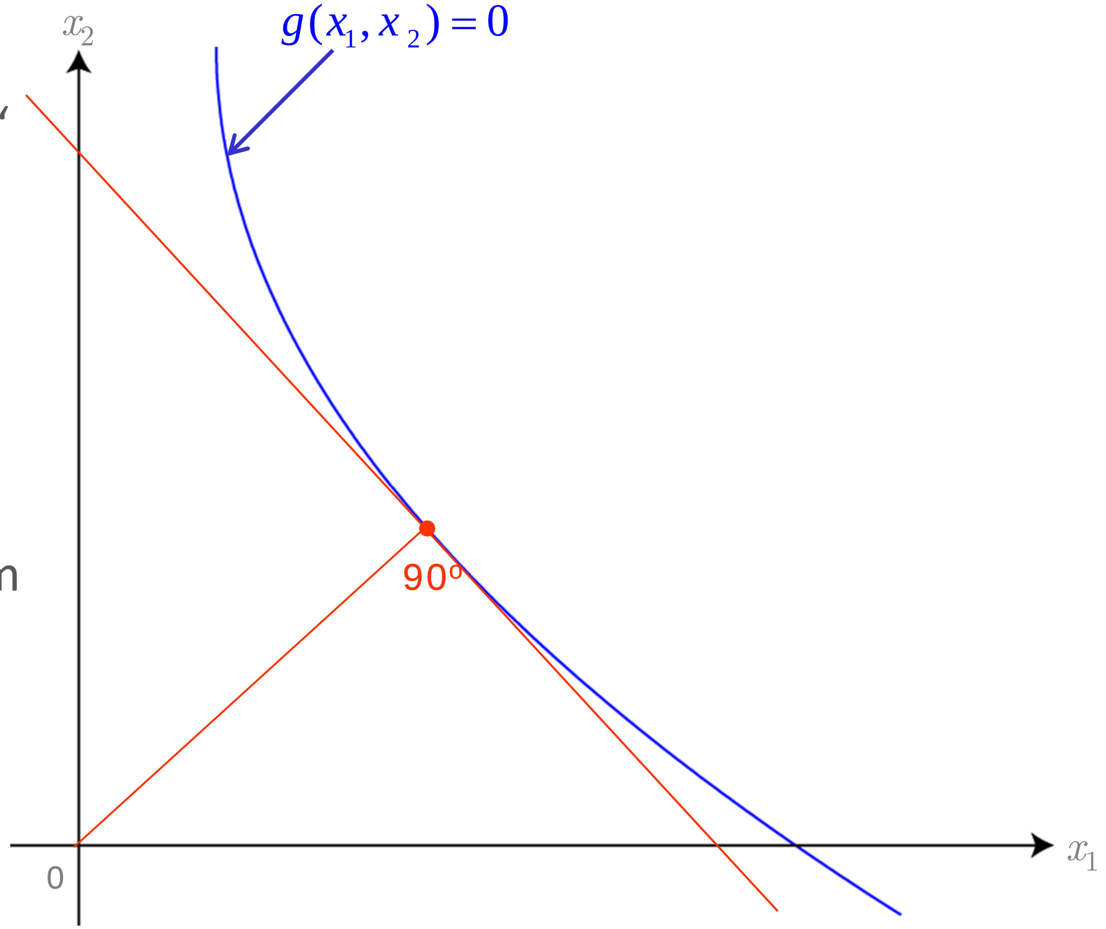
Mit 3000 Simulationen erhält man z.B. etwa $p_f = 0.8154.$

Nichtlineare Grenzzustandsfunktionen

FORM - First Order Reliability Method

Idee: Bestimmen des Punktes auf der „Grenzzustandsfunktion" $g(x_1,x_2)=0$, der den geringsten Abstand zum Koordinatenursprung im standardisierten normalverteilten Raum besitzt.

Lineare Approximation der Grenzzustandsfunktion in diesem Punkt.



Aufgabe F.3

Wie in der Aufgabe F.2 ersichtlich, kann die Versagenswahrscheinlichkeit durch eine Grenzzustandsfunktion beschrieben werden. Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 sind standardnormalverteilt, und die Grenzzustandsfunktion sei:

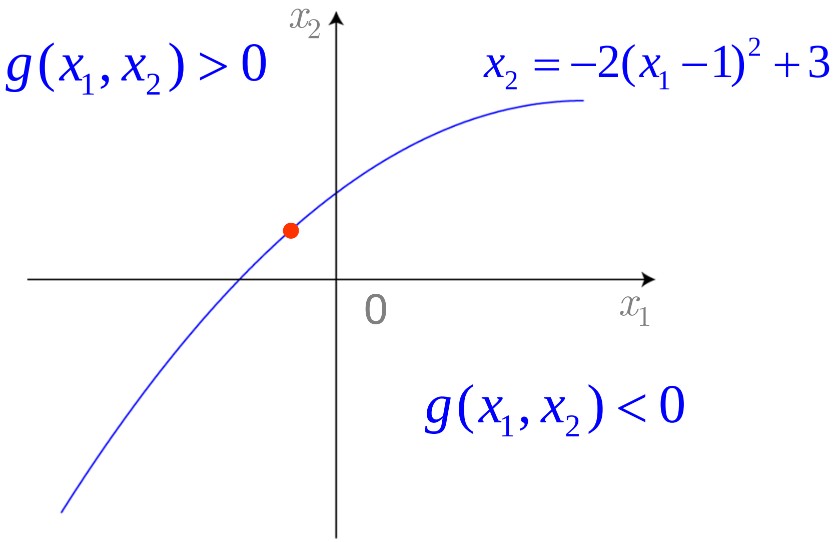
$$g(X_1, X_2) = 2(X_1 - 1)^2 + X_2 - 3$$

Berechne die Versagenswahrscheinlichkeit:

$$P[g(X_1, X_2) < 0]$$

Aufgabe F.3

Gebiet des Integrals



Linearisieren der Grenzzustandsfunktion

In welchem Punkt???

