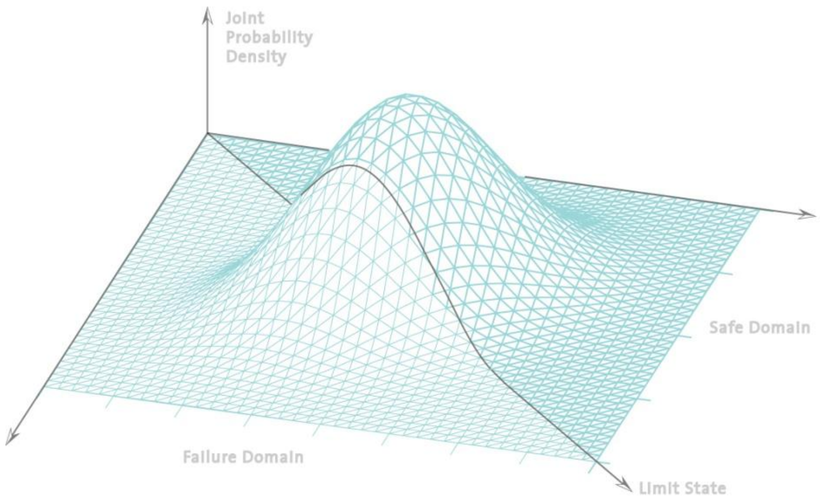


Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Übung 6

Inhalt der heutigen Übung

- Aufgabe D.7: Rechnen mit Zufallsvariablen
  - Erwartungswert- und Varianzoperator
  - Wahrscheinlichkeiten von normalverteilten Zufallsvariablen berechnen: Standardisierung und Anwendung der Tabelle T.1

- Aufgabe D.8: Binomialverteilung, Geometrische Verteilung

- Vorstellen der Hausübung: Aufgabe D.9

Aufgabe D.7

Es seien $\{X_i\}_{1\leq i\leq 50}$ unabhängige und <u>normalverteilte</u> Zufallsvariablen mit Mittelwert $\mu = 1$ und Standardabweichung $\sigma = 2$. Darüber hinaus sind folgende Zufallsvariablen definiert:

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{und} \quad \bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \frac{S_n}{n}$$

dabei ist $n = 50$.

Bestimme zuerst die Parameter der Normalverteilungen von S_n sowie $\bar{X}_n$ und berechne dann:

a) $P(E[X_1]-1 \leq X_1 \leq E[X_1]+1)$

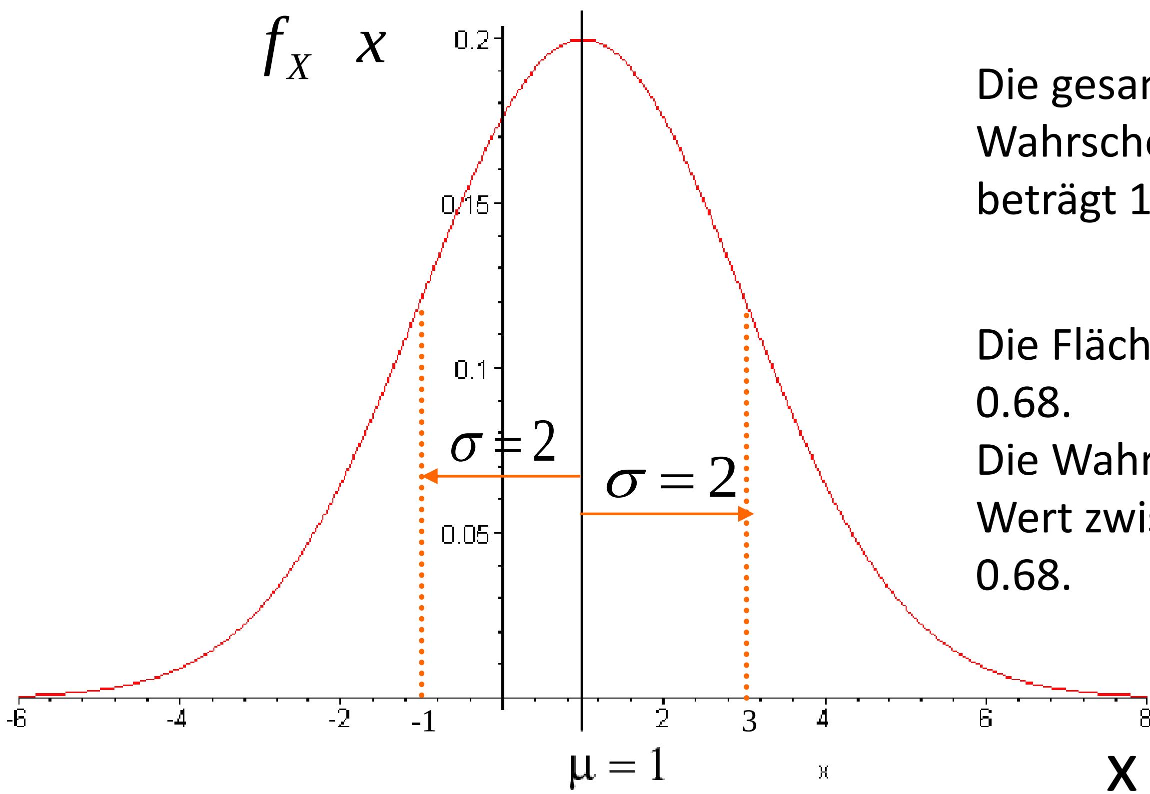
b) $P(E[S_n]-1 \leq S_n \leq E[S_n]+1)$

c) $P(E[\bar{X}_n]-1 \leq \bar{X}_n \leq E[\bar{X}_n]+1)$

Aufgabe D.7

Was ist gegeben?

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer Normalverteilung mit Mittelwert $\mu = 1$ und Standardabweichung $\sigma = 2$:



Die gesamte Fläche unter der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion beträgt 1.

Die Fläche zwischen -1 und 3 beträgt 0.68.
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Wert zwischen -1 und 3 liegt, beträgt 0.68.

Aufgabe D.7

Berechne den Mittelwert und die Standardabweichung von S_n

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

MERKE: Die Summe von normalverteilten Zufallsvariablen ist auch normalverteilt!

Wir erinnern uns:

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$$

$$Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$$ (bei Unabhängigkeit)

Aufgabe D.7

Berechne den Mittelwert und die Standardabweichung von S_n

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

$$\mu_{S_n} = E\left[S_n\right] = E[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} E\left[X_i\right] = n\mu = 50$$

$$\sigma_{S_n}{}^2 = Var\left[S_n\right] = Var[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} Var\left[X_i\right] = n\sigma^2 = 200$$

$$\Rightarrow \quad N(\mu_{S_n}, \sigma_{S_n}) = N(50, \sqrt{200})$$

Aufgabe D.7

Berechne den Mittelwert und die Standardabweichung von $\bar{X}_n$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\left(X_1 + X_2 + \ldots + X_n\right) = \frac{S_n}{n}$$

