

# 1. Teilprüfung

## Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

**FS 2008**

Dr. J. Köhler

*ETH Zürich*

**Donnerstag 10. April 2008**  
**08:15 – 09:45**

**Vorname:** .....

**Name:** .....

**Stud. Nr.:** .....

**Studienrichtung:** .....

## 1. Teilprüfung: Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung Bau-, Umwelt- und Geomatikingenieurwissenschaften

### Datum und Dauer:

Donnerstag, 10. April 2008

Beginn: 8:15 Uhr

Zeitdauer: 90 Minuten

---

### Hilfsmittel:

- Alle Unterlagen (Skripte, Bücher, andere Ausdrücke, etc.) erlaubt.
- Taschenrechner (ohne Kommunikationsmittel) erlaubt.
- Keine Kommunikationsmittel (z.B. Telefon) erlaubt.

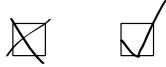
### Hinweise:

- Bitte kontrollieren Sie zuerst, ob Sie das ganze Material erhalten haben:
  - Aufgabenstellung inkl. genereller Informationen und Anhängen 14 Seiten.
  - Papierbogen kariert, gestempelt 1mal.
- Bitte legen Sie Ihre Legi vor sich auf den Tisch.
- Alle Lösungsblätter müssen mit Namen und Vornamen versehen werden.
- Nur die zur Verfügung gestellten Blätter dürfen verwendet werden.
- Legen Sie am Ende der Prüfung alle Aufgaben- und Lösungsblätter in das Couvert zurück und lassen Sie dieses am Platz liegen.
- Wenn Sie vor 9:15 Uhr fertig sind, dann benachrichtigen Sie einen Assistierenden; er/sie wird dann Ihre Prüfung einsammeln. Sie dürfen bis 9:15 Uhr den Saal verlassen; danach warten Sie bitte still, bis die Prüfung zu Ende ist (9:45 Uhr).

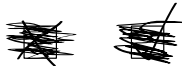
**Teil 1: Multiple Choice (maximal 56 Punkte)**

In den folgenden Multiple Choice Fragen können für die gleiche Frage mindestens eine oder mehrere Antworten richtig sein.

Bitte markieren Sie alle richtigen Antworten in jeder Frage mit einem Häkchen oder Kreuz:



Wenn Sie ein bereits markiertes Kästchen rückgängig machen wollen, dann tun Sie das bitte deutlich:



- 1.1** (2 Punkte) In der Wahrscheinlichkeitsrechnung kann die Wahrscheinlichkeit  $P(A)$  eines Ereignisses  $A$  einen Wert in den Grenzen annehmen von:

$0 \leq P(A) \leq 1$

$-1 \leq P(A) \leq 1$

$-\infty \leq P(A) \leq \infty$

- 1.2** (2 Punkte) Zwei Ereignisse  $A$  und  $B$  schliessen sich gegenseitig aus. Welche der folgenden Aussagen ist/sind richtig?

$P(B|A) = P(B)$

$P(B|A) = 0$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

- 1.3** (2 Punkte) Für ein Ereignis  $E$  im Wahrscheinlichkeitsraum  $\Omega$  stellt  $\bar{E}$  das Komplementärereignis dar. Welche der folgenden Aussagen ist/sind richtig?

$(E \cup \bar{E}) = \Omega$

$(E \cap \bar{E}) = \Omega - 1$

$(E \cup \bar{E}) = \emptyset$

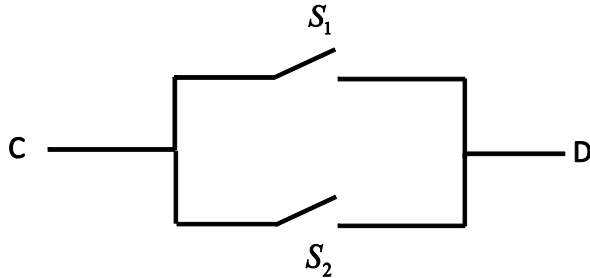
- 1.4** (2 Punkte) Die Wahrscheinlichkeit der Vereinigung von zwei voneinander abhängigen Ereignissen  $A_1$  und  $A_2$  ist durch  $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$  gegeben. Die Wahrscheinlichkeit von Ereignis  $A_1$  ist gleich 0.15, die Wahrscheinlichkeit von Ereignis  $A_2$  ist 0.2 und die Wahrscheinlichkeit von  $P(A_1 | A_2)$  ist 0.6. Welches Ergebnis ist richtig?