In dem Punkt auf g, der den geringsten Abstand zum Nullpunkt aufweist.

Warum???

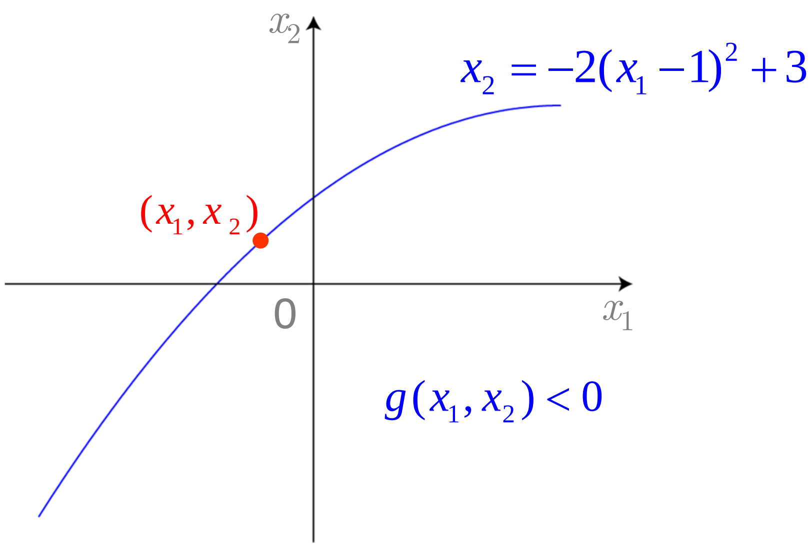
Weil die Wahrscheinlichkeit in diesem Punkt am meisten zur tatsächlichen gesamten Wahrscheinlichkeit beiträgt.

Linearisieren (Taylor-Entwicklung erster Ordnung) wird in demjenigen Punkt auf g durchgeführt, der den geringsten Abstand zum Nullpunkt aufweist.

Wie kann dieser Punkt bestimmt werden?

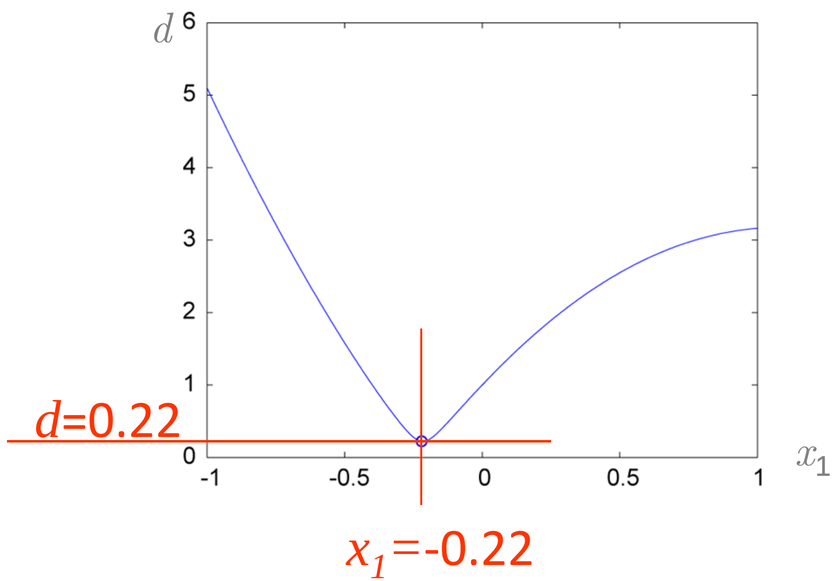
Aufgabe F.3

Ein einfaches Vorgehen:



