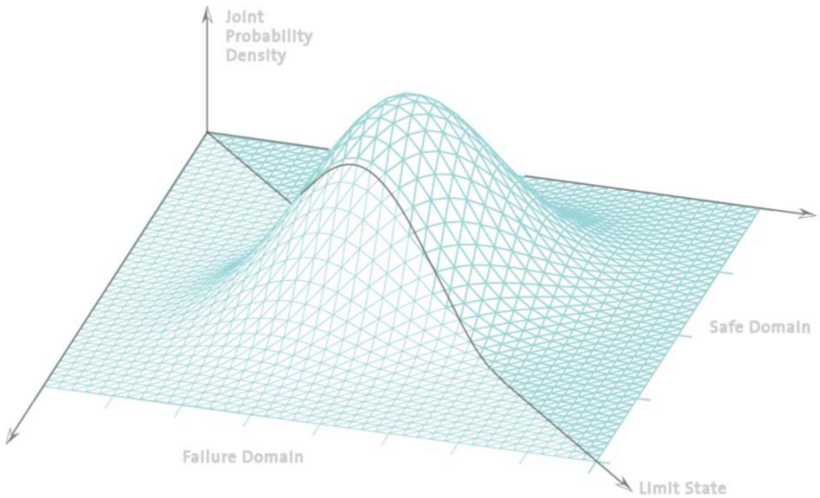


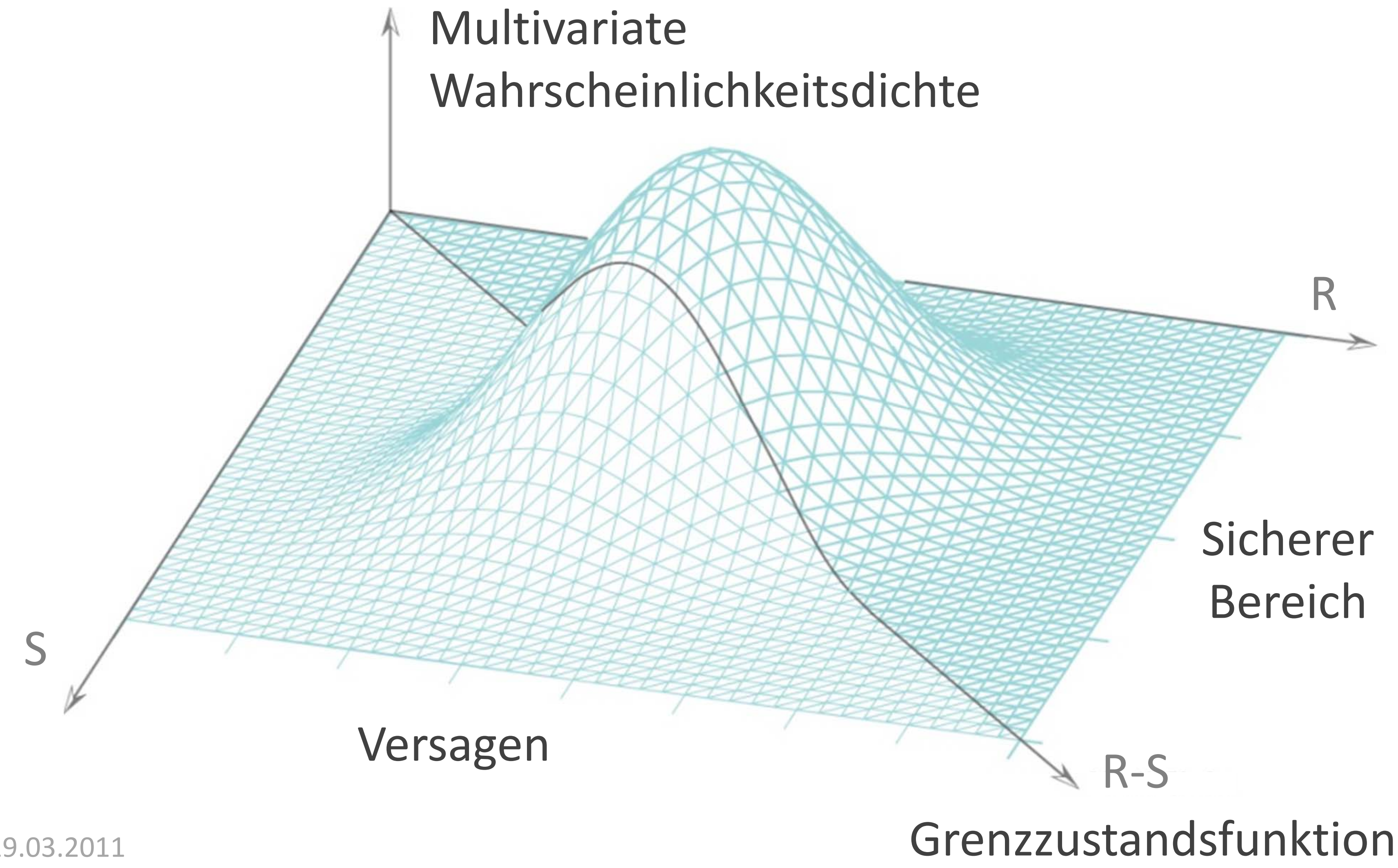
Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Übung 5

Inhalt der heutigen Übung

- Vorrechnen der Hausübung D.3
- Gemeinsames Lösen der Übungsaufgaben
  - D.4: Zufallsvektoren
  - D.5: Multivariate Wahrscheinlichkeiten
  - D.6: Faltungsintegral

Wozu multivariate Wahrscheinlichkeiten?