$$\mu_{\bar{X}_n} = E\left[\bar{X}_n\right] = \boxed{}$$

$$\sigma_{\bar{X}_n}{}^2 = Var\left[\bar{X}_n\right] = \boxed{}$$

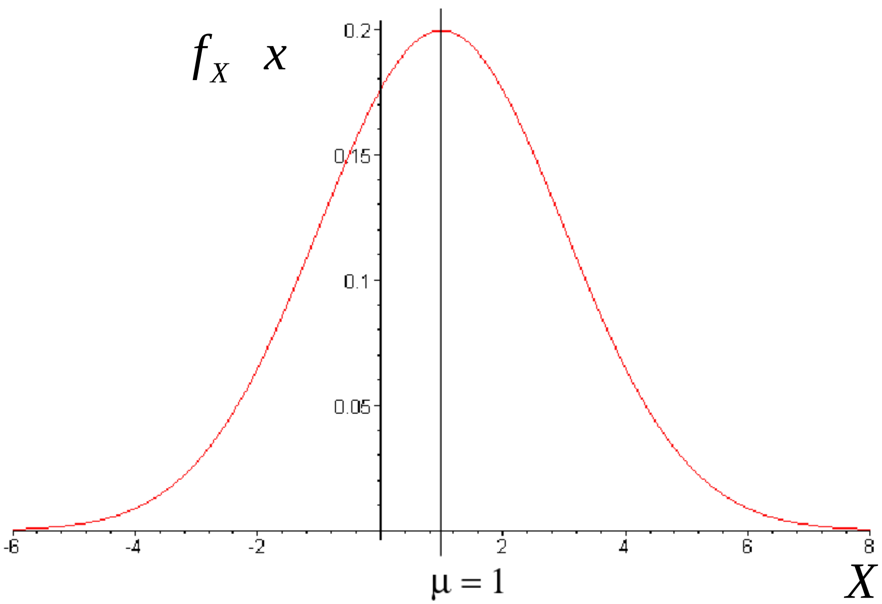
$$N(\mu_{\bar{X}_n}, \sigma_{\bar{X}_n}) = N(\ldots,\ldots)$$

Aufgabe D.7

a) Berechne $P\left(E\left[X_1\right]-1 \leq X_1 \leq E\left[X_1\right]+1\right)$

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

vergl. Skript Tabelle D-1

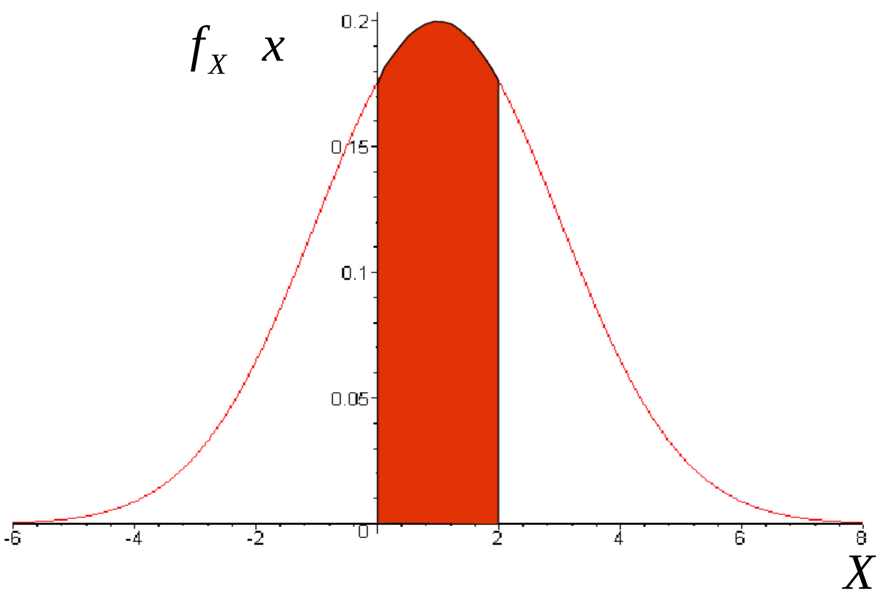


$$\mu = 1 \qquad \sigma = 2$$

Aufgabe D.7

a) Berechne $P\left(E[X_1]-1 \le X_1 \le E[X_1]+1\right) = P\left(0 \le X_1 \le 2\right)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$



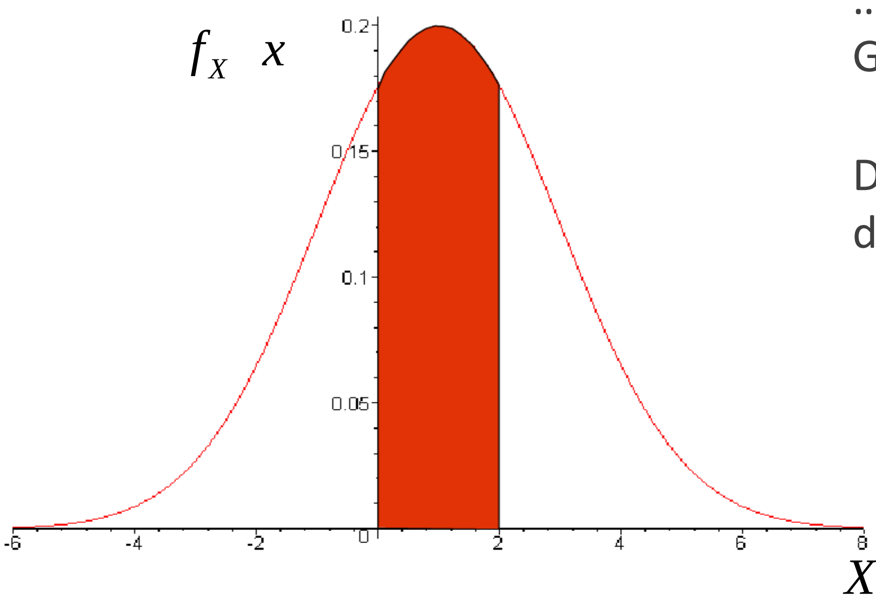
$\mu = 1 \qquad \sigma = 2$

Aufgabe D.7

a) Berechne $P\left(E\left[X_1\right]-1 \leq X_1 \leq E\left[X_1\right]+1\right)=P\left(0 \leq X_1 \leq 2\right)$

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

$$=\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 2}\exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2\cdot 2^2}\right)dx$$



$\mu=1 \qquad \sigma=2$

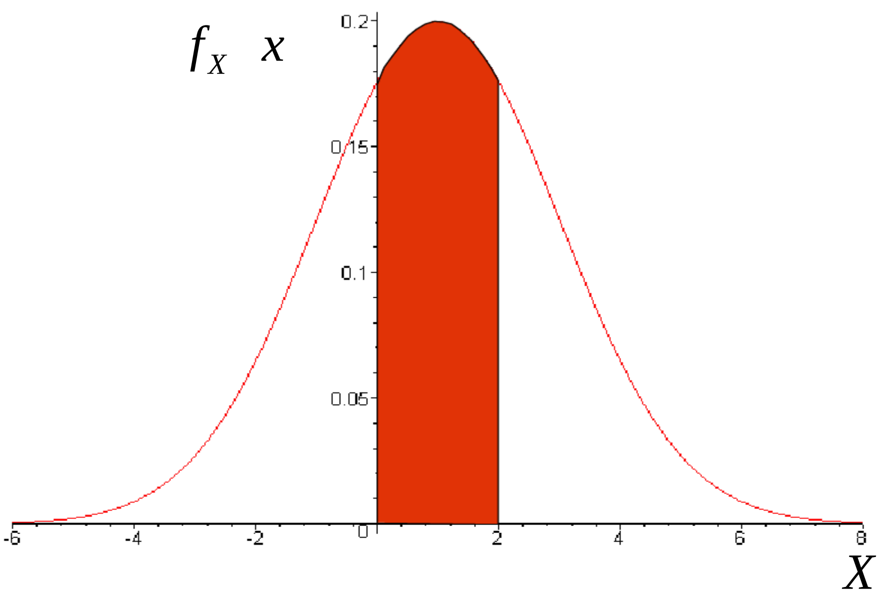
… durch Einsetzen von μ und σ in die Gleichung.

Die Wahrscheinlichkeit erhält man dann durch numerische Integration…

Aufgabe D.7

a) Berechne $P\left(E\left[X_1\right]-1 \leq X_1 \leq E\left[X_1\right]+1\right)=P\left(0 \leq X_1 \leq 2\right)$

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \qquad =\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 2}}\exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2\cdot 2^2}\right)dx$$



$$\mu=1 \qquad \sigma=2$$

… oder mit Hilfe der <u>Wahrscheinlichkeitstabelle</u>.