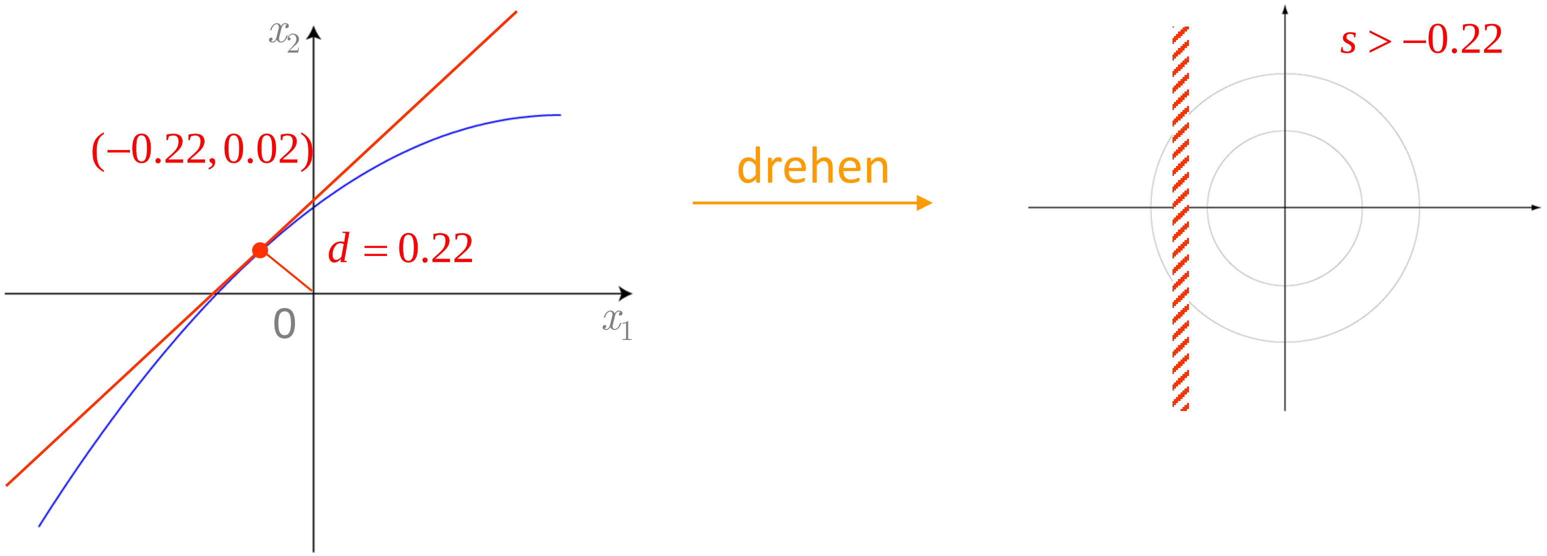
Der Abstand zwischen (x_1,x_2) und (0,0):

$$d = \sqrt{x_1^{\,2} + x_2^{\,2}}$$
$$= \sqrt{x_1^{\,2} + \left(-2(x_1 - 1)^2 + 3\right)^2}$$



Aufgabe F.3

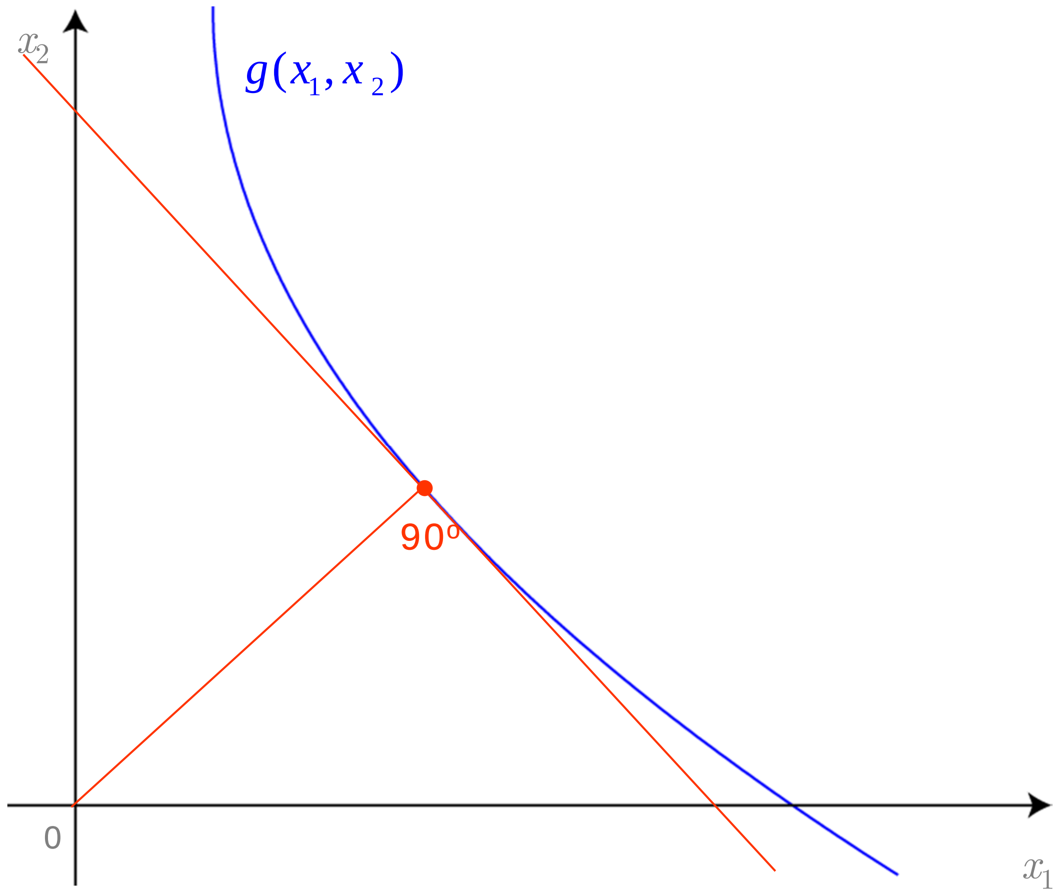
Man bestimmt den nächsten Punkt und dessen Abstand zum Nullpunkt.



$$
\begin{aligned}
P[g(X_1, X_2) < 0] &= P[S > -0.22] \\
&= 1 - \Phi(-0.22) \\
&= 0.587
\end{aligned}
$$

