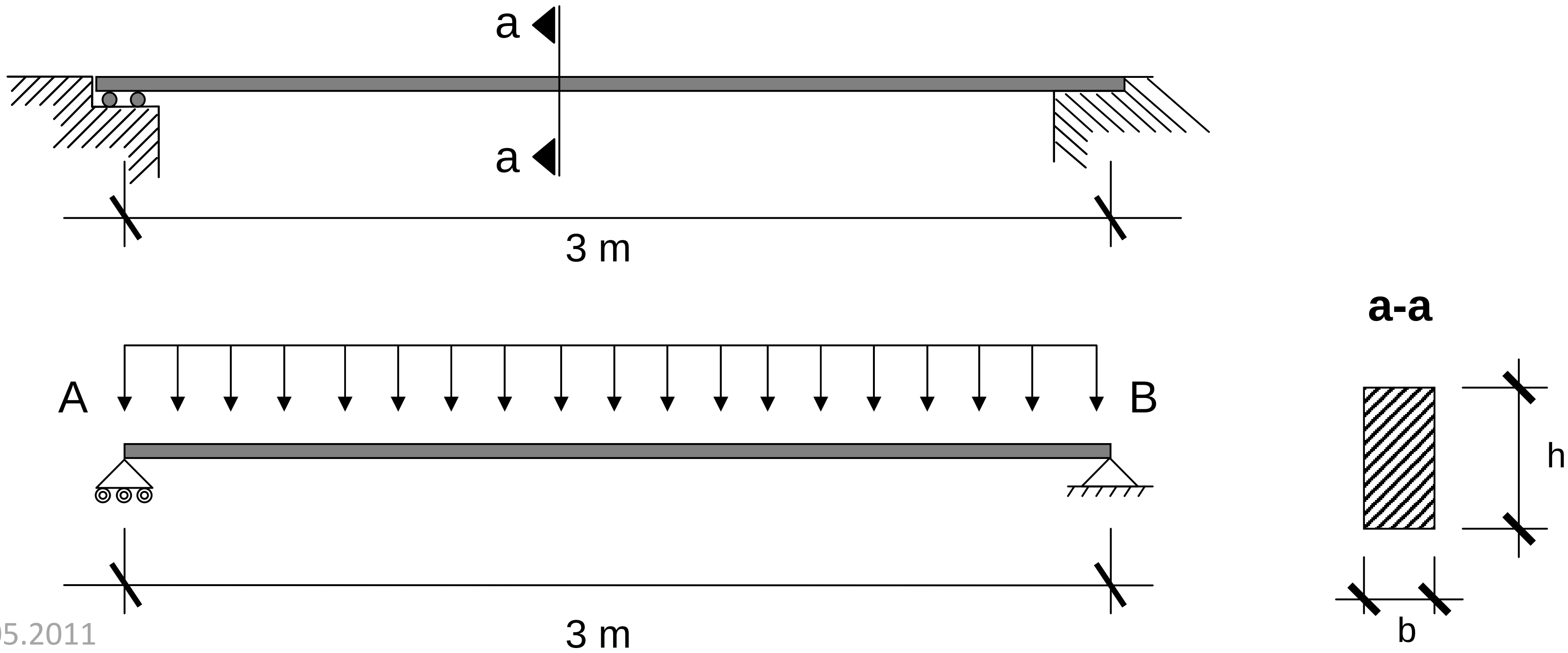
Aufgabe F.4 Hausübung

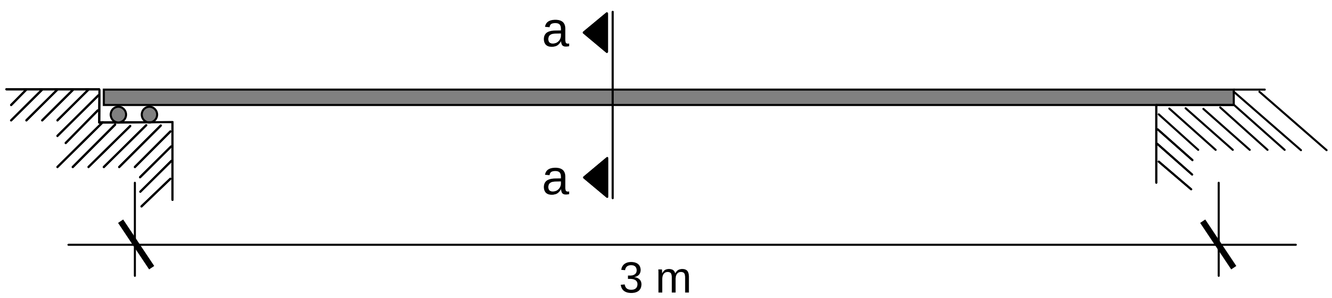
Ein Träger verfügt über einen rechteckigen Querschnitt , eine Breite $b = 50mm$ und eine Länge $l = 3m$.