Um diese Wahrscheinlichkeitstabelle anwenden zu können, muss die Zufallsvariable zuerst <u>standardisiert</u> werden.

Standardisierung

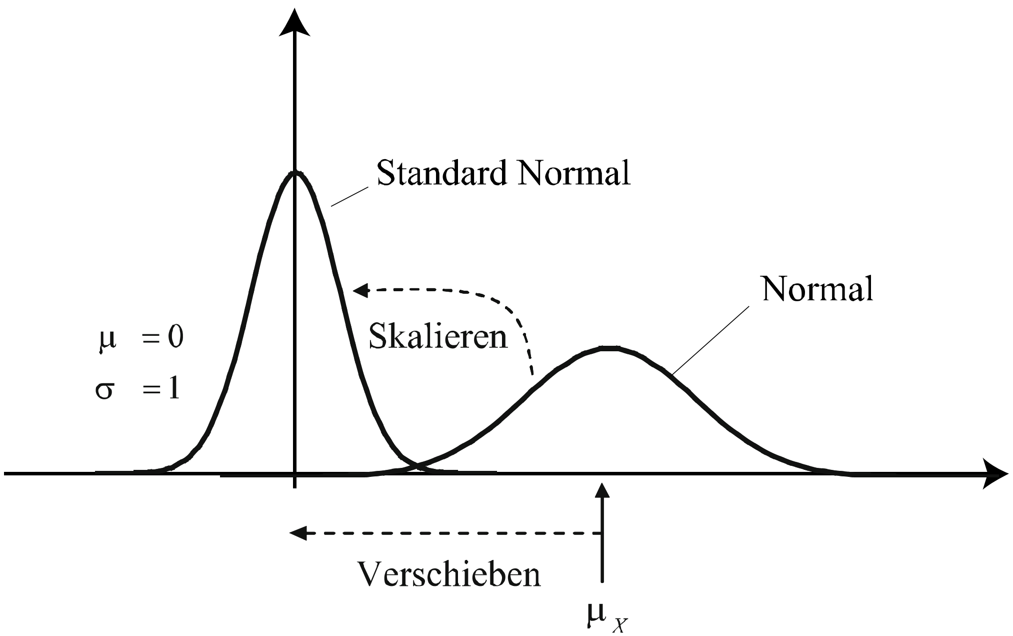
$$Z = \frac{X_1 - \mu}{\sigma}$$

Wie geht man vor, um zu standardisieren?

Standardisierung

Wie geht man vor, um zu standardisieren?

$$Z = \frac{X_1 - \mu}{\sigma}$$



Φ(z) ist die kumulierte Verteilungsfunktion für die standardnormalverteilte Zufallsvariable *N(0,1)*.

Standardisierung

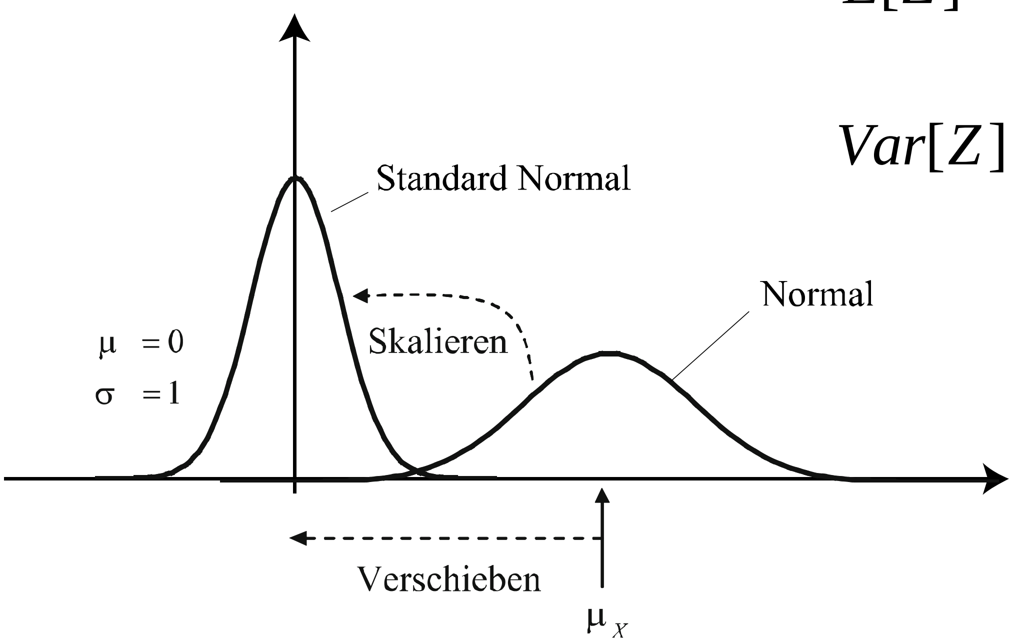
Wie geht man vor, um zu standardisieren?

$$Z = \frac{X_1 - \mu}{\sigma}$$

$$E[Z] = E[\frac{X_1 - \mu}{\sigma}] = \frac{E[X_1] - \mu}{\sigma} = \frac{\mu - \mu}{\sigma} = 0$$

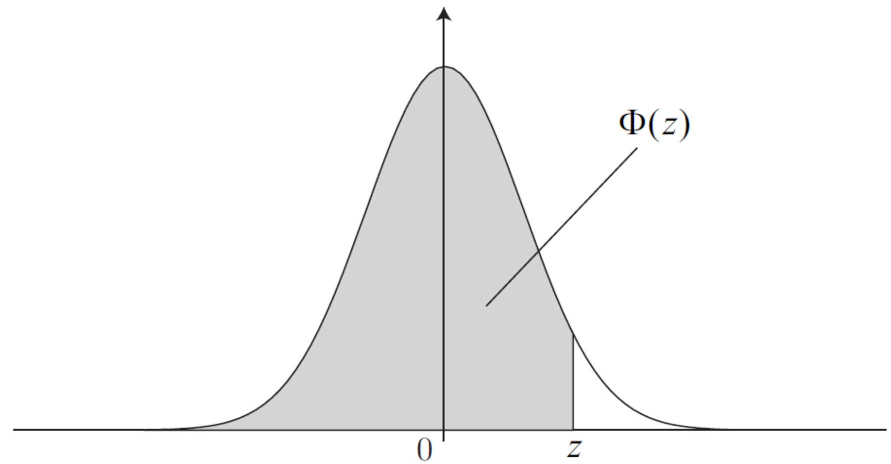
$$Var[Z] = Var[\frac{X_1 - \mu}{\sigma}] = \frac{1}{\sigma^2} Var[X_1 - \mu]$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} Var[X_1] = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$



Φ(z) ist die kumulierte Verteilungsfunktion für die standardnormalverteilte Zufallsvariable *N(0,1)*.

Verwendung der Φ-Tabelle



Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Standardnormalverteilung.

