2. Teilprüfung
Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

FS 2009

Lösungen

Prof. Dr. Michael Havbro Faber

ETH Zürich

Dienstag 19. Mai 2009
08:00 – 09:30

Vorname: ....

Name: ....

Stud. Nr.: ....

Studienrichtung: ....

2. Teilprüfung: Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung
Geomatikingenieurwissenschaften

Datum und Dauer:

Dienstag, 19. Mai 2009
Beginn: 8:00 Uhr
Zeitdauer: 90 Minuten

Hilfsmittel:

- Alle Unterlagen (Skripte, Bücher, andere Ausdrucke, etc.) erlaubt.
- Taschenrechner (ohne Kommunikationsmittel) erlaubt.
- Keine Kommunikationsmittel (z.B. Telefon) erlaubt.

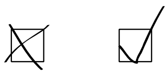
Hinweise:

- Bitte kontrollieren Sie zuerst, ob Sie das Material vollständig erhalten haben:
    - Aufgabenstellung inkl. genereller Information und Anhang 21 Seiten.
    - Papierbogen kariert, gestempelt 1mal.
- Bitte legen Sie Ihre Legi vor sich auf den Tisch.
- Alle Lösungsblätter müssen mit Namen und Vornamen versehen werden.
- Nur die zur Verfügung gestellten Blätter dürfen verwendet werden.
- Legen Sie am Ende der Prüfung alle Aufgaben- und Lösungsblätter in das Couvert zurück und lassen Sie dieses am Platz liegen.
- Wenn Sie vor 9:00 Uhr fertig sind, dann benachrichtigen Sie einen Assistierenden; er/sie wird dann Ihre Prüfung einsammeln. Sie dürfen bis 9:00 Uhr den Saal verlassen; danach warten Sie bitte still, bis die Prüfung zu Ende ist (9:30 Uhr).

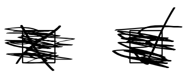
Teil 1: Multiple Choice (maximal 56 Punkte)

In den folgenden Multiple Choice Fragen können für die gleiche Frage (mindestens) eine oder mehrere Antworten zutreffend sein.

Bitte markieren Sie alle richtigen Antworten in jeder Frage mit einem Häkchen oder Kreuz:



Wenn Sie ein bereits markiertes Kästchen rückgängig machen wollen, dann tun Sie das bitte deutlich:



1.1 Für einen Autobahnabschnitt müssen 10 gleich lange Talbrücken auf ihre Verkehrslast bemessen werden. Hierfür soll abgeschätzt werden, wie oft die Brücken von Schwertransporten befahren werden. Sie möchten hierzu einen homogenen Poissonprozess verwenden.

a) *(2 Punkte)*

Welche der folgenden Annahmen sind hierzu notwendig?

Die Brücken werden alle aus dem gleichen Material gefertigt. ☐

Es kann immer nur ein Schwertransport gleichzeitig eine Brücke befahren. ☑

Die mittlere Anzahl Schwertransporte, die pro Jahr die Autobahn befahren, ändert sich während der Lebensdauer der Brücken nicht. ☑

Die Fahrt verschiedener Schwertransporte ist voneinander unabhängig. ☑

b) *(4 Punkte)*

Nachdem Sie die notwendigen Annahmen getroffen haben, entscheiden Sie sich, einen homogenen Poissonprozess zu verwenden:

$$P_n(t) = \frac{u^n}{n!} e^{-u}$$

Aus Verkehrsstatistiken für vergleichbare Strecken schätzen Sie die mittlere Anzahl Schwertransporte pro Jahr auf 24. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Brücke während der ersten 3 Monate von genau 6 Schwertransporten befahren wird?

$$P_6(3\,Monate) = 0.5$$ ☐

$$P_6(3\,Monate) = 0.00001$$ ☐

$$P_6(3\,Monate) = \frac{\left(24 \frac{Transporte}{Jahr} \cdot \frac{3}{12} Jahr\right)^6}{6!} e^{-\left(24 \cdot \frac{3}{12}\right)} = \frac{6^6}{6!} e^{-6} = 0.161$$ ☑

$$P_6(3\,Monate) = 0.05$$ ☐

c) *(4 Punkte)*

Sie beobachten auf einer der neuen Brücken einen Schwertransport. Mit welcher Wahrscheinlichkeit können Sie damit rechnen, dass es mehr als einen Monat dauert, bis der nächste Schwertransport über die Brücke fährt? Verwenden Sie dieselben Annahmen wie im Aufgabenteil b).

$$P(T > 1\ Monat) = 0.607$$ ☐

$$P(T > 1\ Monat) = 0.865$$ ☐

$$P(T > 1\ Monat) = 0.161$$ ☐

$$P(T > 1\ Monat) = P_0(1\ Monat) = e^{-\left(24 \cdot \frac{1}{12}\right)} = 0.135$$ ☑

d) *(2 Punkte)*

Sie haben zur Modellierung aller 10 Brücken auf dem Autobahnabschnitt einen homogenen Poissonprozess verwendet. Die mittlere Anzahl Schwertransporte sei für alle Brücken gleich. Sie gehen davon aus, dass Sie Ergodizität annehmen können. Welche der folgenden Aussagen sind unter diesen Annahmen richtig?

Unter diesen Annahmen reicht es aus, über einen längeren Zeitraum die Schwertransporte auf einer der 10 Autobahnbrücken zu erfassen, um den Zufallsprozess vollständig zu charakterisieren. ☑

Die Datensammlung lediglich an einer Brücke genügt nur dann zur Beschreibung des gesuchten Zufallsprozesses, wenn die Autobahn zwischen den Brücken keine Ein- oder Ausfahrten hat, ein Schwertransport also immer alle Brücken überfahren muss. ☐

Die Annahme der Ergodizität ist falsch. Ein Poissonprozess kann niemals ergodisch sein. ☐

Die Annahme der Ergodizität wird in der Praxis häufig der Einfachheit halber getroffen, solange nicht das Gegenteil bewiesen wurde. ☑

1.2 *(2 Punkte)*

Ebenfalls wichtig für die Bemessung von Talbrücken ist die Windlast. Hierzu verfügen Sie über Daten zum 5-jährigen Maximalwert der Windgeschwindigkeit, an die Sie eine Extremwertverteilung anpassen möchten. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