$P(A_1 \cup A_2) = 0.35$

$P(A_1 \cup A_2) = 0.12$

$P(A_1 \cup A_2) = 0.23$

- 1.5 Gegeben ist folgendes Schaltsystem mit zwei Schaltern. Es fliesst Strom von C nach D, wenn mindestens einer der beiden Schalter  $S_i$  geschlossen ist:



Mit  $E_1$  bezeichnen wir das Ereignis {„Schalter  $S_1$  ist geschlossen“}.

Mit  $E_2$  bezeichnen wir das Ereignis {„Schalter  $S_2$  ist geschlossen“}.

$\bar{E}_i$  stellt das Komplementäreignis dar.

- a) Welche/s der folgenden Ereignisse ist/sind korrekt durch  $E_i$  ausgedrückt?

(2 Punkte) Bei welchem Ereignis  $A_i$  fliesst Strom von C nach D?

$$A_1 = E_1 \cap E_2$$

$$A_2 = E_1 \cup E_2$$

$$A_3 = E_1 \cap \bar{E}_2$$

(2 Punkte) Bei welchem Ereignis  $B_i$  fliesst kein Strom von C nach D?

$$B_1 = E_1 \cap \bar{E}_2$$

$$B_2 = \bar{E}_1 \cap \bar{E}_2$$

$$B_3 = \bar{E}_1 \cup \bar{E}_2$$

- b) (2 Punkte) Die Schalter  $S_i$  seien unabhängig voneinander offen oder geschlossen. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Schalter  $S_i$  geschlossen ist, sei  $p_i = 0.5$ . Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis  $A_S$ , welches definiert ist als das Ereignis „es fliesst Strom von C nach D“?

$$P(A_S) = 0.5$$

$$P(A_S) = 0.75$$

$$P(A_S) = 1$$

1.6 Die Studierenden ( $n=191$ ) der Vorlesung „Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung“ im FS 2008 wurden u.a. hinsichtlich ihres Alters befragt. Das Histogramm in *Abbildung 1.1* zeigt das Ergebnis dieser Umfrage.