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0.00	0.5000	0.50	0.6915	1.00	0.8413	1.50	0.9332	2.00	0.9772
0.01	0.5040	0.51	0.6950	1.01	0.8438	1.51	0.9345	2.10	0.9821356
0.02	0.5080	0.52	0.6985	1.02	0.8461	1.52	0.9357	2.20	0.9860966
0.03	0.5120	0.53	0.7019	1.03	0.8485	1.53	0.9370	2.30	0.9892759
0.04	0.5160	0.54	0.7054	1.04	0.8508	1.54	0.9382	2.40	0.9918025
0.05	0.5199	0.55	0.7088	1.05	0.8531	1.55	0.9394	2.50	0.9937903
0.06	0.5239	0.56	0.7123	1.06	0.8554	1.56	0.9406	2.60	0.9953388
0.07	0.5279	0.57	0.7157	1.07	0.8577	1.57	0.9418	2.70	0.9965330
0.08	0.5319	0.58	0.7190	1.08	0.8599	1.58	0.9429	2.80	0.9974449

Tabelle T.1 in Annex T des Vorlesungsskripts

Aufgabe D.7

Wie geht man vor, um zu Standardisieren?

$$Z = \frac{X_1 - \mu}{\sigma}$$

$$P\left(E\left[X_1\right]-1 \leq X_1 \leq E\left[X_1\right]+1\right) = P[0 \leq X_1 \leq 2]$$

$$= P[0-1 \leq X_1 - 1 \leq 2-1]$$ ← Mittelwert $\mu = 1$

$$= P[\frac{0-1}{2} \leq \frac{X_1 - 1}{2} \leq \frac{2-1}{2}]$$ ← Standardabweichung $\sigma = 2$

$$= P[-\frac{1}{2} \leq \frac{X_1 - 1}{2} \leq \frac{1}{2}]$$

$$= P[-\frac{1}{2} \leq Z \leq \frac{1}{2}]$$

$$= \Phi(\frac{1}{2}) - \Phi(-\frac{1}{2})$$

Aufgabe D.7

$$P\left(E\left[X_1\right]-1 \leq X_1 \leq E\left[X_1\right]+1\right)$$

$$=\Phi(\frac{1}{2})-\Phi(-\frac{1}{2})$$

Wo ist *Φ(-0.5)* in der Tabelle?

Weil … $\Phi(-z)=1-\Phi(z)$

so dass $\Phi(-0.5)=1-\Phi(0.5)$

$$=1-0.6915$$

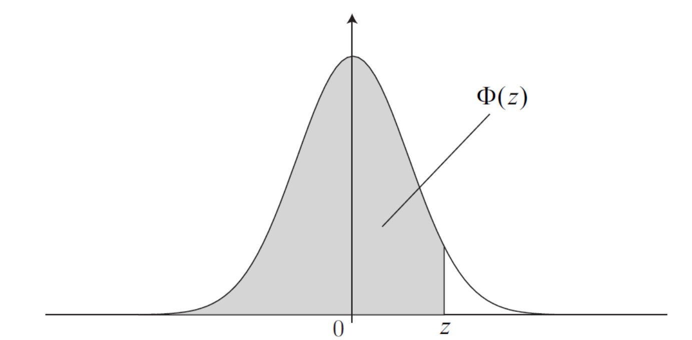
$$=0.3085$$

folgt das Ergebnis…

$$P\left(E\left[X_1\right]-1 \leq X_1 \leq E\left[X_1\right]+1\right)$$

$$P\left(Z \leq 1/2\right)-P\left(Z \leq -1/2\right)$$

$$=0.6915-0.3085=0.3830$$



Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Standardnormalverteilung.

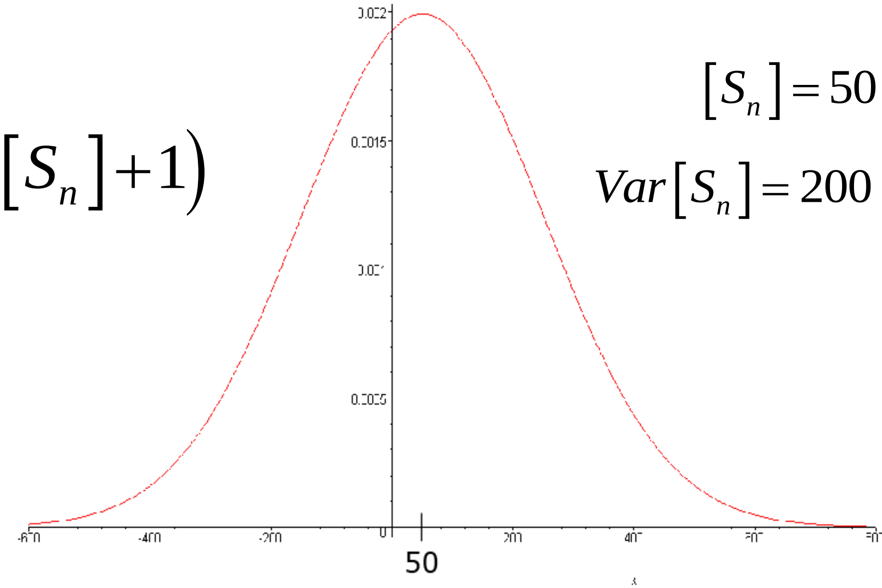
z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0.00	0.5000	0.50	0.6915	1.00	0.8413	1.50	0.9332	2.00	0.9772
0.01	0.5040	0.51	0.6950	1.01	0.8438	1.51	0.9345	2.10	0.9821356
0.02	0.5080	0.52	0.6985	1.02	0.8461	1.52	0.9357	2.20	0.9860966
0.03	0.5120	0.53	0.7019	1.03	0.8485	1.53	0.9370	2.30	0.9892759
0.04	0.5160	0.54	0.7054	1.04	0.8508	1.54	0.9382	2.40	0.9918025
0.05	0.5199	0.55	0.7088	1.05	0.8531	1.55	0.9394	2.50	0.9937903
0.06	0.5239	0.56	0.7123	1.06	0.8554	1.56	0.9406	2.60	0.9953388
0.07	0.5279	0.57	0.7157	1.07	0.8577	1.57	0.9418	2.70	0.9965330
0.08	0.5319	0.58	0.7190	1.08	0.8599	1.58	0.9429	2.80	0.9974449

Tabelle T.1 in Annex T des Vorlesungsskripts

Aufgabe D.7

b) Berechne $P\left(E\left[S_n\right]-1 \leq S_n \leq E\left[S_n\right]+1\right)$

→ gleiche Vorgehensweise:



$$\left[S_n\right]=50$$

$$Var\left[S_n\right]=200$$

$$P\left(E\left[S_n\right]-1 \leq S_n \leq E\left[S_n\right]+1\right)$$

$$= P[\ldots\ldots\ldots \leq S_n \leq \ldots\ldots\ldots]$$

$$= P[\ldots\ldots\ldots\ldots \leq \ldots\ldots\ldots\ldots \leq \ldots\ldots\ldots\ldots]$$

$$= \Phi\left(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right)-\Phi\left(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right)$$

$$=$$

$$Z=\frac{S_n-\mu}{\sigma}$$

1. Finde die standardisierte Form
2. Finde die Werte in der Tabelle
3. Subtrahiere $\Phi_b-\Phi_a$.

Aufgabe D.7

c) Berechne $P\left(E\left[\bar{X}_n\right]-1 \leq \bar{X}_n \leq E\left[\bar{X}_n\right]+1\right)$

$$E\left[\bar{X}_n\right]=1$$

$$Var\left[\bar{X}_n\right]=0.08$$

→ gleiche Vorgehensweise:

$$P\left(E\left[\bar{X}_n\right]-1 \leq \bar{X}_n \leq E\left[\bar{X}_n\right]+1\right)$$

$$= P[\ldots\ldots\ldots \leq \bar{X}_n \leq \ldots\ldots\ldots]$$

$$= P[\ldots\ldots\ldots\ldots \leq \ldots\ldots\ldots\ldots \leq \ldots\ldots\ldots\ldots]$$

$$= \Phi\left(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right) - \Phi\left(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right)$$