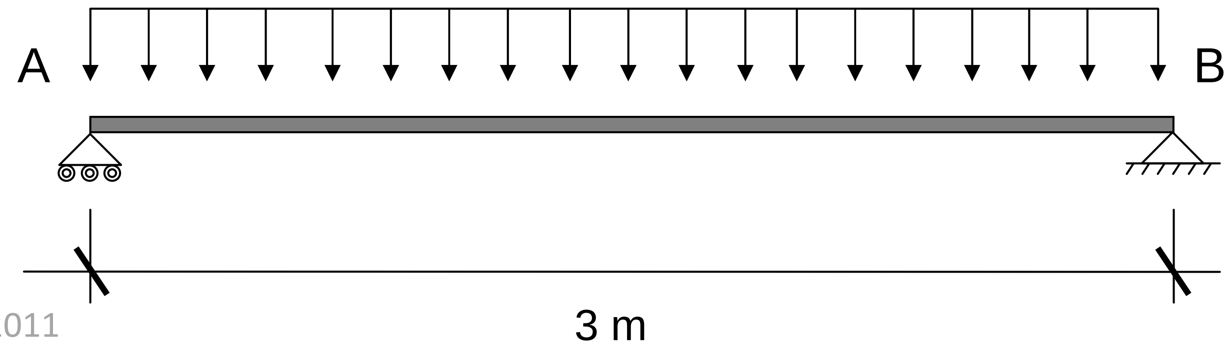
Die Trägerhöhe h ist über die Trägerlänge uniform und wird mit einer Normalverteilung mit einem Mittelwert $\mu_h = 100mm$ und einer Standardabweichung $\sigma_h = 5mm$ repräsentiert.

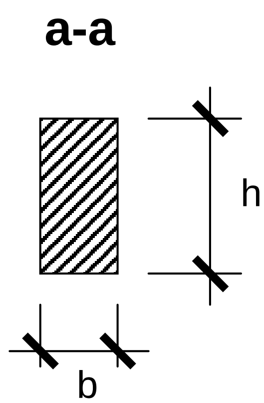


Aufgabe F.4 Hausübung

Der Träger wird mit einer Gleichstreckenlast q belastet, welche mit einen Normalverteilung mit dem Mittelwert $\mu_q = 5kN/m^2$ und Standardabweichung $\sigma_q = 1kN/m^2$ repräsentiert wird.