Aufgabe D.4

Die marginalen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen eines zweidimensionalen Zufallsvektors $Z = (X, Y)^T$ sind wie folgt definiert:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{4}(2y - y^2) & \text{für } 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Korrelationskoeffizient zwischen X und Y entspricht $\rho_{XY} = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

a) Berechne den Erwartungswert von $6X - 4Y + 2$

b) Berechne die Kovarianz $C_{6X,4Y}$

c) Berechne die Varianz von $6X - 4Y + 2$

d) Berechne den Erwartungswert von $6X^2 - 4Y^2$

zur Erinnerung...

Skript:
Gleichungen D.16 & D.18

Erwartungswertoperator:

$$E[c] = c$$
$$E[cX] = cE[X]$$
$$E[a + bX] = a + bE[X]$$
$$E[g_1(X) + g_2(X)] = E[g_1(X)] + E[g_2(X)]$$

Varianzoperator:

$$Var[c] = 0$$
$$Var[cX] = c^2 Var[X]$$
$$Var[a + bX] = b^2 Var[X]$$

Aufgabe D.4

a) Berechne den Erwartungswert von $6X-4Y+2$
b) Berechne die Kovarianz $C_{6X,4Y}$
c) Berechne die Varianz von $6X-4Y+2$
d) Berechne den Erwartungswert von $6X^2-4Y^2$

$$E\left[a+bX\right]=a+bE\left[X\right]$$

$$E\left[g_1(X)+g_2(X)\right]=E\left[g_1(X)\right]+E\left[g_2(X)\right]$$

a) $E[6X-4Y+2]=6E[X]-4E[Y]+2=....$

Aufgabe D.4

a) Berechne den Erwartungswert von $6X-4Y+2$
b) Berechne die Kovarianz $C_{6X,4Y}$
c) Berechne die Varianz von $6X-4Y+2$
d) Berechne den Erwartungswert von $6X^2-4Y^2$

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & \textit{für } -1\le x\le 1\\ 0 & \textit{sonst}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{4}(2y-y^2) & \textit{für } 0\le y\le 2\\ 0 & \textit{sonst}\end{cases}\qquad \rho_{XY}=\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Berechnung *E[X]* und *Var[X]*

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx=\int_{-1}^{1} x\frac{1}{2}dx=\left[\frac{1}{4}x^2\right]_{-1}^{1}=0$$

$$Var[X]=E\left[X^2\right]-\left(E[X]\right)^2=\frac{1}{3}$$

$$E\left[X^2\right]=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx=\int_{-1}^{1} x^2\frac{1}{2}dx=\left[\frac{x^3}{6}\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{3}$$

Aufgabe D.4

a) Berechne den Erwartungswert von $6X-4Y+2$
b) Berechne die Kovarianz $C_{6X,4Y}$
c) Berechne die Varianz von $6X-4Y+2$
d) Berechne den Erwartungswert von $6X^2-4Y^2$

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{für } -1\le x\le 1\\ 0 & \text{sonst}\end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{4}(2y-y^2) & \text{für } 0\le y\le 2\\ 0 & \text{sonst}\end{cases} \qquad \rho_{XY}=\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Berechnung *E[Y]* und *Var[Y]*

$$E[Y]=\int_{-\infty}^{\infty} yf_y(y)dy=\int_0^2 y\frac{3}{4}(2y-y^2)dy=\frac{3}{4}\left[\frac{2}{3}y^3-\frac{y^4}{4}\right]_0^2=1$$

$$Var[Y]=E\left[Y^2\right]-\left(E[Y]\right)^2=\frac{1}{5}$$

$$E\left[Y^2\right]=\int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y)dy=\int_0^2 y^2\frac{3}{4}(2y-y^2)dx=\frac{3}{4}\left[\frac{y^4}{2}-\frac{y^5}{5}\right]_0^2=\frac{6}{5}$$

Aufgabe D.4

a) Berechne den Erwartungswert von $6X - 4Y + 2$
b) Berechne die Kovarianz $C_{6X,4Y}$
c) Berechne die Varianz von $6X - 4Y + 2$
d) Berechne den Erwartungswert von $6X^2 - 4Y^2$

Nun können die Rechenregeln für die verschiedenen Operatoren verwendet werden, um die Aufgabe zu lösen.

Skript:
Gleichungen D.16-D.18

a) $$E\left[g_1(X) + g_2(X)\right] = E\left[g_1(X)\right] + E\left[g_2(X)\right]$$

$$E\left[a + bX\right] = a + bE\left[X\right]$$

$$E[6X - 4Y + 2] = 6E[X] - 4E[Y] + 2 = 6 \cdot 0 - 4 \cdot 1 + 2 = -2$$

Aufgabe D.4

a) Berechne den Erwartungswert von $6X-4Y+2$

b) Berechne die Kovarianz $C_{6X,4Y}$

c) Berechne die Varianz von $6X-4Y+2$

d) Berechne den Erwartungswert von $6X^2-4Y^2$

b) $$C_{6X,4Y} = 6\cdot 4\cdot C_{X,Y} = 24\sqrt{\frac{1}{45}}$$

$$\rho_{XY} = \frac{C_{X,Y}}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{C_{X,Y}}{\sqrt{Var[X]}\sqrt{Var[Y]}}$$

$$C_{X,Y} = \rho_{XY}\sqrt{Var[X]\cdot Var[Y]} = \sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{1}{45}}$$

