Aufgabe E.12 Hausübung

Anhand eines Teiles des in der ersten Vorlesung erhobenen Datensatzes, welcher die Körpergrösse aller Frauen beinhaltet, soll folgendes durchgeführt werden:

a) Passe die Normalverteilung den Beobachtungen an. Bestimme dazu die Parameter μ und σ mit der Maximum Likelihood Methode.

b) Teste die Güte der Anpassung für die Normalverteilung mit dem χ^2 Test auf einem Signifikanzniveau von 10%.

Aufgabe E.12 Hausübung

b) Passe die Normalverteilung den Beobachtungen an. Bestimme dazu die Parameter μ und σ mit der Maximum Likelihood Methode.

Nr.	**Grösse [cm]**	**Nr.**	**Grösse [cm]**	**Nr.**	**Grösse [cm]**	**Nr.**	**Grösse [cm]**
1	158	11	164	21	170	31	175
2	158	12	165	22	170	32	175
3	158	13	165	23	172	33	176
4	160	14	165	24	172	34	176
5	160	15	166	25	172	35	176
6	162	16	166	26	173	36	177
7	162	17	168	27	174	37	178
8	164	18	168	28	174	38	183
9	164	19	169	29	175		
10	164	20	170	30	175		

$$\bar{x} = 168.92 cm$$

$$s_X = 6.4048 cm$$

Aufgabe E.12 Hausübung

a) Passe die Normalverteilung den Beobachtungen an. Bestimme dazu die Parameter μ und σ mit der Maximum Likelihood Methode.

Normalverteilung:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

Likelihood:

$$L(\boldsymbol{\theta}|\hat{\mathbf{x}}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{x}_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \qquad \boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma)$$

Zu bestimmende Parameter:

$$\theta_1 = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i = 168.921$$

$$\theta_2 = s_X = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{x}_i - \theta_1\right)^2} = 6.4048$$

Aufgabe E.12 Hausübung

$$\overline{x} = 168.921cm$$

$$s_X = 6.4048cm$$

b) Teste die Güte der Anpassung für die Normalverteilung mit dem χ^2 Test auf einem Signifikanzniveau von 10%.

Intervall	Häufigkeit	Wahrscheinlichkeit P [Stichprobe in diesem Intervall]	Erwartete Häufigkeit	Normalisierte Quadrate der Differenzen
[0-160]	5	0.0819	3.1121	1.1453
]160-165]	9	0.1884	7.1580	0.4740
]165-170]	8	0.2966	11.2709	0.9492
]170-175]	10	0.2618	9.9475	0.0003
]175- ∞ [	6	0.1714	6.5115	0.0402
Summe	38	1	38	2.6090

Aufgabe E.12 Hausübung

$\overline{x} = 168.921cm$

$s_X = 6.4048cm$

ε^2 folgt der Chi-Quadrat Verteilung mit 2 Freiheitsgraden (FHG).

Wir haben 5 Intervalle.
Das letzte Intervall ist abhängig von den 4 anderen – Reduktion um 1 FHG.
Bestimmung der Parameter μ und σ aus den beobachteten Daten – Reduktion um 2 FHG.

5 – 1 – 2 = 2 FHG und α=0.1 ➔ χ = 4.6052

f	$\chi^2_{F=0.01}$	$\chi^2_{F=0.05}$	$\chi^2_{F=0.10}$	$\chi^2_{F=0.25}$	$\chi^2_{F=0.50}$	$\chi^2_{F=0.75}$	$\chi^2_{F=0.90}$ α=10%
1	0.0002	0.0039	0.0158	0.1015	0.4549	1.3233	2.7055
2	0.0201	0.1026	0.2107	0.5754	1.3863	2.7726	4.6052
3	0.1148	0.3518	0.5844	1.2125	2.3660	4.1083	6.2514

Aufgabe E.12 Hausübung

$$\overline{x} = 168.921cm$$

$$s_X = 6.4048cm$$

Mit dem aus der Tabelle ermittelten Wert für $\chi = 4.6052$ folgt:

Da $\varepsilon^2 = 2.6090$ kleiner als $\chi = 4.6052$ ist, können wir die Hypothese, dass die Daten dieser Normalverteilung folgen, auf einem Signifikanzniveau von 10% annehmen.

Zu Beachten:

Der χ^2 Test hängt stark von der Wahl der Anzahl und der Grössen der Klassen ab.

Jede Klasse sollte mindestens 5 Beobachtungen enthalten, um ein plausibles Resultat zu erlangen.