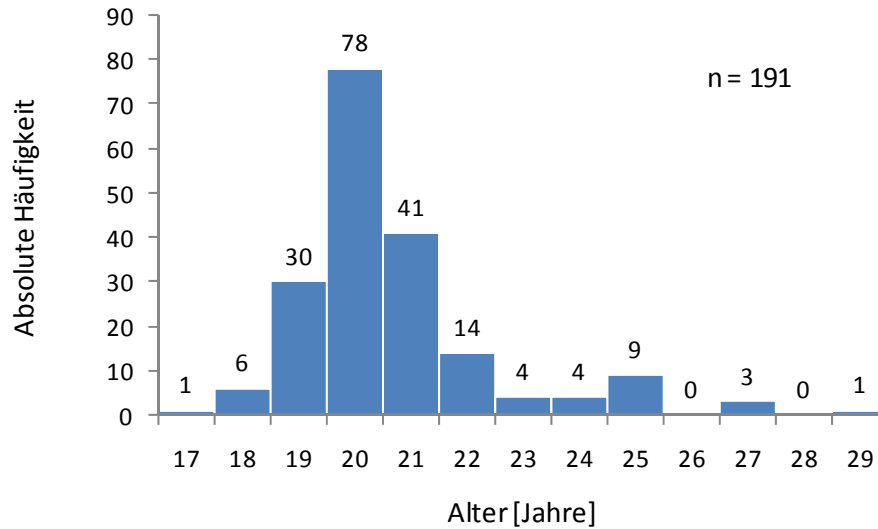


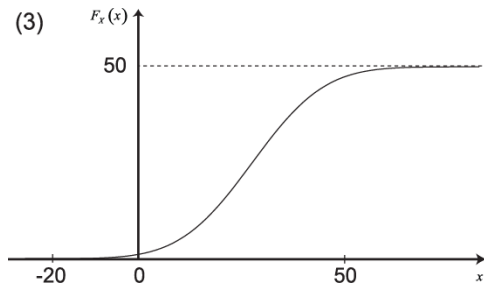
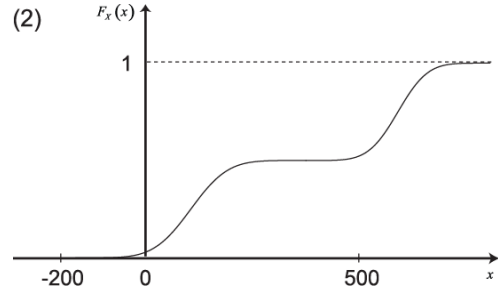
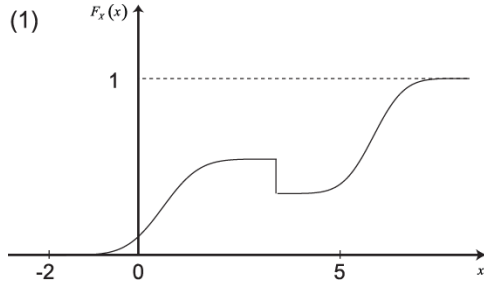
Abbildung 1.1: Histogramm zur Verteilung der Altersangaben.

(je 2 Punkte für a) und b)) Bitte kreuzen Sie die richtige(n) Antwort(en) an:

- a) Die Verteilung ist rechtsschief.
- Der Modus beträgt 78.
- Der Modus beträgt 20.
- Die relative Häufigkeit der Altersangabe „19 Jahre“ beträgt 0.246.
- b) Der Median ist grösser als der Modus.
- Der Median ist kleiner als der Modus.
- Median und Modus haben den gleichen Wert.
- Der Stichprobenraum liegt im geschlossenen Intervall von 17 bis 29 Jahren.

**1.7** Welche der folgenden Funktionen ergibt/ergeben einen Sinn? Bitte kreuzen Sie diese an.

a) (2 Punkte) Als kumulierte Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion?

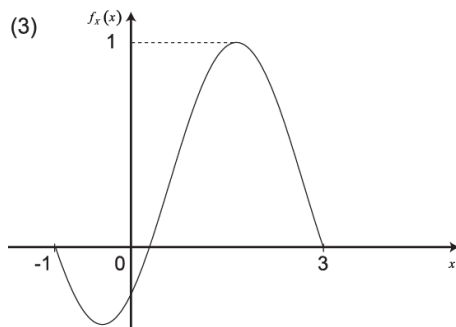
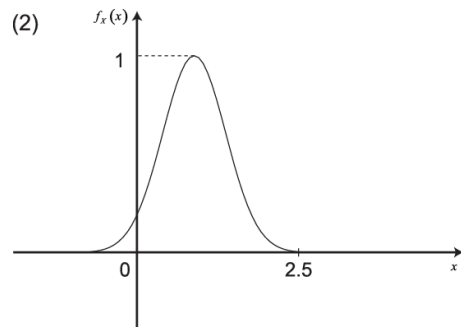
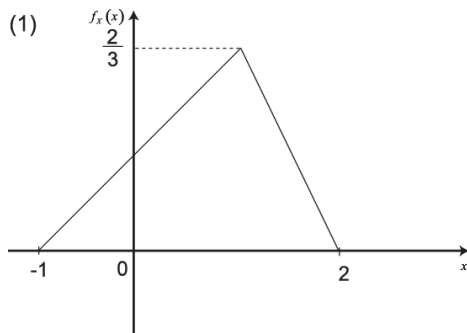


(1)

(2)

(3)

b) (2 Punkte) Als Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion?



(1)

(2)

(3)

1.8 Bretter der Holzart Fichte sollen für eine Holzkonstruktion verwendet werden. Anhand von Versuchen ist bekannt, dass die Zugfestigkeit eines Brettes von der sogenannten Ästigkeit abhängig ist. Die Ästigkeit pro Brett lässt sich anhand der Anzahl und Grösse der im Brett sichtbaren Astteile berechnen. Der Zusammenhang zwischen Ästigkeit und Zugfestigkeit ist in Abbildung 1.2 dargestellt.