Der Erwartungswert und die Varianz einer linearen Funktion

Zufallsvektor

$$X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T$$

Lineare Funktion des Zufallsvektors

$$Y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$$

Skript: Gleichungen D.24 und D.25

Erwartungswert und Varianz der linearen Funktion Y

$$E[Y] = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \, E[X_i]$$

$$Var[Y] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var[X_i] + 2\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} a_i a_j C_{X_i X_j} \right)$$

Aufgabe D.4

a) Berechne den Erwartungswert von $6X - 4Y + 2$
b) Berechne die Kovarianz $C_{6X,4Y}$
c) Berechne die Varianz von $6X - 4Y + 2$
d) Berechne den Erwartungswert von $6X^2 - 4Y^2$

c) $$Var[6X - 4Y + 2] = 6^2 Var[X] + (-4)^2 Var[Y] + 2 \cdot 6 \cdot (-4) \cdot C_{X,Y}$$

$$= \left[6^2 \frac{1}{3}\right] + \left[4^2 \frac{1}{5}\right] + \left[(-48)\sqrt{\frac{1}{45}}\right] \cong 8.0446$$

$$Y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$$

$$E[Y] = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i E[X_i]$$

$$Var[Y] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var[X_i] + 2\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} a_i a_j C_{X_i X_j}\right)$$

Aufgabe D.4

a) Berechne den Erwartungswert von $6X-4Y+2$
b) Berechne die Kovarianz $C_{6X,4Y}$
c) Berechne die Varianz von $6X-4Y+2$
d) Berechne den Erwartungswert von $6X^2-4Y^2$

d) $E[6X^2-4Y^2]=6E[X^2]-4E[Y^2]$

$$E\left[X^2\right]=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx \qquad E\left[Y^2\right]=\int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y)dy$$

⇨ Vgl. Teilaufgabe a)

$$E[6X^2-4Y^2]=6E[X^2]-4E[Y^2]=6\cdot\frac{1}{3}-4\cdot\frac{6}{5}=-\frac{14}{5}$$

Aufgabe D.5

Es wurden Windgeschwindigkeiten mit zwei unterschiedlich genauen Messgeräten erfasst.

Uns liegen die multivariaten Wahrscheinlichkeiten für die Anzahl der Tage pro Jahr vor, an denen die Überschreitung eines Grenzwertes mit den beiden Geräten gemessen wird: $P(N_G, N_U)$

N_G ist die Anzahl der Tage pro Jahr, an denen die mit dem **genau** messenden Gerät ermittelten Windgeschwindigkeiten den Grenzwert übersteigen.

N_U ist die Anzahl der Tage pro Jahr, an denen die mit dem **ungenau** messenden Gerät ermittelten Windgeschwindigkeiten den Grenzwert übersteigen.

Aufgabe D.5

Die Tabelle zeigt für beide Geräte die multivariate Wahrscheinlichkeit der Anzahl der Tage pro Jahr, an denen die gemessene Windgeschwindigkeit einen bestimmten Grenzwert überschreitet.

	$N_G = 0$	$N_G = 1$	$N_G = 2$	$N_G = 3$	$P(N_U)$
$N_U = 0$	0.2910	0.0600	0.0000	0.0000	0.3510
$N_U = 1$	0.0400	0.3580	0.0100	0.0000	0.4080
$N_U = 2$	0.0100	0.0250	0.1135	0.0300	0.1785
$N_U = 3$	0.0005	0.0015	0.0100	0.0505	0.0625
$P(N_G)$	0.3415	0.4445	0.1335	0.0805	$\sum = 1.00$

Aufgabe D.5

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Anzahl der Tage pro Jahr, an denen Überschreitungen des Grenzwertes von den beiden Geräten gemessen wurden, entspricht.

b) Es gilt die Annahme, dass das genau messende Gerät immer die exakte Windgeschwindigkeit misst.
Wie gross sind die Wahrscheinlichkeiten, dass die Windgeschwindigkeit den Grenzwert innerhalb eines Jahres 0, 1, 2 bzw. 3 mal überschreitet, wenn nach Angabe des ungenauer messenden Gerätes der Grenzwert 2 mal überschritten wird?