$$=$$

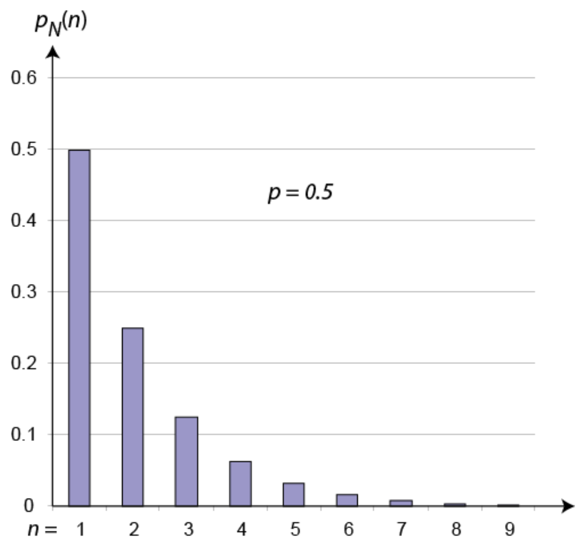
z)	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
15	1.00	0.8413	1.50	0.9332	2.00	0.9772
50	1.01	0.8438	1.51	0.9345	2.10	0.9821356
85	1.02	0.8461	1.52	0.9357	2.20	0.9860966
19	1.03	0.8485	1.53	0.9370	2.30	0.9892759
54	1.04	0.8508	1.54	0.9382	2.40	0.9918025
88	1.05	0.8531	1.55	0.9394	2.50	0.9937903
23	1.06	0.8554	1.56	0.9406	2.60	0.9953388
57	1.07	0.8577	1.57	0.9418	2.70	0.9965330
90	1.08	0.8599	1.58	0.9429	2.80	0.9974449
24	1.09	0.8621	1.59	0.9441	2.90	0.9981342
57	1.10	0.8643	1.60	0.9452	3.00	0.9986501
91	1.11	0.8665	1.61	0.9463	3.10	0.9990324
24	1.12	0.8686	1.62	0.9474	3.20	0.9993129
57	1.13	0.8708	1.63	0.9484	3.30	0.9995166
89	1.14	0.8729	1.64	0.9495	3.40	0.9996631
22	1.15	0.8749	1.65	0.9505	3.50	0.9997674
54	1.16	0.8770	1.66	0.9515	3.60	0.9998409
86	1.17	0.8790	1.67	0.9525	3.70	0.9998922
17	1.18	0.8810	1.68	0.9535	3.80	0.9999277

Tabelle T.1 in Annex T des Vorlesungsskripts

Binomialverteilung

Geometrische Verteilung

„Zeit“ bis zum ersten Treffer



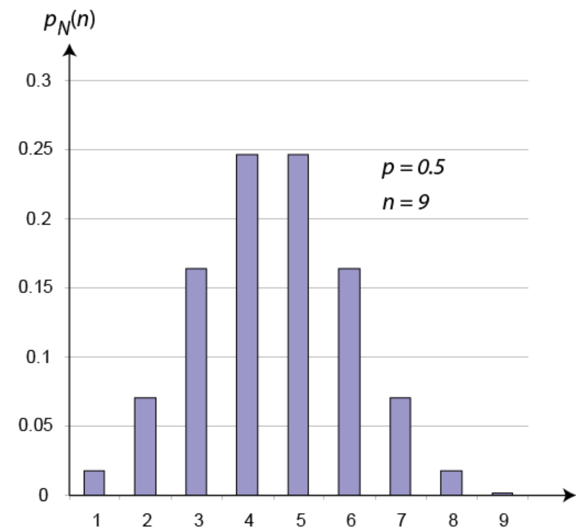
$$P[T = t] = (1-p)^{t-1}\, p$$

$$E[T] = \frac{1}{p}$$

$$Var[T] = \frac{1-p}{p^2}$$

Binomialverteilung

Anzahl der Treffer



$$P[N = y] = \binom{n}{y}(1-p)^{n-y}\, p^y$$

$$E[N] = np$$

$$\boxed{\binom{n}{y} = \frac{n!}{y!(n-y)!}}$$

$$Var[N] = np(1-p)$$

Aufgabe B.3

In einer Alpenregion gibt es 25 sehr hohe Berggipfel. Diese sind das ganze Jahr über mit Schnee bedeckt und es besteht an jedem Tag die gleiche Wahrscheinlichkeit für das Loslösen einer Lawine. Diese beträgt 1/40 pro Tag und Berggipfel.

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es in dieser Alpenregion an <u>einem</u> Tag zu <u>mindestens zwei</u> Lawinenabgängen kommt?

Annahme: An einem Berggipfel kann sich an einem Tag nur eine Lawine loslösen.

Aufgabe B.3 – Lösung bisher

Wahrscheinlichkeit $P(A)$ von Ereignis A:

Wahrscheinlichkeit, dass eine Lawine an einem Berggipfel auftritt

$$P_j(Lawine) = \frac{1}{40} = 0.025,\ j = 1, 2, \ldots, n$$

Wahrscheinlichkeit, dass keine Lawine an einem Berggipfel auftritt

$$P_j(keine\ Lawine) = 1 - (\frac{1}{40}) = 0.975,\ j = 1, 2, \ldots, n$$

Wahrscheinlichkeit, dass keine Lawine in der Alpenregion auftritt

$$P(A) = (1 - P_1(Lawine)) \cdot (1 - P_2(Lawine)) \cdots (1 - P_{25}(Lawine)) = 0.975^{25} = 0.531$$

Aufgabe B.3 – Lösung mit Binomialverteilung

Wahrscheinlichkeit $P(A)$ von Ereignis A:

Wahrscheinlichkeit, dass eine Lawine an einem Berggipfel auftritt

$$P_j(Lawine) = \frac{1}{40} = 0.025,\ j = 1, 2, \ldots, n$$

Wahrscheinlichkeit, dass keine Lawine in der Alpenregion auftritt:

$$P_j(keine\ Lawine) = \binom{n}{y}(1-p)^{n-y}\,p^y = \frac{n!}{y!(n-y)!}\,p^y(1-p)^{n-y}$$

$$= \frac{25!}{0!(25-0)!}0.025^0(0.975)^{25-0} = 0.531$$

Aufgabe B.3 – Lösung bisher

Wahrscheinlichkeit $P(B)$ von Ereignis B:

Wahrscheinlichkeit, dass eine Lawine nur an einem, und sonst keinem Berggipfel auftritt:

$$P_j(Lawine\ nur\ am\ Berggipfel\ j) = P(Lawine) \cdot (1 - P(Lawine))^{24} = 0.025 \cdot 0.975^{24} = 0.0136$$

Wahrscheinlichkeit, dass eine Lawine in der Alpenregion auftritt:

$$P(B) = \sum_{j=1}^{25} P(Lawine\ nur\ an\ Berggipfel\ j) = 25 \cdot 0.0136 = 0.340$$

Aufgabe B.3 – Lösung mit Binomialverteilung

Wahrscheinlichkeit $P(B)$ von Ereignis B:

Wahrscheinlichkeit, dass eine Lawine in der Alpenregion auftritt:

$$P(Lawine\,in\;der Alpenregion) = \frac{n!}{y!(n-y)!} p^y (1-p)^{n-y} = \frac{25!}{1!(25-1)!} 0.025^1 (0.975)^{25-1} = 0.340$$

Aufgabe D.8

Die Hochwasserentlastungsanlage eines Rückhaltebeckens ist auf ein 1000-jähriges Hochwasser Q_B bemessen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Staudamm wie folgt überflutet wird:

