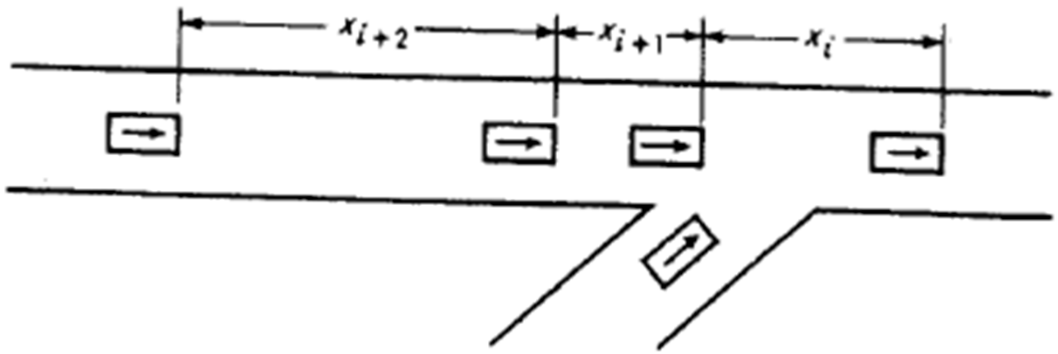
Hausübung D.13

Der Verkehr auf einer Hauptstrasse kann als homogener Poissonprozess modelliert werden. Die Intensität $\nu = 5$ gibt dabei an, wie viele Fahrzeuge pro Minute an einem bestimmten Punkt vorbeikommen.

a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der zeitliche Abstand zwischen zwei beliebigen Fahrzeugen (x_i in der Grafik) kleiner/gleich 10 Sekunden ist.

Tipp:
X_i ist die Wartezeit bis zum nächsten Ereignis
⇨ Exponentialverteilung



Hausübung D.13

$$\nu = 5$$

a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der zeitliche Abstand zwischen zwei beliebigen Fahrzeugen (x_i in der Grafik) kleiner/gleich 10 Sekunden ist?

Mit der Poissonverteilung:

$$P(X \leq 10\text{sek}) = 1 - P_0\left(t = {}^{10}\!/_{60}\right) = 1 - \exp\left(-5 \cdot {}^{10}\!/_{60}\right) = 0.5654$$

Mit der Exponentialverteilung:

$$P(X \leq 10\text{sek}) = F_X\left({}^{10}\!/_{60}\right) = 1 - \exp\left(-\lambda(x - \varepsilon)\right)$$

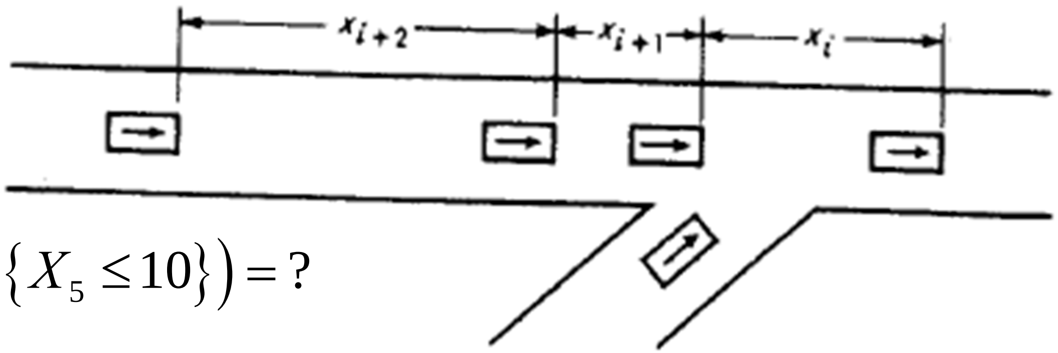
$$= 1 - \exp\left(-5 \cdot {}^{10}\!/_{60}\right) = 0.5654$$

(Skript, Tabelle D.1, $\varepsilon = 0$, $\lambda = \nu = 5$)

Hausübung D.13

b) Ein Autofahrer möchte von einer Nebenstrasse in die Hauptstrasse einbiegen (siehe Grafik). Damit dies möglich ist, benötigt er eine Lücke von mehr als 10 Sekunden zwischen zwei Fahrzeugen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass 5 Fahrzeuge auf der Hauptstrasse vorbeifahren, ohne dass eine Möglichkeit zur Auffahrt besteht?