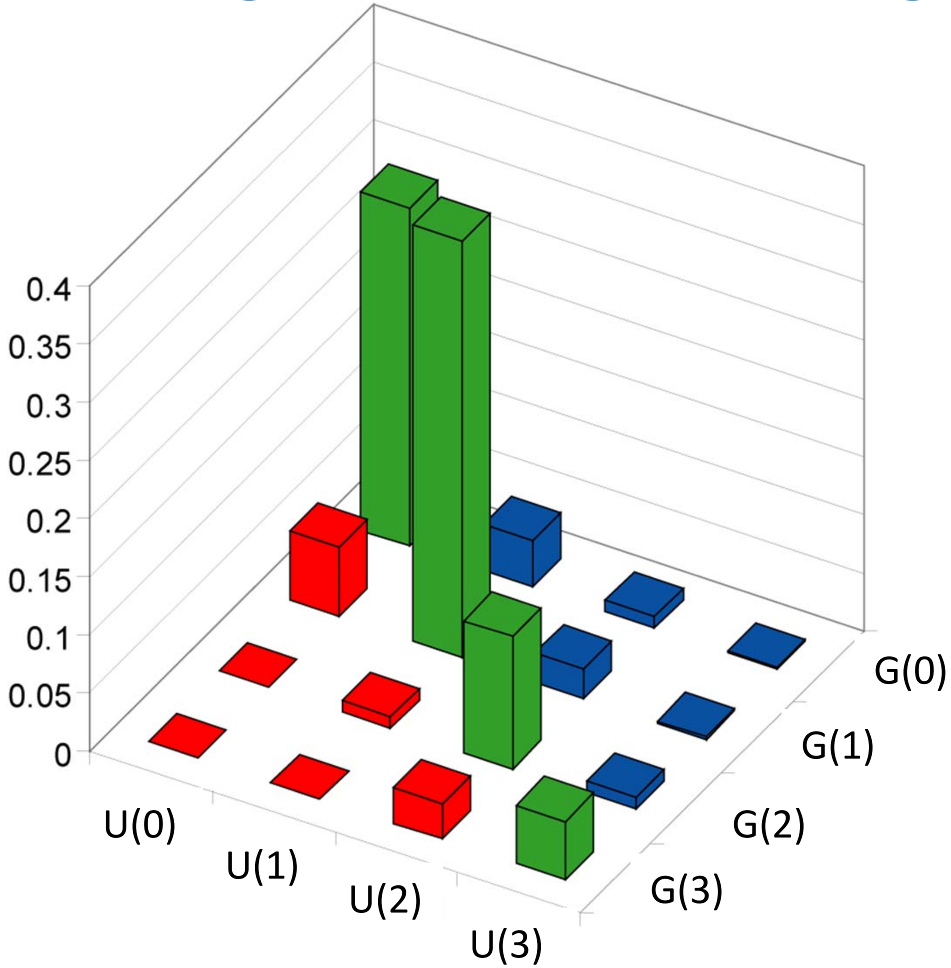
Aufgabe D.5 – Lösung

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Anzahl der Tage pro Jahr, an denen Überschreitungen des Grenzwertes von den beiden Geräten gemessen wurden, entspricht.

$$P[N_G = N_U] = 0.2910 + 0.3580 + 0.1135 + 0.0505 = 0.813$$

	$N_G = 0$	$N_G = 1$	$N_G = 2$	$N_G = 3$	$P(N_U)$
$N_U = 0$	0.2910	0.0600	0.0000	0.0000	0.3510
$N_U = 1$	0.0400	0.3580	0.0100	0.0000	0.4080
$N_U = 2$	0.0100	0.0250	0.1135	0.0300	0.1785
$N_U = 3$	0.0005	0.0015	0.0100	0.0505	0.0625
$P(N_G)$	0.3415	0.4445	0.1335	0.0805	$\sum = 1.00$

Aufgabe D.5 – Lösung



Diskrete multivariate Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

Wahrscheinlichkeit, dass $N_G = N_U$

$$P[N_G = N_U]$$
$$= 0.291 + 0.358 + 0.1135 + 0.0505$$
$$= 0.813$$

Wahrscheinlichkeit, dass $N_G < N_U$

$$P[N_G < N_U]$$
$$= 0.04 + 0.01 + 0.0005 + 0.0250$$
$$+ 0.0015 + 0.01 = 0.087$$

Wahrscheinlichkeit, dass $N_G > N_U$

$$P[N_G > N_U]$$
$$= 0.06 + 0 + 0.01 + 0 + 0 + 0.03 = 0.1$$

Aufgabe D.5 – Lösung

b) Es gilt nun die Annahme, dass das genaue Gerät immer die exakte Windgeschwindigkeit misst. Wie gross sind die Wahrscheinlichkeiten, dass die Windgeschwindigkeit den Grenzwert innerhalb eines Jahres 0, 1, 2 bzw. 3 mal überschreitet, wenn nach Angabe des ungenaueren Messgeräts der Grenzwert 2 mal überschritten wird?

bedingte Wahrscheinlichkeit…

	$N_G = 0$	$N_G = 1$	$N_G = 2$	$N_G = 3$	$P(N_U)$
$N_U = 0$	0.2910	0.0600	0.0000	0.0000	0.3510
$N_U = 1$	0.0400	0.3580	0.0100	0.0000	0.4080
$N_U = 2$	0.0100	0.0250	0.1135	0.0300	0.1785
$N_U = 3$	0.0005	0.0015	0.0100	0.0505	0.0625
$P(N_G)$	0.3415	0.4445	0.1335	0.0805	$\sum = 1.00$

Aufgabe D.5 – Lösung

	$N_G = 0$	$N_G = 1$	$N_G = 2$	$N_G = 3$	$P(N_U)$
$N_U = 0$	0.2910	0.0600	0.0000	0.0000	0.3510
$N_U = 1$	0.0400	0.3580	0.0100	0.0000	0.4080
$N_U = 2$	0.0100	0.0250	0.1135	0.0300	0.1785
$N_U = 3$	0.0005	0.0015	0.0100	0.0505	0.0625
$P(N_G)$	0.3415	0.4445	0.1335	0.0805	$\sum = 1.00$

$$P[N_G \mid N_U = 2] = \frac{P[N_G \cap (N_U = 2)]}{P[N_U = 2]}$$

$$P[N_G = 0 \mid N_U = 2] = \frac{P[(N_G = 0) \cap (N_U = 2)]}{P[N_U = 2]} = \frac{0.01}{0.1785} = 0.056$$