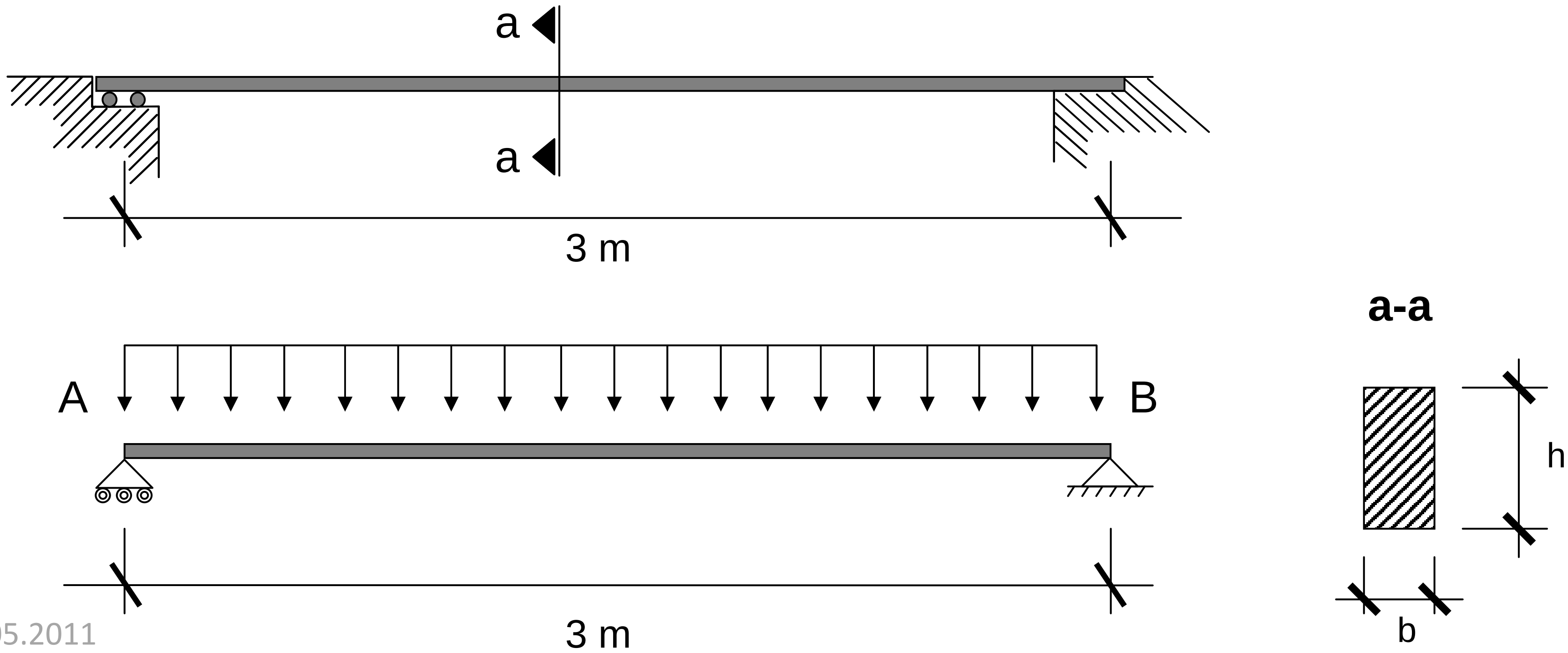






Aufgabe F.4 Hausübung

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Auslenkung w des Trägers in dessen Mitte bei Belastung einen Wert von 8 mm überschreitet?
Es wird angenommen, dass das Eigengewicht des Trägers vernachlässig werden kann.