Aufgabe D.8

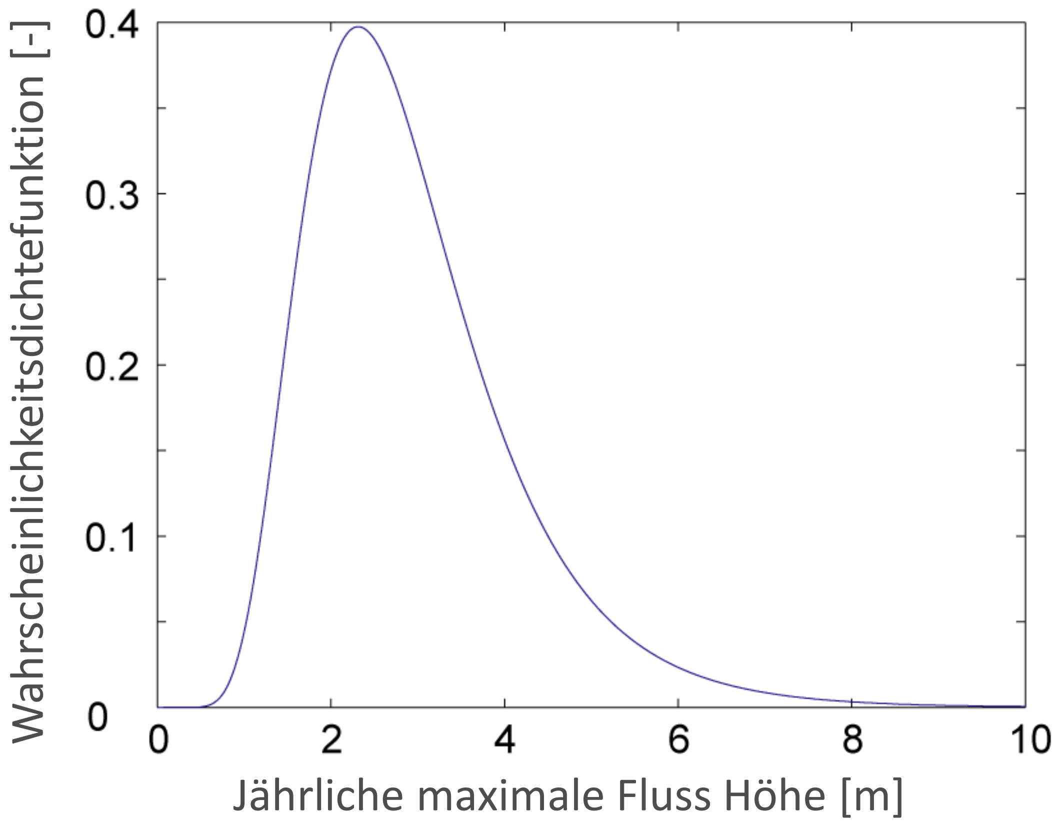
Die Hochwasserentlastungsanlage eines Rückhaltebeckens ist auf ein 1000-jähriges Hochwasser Q_B bemessen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Staudamm wie folgt überflutet wird:

a. Während eines 10-Jahre-Zeitraums im 10-ten Jahr genau einmal?
b. Während eines 10-Jahre-Zeitraums irgendwann zweimal?
c. Während eines 10-Jahre-Zeitraums überhaupt nicht?
d. Während eines 10-Jahre-Zeitraums höchstens einmal?
e. Während eines 100-Jahre-Zeitraums insgesamt 10-mal?
f. Während eines 1000-Jahre-Zeitraums einmal oder öfter?

Beachte: Es wird angenommen,
dass das Hochwasserereignis höchstens einmal pro Jahr auftritt.

Aufgabe D.8

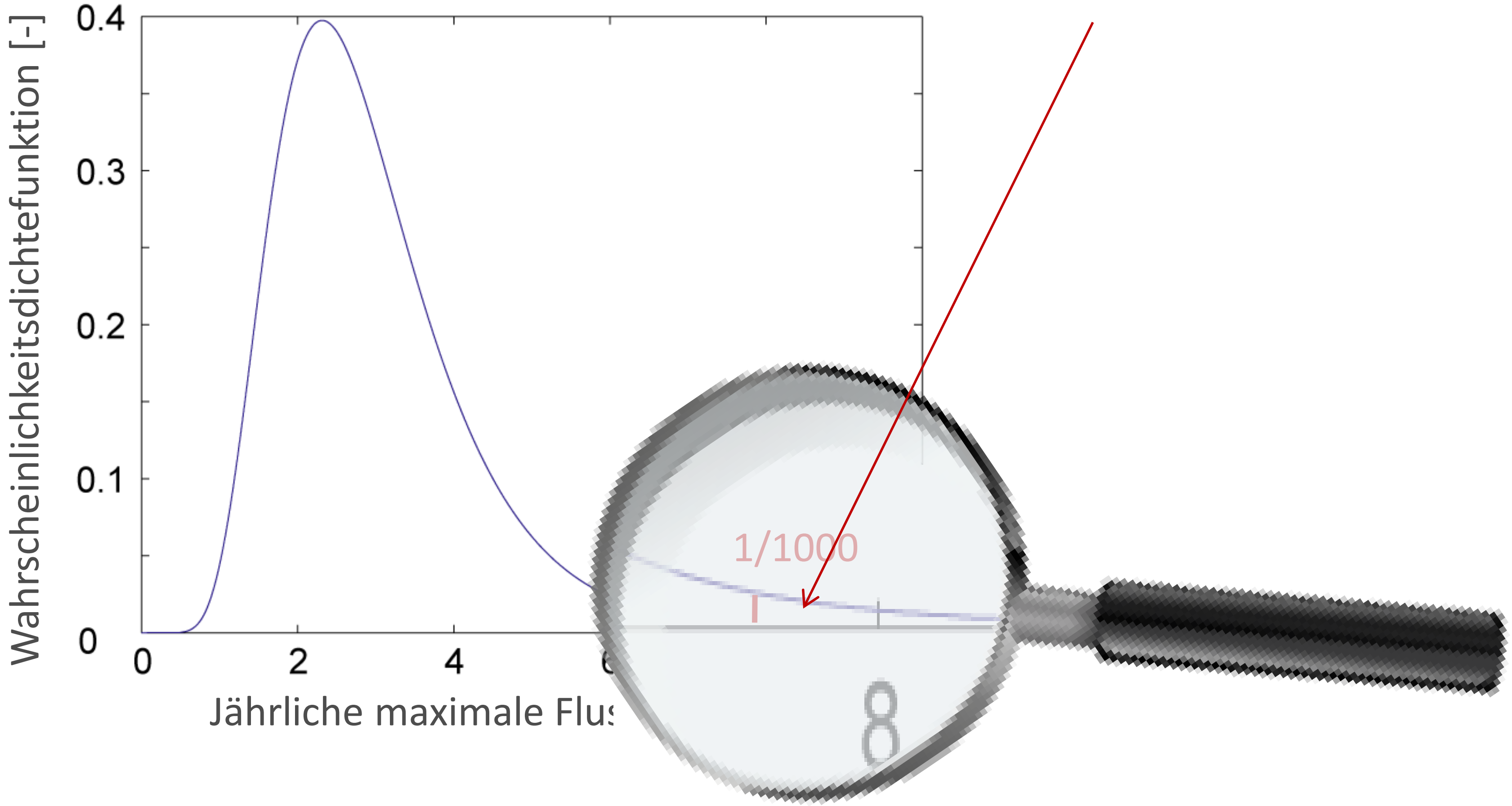
1000-jähriges Hochwasser:



Aufgabe D.8

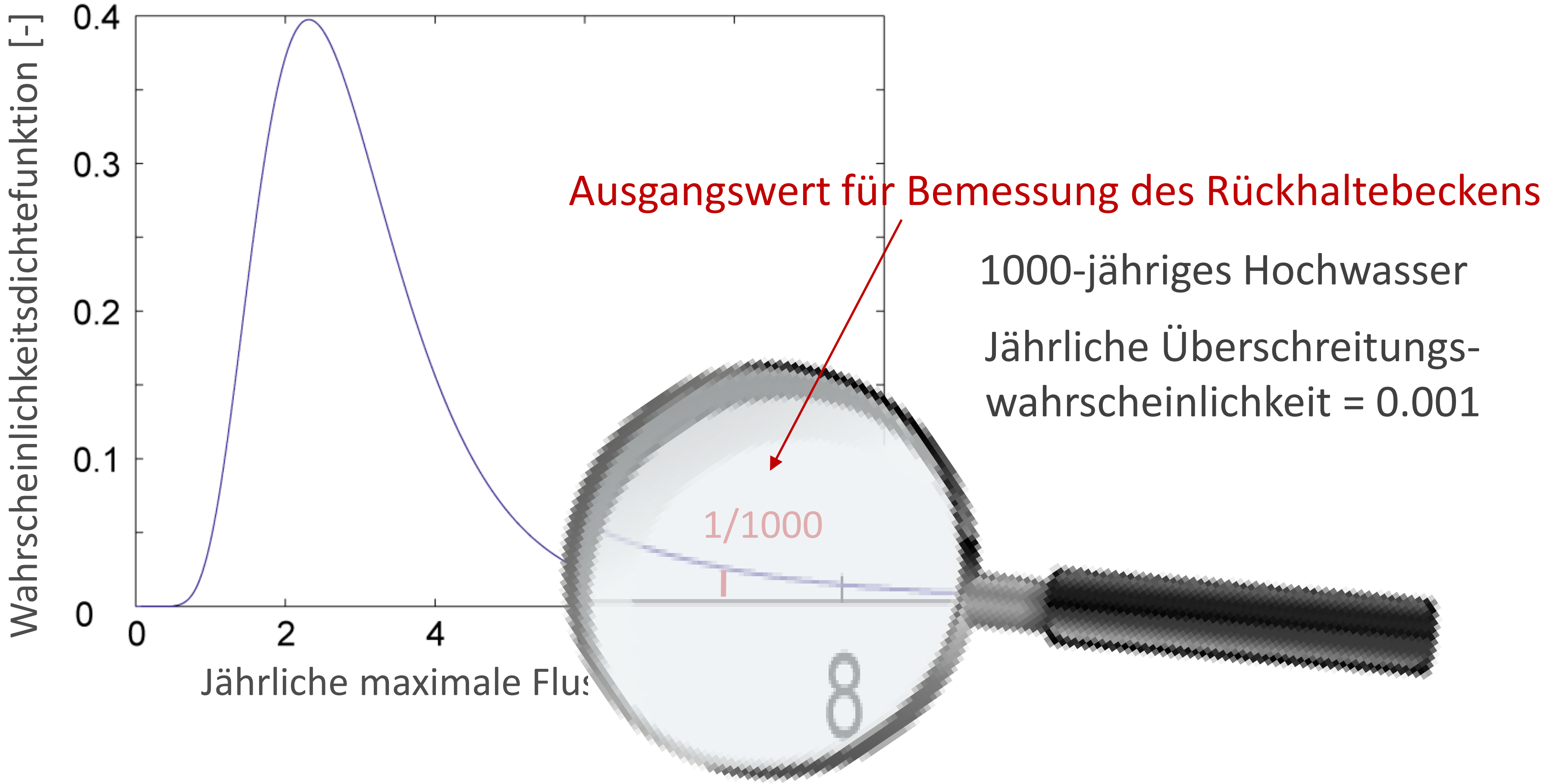
1000-jähriges Hochwasser:

Die Überschreitungswahrscheinlichkeit wird durch die Fläche mit der Grösse 1/1000 unter der Dichtefunktion repräsentiert.



Aufgabe D.8

1000-jähriges Hochwasser:



1000-jähriges Hochwasser

Jährliche Überschreitungs-wahrscheinlichkeit = 0.001

Aufgabe D.8

Wiederkehrperiode T:

Jährliche Überschreitungswahrscheinlichkeit ist $p(=\frac{1}{T})$.

Zufallsvariable N = Zeit, bis ein Hochwasser zum ersten Mal auftritt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass es ein Hochwasser im *n-ten* Jahr zum ersten Mal auftritt, entspricht:

$$P[N = n] = \underbrace{(1-p)(1-p)...(1-p)}_{n-1}\,p$$

← Geometrische Verteilung

$$= (1-p)^{n-1}\,p$$

Erwartungswert von N, $E[N]$ ist

$$E[N] = \sum_{n=1}^{\infty} nP[N = n] = \sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1}p = \frac{1}{p} = T$$

Aufgabe D.8

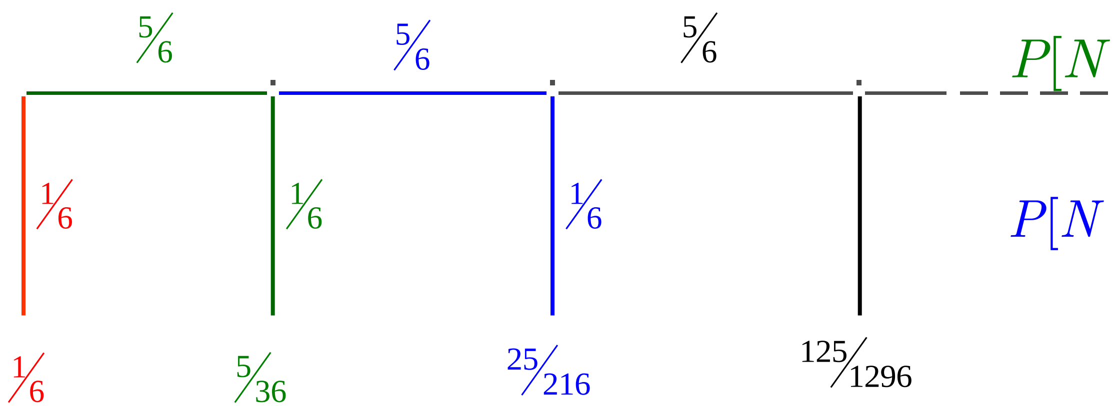
Die Wahrscheinlichkeit, dass es ein Hochwasser im *n-ten* Jahr zum ersten Mal auftritt, entspricht:

$$P[N = n] = \underbrace{(1-p)(1-p)...(1-p)}_{n-1}\,p \quad \longleftarrow \text{Geometrische Verteilung}$$

$$= (1-p)^{n-1}\,p$$

Ein einfaches Bsp. einer geometrischen Verteilung:
Die Wahrscheinlichkeit eine “5” beim Würfeln zu bekommen

$$P[N = 1] = 1/6$$



$$P[N = 2] = (1 - 1/6) \cdot 1/6$$

$$P[N = 3] = \underbrace{(1 - 1/6)(1 - 1/6)}_{t-1} \cdot 1/6$$

$$= (1 - 1/6)^{3-1} \cdot 1/6$$

Aufgabe D.8

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Staudamm während eines 10-Jahre-Zeitraums genau im 10-ten Jahr überflutet wird?

Die Wahrscheinlichkeit, dass es im n. Jahr zum ersten Hochwasser kommt

$$P[N=n] = \underbrace{(1-p)(1-p)\dots(1-p)}_{n-1}\, p \quad \longleftarrow$$

Geometrische Verteilung

$$= (1-p)^{n-1}\, p$$

Das Ereignis Überflutung im 10. Jahr während eines 10-Jahre-Zeitraums kann demnach wie folgt beschrieben werden:

$$P(H_{Überflutung,1}) = (p)\cdot(1-p)^{n-1} = (0.001)\cdot(0.999)^{9} = 0.000991$$

Aufgabe D.8

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Staudamm während eines 10-Jahre-Zeitraums insgesamt zweimal überflutet wird?

Die Wahrscheinlichkeit, dass es in 10 Jahren (n Versuche) zu zwei Überflutungen kommt (y Treffer)

?

Aufgabe D.8

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Staudamm während eines 10-Jahre-Zeitraums insgesamt zweimal überflutet wird?

Die Wahrscheinlichkeit, dass es in 10 Jahren (n Versuche) zu zwei Überflutungen kommt (y Treffer) → Binomialverteilung

$$P[Y = y] = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y} = \frac{n!}{y!\; n-y\; !} p^y (1-p)^{n-y}$$

Entsprechend der Binomialverteilung erhält man:

$$P(H_{Überflutung,2}) = \frac{10!}{2! \cdot (10-2)!} (p)^2 \cdot (1-p)^{10-2} = 45 \cdot (0.001)^2 \cdot (0.999)^8 = 0.000045$$

Aufgabe D.8

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Staudamm während eines 10-Jahre-Zeitraums überhaupt nicht überflutet wird?