FORM

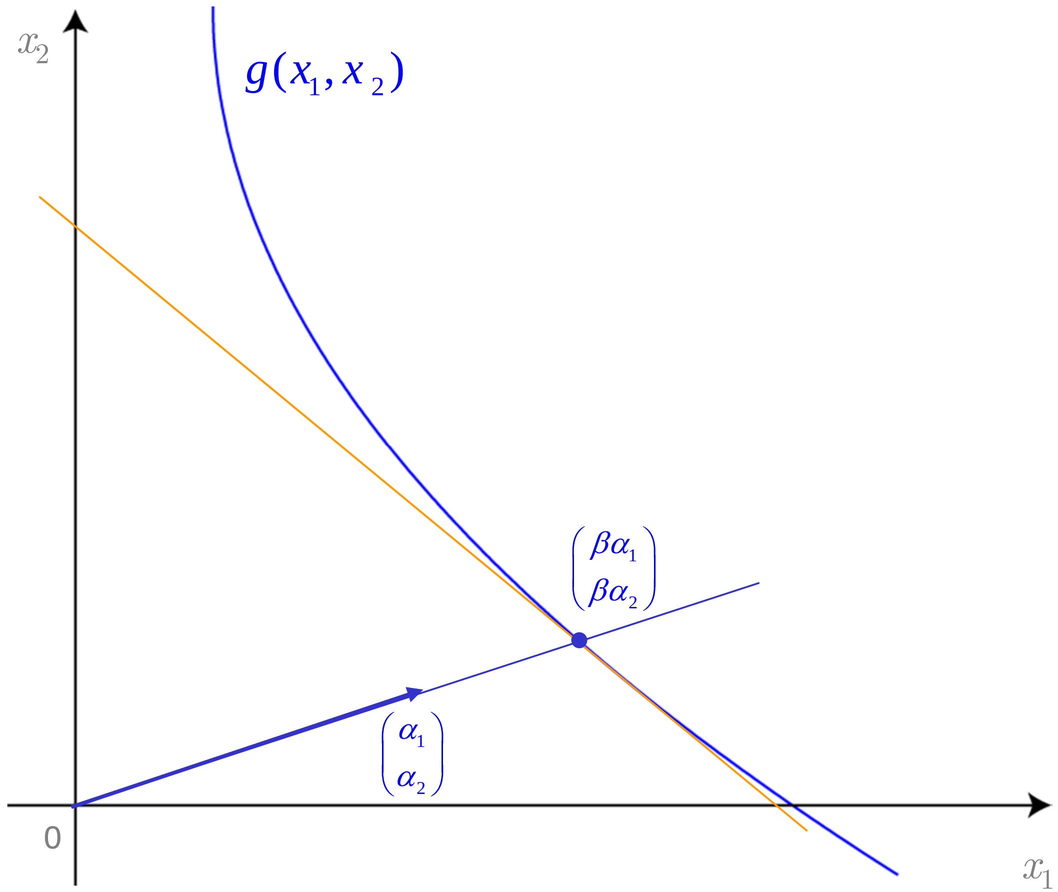
First Order Reliability Methods (FORM)
Iterative Bestimmung des Punktes mit geringstem Abstand. Verständnis grafisch:



Der Punkt auf g
mit dem kleinsten Abstand
zum Ursprung
ist gesucht.

FORM

First Order Reliability Methods (FORM)
Iterative Bestimmung des Punktes mit geringstem Abstand. Verständnis grafisch:



Wo ist der nächste Punkt?

Bemerkung:

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}\dfrac{\partial g}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial g}{\partial x_2}\end{pmatrix}$$

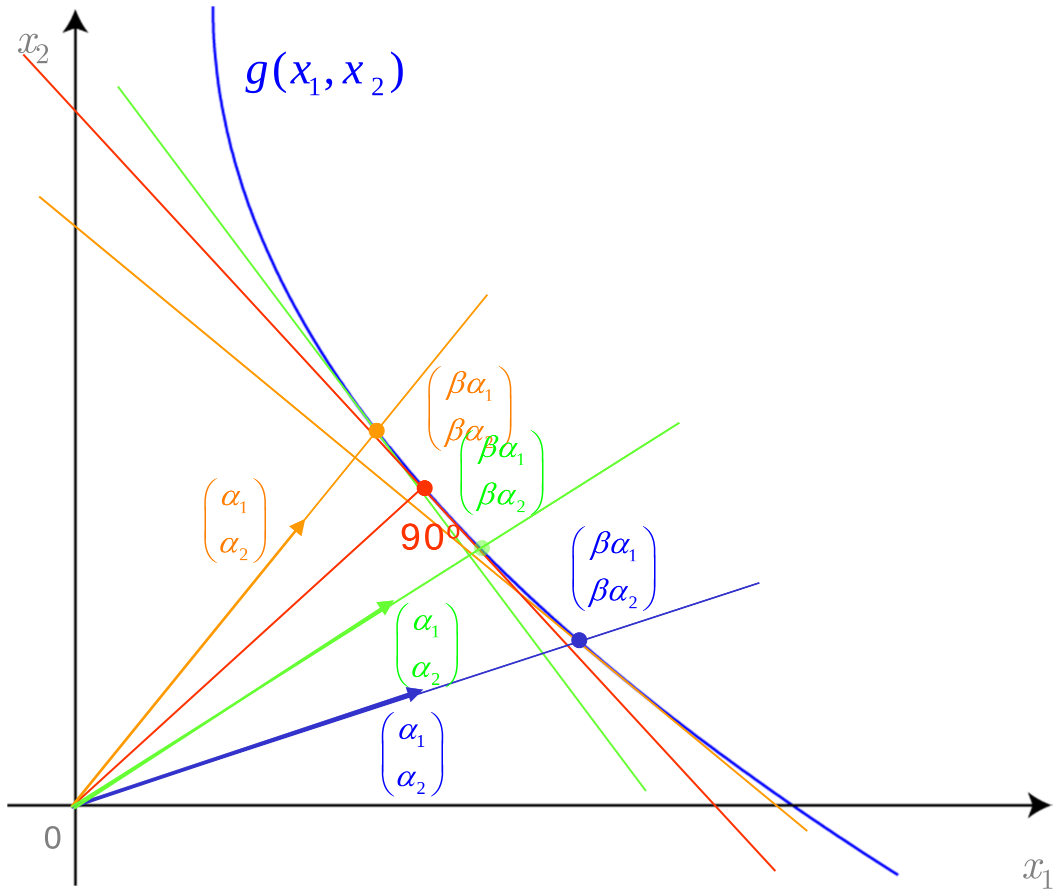
und β erhält man durch:

$$g(\beta\alpha_1, \beta\alpha_2) = 0$$

FORM

First Order Reliability Methods (FORM)

Iterative Bestimmung des Punktes mit geringstem Abstand. Verständnis grafisch:



Wo ist der nächste Punkt?

Bemerkung:

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}\dfrac{\partial g}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial g}{\partial x_2}\end{pmatrix}$$

und β erhält man durch:

$$g(\beta\alpha_1, \beta\alpha_2) = 0$$

Aufgabe F.3

Vorgehen

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x_1} = 4x_1 - 4 = 4\beta_{neu}\alpha_{1_{alt}} - 4 \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_2} = 1 \end{cases}$$

$$\alpha_{1_{neu}} = \frac{4\beta_{neu}\alpha_{1_{alt}} - 4}{\sqrt{\left(4\beta_{neu}\alpha_{1_{alt}} - 4\right)^2 + 1^2}}$$

$$\alpha_{2_{neu}} = \frac{1}{\sqrt{\left(4\beta_{neu}\alpha_{1_{alt}} - 4\right)^2 + 1^2}}$$

$$g(\beta\alpha_1, \beta\alpha_2) = 0 \Leftrightarrow 2(\beta\alpha_1 - 1)^2 + \beta\alpha_2 - 3 = 0$$

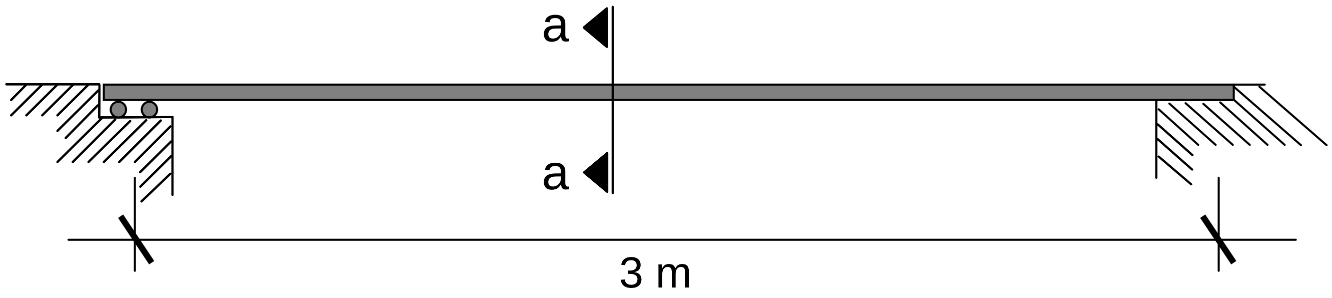
$$\Leftrightarrow \beta_{neu} = \frac{1}{2\beta_{alt}\alpha_{1_{alt}}^2 - 4\alpha_{1_{alt}} + \alpha_{2_{alt}}}$$

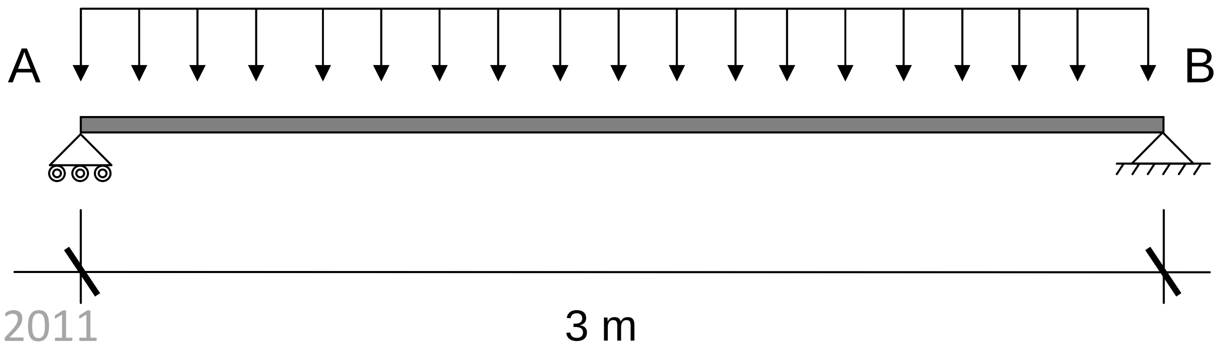
	Start	1	2	3	4	5
β	-1.0000	-0.26800	-0.21584	-0.22058	-0.22013	-0.22017
α_1	0.6000	0.97758	0.97935	0.97949	0.97950	0.97950
α_2	-0.6000	-0.21054	-0.20218	-0.20138	-0.20144	-0.20143