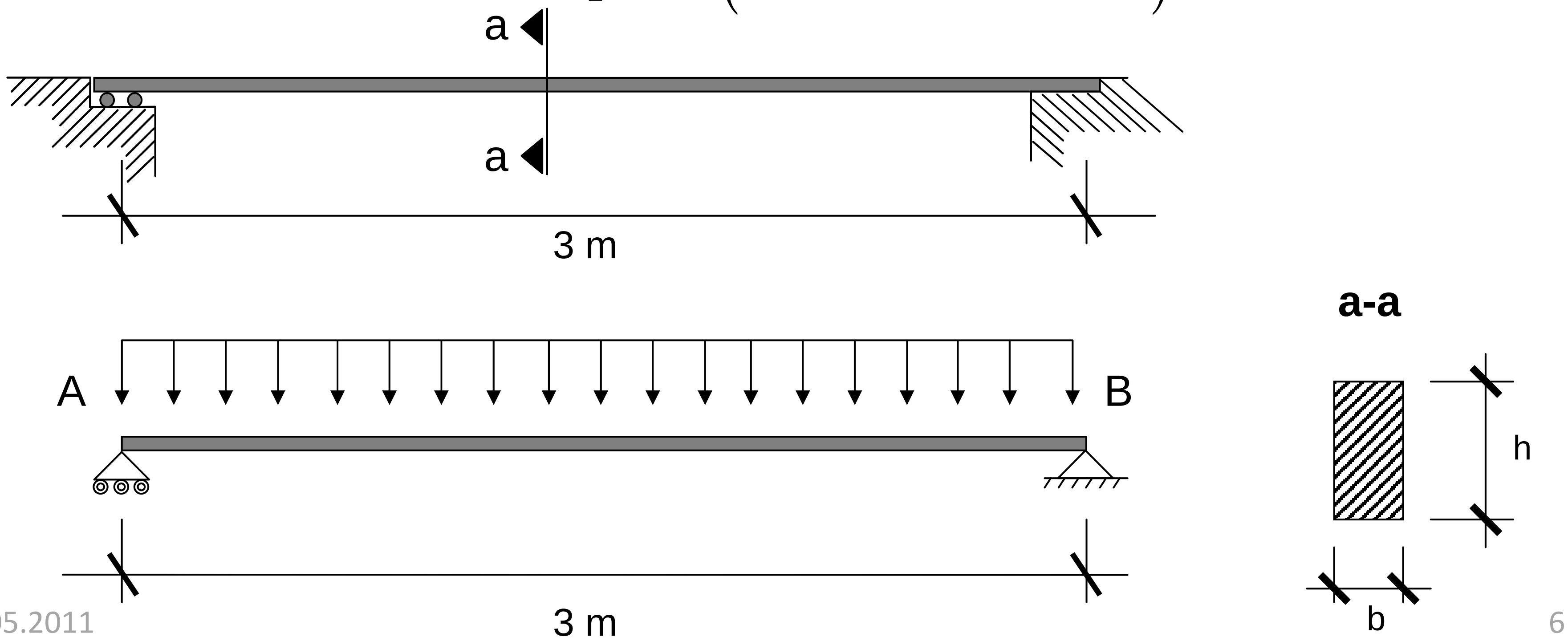
Aufgabe F.4 Hausübung

Masse des Balken:

Länge	$l = 3m$
Breite	$b = 50mm$
Trägerdicke	$h \sim N(100mm, 5mm)$

Belastung:

Gleichstreckenlast	$q \sim N\left(5kN/m^2, 1kN/m^2\right)$

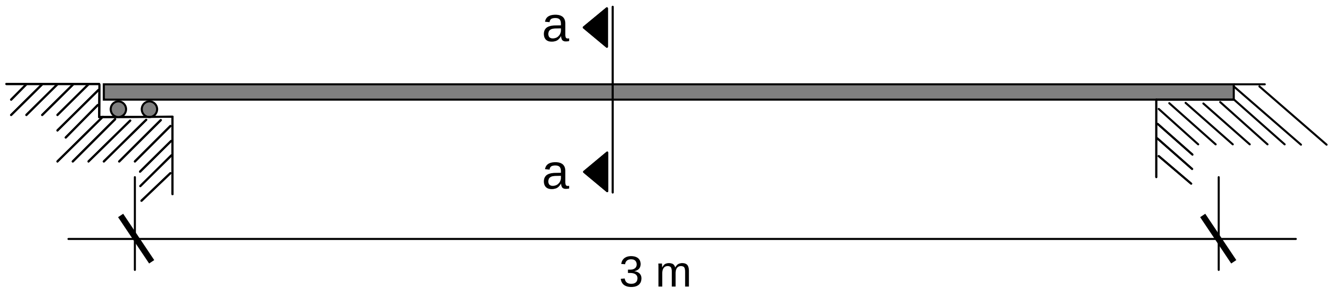


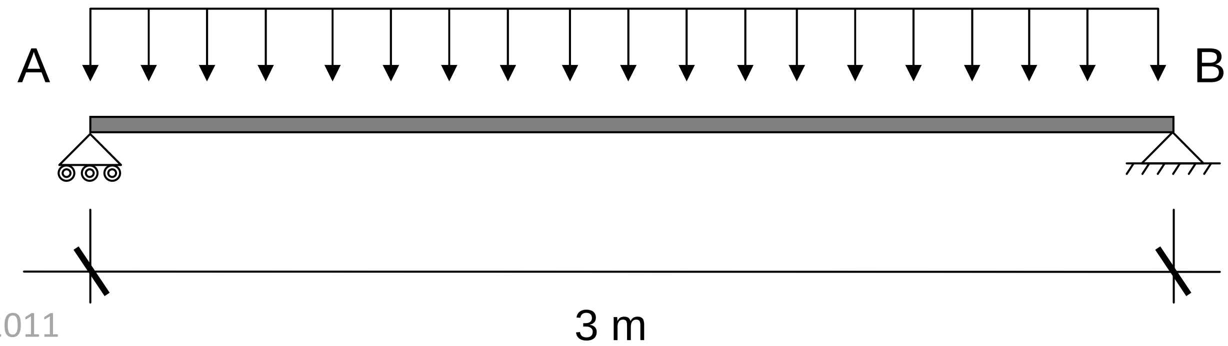
Aufgabe F.4 Hausübung

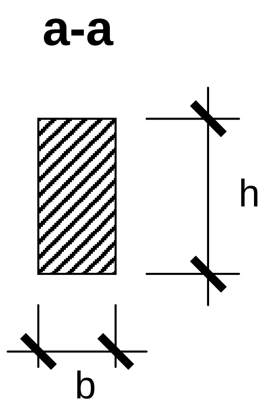
Auslenkung: $$w = \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot I}$$

wobei das Flächenträgheitsmoment $I = \dfrac{b \cdot h^3}{12}$

und der Elastizitätsmodul $E = 205 kN / mm^2$ ist.