Die Wahrscheinlichkeit, dass es in 10 Jahren (n Versuche) zu null Überflutungen kommt (y Treffer)

Aufgabe D.8

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Staudamm während eines 10-Jahre-Zeitraums überhaupt nicht überflutet wird?

Die Wahrscheinlichkeit, dass es in 10 Jahren (n Versuche) zu null Überflutungen kommt (y Treffer) → Binomialverteilung

$$P[Y = y] = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y} = \frac{n!}{y!\,(n-y)!} p^y (1-p)^{n-y}$$

Aufgabe D.8

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Staudamm während eines 10-Jahre-Zeitraums überhaupt nicht überflutet wird?

Die Wahrscheinlichkeit, dass es in 10 Jahren (n Versuche) zu null Überflutungen kommt (y Treffer) → Binomialverteilung

$$P[Y = y] = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y} = \frac{n!}{y!\;\; n-y\;\; !} p^y (1-p)^{n-y}$$

Entsprechend der Binomialverteilung erhält man:

$$P(H_{\text{Überflutung},0}) = \frac{10!}{0! \cdot (10-0)!} (p)^0 \cdot (1-p)^{10-0} = (0.001)^0 \cdot (0.999)^{10} = 0.99$$

Aufgabe D.8

d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Staudamm während eines 10-Jahre-Zeitraums höchstens einmal überflutet wird?

Die Wahrscheinlichkeit, dass es in 10 Jahren (n Versuche) zu null oder ein Überflutungen kommt (y Treffer) → Binomialverteilung

$$P(H_{\max,1}) = P(H_{\text{Überflutung},0}) + P(H_{\text{Überflutung},1})$$

$$P(H_{\text{Überflutung},0}) = \frac{10!}{0! \cdot (10-0)!}(p)^0(1-p)^{10-0}$$

$$P(H_{\text{Überflutung},1}) = \frac{10!}{1! \cdot (10-1)!}(p)^1(1-p)^{10-1}$$

$$P(H_{\max,1}) = P(H_{\text{Überflutung},0}) + P(H_{\text{Überflutung},1}) = 0.99004 + 0.00991 = 0.99995$$

Aufgabe D.8

e) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Staudamm während eines **100**-Jahre-Zeitraums insgesamt 10 mal überflutet wird?

Aufgabe D.8

f) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Staudamm während eines **1000**-Jahre-Zeitraums einmal oder öfters überflutet wird?

Die Wahrscheinlichkeit, dass es in 1000 Jahren (n Versuche) zu einer oder mehreren Überflutungen kommt (y Treffer) → Binomialverteilung

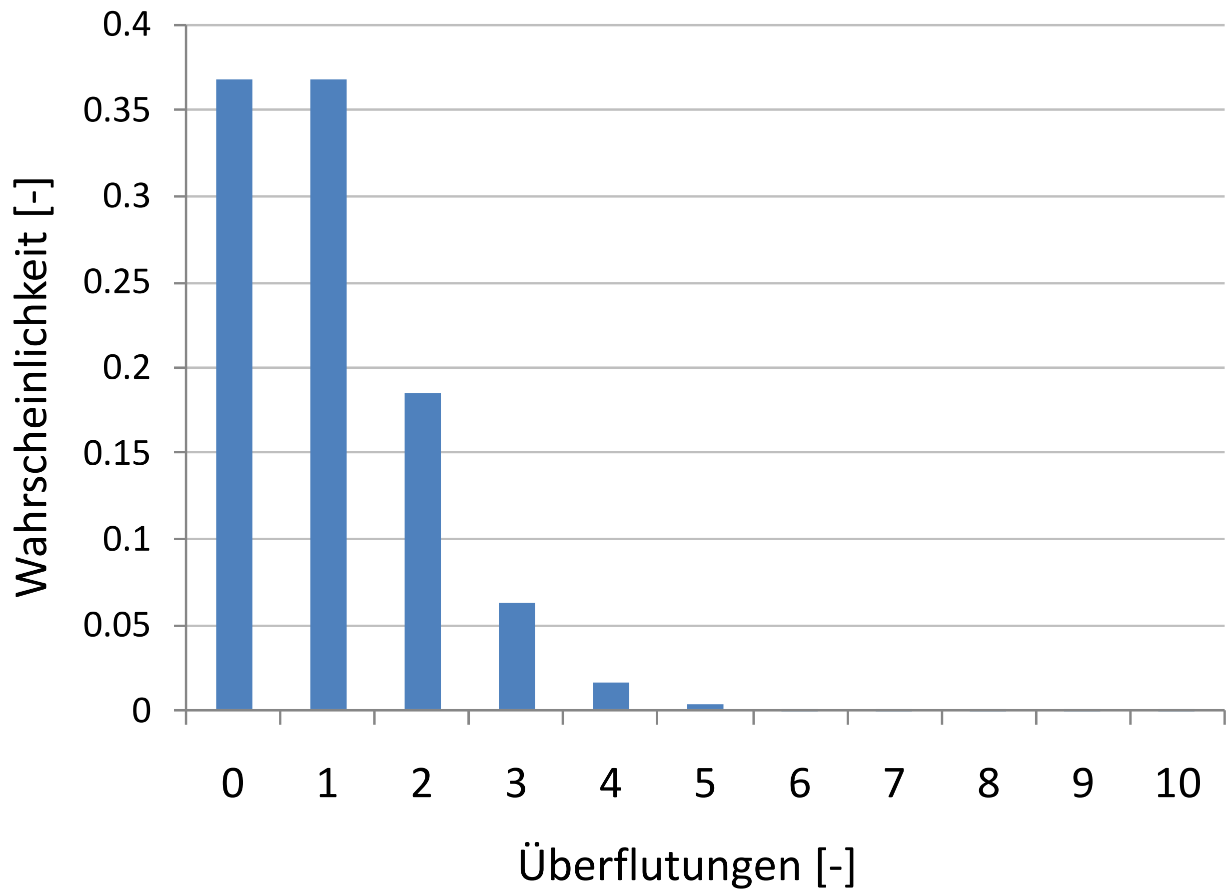
$$P(H_{Überflutung,0}) = \frac{1000!}{0!(1000-0)!}(p)^0 \cdot (1-p)^{1000-0} = (0.001)^0(0.999)^{1000} = 0.368$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist die Wahrscheinlichkeit des Komplementärereignisses:

$$P(H_{Überflutung,\geq 1}) = 1 - 0.368 = 0.632$$

Aufgabe D.8

Binomialverteilung von 0 bis 10 Überflutungen in einem 1000-jährigen Zeitraum [-] bei einer Auftretenswahrscheinlichkeit von 0.001



Hilfreicher Link

http://www.uni-konstanz.de/FuF/wiwi/heiler/os/

Aufgabe D.9 (Hausübung)

Aus Daten der letzten Jahre ist ersichtlich, dass von allen eingereichten Projektvorschlägen eines Planungsbüros im Umweltingenieurwesen 27% erfolgreich einen Zuschlag erhalten haben.
Als neuer Besitzer dieses Planungsbüros setzt du dich nun mit der Wirtschaftsplanung der kommenden Jahre auseinander. In diesem Zusammenhang interessiert dich,

a. wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass spätestens der 12. Projektvorschlag einen Zuschlag erhält.

b. wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass nur der letzte der nächsten 10 Projektvorschläge erfolgreich sein wird?

c. wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass höchstens 2 der nächsten 13 Projektvorschläge erfolgreich sein werden?

Bitte berechne diese Wahrscheinlichkeiten...