Aus den Daten lässt sich eine Gumbel max Verteilung für das 50-jährige Maximum der Windgeschwindigkeit bestimmen.	☑
Der Erwartungswert der Verteilung für das 50-jährige Maximum der Windgeschwindigkeit ist grösser als der Mittelwert der beobachteten Daten.	☑
Die jährliche Eintrittswahrscheinlichkeit eines extremen Windereignisses ist $p = 0.2$.	☐
Der Stichprobenmittelwert der beobachteten 5-jährigen Maxima ist ein guter Schätzer für die mittlere Windgeschwindigkeit an der Messstation.	☐

1.3 *(2 Punkte)*

Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_{10}$ seien voneinander unabhängig und normalverteilt mit dem Mittelwert $\mu \neq 0$ und der Standardabweichung σ. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

Die Zufallsvariable $Z = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + \ldots X_{10}^2}$ folgt einer Chi-Verteilung.	☐
Um eine Chi-verteilte Zufallsvariable zu erhalten, müssen die Zufallsvariablen X_i standardisiert werden. Hierzu genügt es, sie durch die Standardabweichung σ zu dividieren.	☐
Nach einer geeigneten Standardisierung der Zufallsvariablen X_i ist $Z = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + \ldots + X_{10}^2$ Chi-Quadrat-verteilt.	☑
Funktionen von normalverteilten Zufallsvariablen sind stets ebenfalls normalverteilt.	☐

1.4 Für eine zufällig ausgewählte Stichprobe von Studierenden der Vorlesung „Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung" möchten Sie den Stichprobenmittelwert der Körpergrösse, $\bar{K}$, und die Stichprobenstandardabweichung S^2 berechnen.

a) *(2 Punkte)*

Welche der folgenden Aussagen können Sie bereits vor dem Ziehen der Stichprobe bestätigen?

- [x] Der wahre Mittelwert μ_K der Körpergrösse von allen Studierenden der Statistik-Vorlesung ist unabhängig von der Anzahl Studierende in der betrachteten Stichprobe.
- [x] Die Varianz des Stichprobenmittelwertes ist umso grösser, je kleiner die zu Grunde liegende Stichprobe ist.
- [x] Der Stichprobenmittelwert ist bei grossen Stichproben näherungsweise normalverteilt, auch wenn die Körpergrösse der Studierenden nicht durch eine Normalverteilung repräsentiert werden kann.
- [x] Für den erwartungstreuen Schätzer der Stichprobenvarianz gilt $E[S^2_{erwartungstreu}] = \sigma^2_K$.

b) *(2Punkte)*

Aus dem errechneten Stichprobenmittelwert der Körpergrösse, $\bar{k}$, möchten Sie nun ein Konfidenzintervall für den wahren Mittelwert der Körpergrösse, μ_K, bestimmen. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- [x] Ein zweiseitiges Konfidenzintervall für den wahren Mittelwert der Körpergrösse ist stets symmetrisch zum beobachteten Stichprobenmittelwert.
- [ ] Das Konfidenzintervall ist umso breiter, je grösser die betrachtete Stichprobe ist.
- [x] Durch eine Steigerung der Konfidenz, z.B. von 95% auf 99%, vergrössert sich das Konfidenzintervall.
- [ ] Zur Berechnung eines zweiseitigen 95%-Konfidenzintervall benötigt man den 5%-Fraktilwert der Standardnormalverteilung, k_α.

1.5 Um die Materialeigenschaften von Schweizerischem Fichtenholz zu beschreiben, wurden an 200 Brettern Versuche durchgeführt, um die Zugfestigkeit jedes Brettes zu bestimmen.

a) *(2 Punkte)*

Ermitteln Sie anhand der Wahrscheinlichkeitspapiere aus Abbildung 1.5, welche Verteilungsfunktion die beobachteten Daten über den gesamten Wertebereich am besten repräsentiert.

Normalverteilung ☐

Gumbelverteilung ☐

Lognormalverteilung ☑

Anhand dieser Wahrscheinlichkeitspapiere lässt sich keine Aussage treffen. ☐

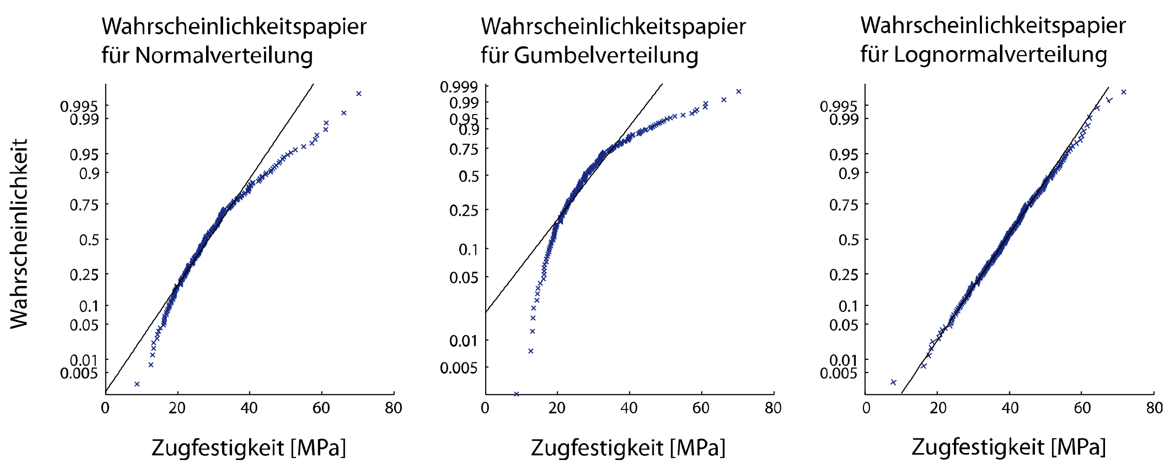


Abbildung 1.5: Wahrscheinlichkeitspapiere für verschiedene Verteilungsfunktionen mit den ermittelten Daten der Zugfestigkeit.

b) *(2 Punkte)*

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

Generell werden Wahrscheinlichkeitspapiere herangezogen, um Punktschätzungen der Verteilungsparameter zu ermitteln. ☐

Das 0.99-Quantil ist bei allen Wahrscheinlichkeitspapieren gleich und hat einen Wert von etwa 60 MPa. ☑

Das Wahrscheinlichkeitspapier kann verwendet werden, um zu beurteilen, ob die Datensätze zweier gleichzeitig erfasster Messgrössen in einem linearen Zusammenhang stehen. ☐

Das Wahrscheinlichkeitspapier wird so konstruiert, dass die kumulative Verteilungsfunktion die Form einer Geraden hat. ☑

1.6 *(2 Punkte)*

Eine beliebige Materialeigenschaft wird durch eine normalverteilte Zufallsvariable X beschrieben, der wahre Mittelwert μ_X und die wahre Standardabweichung σ_X sind jedoch unbekannt.

Welche der folgenden Verteilungsfunktionen können Sie verwenden, um anhand von Ihnen vorliegenden Daten ein Intervall zu bestimmen, in dem der wahre Mittelwert mit der Wahrscheinlichkeit 1-α zu erwarten ist?

Normalverteilung ☐

Lognormalverteilung ☐

t-Verteilung ☑

F-Verteilung ☐

1.7 An einer Station zur Wägung von LKWs werden die Gewichte der einzelnen LKWs erfasst, bevor diese über die anschliessende Brücke fahren. Das Wiegen von 50 LKWs erzielte einen Stichprobenmittelwert von $\overline{x} = 15$ t. Aus Erfahrung weiss man, dass die Standardabweichung von LKW-Gewichten $\sigma = 3.0$ t beträgt.

Eine Tabelle mit den Quantilen der Standardnormalverteilung finden Sie im Anhang.

a) *(3 Punkte)*
Wie lässt sich das zweiseitige 95%-Konfidenzintervall des wahren Mittelwertes des LKW-Gewichts auf dieser Strasse beschreiben?

$P[14.302 < \mu_X < 15.698] = 0.95$ ☐

$P[14.168 < \mu_X < 15.832] = 0.05$ ☐

$P[14.302 < \mu_X < 15.698] = 0.05$ ☐

$P[14.168 < \mu_X < 15.832] = 0.95$ ☑

Lösung:

$$n = 50; \;\; \overline{x} = 15t; \;\; \sigma = 3t$$

$$P\left[\overline{X} - k_{\alpha/2}\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}} < \mu_X < \overline{X} + k_{\alpha/2}\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha$$

$$P\left[15 - k_{\alpha/2} 3 \frac{1}{\sqrt{50}} < \mu_X < 15 + k_{\alpha/2} 3 \frac{1}{\sqrt{50}}\right] = 1 - 0.05$$

$$k_{\alpha/2} = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{0.05}{2}\right) = \Phi^{-1}(0.975) = TABELLE... = 1.96$$

$$P\left[15 - 1.96 \cdot 3 \frac{1}{\sqrt{50}} < \mu_X < 15 + 1.96 \cdot 3 \frac{1}{\sqrt{50}}\right] = 0.95$$

$$P[15 - 0.832 < \mu_X < 15 + 0.832] = 0.95$$

$$P[14.168 < \mu_X < 15.832] = 0.95$$

b) *(3 Punkte)*

Wie viele LKWs müssten gewogen werden, um auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.01$ ein zweiseitige Konfidenzintervall für den wahren Mittelwert von $\left[14.5 < \mu_X < 15.5\right]$ zu erhalten?

- 210 ☐
- 225 ☐
- 240 ☑
- 199 ☐

Lösung:

$$\overline{x} - k_{\alpha/2}\sigma_X \frac{1}{\sqrt{n}} = 14.5$$

$$15 - 2.578 \cdot 3 \frac{1}{\sqrt{n}} = 14.5$$

$$n = \left(\frac{7.734}{0.5}\right)^2 = 239.26 \approx 240 Messungen$$

Wert für $k_{\alpha/2}$ ist entnommen aus Tabelle des Skripts mit linearer Interpolation.

1.8 Bei der Klassifizierung von Schnittholz in eine bestimmte Sortierklasse muss sichergestellt werden, dass der Mittelwert des Elastizitätsmoduls der kontrollierten Bretter dem erforderlichen Mittelwert aus der Norm für diese Sortierklasse entspricht.

Auf einem Signifikanzniveau von 5% stellt der zuständige Kontrolleur die folgende Null-Hypothese auf:

H_0: Der Stichprobenmittelwert des Holzes entspricht dem geforderten Wert aus der Norm.

a) *(2 Punkte)*
Welche der folgenden Aussagen ist/sind richtig?

Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art ist gleich 5%. ☑

Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2. Art ist gleich 95%. ☐

Das Signifikanzniveau α entspricht allgemein der Wahrscheinlichkeit, dass die Null-Hypothese akzeptiert wird, obwohl sie nicht zutrifft. ☐

Durch eine höhere Stichprobenanzahl bei der Berechnung des Stichprobenmittelwertes könnte das Intervall für den Hypothesentest verkleinert werden. ☑ *Lösung:* $\Delta = k_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Erfahrungen haben gezeigt, dass sich der Elastizitätsmodul anhand einer Normalverteilung beschreiben lässt.

Der für die Qualität der Schnittholzproduktion verantwortliche Ingenieur möchte anhand von 5 Messwerten (vgl. Tabelle 1.8) die Parameter der Verteilung bestimmen.

b) *(2 Punkte)*
Wie könnte der Ingenieur hierfür vorgehen?

Bei einer Normalverteilung entsprechen die ersten beiden zentralen Momente der Stichprobe den Erwartungswerten der Verteilungsparameter. ☑

Die Methode der Momente eignet sich für eine Intervallschätzung der Verteilungsparameter. ☐

Die Methode der Momente eignet sich für eine Punktschätzung der Verteilungsparameter. ☑

Die Fisher-Informationsmatrix kann verwendet werden, um die Streuung der geschätzten Verteilungsparameter zu bestimmen. ☑

Der Ingenieur entscheidet sich dafür, die Maximum-Likelihood-Methode zur Schätzung der Parameter der Normalverteilung zu verwenden. Die Messwerte sind in Tabelle 1.8 dargestellt.

Tabelle 1.8: Messwerte des Elastizitätsmoduls bei der Sortierung von Holzbrettern.

Stichprobennummer [-]	*Elastizitätsmodul [MPa]*
1	10200
2	16700
3	15400
4	12900
5	13800

c) *(2 Punkte)*

Mit welcher der folgenden Funktionen lassen sich die Parameter $\boldsymbol{\theta} = (\mu;\sigma)^T$ der Normalverteilung schätzen?

$$\max_\theta\left(L(\boldsymbol{\theta}|\hat{\mathbf{x}})\right) = \max_\theta\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(\hat{x}_i-\mu)^2}{\sigma^2}\right)\right]$$ ☑

$$\min_\theta\left(L(\boldsymbol{\theta}|\hat{\mathbf{x}})\right) = \min_\theta\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(\hat{x}_i-\mu)^2}{\sigma^2}\right)\right]$$ ☐

$$\min_\theta\left(l(\boldsymbol{\theta}|\hat{\mathbf{x}})\right) = \min_\theta\left[n\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(\hat{x}_i-\mu)^2}{\sigma^2}\right]$$ ☐

$$\max_\theta\left(l(\boldsymbol{\theta}|\hat{\mathbf{x}})\right) = \max_\theta\left[n\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right) - \frac{1}{2}\prod_{i=1}^{n}\frac{(\hat{x}_i-\mu)^2}{\sigma^2}\right]$$ ☐

d) *(2 Punkte)*

Welche Parameter für eine Normalverteilung erhält der Ingenieur mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode?

- [x] $\mu = 13800 MPa$ und $\sigma = 2224 MPa$
- [ ] $\mu = 13800 MPa$ und $\sigma = 2523 MPa$
- [ ] $\mu = 13400 MPa$ und $\sigma = 2653 MPa$
- [ ] $\mu = 13400 MPa$ und $\sigma = 2429 MPa$

Lösung:

$$\frac{\partial l}{\partial \mu} = \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} 2(\hat{x}_i - \mu) = 0$$

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n} (\hat{x}_i - \mu)^2 = 0$$

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i \qquad \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\hat{x}_i - \mu)^2$$

$$\mu = 13800 MPa$$

$$\sigma = 2224 MPa$$

1.9 *(2 Punkte)*

Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an:

- [ ] Der Kolmogorov-Smirnov-Test ist auch bei diskreten Verteilungen einsetzbar.
- [x] Der Chi-Quadrat-Test kann auch bei kontinuierlichen Verteilungen angewendet werden, wenn der Wertebereich diskretisiert wird.
- [ ] Der Kolmogorov-Smirnov-Test wird eingesetzt, um die Parameter einer Verteilung zu schätzen.
- [x] Der Chi-Quadrat-Test dient dazu, eine Verteilung für gegebene Beobachtungen anzunehmen oder abzulehnen.

1.10 Ein Umweltingenieur misst wöchentlich den Sauerstoffgehalt des Wassers an einem beliebten Badeort am Zürisee. Die 122 Messdaten hat er in 5 Intervalle eingeteilt. Um zu prüfen, ob die Messdaten normal- oder lognormalverteilt sind, führt er je einen Chi-Quadrat-Test auf einem Signifikanzniveau von 5% durch. Den Mittelwert und die Standardabweichung berechnet er mit der Maximum Likelihood Methode aus den Messdaten.

a) *(2 Punkte)*

Wie viele Freiheitsgrade muss er beim Chi-Quadrat-Test berücksichtigen?

- [x] $\nu = 2$
- [ ] $\nu = 4$
- [ ] $\nu = 5$
- [ ] $\nu = 122$

Freiheitsgrade: Anzahl Intervalle = 5; Anzahl aus den Daten berechneter Parameter = 2; Freiheitsgrade=5-2-1=2.

b) *(2 Punkte)*

Im Folgenden sind seine Berechnungen für den Chi-Quadrat-Test für die Normalverteilung aufgeführt:

Intervall	*Anzahl Messwerte im Intervall*	*Erwartete Wahrscheinlichkeiten für die Normalverteilung*	*Erwartete Anzahl Messwerte im Intervall*	*Stichproben-statistik*
1	3	0.014	2	1.002
2	35	0.218	27	2.676
3	56	0.537	65	1.370
4	25	0.218	27	0.093
5	3	0.014	2	1.034
	n=122	∑=1	n=122	6.175

Auf welchen/welchem der folgenden Signifikanzniveaus kann die Hypothese akzeptiert werden, dass es sich um eine normalverteilte Zufallsvariable handelt? Verwenden Sie die Tabelle 2 im Anhang. Nehmen Sie bitte unabhängig von Ihrem Resultat in a) einen Freiheitsgrad $\nu = 1$ an, um diese Frage zu beantworten.

- $\alpha = 0.01$ ☑
- $\alpha = 0.05$ ☐
- $\alpha = 0.10$ ☐
- $\alpha = 0.25$ ☐

Die interessierende Stichprobenstatistik ist 6.175, also die die quadrierten Differenzen der beobachteten und erwarteten Häufigkeiten. Diese Summe muss kleiner sein als die in der Tabelle der Chi-Quadrat-Verteilung angegebenen Maximalwerte für die Akzeptanz des Modells, auf einem bestimmten Signifikanzniveau. Für $\alpha = 0.01$ *ist der maximal akzeptierbare Wert 6.63 für* $\nu = 1$. *Für* $\alpha = 0.05$ *überschreitet die Stichprobenstatistik bereits den maximal akzeptierbaren Wert:* $P\left[\varepsilon^2 > \chi\right] = \alpha$; $6.175 > 5.992$.

c) *(2 Punkte)*

Nehmen Sie (unabhängig von den Ergebnissen in b)) an, die Chi-Quadrat-Tests ergeben, dass *beide* Verteilungen auf einem Signifikanzniveau von 5% akzeptiert werden können. Der Ingenieur berechnet die ‚Likelihood' der gesamten Stichprobe aus dem Produkt der Likelihoods der Einzelbeobachtungen, also $L = \prod_{i=1}^{n} f_X(\hat{x}_i \mid \boldsymbol{\theta})$, und erhält für die Normalverteilung den Wert 0.42, für die Lognormalverteilung 0.65. Welche Verteilung sollte er aufgrund dieser Information als geeigneter betrachten?

Normalverteilung ☐

Lognormalverteilung ☑

Aufgrund dieser neuen Information kann nun keine der zwei Verteilungen akzeptiert werden. ☐

Diese neue Information hilft dem Ingenieur nicht weiter, um auf die geeignetere Verteilung zu schliessen. ☐

→ Siehe Ausführungen im Skript: Seite E-33 Vergleich von Modellen

1.11 *(2 Punkte)*

Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an:

Monte-Carlo-Simulationen führen nur dann zu einer Lösung, wenn die Zufallsvariablen der Grenzzustandsfunktion normalverteilt sind. ☐

First Order Reliability Methods (FORM) führen auch dann zu einer Lösung, wenn die Grenzzustandsfunktionen nicht differenzierbar sind. ☐

Nein, für FORM müssen die Grenzzustandsfunktionen differenzierbar sein -

Nichtlineare Grenzzustandsfunktionen werden im Hasofer-Lind-Verfahren im Schnittpunkt der x-Achse mit der Grenzzustandsfunktion linearisiert. ☐

Keine der Aussagen ist richtig. ☑

1.12 Sie haben gerade Ihr Ferienboot in Gibraltar mit Benzin vollgetankt, was einer durchschnittlichen Reichweite μ_R von $1000\ [\text{km}]$ entspricht. Die damit maximal zurückzulegende Reichweite variiert je nach Fahrstil (sportlich oder gemütlich) und kann als normalverteilte Zufallsvariable R mit einer Standardabweichung $\sigma_R = 100\ [\text{km}]$ modelliert werden.

In Ihrem Reiseführer steht geschrieben, dass Sie durchschnittlich mit 930 zu fahrenden Kilometern rechnen müssen, um Ihr Ziel in Afrika zu erreichen. Diese Strecke kann sich verkürzen oder verlängern, was von kurzfristig variierenden Strömungsverhältnissen abhängt. Sie nehmen an, dass die Distanz eine

Standardabweichung $\sigma_S = 50$ [km] aufweist und als normalverteilte Zufallsvariable S modelliert werden kann.

Sie wollen nun die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass das Benzin nicht ausreicht, um bis an das Ziel zu gelangen, und formulieren die Grenzzustandsfunktion $g(\mathbf{x}) = R - S$. Sie nehmen an, dass die beiden Zufallsvariablen R und S voneinander unabhängig sind.

a) *(2 Punkte)*

Berechnen Sie den Erwartungswert μ_M der Sicherheitsmarge M, wobei $M = R - S$.

- [ ] $\mu_M = -70$ [km]
- [x] $\mu_M = 70$ [km]
- [ ] $\mu_M = 930$ [km]
- [ ] $\mu_M = 1070$ [km]

→ Skript Gl. (F.7)

$$E(R-S) = E(R) - E(S) = (1000 - 930)[\text{km}] = 70[\text{km}]$$

b) *(2 Punkte)*

Berechnen Sie die Standardabweichung σ_M der Sicherheitsmarge M, wobei $M = R - S$.

- [ ] $\sigma_M = 12.2$ [km]
- [ ] $\sigma_M = 50.0$ [km]
- [ ] $\sigma_M = 86.6$ [km]
- [x] $\sigma_M = 111.8$ [km]

→ Skript Gl. (F.7)

$$Var(R-S) = Var(R) + Var(S) = (100^2 + 50^2)[\text{km}]^2 = 12500[\text{km}]^2$$

$$\sigma_M = \sqrt{12500[\text{km}]^2} = 111.8[\text{km}]$$

c) *(2 Punkte)*

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p_f, dass Ihr Benzin für diese Strecke nicht ausreicht. Verwenden Sie die Tabelle 1 im Anhang.

0.025 ☐
0.198 ☐
0.266 ☑
0.626 ☐

$$\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M} = \frac{70}{111.8} = 0.626$$
$$p_f = \Phi(-\beta) = \Phi(-0.626) = 1 - \Phi(0.626) = 1 - 0.734 = 0.266$$

Teil 2: Rechenaufgabe (maximal 28 Punkte)

In der Region von Basel soll ein neues Einkaufszentrum erstellt werden. Um die Gefahren durch Windstürme und Erdbeben abzuschätzen, werden Sie als Experte befragt.

Geben Sie alle Resultate auf vier Stellen hinter dem Komma an.

2.1

a) *(4 Punkte)*

Ihre erste Aufgabe besteht darin, abzuschätzen, mit welchen Windstärken in dieser Region zu rechnen ist.

Sie haben in der Literatur gefunden, dass die monatlichen maximalen Windgeschwindigkeiten mit einer Gumbel max Verteilung modelliert werden. Zusätzlich haben Sie von einer Wetterstation in der Nähe des geplanten Einkaufzentrums Messwerte der monatlichen maximalen Windgeschwindigkeiten der letzten 10 Jahren erhalten. Sie haben bereits anhand der Messdaten den Stichprobenmittelwert $\bar{x} = 31.7\ [m/s]$ und die (nicht erwartungstreue) Stichprobenstandabweichung $s = 12.9\ [m/s]$ ermittelt.

Schätzen Sie mit Hilfe der Methode der Momente die Verteilungsparameter der Gumbel max Verteilung und schreiben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion auf, welche die monatlichen maximalen Windgeschwindigkeiten repräsentiert.

Hinweis: Die Gumbelverteilung (Gumbel max) hat die nachfolgende Form:

$$-\infty < x < \infty$$
$$F_X(x) = \exp\left(-\exp\left(-\alpha(x-u)\right)\right)$$
$$\mu_X = u + \frac{0.577216}{\alpha}$$
$$\sigma_X = \frac{\pi}{\alpha\sqrt{6}}$$

μ_X – Mittelwert
σ_X – Standardabweichung
u – Parameter der Verteilung
α – Parameter der Verteilung

Lösung:

Erstes und zweites zentrales Moment der Stichproben:

$$\bar{x} = 31.7 \ [m/s]$$
$$s = 12.9 \ [m/s]$$

Mittelwert und Standardabweichung der Gumbel-Max-Verteilung:

$$\mu_X = u + \frac{0.577216}{\alpha}$$
$$\sigma_X = \frac{\pi}{\alpha\sqrt{6}}$$

Momente der Stichprobe gleichsetzten mit den Momenten der Verteilungsfunktion:

$$\mu_X = \bar{x} = u + \frac{0.577216}{\alpha} = 31.7 \ [m/s]$$
$$\sigma_X = s = \frac{\pi}{\alpha\sqrt{6}} = 12.9 \ [m/s]$$
$$\bar{x} = 31.7 \ [m/s]$$
$$s = 12.9 \ [m/s]$$

Auf die Parameter α und u auflösen:

$$\alpha = \frac{\pi}{\sigma_X \cdot \sqrt{6}} = \frac{\pi}{s \cdot \sqrt{6}}$$
$$u = \mu_X - \frac{0.577216}{\alpha} = \bar{x} - \frac{0.577216}{\alpha}$$

Werte einsetzen und Parameter berechnen:

$$\alpha = \frac{\pi}{\sigma_X \cdot \sqrt{6}} = \frac{\pi}{s \cdot \sqrt{6}} = \frac{\pi}{12.9 \cdot \sqrt{6}} = 0.0994 \approx 0.099$$
$$u = \mu_X - \frac{0.577216}{\alpha} = \bar{x} - \frac{0.577216}{\alpha} = 31.7 - \frac{0.577216}{\alpha} = 25.89$$

Gumbel-Max-Verteilung:

$$F_X(x) = e^{-e^{-\alpha(x-u)}} = e^{-e^{-0.0994(x-25.89)}}$$

Ein Kollege zeigt Ihnen eine Studie, in welcher die monatlichen maximalen Windgeschwindigkeit in dieser Region mit einer Gumbel max Verteilung mit den Parametern $a = 0.12$ und $u = 27.5$ repräsentiert wird.

b) *(8 Punkte)*

Um zu ermitteln, ob die Verteilung aus der Studie Ihre Messwerte gut repräsentiert, beschliessen Sie, einen Chi-Quadrat-Test auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 5\%$ durchzuführen. Verwenden Sie dazu die folgende Tabelle, in welcher bereits die Häufigkeiten der Messwerte eingetragen sind:

Lösung:

Intervall	**Häufigkeit N_i**	**Wahrscheinlichkeit P**	**Erwartete Häufigkeit**	**Normalisierte Quadrate der Differenzen**
-25 m/s	43	0.2593	31.1132	4.5413
25-35 m/s	39	0.4067	48.7985	1.9675
35-45 m/s	19	0.2188	26.2576	2.0050
45- m/s	19	0.1153	13.8307	1.9321
Summe	120	1	120	10.4469

$$\varepsilon_m^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(N_i - n \cdot p_i\right)^2}{n \cdot p_i} = 10.4469$$

Operative Regel:

$$P\left[\varepsilon^2 \leq \chi\right] = 1 - \alpha$$

Wert aus Tabelle:

Signifikanzniveau von $\alpha = 5\%$

Freiheitsgrade = 4 Klassen – 1 – 0 Paramert = 3

$$\chi = 7.8147$$

Da $\varepsilon_m^2 = 10.4469$ grösser als $\chi = 7.8147$ ist, können wir die Hypothese, dass die Daten einer Weibullverteilung folgen, auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 5\%$ nicht annehmen.

c) *(2 Punkte)*

Da Sie für die Bemessung des Einkaufszentrums die jährlichen maximalen Windgeschwindigkeiten benötigen, soll anhand der in der Studie gegebenen Gumbel max Verteilung die entsprechende Wahrscheinlichkeitsverteilungs-funktion der jährlichen Maxima ermittelt werden.

Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der jährlichen maximalen Windgeschwindigkeiten an.

mit α=0.12 und u=27.5

$$\left(F_X(x)\right)^{12} = \left(e^{-e^{-\alpha(x-u)}}\right)^{12} = e^{-12\cdot e^{-\alpha(x-u)}} = e^{-12\cdot e^{-0.12(x-27.5)}}$$

$$f_{X,nT}^{\max}(x) = n \cdot F_{X,T}^{\max}(x)^{n-1} \cdot f_{X,T}^{\max}(x)$$

$$f_{X,nT}^{\max}(x) = 12\left(F_X(x)\right)^{12-1} \cdot f_{X,T}^{\max}(x)$$

$$= 12 \cdot \left(e^{-e^{-\alpha(x-u)}}\right)^{11} \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha(x-u)-e^{-\alpha(x-u)}}$$

$$= 12 \cdot \left(e^{-e^{-0.12(x-27.5)}}\right)^{11} \cdot 0.12 \cdot e^{-0.12(x-27.5)-e^{-0.12(x-27.5)}}$$

mit α=0.0994 und u=25.89

$$\left(F_X(x)\right)^{12} = \left(e^{-e^{-\alpha(x-u)}}\right)^{12} = e^{-12\cdot e^{-\alpha(x-u)}} = e^{-12\cdot e^{-0.0994(x-25.89)}}$$

....

d) *(4 Punkte)*

Das Einkaufzentrum soll auf eine Lebensdauer von 80 Jahren bemessen werden. Ermitteln Sie die Windstärke, die einer erwarteten Wiederkehrperiode von 80 Jahren entspricht, anhand der Verteilung aus der Studie oder der von Ihnen ermittelten Verteilung aus Teilaufgabe c).

$$\left(F_X(x)\right)^{12} = e^{-12\cdot e^{-0.0994(x-25.89)}} = 1-\frac{1}{80} = 0.9875$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(-\frac{1}{12}\cdot\ln\left(0.9461\right)\right) = -\alpha\left(x-u\right) \Leftrightarrow \frac{\ln\left(-\frac{1}{12}\cdot\ln\left(0.9461\right)\right)}{-\alpha}+u=x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln\left(-\frac{1}{12}\cdot\ln\left(0.9461\right)\right)}{-0.0994}+25.89 = x = 94.91[m/s] \text{ mit } \alpha\text{=0.0994 und u=25.89}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln\left(-\frac{1}{12}\cdot\ln\left(0.9461\right)\right)}{-0.12}+27.5 = x = 84.67[m/s] \text{ mit } \alpha\text{=0.12 und u=27.5}$$

2.2 *(4 Punkte)*

Um die Gefährdung durch Erdbeben abzuschätzen, nehmen Sie eine Erdbeben-Gefahrenkarte zu Hand. Sie lesen für den Ort, an welchem das Einkaufszentrum gebaut werden soll, dass ein Erdbeben mit einer Bodenbeschleunigung von $1.2\,[m/s^2]$ die Wiederkehrperiode $T = 475$ [Jahre] hat.

Es wird angenommen, dass das Auftreten der Erdbeben einem homogenen Poissonprozess folgt.

Berechnen Sie nun, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass während der erwarteten Lebensdauer des Einkaufszentrums von 80 Jahren mindesten ein solches Erdbeben eintritt.

Lösung:

Wartezeit zwischen den Ereignissen einen homogenen Poissonprozess folgen einer Exponentialverteilung.

Bestimme die Parameter der Exponentialverteilung:

$$E[T] = \frac{1}{\nu(t)} = 475\left[\text{Jahre}\right]$$

$$\nu(t) = \frac{1}{E[T]} = \frac{1}{475}$$

Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass die Wartezeit kleiner gleich 80 Jahren ist:

$$P\left[T \le 80\,Jahre\right] = 1 - e^{-\nu(t)\cdot t} = 1 - e^{-\frac{1}{475}\cdot 80} = 0.1550$$

2.3 *(6 Punkte)*

Neben der Sicherheit des Einkaufszentrums müssen Sie auch die Baukosten für die von Ihnen geforderten Verstärkungen bestimmen.

Am Anfang des Projektes wurden die Baukosten durch eine normalverteilte Zufallsvariable K mit dem Mittelwert $\mu_K = 10'000'000\,[CHF]$ und der Standardabweichung $\sigma_K = 1'000'000\,[CHF]$ repräsentiert.

Mit den zusätzlichen Massnahmen ändert sich die Berechnung der Baukosten. Sie können nun durch eine normalverteilen Zufallsvariable K_{neu} mit dem Mittelwert

$\mu_{K_{neu}} = 12'000'000[CHF]$ und der Standardabweichung $\sigma_{K_{neu}} = 1'400'000[CHF]$ repräsentiert werden.

Das Budget B, das für den Bau des Einkaufszentrums zur Verfügung steht, ist noch nicht fixiert, da während der Bauphase noch nach neuen Investoren gesucht wird. Es wird angenommen, dass das Budget einer Normalverteilung mit dem Mittelwert $\mu_B = 16'000'000\,[CHF]$ und der Standardabweichung $\sigma_B = 3'000'000\,[CHF]$ folgt.

Ermitteln Sie den Einfluss der zusätzlichen baulichen Massnahmen auf die Wahrscheinlichkeit, dass das Budget nicht überschritten wird.

Lösung:

Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass das Budget reicht mit den alten Baukosten:

Gegeben:

$\mu_K = 10'000'000\,[CHF]$, $\sigma_K = 1'000'000\,[CHF]$

$\mu_B = 16'000'000\,[CHF]$, $\sigma_B = 3'000'000\,[CHF]$

Bestimmung der Sicherheitsmarge M = Budget minus Kosten:

$$M = B - K$$

$$\mu_M = 16'000'000 - 10'000'000 = 6'000'000$$

$$\sigma_M = \sqrt{3'000'000^2 + 1'000'000^2} = 3'162'300$$

Bestimmung von Beta:

$$\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M} = \frac{6'000'000}{3'162'300} = 1.8974$$

Wahrscheinlichkeit, das dass Budget reicht:

$$P = 1 - P_F = 1 - \Phi(-\beta) = 1 - (1 - \Phi(\beta)) = \Phi(\beta) = \Phi(1.8974) = 0.9711$$

Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass das Budget reicht mit den neuen Baukosten:

$\mu_{K_{neu}} = 12'000'000\,[CHF]$, $\sigma_{K_{neu}} = 1'400'000\,[CHF]$

$\mu_B = 16'000'000\,[CHF]$, $\sigma_B = 3'000'000\,[CHF]$

Bestimmung der Sicherheitsmarge M = Budget minus Kosten:

$$M_{neu} = B - K_{neu}$$

$$\mu_{M_{neu}} = 16'000'000 - 12'000'000 = 4'000'000$$

$$\sigma_{M_{neu}} = \sqrt{3'000'000^2 + 1'400'000^2} = 3'310'600$$

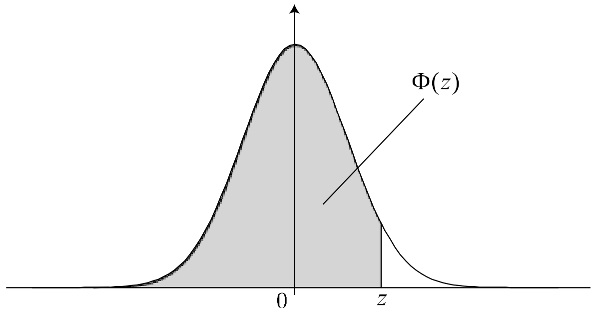
Bestimmung von Beta:

$$\beta_{neu} = \frac{\mu_{M_{neu}}}{\sigma_{M_{neu}}} = \frac{4'000'000}{3'310'600} = 1.2082$$

Wahrscheinlichkeit, das dass Budget reicht:

$$P_{neu} = 1 - P_{F_{neu}} = 1 - \Phi(-\beta_{neu}) = 1 - \left(1 - \Phi(\beta_{neu})\right) = \Phi(\beta_{neu}) = \Phi(1.2082) = 0.8865$$

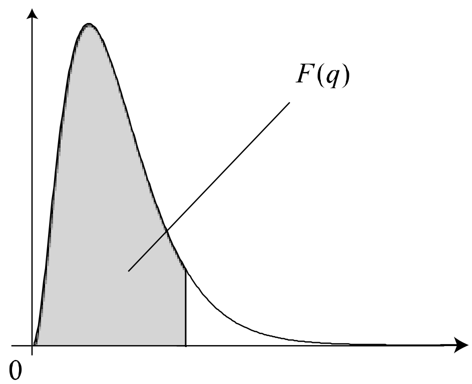
Tabelle 1: Kumulative Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung $\Phi(z)$.



Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Standardnormalverteilung.

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0.00	0.5000	0.50	0.6915	1.00	0.8413	1.50	0.9332	2.00	0.9772
0.01	0.5040	0.51	0.6950	1.01	0.8438	1.51	0.9345	2.10	0.9821356
0.02	0.5080	0.52	0.6985	1.02	0.8461	1.52	0.9357	2.20	0.9860966
0.03	0.5120	0.53	0.7019	1.03	0.8485	1.53	0.9370	2.30	0.9892759
0.04	0.5160	0.54	0.7054	1.04	0.8508	1.54	0.9382	2.40	0.9918025
0.05	0.5199	0.55	0.7088	1.05	0.8531	1.55	0.9394	2.50	0.9937903
0.06	0.5239	0.56	0.7123	1.06	0.8554	1.56	0.9406	2.60	0.9953388
0.07	0.5279	0.57	0.7157	1.07	0.8577	1.57	0.9418	2.70	0.9965330
0.08	0.5319	0.58	0.7190	1.08	0.8599	1.58	0.9429	2.80	0.9974449
0.09	0.5359	0.59	0.7224	1.09	0.8621	1.59	0.9441	2.90	0.9981342
0.10	0.5398	0.60	0.7257	1.10	0.8643	1.60	0.9452	3.00	0.9986501
0.11	0.5438	0.61	0.7291	1.11	0.8665	1.61	0.9463	3.10	0.9990324
0.12	0.5478	0.62	0.7324	1.12	0.8686	1.62	0.9474	3.20	0.9993129
0.13	0.5517	0.63	0.7357	1.13	0.8708	1.63	0.9484	3.30	0.9995166
0.14	0.5557	0.64	0.7389	1.14	0.8729	1.64	0.9495	3.40	0.9996631
0.15	0.5596	0.65	0.7422	1.15	0.8749	1.65	0.9505	3.50	0.9997674
0.16	0.5636	0.66	0.7454	1.16	0.8770	1.66	0.9515	3.60	0.9998409
0.17	0.5675	0.67	0.7486	1.17	0.8790	1.67	0.9525	3.70	0.9998922
0.18	0.5714	0.68	0.7517	1.18	0.8810	1.68	0.9535	3.80	0.9999277
0.19	0.5753	0.69	0.7549	1.19	0.8830	1.69	0.9545	3.90	0.9999519
0.20	0.5793	0.70	0.7580	1.20	0.8849	1.70	0.9554	4.00	0.9999683
0.21	0.5832	0.71	0.7611	1.21	0.8869	1.71	0.9564	4.10	0.9999793
0.22	0.5871	0.72	0.7642	1.22	0.8888	1.72	0.9573	4.20	0.9999867
0.23	0.5910	0.73	0.7673	1.23	0.8907	1.73	0.9582	4.30	0.9999915
0.24	0.5948	0.74	0.7704	1.24	0.8925	1.74	0.9591	4.40	0.9999946
0.25	0.5987	0.75	0.7734	1.25	0.8944	1.75	0.9599	4.50	0.9999966
0.26	0.6026	0.76	0.7764	1.26	0.8962	1.76	0.9608	4.60	0.9999979
0.27	0.6064	0.77	0.7794	1.27	0.8980	1.77	0.9616	4.70	0.9999987
0.28	0.6103	0.78	0.7823	1.28	0.8997	1.78	0.9625	4.80	0.9999992
0.29	0.6141	0.79	0.7852	1.29	0.9015	1.79	0.9633	4.90	0.9999995
0.30	0.6179	0.80	0.7881	1.30	0.9032	1.80	0.9641	5.00	0.9999997
0.31	0.6217	0.81	0.7910	1.31	0.9049	1.81	0.9649		
0.32	0.6255	0.82	0.7939	1.32	0.9066	1.82	0.9656		
0.33	0.6293	0.83	0.7967	1.33	0.9082	1.83	0.9664		
0.34	0.6331	0.84	0.7995	1.34	0.9099	1.84	0.9671		
0.35	0.6368	0.85	0.8023	1.35	0.9115	1.85	0.9678		
0.36	0.6406	0.86	0.8051	1.36	0.9131	1.86	0.9686		
0.37	0.6443	0.87	0.8078	1.37	0.9147	1.87	0.9693		
0.38	0.6480	0.88	0.8106	1.38	0.9162	1.88	0.9699		
0.39	0.6517	0.89	0.8133	1.39	0.9177	1.89	0.9706		
0.40	0.6554	0.90	0.8159	1.40	0.9192	1.90	0.9713		
0.41	0.6591	0.91	0.8186	1.41	0.9207	1.91	0.9719		
0.42	0.6628	0.92	0.8212	1.42	0.9222	1.92	0.9726		
0.43	0.6664	0.93	0.8238	1.43	0.9236	1.93	0.9732		
0.44	0.6700	0.94	0.8264	1.44	0.9251	1.94	0.9738		
0.45	0.6736	0.95	0.8289	1.45	0.9265	1.95	0.9744		
0.46	0.6772	0.96	0.8315	1.46	0.9279	1.96	0.9750		
0.47	0.6808	0.97	0.8340	1.47	0.9292	1.97	0.9756		
0.48	0.6844	0.98	0.8365	1.48	0.9306	1.98	0.9761		
0.49	0.6879	0.99	0.8389	1.49	0.9319	1.99	0.9767		

Tabelle 2: Quantile q der Chi-Quadrat-Verteilung.



Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für die Chi-Quadrat-Verteilung

v \ $F(q)$	0.75	0.90	0.95	0.98	0.99	0.995	0.999
1	1.3233	2.7055	3.8415	5.4119	6.6349	7.8794	10.8276
2	2.7726	4.6052	5.9915	7.8240	9.2103	10.5966	13.8155
3	4.1083	6.2514	7.8147	9.8374	11.3449	12.8382	16.2662
4	5.3853	7.7794	9.4877	11.6678	13.2767	14.8603	18.4668
5	6.6257	9.2364	11.0705	13.3882	15.0863	16.7496	20.5150
6	7.8408	10.6446	12.5916	15.0332	16.8119	18.5476	22.4577
7	9.0371	12.0170	14.0671	16.6224	18.4753	20.2777	24.3219
8	10.2189	13.3616	15.5073	18.1682	20.0902	21.9550	26.1245
9	11.3888	14.6837	16.9190	19.6790	21.6660	23.5894	27.8772
10	12.5489	15.9872	18.3070	21.1608	23.2093	25.1882	29.5883
11	13.7007	17.2750	19.6751	22.6179	24.7250	26.7568	31.2641
12	14.8454	18.5493	21.0261	24.0540	26.2170	28.2995	32.9095
13	15.9839	19.8119	22.3620	25.4715	27.6882	29.8195	34.5282
14	17.1169	21.0641	23.6848	26.8728	29.1412	31.3193	36.1233
15	18.2451	22.3071	24.9958	28.2595	30.5779	32.8013	37.6973
16	19.3689	23.5418	26.2962	29.6332	31.9999	34.2672	39.2524
17	20.4887	24.7690	27.5871	30.9950	33.4087	35.7185	40.7902
18	21.6049	25.9894	28.8693	32.3462	34.8053	37.1565	42.3124
19	22.7178	27.2036	30.1435	33.6874	36.1909	38.5823	43.8202
20	23.8277	28.4120	31.4104	35.0196	37.5662	39.9968	45.3147
21	24.9348	29.6151	32.6706	36.3434	38.9322	41.4011	46.7970
22	26.0393	30.8133	33.9244	37.6595	40.2894	42.7957	48.2679
23	27.1413	32.0069	35.1725	38.9683	41.6384	44.1813	49.7282
24	28.2412	33.1962	36.4150	40.2704	42.9798	45.5585	51.1786
25	29.3389	34.3816	37.6525	41.5661	44.3141	46.9279	52.6197
26	30.4346	35.5632	38.8851	42.8558	45.6417	48.2899	54.0520
27	31.5284	36.7412	40.1133	44.1400	46.9629	49.6449	55.4760
28	32.6205	37.9159	41.3371	45.4188	48.2782	50.9934	56.8923
29	33.7109	39.0875	42.5570	46.6927	49.5879	52.3356	58.3012
30	34.7997	40.2560	43.7730	47.9618	50.8922	53.6720	59.7031

v *: Freiheitsgrade*