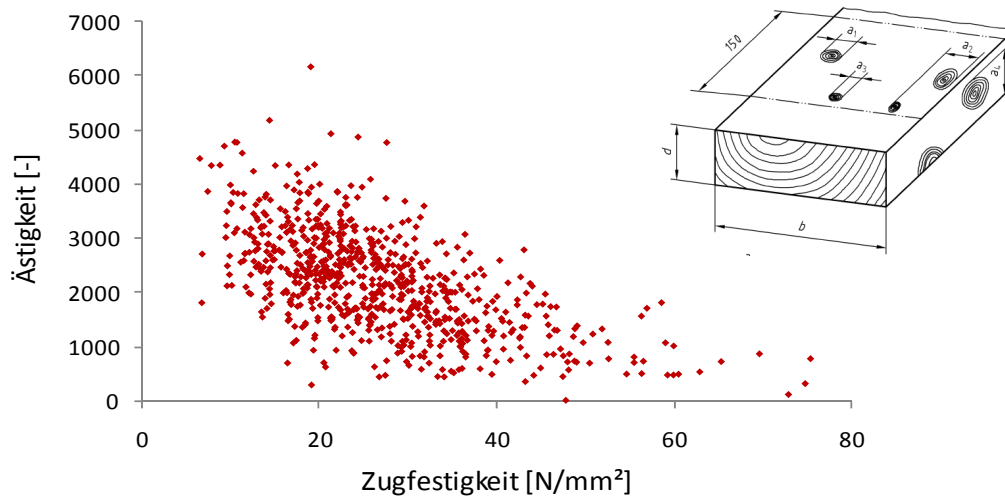


Abbildung 1.2 Darstellung der Ästigkeit und Zugfestigkeit von Fichten-Brettern.  
+ Illustration von Astteilen in Brettern.

a) (2 Punkte) Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an.

- Bei der Abbildung handelt es sich um ein zweidimensionales Streudiagramm.
- Aus der Abbildung sind die Wahrscheinlichkeiten der Zugfestigkeit direkt ablesbar.
- Bei der Abbildung handelt es sich um einen Quantil-Plot.
- Keine der Aussagen ist richtig.

b) (2 Punkte) Anhand einer sorgfältigen Betrachtung der Abbildung ist zu erkennen, dass:

- eine negative Korrelation zwischen Ästigkeit und Zugfestigkeit besteht.
- mit steigender Ästigkeit auch die Zugfestigkeit des Holzes zunimmt.
- mit steigender Ästigkeit die Zugfestigkeit des Holzes abnimmt.
- die Verteilung der Zugfestigkeit rechtsschief ist.



c) (2 Punkte) Welche der folgenden Aussagen trifft am ehesten zu?

Der Korrelationskoeffizient liegt ungefähr bei 45 N/mm<sup>2</sup>.

Der Korrelationskoeffizient liegt ungefähr bei +0.55.

Der Korrelationskoeffizient liegt ungefähr bei -0.55.

Es ist keine Korrelation erkennbar, daher beträgt der Korrelationskoeffizient genau 1.

1.9 (2 Punkte) Um die Streuung von Versuchsergebnissen zu beurteilen eignen sich folgende Masszahlen (bitte ankreuzen):

Arithmetisches Mittel  Korrelationskoeffizient

Median  Standardabweichung

Varianz

1.10 (2 Punkte) Kreuzen Sie im Folgenden die Aussage(n) an, welche für kontinuierliche Zufallsvariablen zutrifft (zutreffen):

$0 \leq F_X(x) \leq 1$

$\int_a^\infty f_X(x) dx = 1 - F(a)$

wenn  $a < b$ , dann gilt  $\int_a^b f_X(x) dx = F(a) - F(b)$

$m_1 = \sum_{j=1}^n x_j^1 p_X(x_j)$

**1.11** (2 Punkte) Wie ist das 2. zentrale Moment einer kontinuierlichen Zufallsvariable definiert? Bitte kreuzen Sie die richtige(n) Antwort(en) an.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx \quad \input{checkbox}$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x) dx \quad \input{checkbox}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx \quad \input{checkbox}$$

**1.12** (2 Punkte) Die Temperatur wird ausgedrückt als Zufallsvariable  $X$ . Der Siedepunkt eines chemischen Elements sei bekannt mit Mittelwert  $\mu_X = 100^\circ\text{C}$  und Varianz  $= 25^\circ\text{C}^2$ . Eine Temperaturveränderung um  $1^\circ$  Grad Celsius entspricht 1.8 Fahrenheit. Der Nullpunkt der Celsius-Skala entspricht 32 Fahrenheit. Wieviel beträgt die Standardabweichung, in Fahrenheit ausgedrückt?