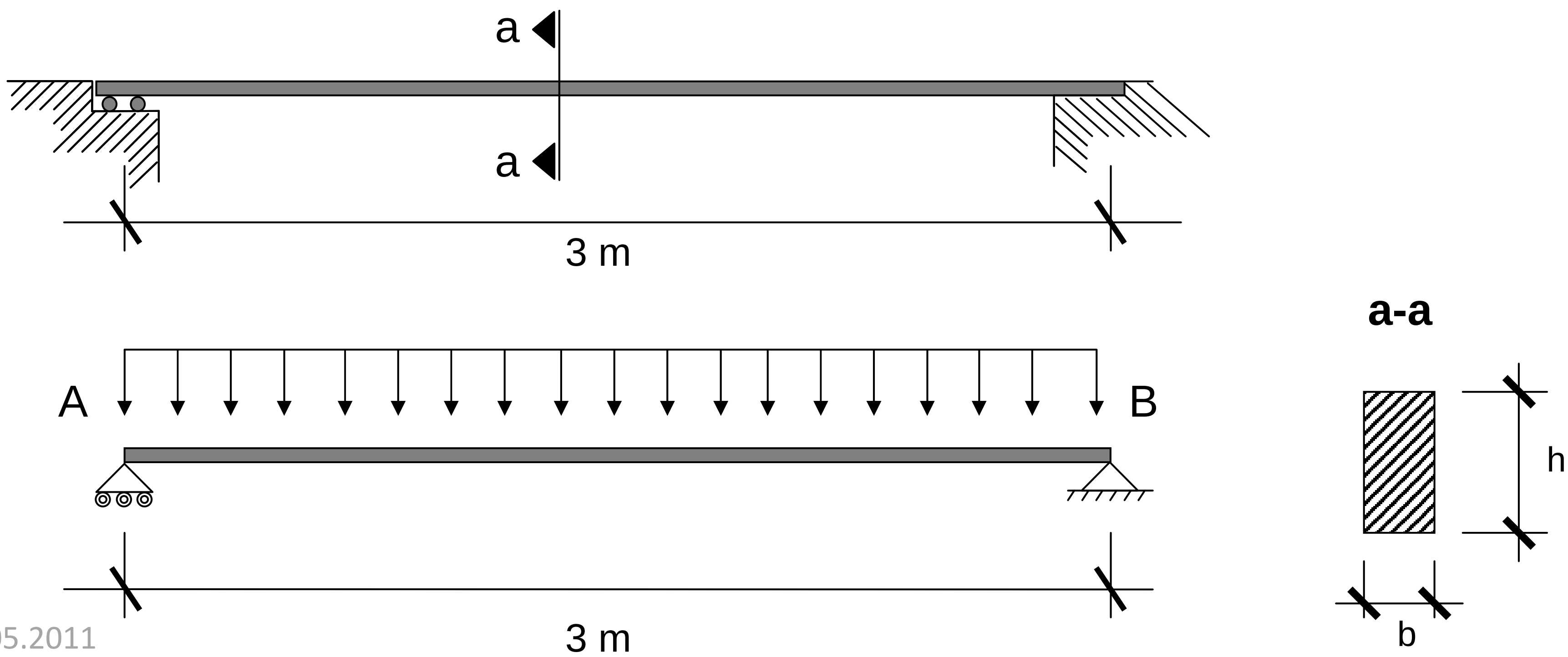
Aufgabe F.4 Hausübung

$$w = \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot I}$$

Grenzzustandsfunktion:

$$g(q,h) = 8mm - w$$

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12}$$



Aufgabe F.4 Hausübung

$$w = \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot I}$$

Grenzzustandsfunktion:

$$g(q,h) = 8mm - w$$

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Einsetzen:

$$g(q,h) = 8 - w = 8 - \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot I} = 8 - 1.235 \cdot 10^6 \frac{q}{h^3}$$