Aufgabe D.5 – Lösung

	$N_G = 0$	$N_G = 1$	$N_G = 2$	$N_G = 3$	$P(N_U)$
$N_U = 0$	0.2910	0.0600	0.0000	0.0000	0.3510
$N_U = 1$	0.0400	0.3580	0.0100	0.0000	0.4080
$N_U = 2$	0.0100	0.0250	0.1135	0.0300	0.1785
$N_U = 3$	0.0005	0.0015	0.0100	0.0505	0.0625
$P(N_G)$	0.3415	0.4445	0.1335	0.0805	$\sum = 1.00$

$$P[N_G = 1 \mid N_U = 2] = \frac{P[(N_G = 1) \cap (N_U = 2)]}{P[N_U = 2]} = \frac{0.025}{0.1785} = 0.1401$$

$$P[N_G = 2 \mid N_U = 2] = \frac{P[(N_G = 2) \cap (N_U = 2)]}{P[N_U = 2]} = \frac{0.1135}{0.1785} = 0.6359$$

$$P[N_G = 3 \mid N_U = 2] = \frac{P[(N_G = 3) \cap (N_U = 2)]}{P[N_U = 2]} = \frac{0.03}{0.1785} = 0.1681$$

Summe von Zufallsvariablen

Diskrete Zufallsvariablen

Man betrachte zwei Würfel. Das Ergebnis für jeden einzelnen Würfel wird anhand der diskreten Zufallsvariablen X und Y beschrieben.

Wir suchen die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der gewürfelten Zahlen 10 entspricht.

Die Summe selbst ist wiederum eine Zufallsvariable und kann so dargestellt werden: $Z=X+Y$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe 10 entspricht, ist???

X/Y	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	**10**
5	6	7	8	9	**10**	11
6	7	8	9	**10**	11	12

Summe von Zufallsvariablen

Diskrete Zufallsvariablen

Die Summe der Augenzahlen in einem Wurf mit zwei Würfeln kann als Zufallsvariable dargestellt werden: $Z=X+Y$

Skript:
Gleichungen D.31-D.36

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe 10 entspricht, ist:

$$P[Z=10]=\sum_{i=4}^{6} P(X=i)P(Y=10-i)$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$$

$$=3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2$$

X/Y	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	**10**
5	6	7	8	9	**10**	11
6	7	8	9	**10**	11	12

Summe von Zufallsvariablen

Diskrete Zufallsvariablen

Die Summe der Augenzahlen in einem Wurf mit zwei Würfeln kann als Zufallsvariable dargestellt werden: $Z=X+Y$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe 10 entspricht, ist:

$$P[Z=10]=\sum_{i=4}^{6} P(X=i)P(Y=10-i)$$

Für unabhängige stetige Zufallsvariablen X und Y gilt:

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx$$

X/Y	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	**10**
5	6	7	8	9	**10**	11
6	7	8	9	**10**	11	12

Animation für Faltungsintegral

http://www.jhu.edu/~signals/convolve/index.html

http://de.wikipedia.org/wiki/Faltung_%28Mathematik%29

Aufgabe D.6

Autobahnbrücken müssen während ihrer Lebensdauer gewartet werden. Die Zeitdauer T zwischen den Wartungseinheiten folgt einer Exponentialverteilung mit einem Mittelwert von 10 Jahren. Die Wartungsarbeiten nehmen einen Zeitraum S in Anspruch, der ebenfalls exponentialverteilt ist und einen Mittelwert von 1/12 Jahren aufweist.

a) Unter der Annahme, dass T und S unabhängig voneinander sind, soll die Verteilung der Zeit Z zwischen aufeinanderfolgenden Wartungsarbeiten berechnet werden, also $Z=S+T$.

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit $P(Z \leq 5)$?

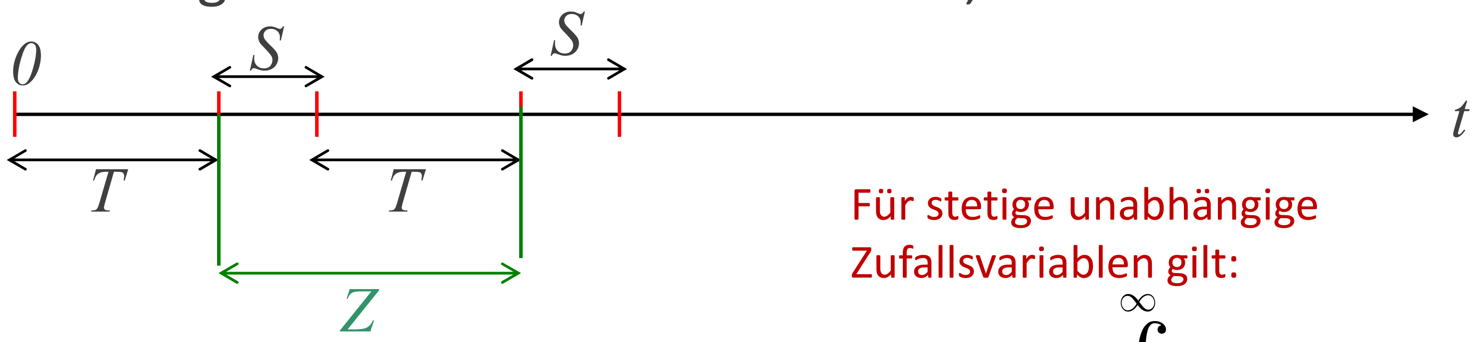
c) Wir betrachten nun zwei Autobahnbrücken, deren Zeitraum bis zur nächsten Wartung T_1 und T_2 beträgt (unabhängig voneinander und gleiche Verteilung wie T).
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in den nächsten 5 Jahren für beide Brücken KEINE Wartungsarbeiten anfallen?