Standardabweichung ist 9 Fahrenheit

Standardabweichung ist 41 Fahrenheit

Standardabweichung ist 45 Fahrenheit

Standardabweichung ist 16.2 Fahrenheit

Keine der Antworten ist richtig.

**1.13** In einer Stadt gibt es 6 Baustellen. Jede Baustelle füllt pro Tag entweder 0 oder 1 Container mit Bauschutt.

Die Firma A hat mit den Betreibern dieser Baustellen einen Vertrag abgeschlossen, um auf Abruf die Container abzutransportieren. Von jedem der  $n=6$  Betreiber könnte die Firma A am nächsten Tag mit einer Wahrscheinlichkeit von  $p=0.5$  beauftragt werden, um von einer Baustelle einen Container mit Bauschutt wegzufahren.

Beantworten Sie mit Hilfe der Tabelle 1.1 die folgenden Fragen.

Tabelle 1.1: Werte der Binomialverteilung für  $p=0.5$ ,  $n=6$ ,  $x_i \in [0,6]$  wobei  $x_i$  =Anzahl Transporte.

$x_i$	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	0.0156	0.0938	0.2344	0.3125	0.2344	0.0938	0.0156
$P(X \leq x_i)$	0.0156	0.1094	0.3438	0.6562	0.8906	0.9844	1

a) (2 Punkte) Wie viele Aufträge für Transporte ( $x_i$ ) werden mit grösster Wahrscheinlichkeit am nächsten Tag eintreffen?

0	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>
1	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>
3	<input type="checkbox"/>		

b) (2 Punkte) Die Kapazität der Firma liegt für einen Arbeitstag bei  $x_i = 4$  Transporten. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Firma A am nächsten Arbeitstag nicht alle Aufträge erledigen kann?

0.0156	<input type="checkbox"/>	0.1094	<input type="checkbox"/>
0.2344	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>
0.8906	<input type="checkbox"/>		

**1.14** (6 Punkte) Ein Student muss einen Multiple Choice Test mit 10 Fragen lösen. Jede Frage hat 2 mögliche Antworten, von denen nur eine richtig ist. Der Student löst den Test durch zufälliges Ankreuzen. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass er den Test besteht, wenn mindestens 3 richtige Antworten zum Bestehen der Prüfung erforderlich sind?

0.055

0.097

0.945

0.901

**1.15** Im Cockpit eines grossen Verkehrsflugzeuges zeigt eine Kontrollleuchte an, ob das Fahrwerk für die Landung korrekt ausgefahren ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Kontrollleuchte korrekt funktioniert ist 0.999. Die Wahrscheinlichkeit, dass sie nicht funktioniert, z.B. durch Ausfall der Leuchtdiode oder durch fehlerhaftes Signal, ist demnach 0.001. Ist das Fahrwerk tatsächlich nicht richtig ausgefahren, leuchtet die Diode in jedem Fall nicht.

Nun kommt es recht selten vor, dass das Fahrwerk eines grossen Verkehrsflugzeuges nicht korrekt ausfährt. Es kann angenommen werden, dass dies nur einmal bei  $10^6$  Flügen vorkommt.

a) (6 Punkte) Das Flugzeug befindet sich im Landeanflug. Der Pilot will das Fahrwerk ausfahren, stellt aber fest, dass die Kontrollleuchte nicht leuchtet. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Fahrwerk tatsächlich nicht korrekt ausgefahren ist.

0.000222

0.000777

0.000999

0.003566

b) (2 Punkte pro gute Antwort, maximal 4 Punkte) Wie könnte man die Kontrolleinrichtung verbessern?

.....

