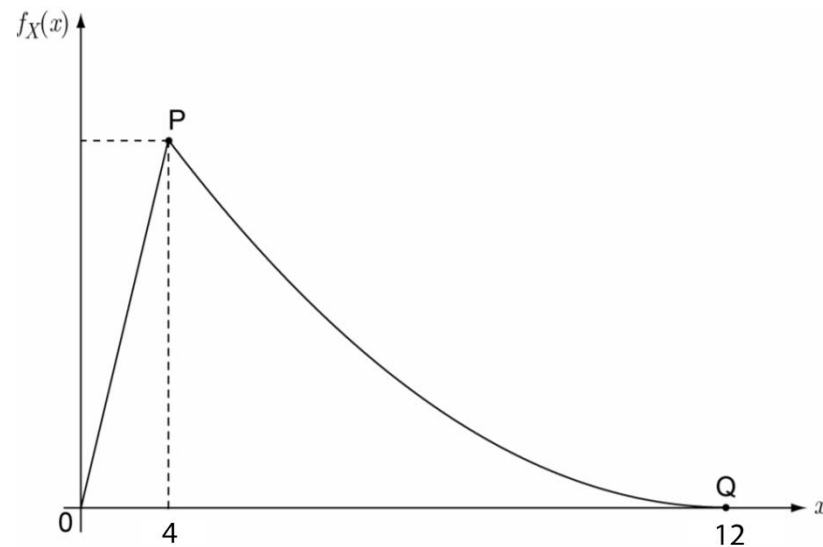


Hausübung D.3

In der Grafik ist die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer Zufallsvariable dargestellt. Innerhalb des Intervalls $[0;4]$ ist die Funktion linear und zwischen $[4;12]$ nähert sich die Funktion parabelförmig an die x -Achse an und tangiert sie in Punkt Q .

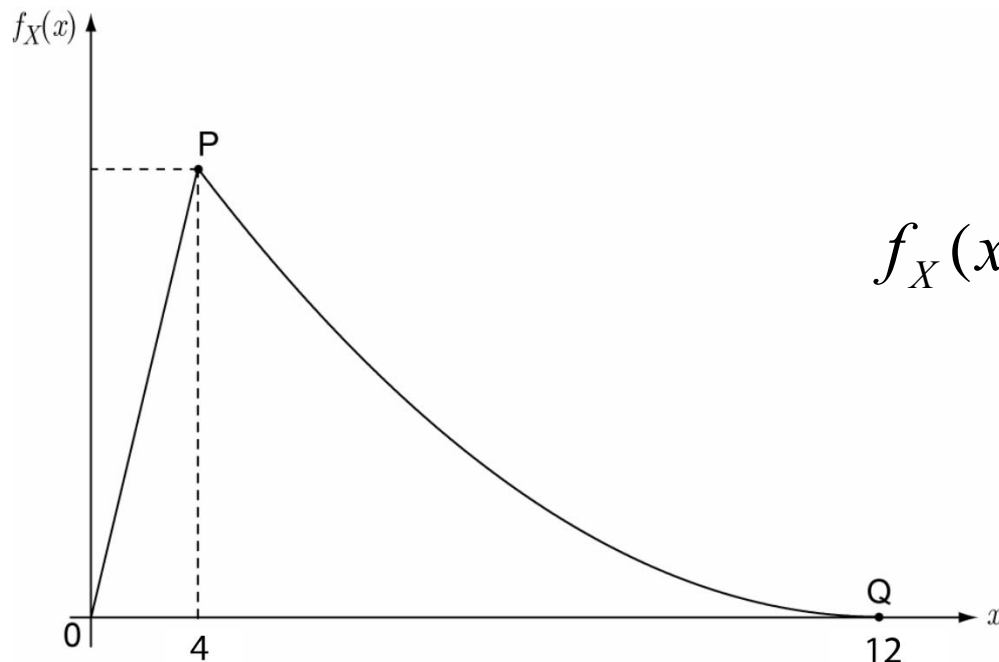


- Berechne die Koordinaten von $P(x,y)$ und beschreibe dann die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion.
- Beschreibe und zeichne die kumulative Verteilungsfunktion von X anhand einiger charakteristischer Zahlen in der Grafik.
- Berechne den Mittelwert von X .
- Berechne $P[X > 4]$.

Hausübung D.3 – Lösung

- a) Berechne die Koordinaten von $P(x,y)$ und beschreibe dann die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (PDF).

Berechnung der PDF im Intervall $[0;12]$:



$$f_X(x) = \begin{cases} ax & (0 < x \leq 4) \\ k(x-12)^2 & (4 < x \leq 12) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$$

Hausübung D.3 – Lösung

- a) Berechne die Koordinaten von $P(x,y)$ und beschreibe dann die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (PDF).