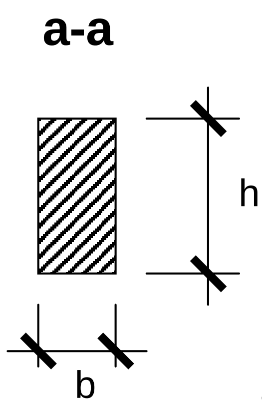
$$P[g(X_1, X_2) < 0] = \Phi(-\beta) = \Phi(0.22) = 0.587$$

Aufgabe F.4 Hausübung

Ein Träger verfügt über einen rechteckigen Querschnitt, eine Breite $b = 50mm$ und eine Länge $l = 3m$.
Die Trägerhöhe h ist über die Trägerlänge uniform und wird mit einer Normalverteilung mit einem Mittelwert $\mu_h = 100mm$ und einer Standardabweichung $\sigma_h = 5mm$ repräsentiert.

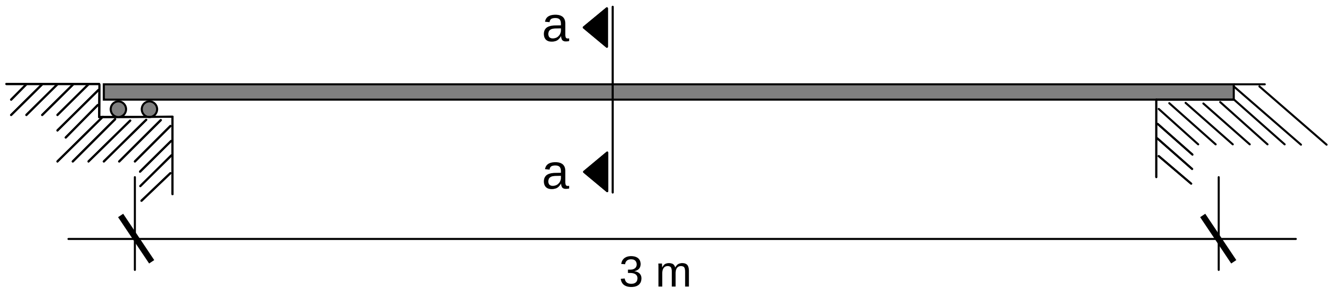


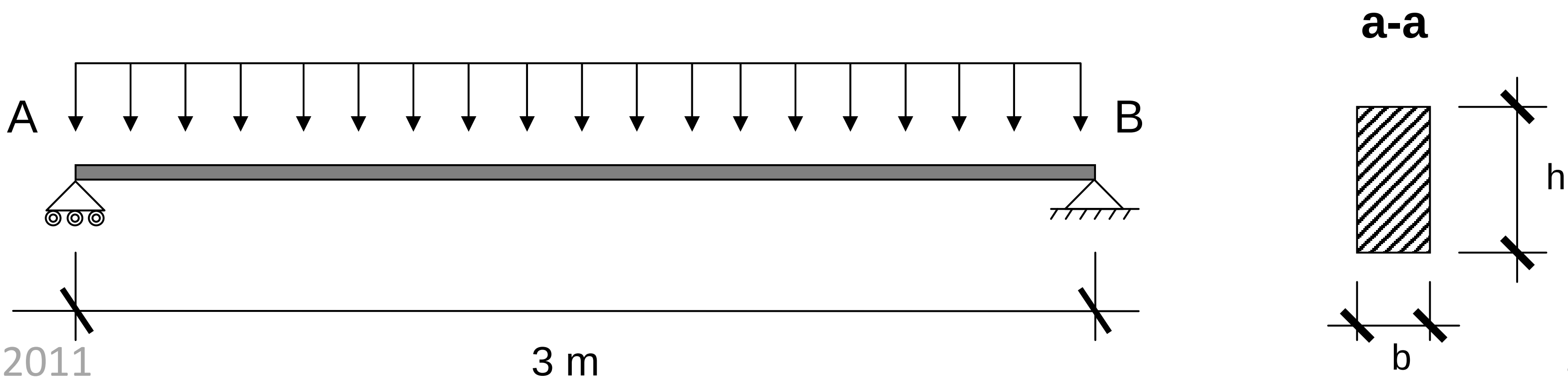