## **Teil 2: Rechenaufgabe (maximal 28 Punkte)**

Bei der Auswertung der in der ersten Vorlesung erhobenen Daten interessieren wir uns für den Zusammenhang von Haarfarbe und Augenfarbe der Studentinnen und Studenten. In der folgenden Tabelle steht  $H$  für die Haarfarbe und  $A$  für die Augenfarbe.

Es wird angenommen, dass alle Studierenden entweder blondes, braunes oder schwarzes Haar haben und dass bei allen Studierenden die Augenfarbe entweder blau, braun, grün oder blaugrau ist.

*Tabelle 2.1: Multivariate Wahrscheinlichkeiten für Augen- und Haarfarbe.*

	$A = \text{blau}$	$A = \text{braun}$	$A = \text{grün}$	$A = \text{blaugrau}$	$P(H)$
$H = \text{blond}$	0.086		0.023		
$H = \text{braun}$	0.115	0.402		0.063	
$H = \text{schwarz}$		0.075	0	0.006	
$P(A)$				0.121	

- a) (6 Punkte) Vervollständigen Sie die Tabelle unter Berücksichtigung, dass bei 19.5% aller Studierenden die Haarfarbe  $H = \text{blond}$  und bei 8.7 % aller Studierenden die Haarfarbe  $H = \text{schwarz}$  ist.
- b) (4 Punkte) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Studierender, welche/r braune Haare hat auch noch grüne Augen hat?

Bei der Auswertung der in der ersten Vorlesung erhobenen Daten interessieren wir uns des Weiteren für das Körpergewicht der Studierenden. Das Körpergewicht wird mit einer normalverteilten Zufallsvariablen  $X$  modelliert. Die Normalverteilung hat einen Mittelwert  $\mu_X$  von 71 kg und eine Standardabweichung  $\sigma_X$  von 9.3 kg.

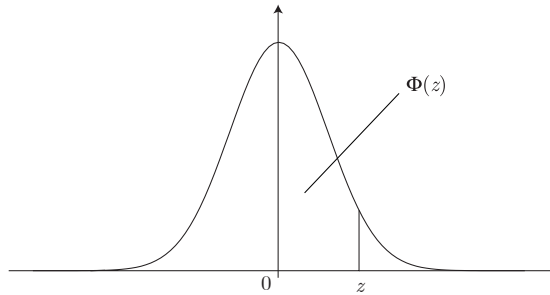
- c) (6 Punkte) Berechnen Sie basierend auf diesem Modell die Wahrscheinlichkeit, dass ein Student/ eine Studentin schwerer ist als 85 kg.

Der Fahrstuhl im HIL hat eine maximal zulässige Traglast von 900 kg. Nach der Statistikvorlesung strömen 13 Studierende in diesen Fahrstuhl.

- d) (12 Punkte) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Traglast überschritten? Verwenden Sie die Tabelle zur Standardnormalverteilung im Anhang.

## Anhang

### Kumulierte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $\Phi(z)$ der Standardnormalverteilung



Probability density function of the standard normal random variable.