Aufgabe D.6

Was ist gegeben???

Die Zeit, in der keine Wartung notwendig ist, T, ist exponentialverteilt mit $\mu_T = 10$ *Jahre*.
Der Zeitraum der Wartungsarbeiten, S, ist ebenfalls exponentialverteilt, jedoch mit $\mu_S = 1/12$ *Jahre*.

a) Unter der Annahme, dass T und S unabhängig voneinander sind, soll die Verteilung der Zeit Z zwischen aufeinanderfolgenden Wartungsarbeiten berechnet werden, also $Z = S + T$.



Für stetige unabhängige Zufallsvariablen gilt:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx$$

Aufgabe D.6

a) Z ist definiert innerhalb des Intervalls $[0;+\infty]$.

$$f_T(t) = \frac{1}{\mu_T} \cdot e^{\frac{-t}{\mu_T}} \quad ,(t \geq 0)$$

$$f_S(s) = \frac{1}{\mu_S} \cdot e^{\frac{-s}{\mu_S}} = \frac{1}{\mu_S} \cdot e^{\frac{-(z-t)}{\mu_S}} \quad ,(s \geq 0)$$

vgl. Tabelle D.1 im Skript $(\varepsilon = 0)$

Aufgabe D.6

Berechnung des Faltungsintegrals

$$f_Z(z) = \int_0^z f_T(t) f_S(z-t)dt$$

$$s,t \geq 0$$

$$\rightarrow untereGrenze = 0$$

$$z \geq t, sonst : s < 0$$

$$\rightarrow obereGrenze = z$$

$$\boxed{\begin{aligned} f_T(t) &= \frac{1}{\mu_T} \cdot e^{\frac{-t}{\mu_T}} \; ; \\ f_S(s) &= \frac{1}{\mu_S} \cdot e^{\frac{-(z-t)}{\mu_S}} \end{aligned}}$$

$$\boxed{a^x a^y = a^{x+y}}$$

Aufgabe D.6

Berechnung des Faltungsintegrals

$$f_Z(z) = \int_0^z f_T(t) f_S(z-t)\,dt$$

$$= \int_0^z \left(\frac{1}{\mu_T} e^{\frac{-t}{\mu_T}}\right)\left(\frac{1}{\mu_S} e^{\frac{-(z-t)}{\mu_S}}\right) dt$$

$$= \int_0^z \frac{1}{\mu_T \mu_S} e^{\left(-\left(\frac{1}{\mu_T} - \frac{1}{\mu_S}\right) t - \frac{z}{\mu_S}\right)} dt$$

$$= \int_0^z \frac{1}{\mu_T \mu_S} e^{\left(\left(\frac{-\mu_S + \mu_T}{\mu_T \mu_S}\right) t - \frac{z}{\mu_S}\right)} dt$$

$$\boxed{f_T(t) = \frac{1}{\mu_T} \cdot e^{\frac{-t}{\mu_T}} \; ; \qquad f_S(s) = \frac{1}{\mu_S} \cdot e^{\frac{-(z-t)}{\mu_S}}}$$

$$\boxed{a^x a^y = a^{x+y}}$$

Aufgabe D.6

$$f_Z(z) = \int_0^z \frac{1}{\mu_T \mu_S} e^{\left(\left(\frac{-\mu_S+\mu_T}{\mu_T \mu_S}\right) t - \frac{z}{\mu_S}\right)} dt$$

$$= \left[\frac{1}{\cancel{\mu_T \mu_S}} \cdot \boxed{\frac{\cancel{\mu_T \mu_S}}{-\mu_S + \mu_T}} e^{\left((\frac{-\mu_S+\mu_T}{\mu_T \mu_S}) t - \frac{z}{\mu_S} \right)} \right]_0^z$$

$$\boxed{\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}}$$

$$= \frac{1}{-\mu_S + \mu_T} e^{\left(\frac{-\mu_S+\mu_T}{\mu_T \mu_S} z - \frac{z}{\mu_S}\right)} - \frac{1}{-\mu_S + \mu_T} e^{\left(-\frac{z}{\mu_S}\right)}$$

$$= \frac{1}{\mu_T - \mu_S} \left(e^{\left(\frac{-z\mu_S}{\mu_T \mu_S} + \frac{z\mu_T}{\mu_T \mu_S} - \frac{z}{\mu_S}\right)} - e^{\left(-\frac{z}{\mu_S}\right)} \right) = \frac{1}{\mu_T - \mu_S} \left(e^{-\frac{z}{\mu_T}} - e^{-\frac{z}{\mu_S}} \right)$$

Aufgabe D.6

$$f_Z(z) = \frac{1}{\mu_T - \mu_S}\left(e^{-\frac{z}{\mu_T}} - e^{-\frac{z}{\mu_S}}\right)$$

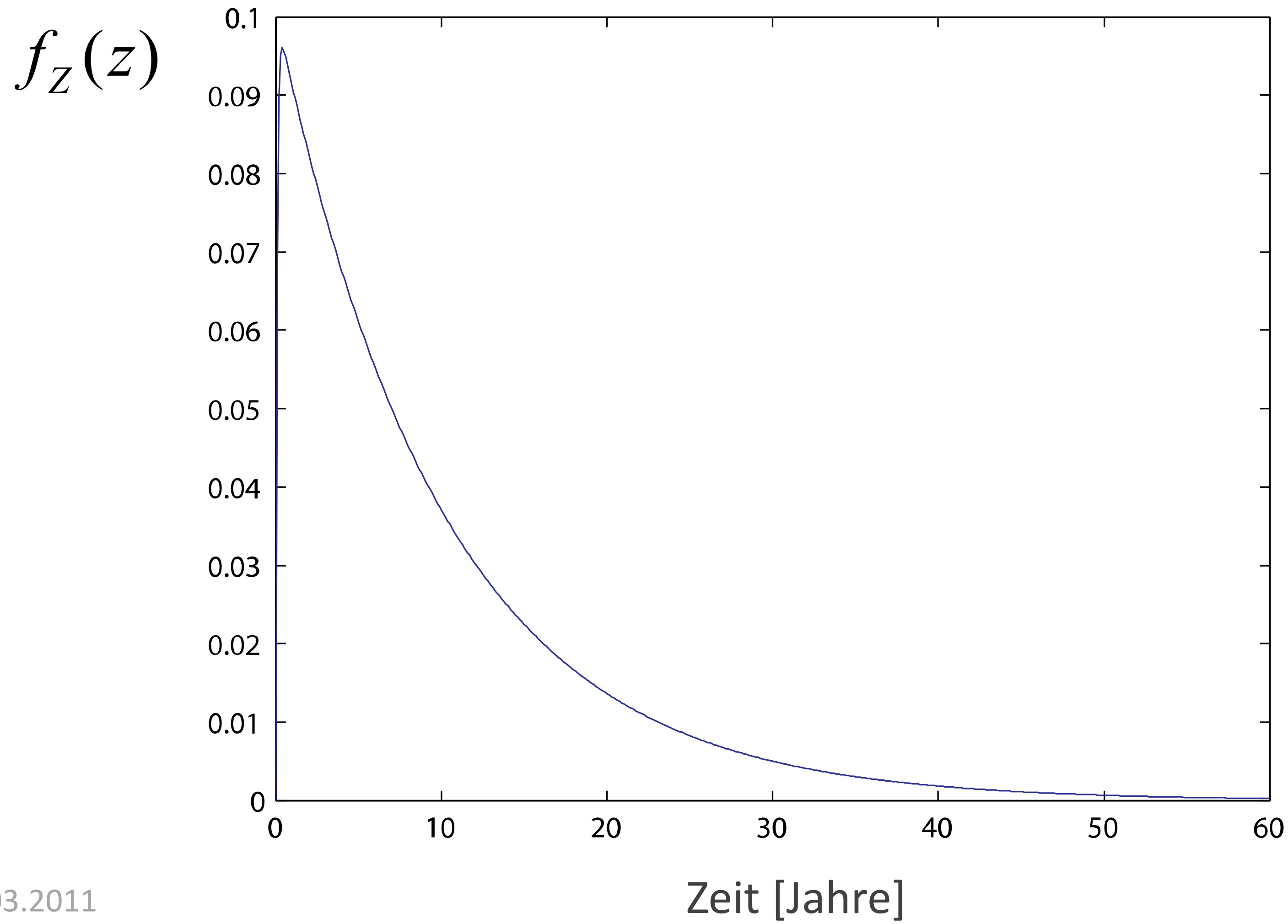
$$= \frac{1}{10 - \frac{1}{12}}\left(e^{-\frac{z}{10}} - e^{-12z}\right)$$

$$\boxed{\mu_T = 10,\ \mu_S = \frac{1}{12}}$$

$$= \underline{\underline{0.1008\left(e^{-\frac{z}{10}} - e^{-12z}\right)}}$$

Aufgabe D.6

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für $Z = S + T$:



Aufgabe D.6

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit $P(Z \leq 5)$?

Hierfür wird die kumulative Verteilungsfunktion $F_Z(z)$ benötigt:

$$F_Z(z) = \int_0^z f_Z(z)dz$$

Aufgabe D.6

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit $P(Z \leq 5)$?