Aufgabe F.4 Hausübung

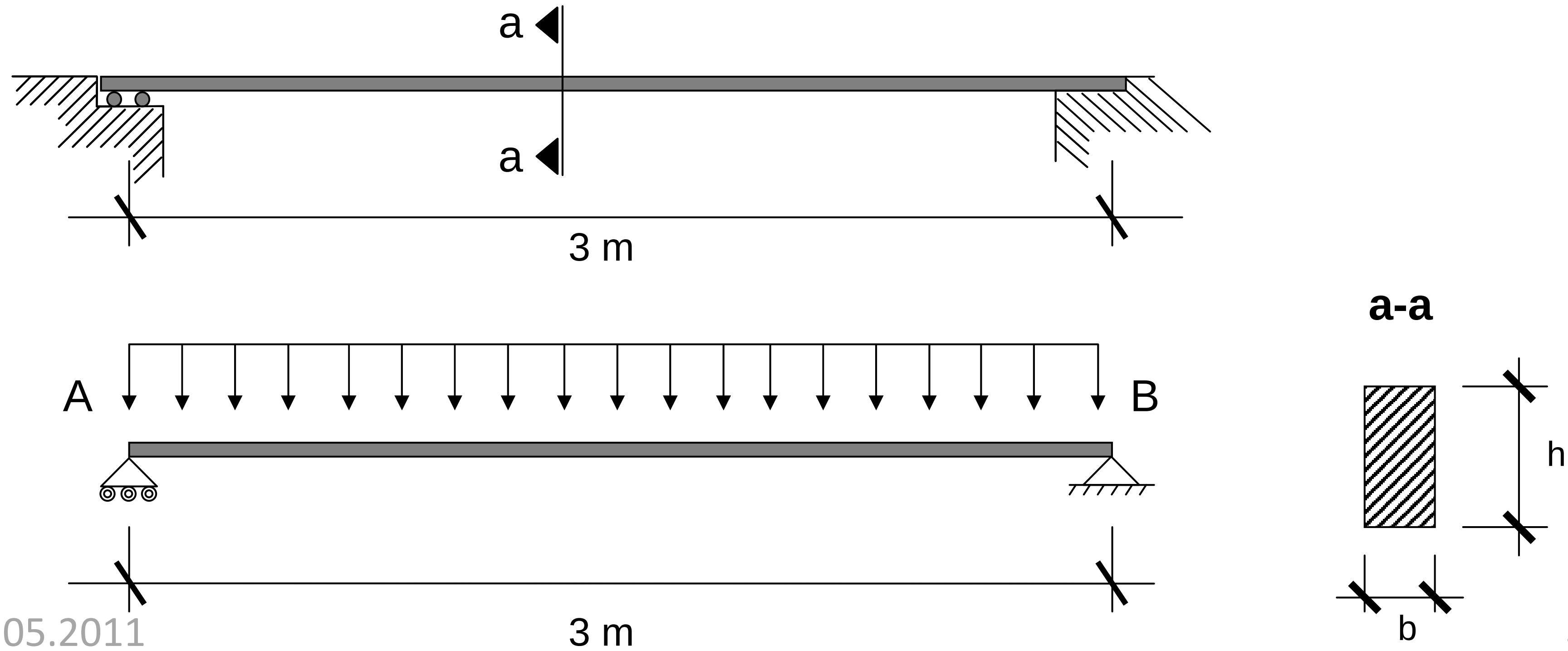
Der Träger wird mit einer Gleichstreckenlast q belastet, welche mit einen Normalverteilung mit dem Mittelwert $\mu_q = 5kN/m^2$ und Standardabweichung $\sigma_q = 1kN/m^2$ repräsentiert wird.





Aufgabe F.4 Hausübung

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Auslenkung w des Trägers in dessen Mitte bei Belastung einen Wert von 8 mm überschreitet?
Es wird angenommen, dass das Eigengewicht des Trägers vernachlässig werden kann.