Umformen:

$$g(q,h) = 8 \cdot h^3 - 1.235 \cdot 10^6 \cdot q$$

Aufgabe F.4 Hausübung

Grenzzustandsfunktion:

$$g(q,h) = 8 \cdot h^3 - 1.235 \cdot 10^6 \cdot q$$

Standardisieren:

$$U_H = \frac{H - \mu_H}{\sigma_H} \qquad U_Q = \frac{Q - \mu_Q}{\sigma_Q}$$

$$\begin{aligned} g'(u_Q, u_H) &= 8 \cdot (\mu_H + u_H \cdot \sigma_H)^3 - 1.235 \cdot 10^6 \cdot (\mu_Q + u_Q \cdot \sigma_Q) \\ &= 8 \cdot (100 + u_H \cdot 5)^3 - 1.235 \cdot 10^6 \cdot (5 + u_Q \cdot 1) \end{aligned}$$

Standardisierte Grenzzustandsfunktion:

$$g'(u_Q, u_H) = u_H^3 + 60 \cdot u_H^2 + 1200 \cdot u_H - 1235 \cdot u_Q + 1825$$

Aufgabe F.4 Hausübung

Standardisierte Grenzzustandsfunktion:

$$g'(u_Q, u_H) = u_H^3 + 60 \cdot u_H^2 + 1200 \cdot u_H - 1235 \cdot u_Q + 1825$$

Koordinaten des Punktes mit dem geringsten Abstand zum Ursprung:

$$u_Q = \alpha_Q \beta \qquad\qquad u_H = \alpha_H \beta$$

Eingesetzt:

$$g'(u_Q, u_H) = (\alpha_H \cdot \beta)^3 + 60 \cdot (\alpha_H \cdot \beta)^2 + 1200 \cdot \alpha_H \cdot \beta - 1235 \cdot \alpha_Q \cdot \beta + 1825$$

Aufgabe F.4 Hausübung

Schätzung des Zuverlässigkeitsindex:

$$\beta = \min_{z \in (g(z)=0)} \sqrt{\sum_{i}^{n} u_i^2}$$

Minimaler Abstand zum Koordinatenursprung

Nächster Iterationsschritt

aus
$$\begin{aligned} g'(u_Q, u_H) &= (\alpha_H \cdot \beta)^3 + 60 \cdot (\alpha_H \cdot \beta)^2 + 1200 \cdot \alpha_H \cdot \beta - 1235 \cdot \alpha_Q \cdot \beta + 1825 \\ &= \beta\left[\alpha_H (\alpha_H \cdot \beta)^2 + 60 \cdot \alpha_H^2 \cdot \beta + 1200 \cdot \alpha_H - 1235 \cdot \alpha_Q\right] + 1825 \\ &= 0 \end{aligned}$$

folgt
$$\beta_i = \frac{-1825}{\alpha_H^3 \cdot \beta_{i-1}{}^2 + 60 \cdot \alpha_H^2 \cdot \beta_{i-1} + 1200 \cdot \alpha_H - 1235 \cdot \alpha_Q}$$

Aufgabe F.4 Hausübung

Nächster Iterationsschritt

$$\alpha_i = \frac{-\dfrac{\partial g}{\partial u_i}}{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial g}{\partial u_i}\right)^2\right]^{1/2}}$$

$$\alpha_H = -\frac{1}{k}\overbrace{(3\cdot u_H^2 + 120\cdot u_H + 1200)}^{\frac{\partial g'(u_Q,u_H)}{\partial u_H}}$$

$$\alpha_Q = -\frac{1}{k}(-1235)$$

Normalisieren von α mit: $k = \sqrt{(-1235)^2 + (3\cdot u_H^2 + 120\cdot u_H + 1200)^2}$

Einsetzen für u_H : $u_H = \alpha_{H,i-1}\cdot\beta_i$

Aufgabe F.4 Hausübung

Iteration:

	Start	1	2	3	4	5
β	3	1.116227	1.079164	1.078541	1.078531	1.078531
α_H	-0.7071	-0.667516	-0.670164	-0.670070	-0.670074	-0.670074
α_Q	0.7071	0.744595	0.742213	0.742298	0.742294	0.742294

Versagenswahrscheinlichkeit:

$$P_F = \Phi(-\beta) = \Phi(-1.078531) = 0.14 \approx 14\%$$