Berechnung der PDF im Intervall $[0;12]$:

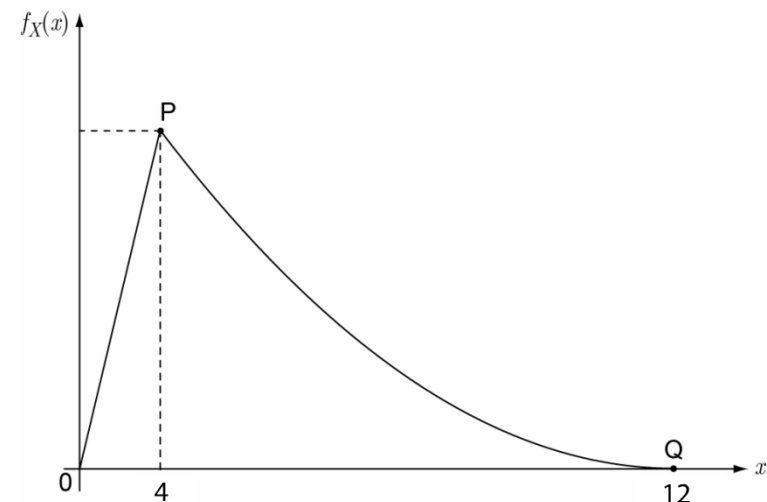
$$f_X(x) = \begin{cases} ax & (0 < x \leq 4) \\ k(x-12)^2 & (4 < x \leq 12) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$$

Berechnung der Koordinaten (Fläche unter der Funktion immer = 1!!):

$$4a = k(4-12)^2 \Rightarrow k = \frac{1}{16}a$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \int_0^4 ax dx + \int_4^{12} k(x-12)^2 dx = 1$$

$$a = \frac{3}{56} \quad k = \frac{3}{896}$$



Hausübung D.3 – Lösung

- a) Berechne die Koordinaten von $P(x,y)$ und beschreibe dann die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (PDF).

Berechnung der PDF im Intervall $[0;12]$:

$$f_X(x) = \begin{cases} ax & (0 < x \leq 4) \\ k(x-12)^2 & (4 < x \leq 12) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$$

Berechnung der Koordinaten (Fläche unter der Funktion immer = 1!!):

$$4a = k(4-12)^2 \Rightarrow k = \frac{1}{16}a$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \int_0^4 ax dx + \int_4^{12} k(x-12)^2 dx = 1$$

$$a = \frac{3}{56}$$

$$k = \frac{3}{896}$$



$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{56}x & (0 < x \leq 4) \\ \frac{3}{896}(x-12)^2 & (4 < x \leq 12) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$$

Hausübung D.3 – Lösung

- a) Berechne die Koordinaten von $P(x,y)$ und beschreibe dann die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (PDF).

Berechnung der PDF im Intervall $[0;12]$:

$$f_X(x) = \begin{cases} ax & (0 < x \leq 4) \\ k(x-12)^2 & (4 < x \leq 12) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$$

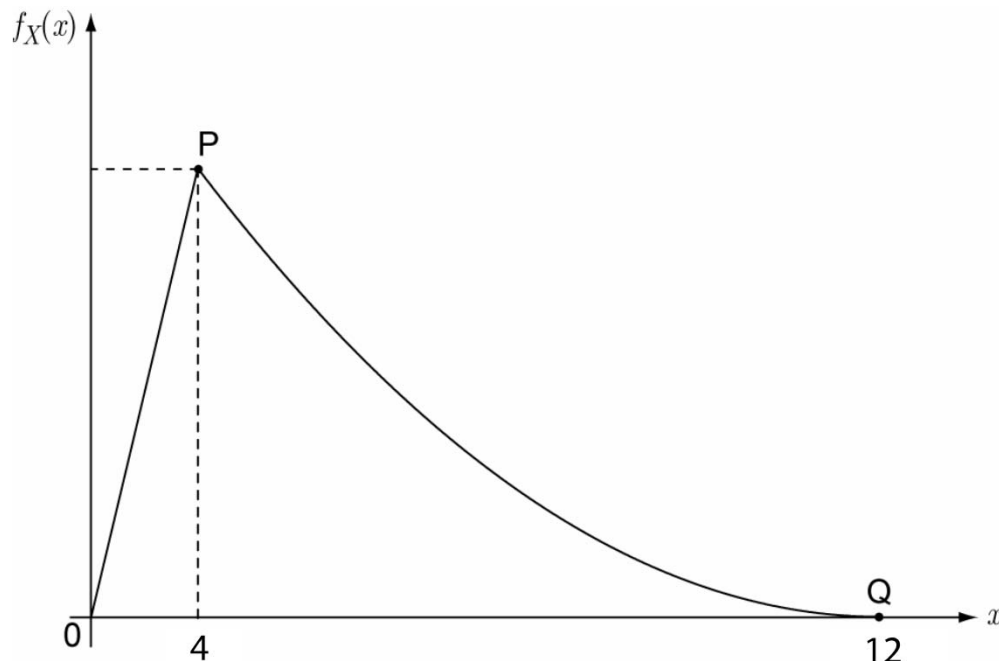
Berechnung der Koordinaten (Fläche unter der Funktion immer = 1!!):

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{56}x & (0 < x \leq 4) \\ \frac{3}{896}(x-12)^2 & (4 < x \leq 12) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases} \xrightarrow{(x=4)} P = \frac{3}{56} \cdot 4 = \frac{3}{14}$$

Hausübung D.3 – Lösung

- b) Beschreibe und zeichne die kumulative Verteilungsfunktion von X anhand einiger charakteristischer Zahlen in der Grafik.

1. Schritt: $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$



$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{56}x & (0 < x \leq 4) \\ \frac{3}{896}(x-12)^2 & (4 < x \leq 12) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ \frac{3}{112}x^2 & (0 < x \leq 4) \\ \frac{(x-12)^3}{896} + 1 & (4 < x \leq 12) \\ 1 & (12 < x) \end{cases}$$

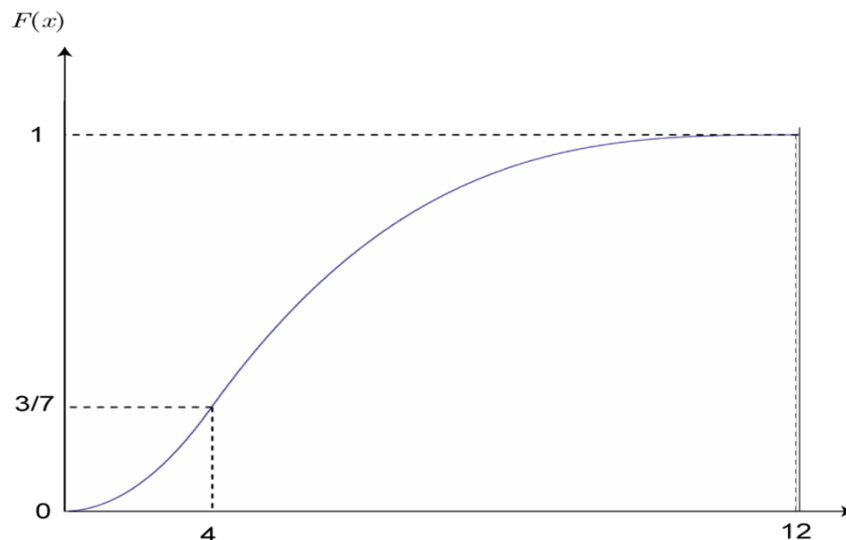
Hausübung D.3 – Lösung

- b) Beschreibe und zeichne die kumulative Verteilungsfunktion von X anhand einiger charakteristischer Zahlen in der Grafik.

1. Schritt: $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{56}x & (0 < x \leq 4) \\ \frac{3}{896}(x-12)^2 & (4 < x \leq 12) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$$

2. Schritt: Zeichne F_X



$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ \frac{3}{112}x^2 & (0 < x \leq 4) \\ \frac{(x-12)^3}{896} + 1 & (4 < x \leq 12) \\ 1 & (12 < x) \end{cases}$$

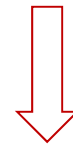
Hausübung D.3 – Lösung

c) Berechne den Mittelwert von X .

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{56}x & (0 < x \leq 4) \\ \frac{3}{896}(x-12)^2 & (4 < x \leq 12) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$$

1. Schritt (vergleiche Übung 4.2):

$$\mu_X = E[X]$$



$$\mu_X = \int_0^{12} x \cdot f_X(x) dx = \int_0^4 x \cdot \frac{3}{56} x dx + \int_4^{12} x \cdot \frac{3}{896} (x-12)^2 dx = \frac{32}{7}$$

Hausübung D.3 – Lösung

d) Berechne $P[X > 4]$.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{56}x & (0 < x \leq 4) \\ \frac{3}{896}(x-12)^2 & (4 < x \leq 12) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ \frac{3}{112}x^2 & (0 < x \leq 4) \\ \frac{(x-12)^3}{896} + 1 & (4 < x \leq 12) \\ 1 & (12 < x) \end{cases}$$

Zur Erinnerung:

Die Auftretenswahrscheinlichkeit von $P[X > \alpha]$ entspricht $1 - P[X \leq \alpha]$.

$$P[X > 4] = 1 - P[X \leq 4] = 1 - F_X(4)$$

$$P[X > 4] = 1 - P[X \leq 4]$$

$$= 1 - \int_0^4 \frac{3}{56}x dx = 1 - \left[\frac{3}{112}x^2 \right]_0^4 = \frac{4}{7}$$