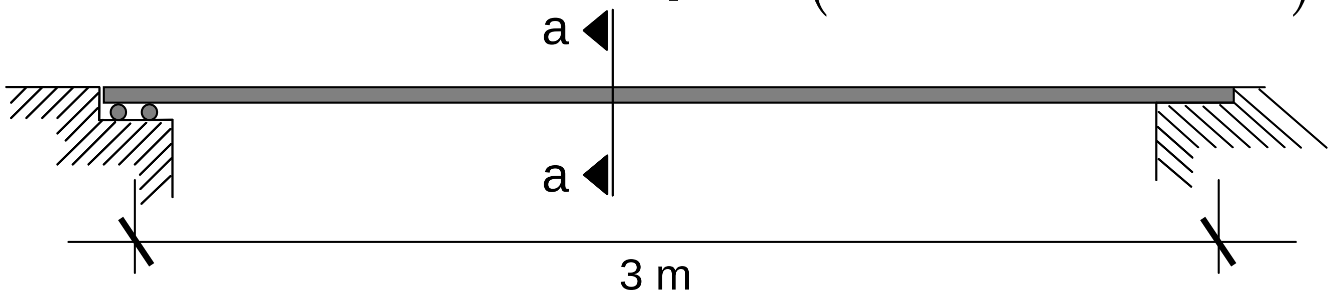
Aufgabe F.4 Hausübung

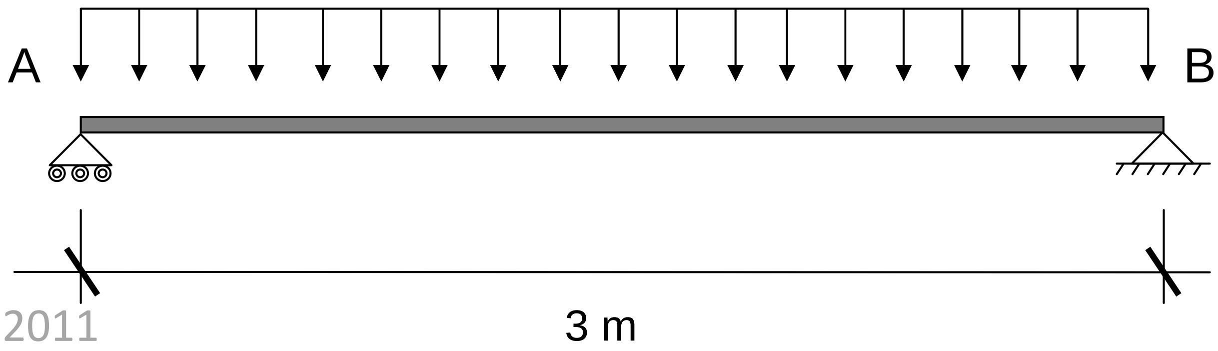
Masse des Balken:

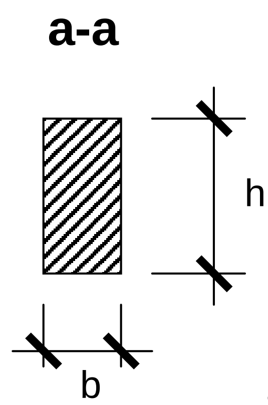
Länge	$l = 3m$
Breite	$b = 50mm$
Trägerdicke	$h \sim N\left(100mm, 5mm\right)$

Belastung:

Gleichstreckenlast	$q \sim N\left(5kN/m^2, 1kN/m^2\right)$





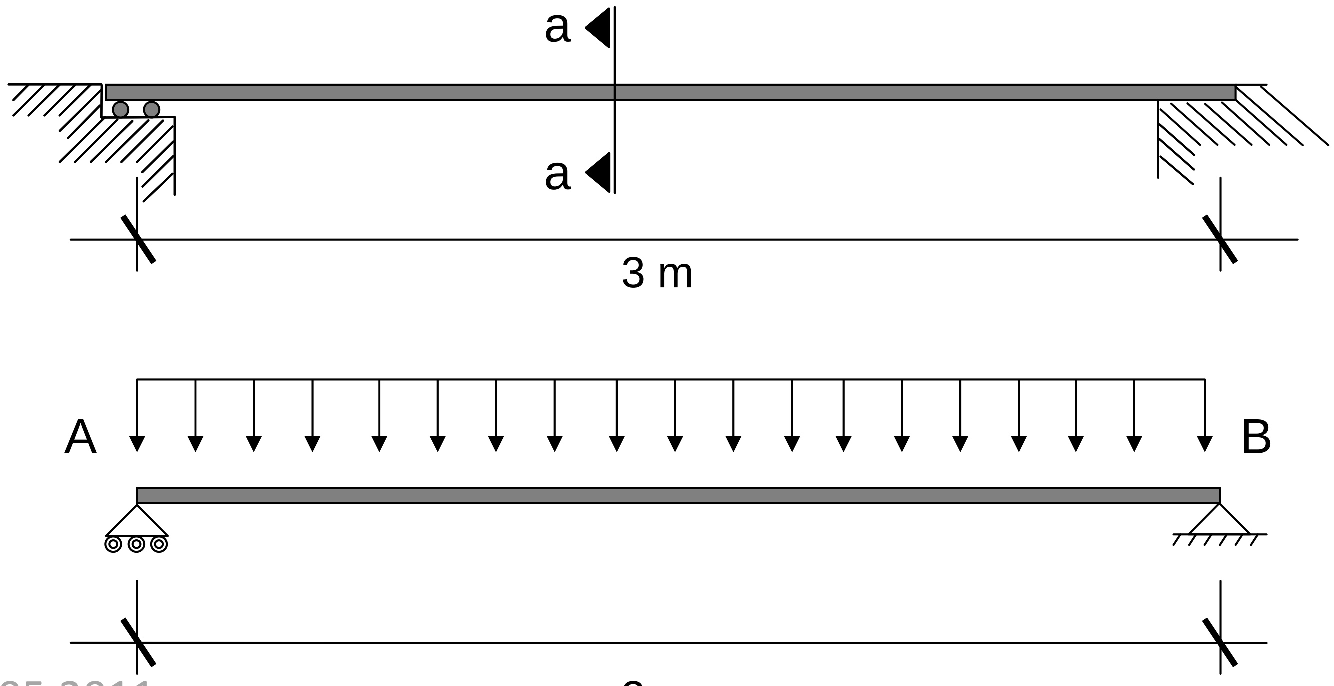


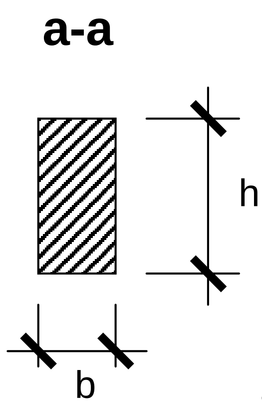
Aufgabe F.4 Hausübung

Auslenkung: $$w = \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot I}$$

wobei das Flächenträgheitsmoment $I = \frac{b \cdot h^3}{12}$

und der Elastizitätsmodul $E = 205 kN / mm^2$ ist.





Aufgabe F.4 Hausübung

Grenzzustandsfunktion:

$$g(x) = 8mm - w$$