$$f_Z(z) = 0.1008\left(e^{-\frac{z}{10}} - e^{-12z}\right)$$

$$F_Z(z) = \int_0^z 0.1008\left(e^{-\frac{y}{10}} - e^{-12y}\right)dy$$

$$= 0.1008\left[-10e^{-\frac{y}{10}} + \frac{1}{12}e^{-12y}\right]_0^z$$

$$\int e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}$$

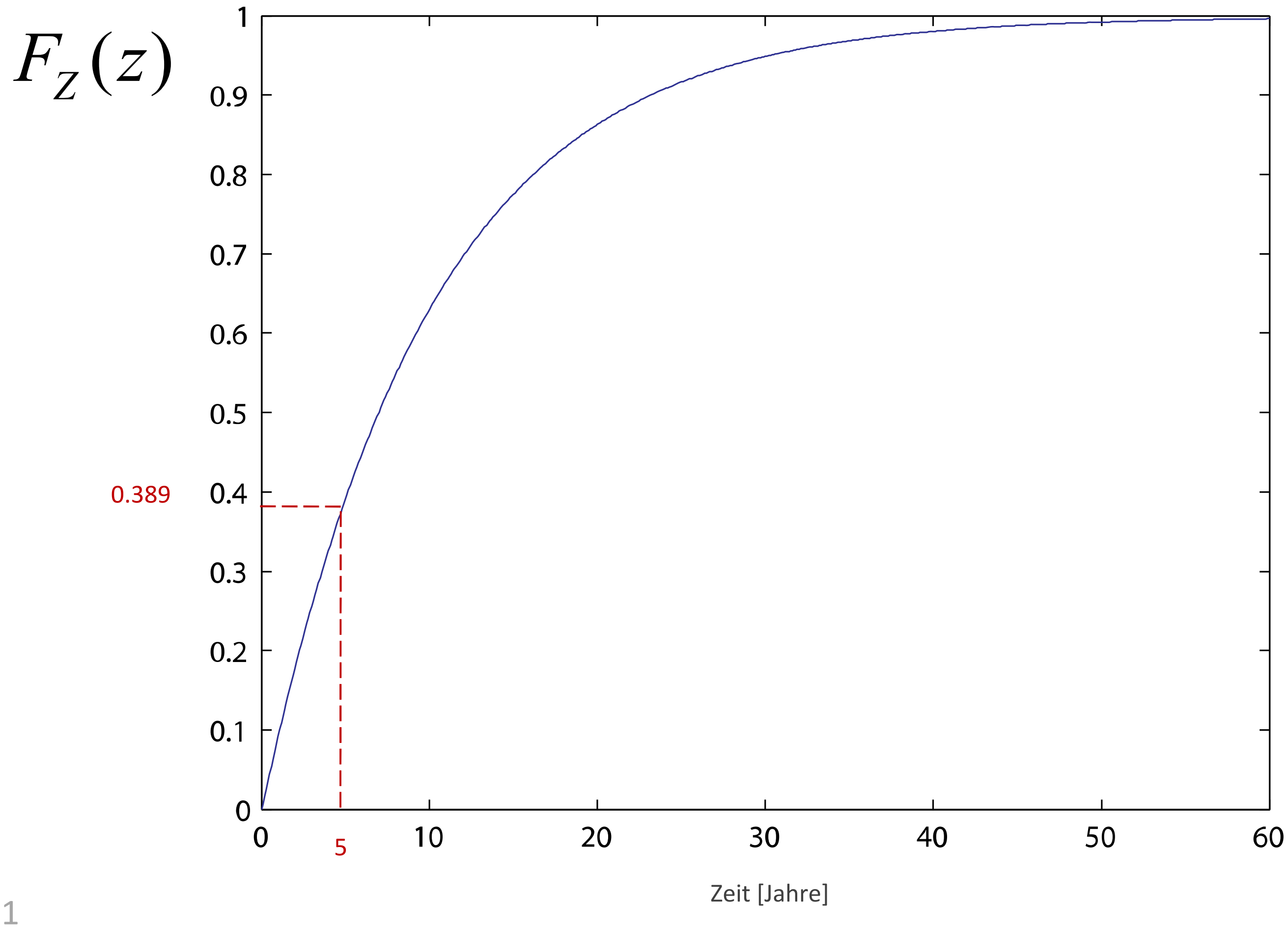
$$= 0.1008\left[-10e^{-\frac{z}{10}} + \frac{1}{12}e^{-12z} - (-10 + \frac{1}{12})\right]$$

$$= 0.1008\left(9.9167 - 10e^{-\frac{z}{10}} + \frac{1}{12}e^{-12z}\right)$$

$$\Rightarrow \quad F_Z(5) = 0.1008\left(9.9167 - 10e^{-\frac{5}{10}} + \frac{1}{12}e^{-12\cdot 5}\right) = 0.389$$

Aufgabe D.6

kumulative Verteilungsfunktion



Aufgabe D.6

c) Wir betrachten nun zwei Autobahnbrücken, deren Zeitraum bis zur nächsten Wartung T_1 und T_2 beträgt (unabhängig voneinander und gleiche Verteilung wie T).
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in den nächsten 5 Jahren für beide Brücken KEINE Wartungsarbeiten anfallen?

„Keine Wartungsarbeiten in den nächsten 5 Jahren“ $\{T_1 > 5\} \cap \{T_2 > 5\}$

$$P[T_1 > 5, T_2 > 5] = P[T_1 > 5]P[T_2 > 5] = \left(P[T > 5]\right)^2 = \left(1 - P[T \leq 5]\right)^2$$

$$F_T(t) = 1 - e^{-\frac{1}{\mu_T}t} = 1 - e^{-0.1t}$$ vergleiche Skript, Tabelle D.1

$$P[T_1 > 5, T_2 > 5] = \left(1 - P[T \leq 5]\right)^2 = (1 - (1 - e^{-0.1 \cdot 5}))^2 = 0.368$$