$z$	$\Phi(z)$	$z$	$\Phi(z)$	$z$	$\Phi(z)$	$z$	$\Phi(z)$	$z$	$\Phi(z)$
0.00	0.5000	0.50	0.6915	1.00	0.8413	1.50	0.9332	2.00	0.9772
0.01	0.5040	0.51	0.6950	1.01	0.8438	1.51	0.9345	2.10	0.9821356
0.02	0.5080	0.52	0.6985	1.02	0.8461	1.52	0.9357	2.20	0.9860966
0.03	0.5120	0.53	0.7019	1.03	0.8485	1.53	0.9370	2.30	0.9892759
0.04	0.5160	0.54	0.7054	1.04	0.8508	1.54	0.9382	2.40	0.9918025
0.05	0.5199	0.55	0.7088	1.05	0.8531	1.55	0.9394	2.50	0.9937903
0.06	0.5239	0.56	0.7123	1.06	0.8554	1.56	0.9406	2.60	0.9953388
0.07	0.5279	0.57	0.7157	1.07	0.8577	1.57	0.9418	2.70	0.9965330
0.08	0.5319	0.58	0.7190	1.08	0.8599	1.58	0.9429	2.80	0.9974449
0.09	0.5359	0.59	0.7224	1.09	0.8621	1.59	0.9441	2.90	0.9981342
0.10	0.5398	0.60	0.7257	1.10	0.8643	1.60	0.9452	3.00	0.9986501
0.11	0.5438	0.61	0.7291	1.11	0.8665	1.61	0.9463	3.10	0.9990324
0.12	0.5478	0.62	0.7324	1.12	0.8686	1.62	0.9474	3.20	0.9993129
0.13	0.5517	0.63	0.7357	1.13	0.8708	1.63	0.9484	3.30	0.9995166
0.14	0.5557	0.64	0.7389	1.14	0.8729	1.64	0.9495	3.40	0.9996631
0.15	0.5596	0.65	0.7422	1.15	0.8749	1.65	0.9505	3.50	0.9997674
0.16	0.5636	0.66	0.7454	1.16	0.8770	1.66	0.9515	3.60	0.9998409
0.17	0.5675	0.67	0.7486	1.17	0.8790	1.67	0.9525	3.70	0.9998922
0.18	0.5714	0.68	0.7517	1.18	0.8810	1.68	0.9535	3.80	0.9999277
0.19	0.5753	0.69	0.7549	1.19	0.8830	1.69	0.9545	3.90	0.9999519
0.20	0.5793	0.70	0.7580	1.20	0.8849	1.70	0.9554	4.00	0.9999683
0.21	0.5832	0.71	0.7611	1.21	0.8869	1.71	0.9564	4.10	0.9999793
0.22	0.5871	0.72	0.7642	1.22	0.8888	1.72	0.9573	4.20	0.9999867
0.23	0.5910	0.73	0.7673	1.23	0.8907	1.73	0.9582	4.30	0.9999915
0.24	0.5948	0.74	0.7704	1.24	0.8925	1.74	0.9591	4.40	0.9999946
0.25	0.5987	0.75	0.7734	1.25	0.8944	1.75	0.9599	4.50	0.9999966
0.26	0.6026	0.76	0.7764	1.26	0.8962	1.76	0.9608	4.60	0.9999979
0.27	0.6064	0.77	0.7794	1.27	0.8980	1.77	0.9616	4.70	0.9999987
0.28	0.6103	0.78	0.7823	1.28	0.8997	1.78	0.9625	4.80	0.9999992
0.29	0.6141	0.79	0.7852	1.29	0.9015	1.79	0.9633	4.90	0.9999995
0.30	0.6179	0.80	0.7881	1.30	0.9032	1.80	0.9641	5.00	0.9999997
0.31	0.6217	0.81	0.7910	1.31	0.9049	1.81	0.9649		
0.32	0.6255	0.82	0.7939	1.32	0.9066	1.82	0.9656		
0.33	0.6293	0.83	0.7967	1.33	0.9082	1.83	0.9664		
0.34	0.6331	0.84	0.7995	1.34	0.9099	1.84	0.9671		
0.35	0.6368	0.85	0.8023	1.35	0.9115	1.85	0.9678		
0.36	0.6406	0.86	0.8051	1.36	0.9131	1.86	0.9686		
0.37	0.6443	0.87	0.8078	1.37	0.9147	1.87	0.9693		
0.38	0.6480	0.88	0.8106	1.38	0.9162	1.88	0.9699		
0.39	0.6517	0.89	0.8133	1.39	0.9177	1.89	0.9706		
0.40	0.6554	0.90	0.8159	1.40	0.9192	1.90	0.9713		
0.41	0.6591	0.91	0.8186	1.41	0.9207	1.91	0.9719		
0.42	0.6628	0.92	0.8212	1.42	0.9222	1.92	0.9726		
0.43	0.6664	0.93	0.8238	1.43	0.9236	1.93	0.9732		
0.44	0.6700	0.94	0.8264	1.44	0.9251	1.94	0.9738		
0.45	0.6736	0.95	0.8289	1.45	0.9265	1.95	0.9744		
0.46	0.6772	0.96	0.8315	1.46	0.9279	1.96	0.9750		
0.47	0.6808	0.97	0.8340	1.47	0.9292	1.97	0.9756		
0.48	0.6844	0.98	0.8365	1.48	0.9306	1.98	0.9761		
0.49	0.6879	0.99	0.8389	1.49	0.9319	1.99	0.9767		