Tipp:
Die einzelnen Abstände sind voneinander unabhängig!



$$P\left(\{X_1 \le 10\} \cap \{X_2 \le 10\} \cap \ldots \cap \{X_5 \le 10\}\right) = ?$$

Hausübung D.13

b) Ein Autofahrer möchte von einer Nebenstrasse in die Hauptstrasse einbiegen (siehe Grafik). Damit dies möglich ist, benötigt er eine Lücke von mehr als 10 Sekunden zwischen zwei Fahrzeugen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass 5 Fahrzeuge auf der Hauptstrasse vorbeifahren, ohne dass eine Möglichkeit zur Auffahrt besteht?

$P(X_i \leq 10\text{sek}) = 0.5654$ Für alle i (siehe Teilaufgabe a))

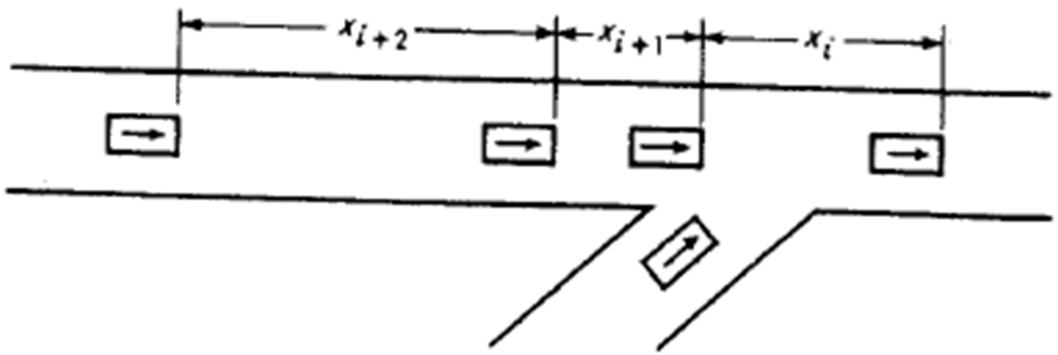
$$P\left(\{X_1 \leq 10\} \cap \{X_2 \leq 10\} \cap \ldots \cap \{X_5 \leq 10\}\right) = 0.5654^5 = 0.0578$$

Unabhängigkeit!

Hausübung D.13

c) Bestimme die Verteilung des <u>maximalen</u> Abstandes zum vorherigen Fahrzeug x_i in einer Kolonne von 5 oder 10 Fahrzeugen. Stelle die zwei Dichtefunktionen in einer gemeinsamen Grafik dar.

Tipp: Bestimme zunächst die kumulativen Verteilungsfunktionen!



Hausübung D.13

c) Bestimme die Verteilung des maximalen Abstandes zum vorherigen Fahrzeug x_i in einer Kolonne von 5 oder 10 Fahrzeugen. Stelle die zwei Dichtefunktionen in einer gemeinsamen Grafik dar.

Kumulative Verteilungsfunktion:

$$F_{X,n}^{\max} = \left(F_{X_i}(x_i)\right)^n = \left(1-\exp\left(-\lambda x\right)\right)^n$$

Ableiten ergibt die Dichtefunktion:

$$f_{X,n}^{\max} = n\left(1-\exp\left(-\lambda x\right)\right)^{n-1} \cdot \lambda \exp\left(-\lambda x\right)$$

Hausübung D.13

c) Dichtefunktion zeichnen für $\lambda = \nu = 5$ und $n = 5$ bzw. 10: