1. Teilprüfung
Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

FS 2009

Lösungen

Prof. Dr. Michael Havbro Faber

ETH Zürich

Donnerstag 2. April 2009
08:00 – 09:30

Vorname: ....

Name: ....

Stud. Nr.: ....

Studienrichtung: ....

1. Teilprüfung: Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Bau-, Umwelt- und Geomatikingenieurwissenschaften

Datum und Dauer:

Donnerstag, 2. April 2009
Beginn: 8:00 Uhr
Zeitdauer: 90 Minuten

Hilfsmittel:

- Alle Unterlagen (Skripte, Bücher, andere Ausdrucke, etc.) erlaubt.
- Taschenrechner (ohne Kommunikationsmittel) erlaubt.
- Keine Kommunikationsmittel (z.B. Telefon) erlaubt.

Hinweise:

- Bitte kontrollieren Sie zuerst, ob Sie das Material vollständig erhalten haben:
    - Aufgabenstellung inkl. genereller Information und Anhang 15 Seiten.
    - Papierbogen kariert, gestempelt 1mal.
- Bitte legen Sie Ihre Legi vor sich auf den Tisch.
- Alle Lösungsblätter müssen mit Namen und Vornamen versehen werden.
- Nur die zur Verfügung gestellten Blätter dürfen verwendet werden.
- Legen Sie am Ende der Prüfung alle Aufgaben- und Lösungsblätter in das Couvert zurück und lassen Sie dieses am Platz liegen.
- Wenn Sie vor 9:00 Uhr fertig sind, dann benachrichtigen Sie einen Assistierenden; er/sie wird dann Ihre Prüfung einsammeln. Sie dürfen bis 9:00 Uhr den Saal verlassen; danach warten Sie bitte still, bis die Prüfung zu Ende ist (9:30 Uhr).

Teil 1: Multiple Choice (maximal 60 Punkte)

In den folgenden Multiple Choice Fragen können für die gleiche Frage (mindestens) eine oder mehrere Antworten zutreffend sein.

Bitte markieren Sie alle richtigen Antworten in jeder Frage mit einem Häkchen oder Kreuz:

☒ ☑

Wenn Sie ein bereits markiertes Kästchen rückgängig machen wollen, dann tun Sie das bitte deutlich:

1.1 *(2 Punkte)*

Ein Spanplattenwerk muss entscheiden, ob es seinen langjährigen Lieferanten von Holzspänen gegen einen Grosslieferanten austauschen soll. Der langjährige Lieferant kann in 5% der Fälle keine genügende Menge an Holzspänen liefern. Ist keine genügende Menge an Holzspänen vorhanden, so führt dies zu einem Unterbruch des Produktionsablaufs und somit zu Kosten von $9'000\ [CHF]$. Der Grosslieferant ist pro Lieferung allerdings um $400\ [CHF]$ teurer. Welche Alternative ist wirtschaftlicher?

- ☐ Das Spanplattenwerk sollte den langjährigen Lieferanten behalten.
- ☑ Das Spanplattenwerk sollte den Grosslieferanten engagieren.

$$0.05 \cdot 9000 = 450 \text{ CHF}$$
$$450 \text{ CHF} > 400 \text{ CHF}$$

- ☐ Wirtschaftlich gesehen ist das Risiko bei beiden gleich gross.
- ☐ Keine von den Antworten ist richtig.

1.2 *(2 Punkte)*

Kreuzen Sie die richtige(n) Antwort(en) an:

- ☑ Zwei Ereignisse mit einer gemeinsamen Schnittmenge können auch unabhängig voneinander sein.
- ☐ Zwei Ereignisse mit einer gemeinsamen Schnittmenge können auch unvereinbar (sich gegenseitig ausschliessend) sein.
- ☐ Die Wahrscheinlichkeit der Vereinigung von zwei Ereignissen mit einer gemeinsamen Schnittmenge ist immer die Summe ihrer zwei Wahrscheinlichkeiten.

Die Wahrscheinlichkeit der Vereinigung von zwei Ereignissen mit einer gemeinsamen Schnittmenge ist immer das Produkt ihrer zwei Wahrscheinlichkeiten. ☐

1.3 *(2 Punkte)*

Auf einer Deponie sind 3 Bulldozer im Einsatz. Gegeben sind die Wahrscheinlichkeiten, dass auf der Deponie zur Inventur am Endes des Jahres:

- noch alle Bulldozer funktionieren: $P(A) = 0.05$
- noch genau 2 Bulldozer funktionieren: $P(B) = 0.15$
- nur genau einer funktioniert: $P(C) = 0.3$
- keiner funktioniert: $P(D) = 0.5$

Kreuzen Sie die für diesen Sachverhalt richtige(n) Antwort(en) an:

$P(A \cap B) = 0.0075$ ☐

$P(A \cup B \cup C) = \varnothing$ ☐

$P(A \cup B \cup C) = 0.5$ ☑

$P(\overline{A \cup B}) = P(C \cup D)$ ☑

1.4 *(2 Punkte)*

Auf eine Baustelle werden täglich zwei Betonlieferungen von zwei unterschiedlichen Betonherstellern geliefert. Die Betonproduktion der beiden Hersteller ist voneinander unabhängig. Ein Ausfall tritt beim Hersteller A mit der täglichen Wahrscheinlichkeit $P = 0.02$ ein, und beim Hersteller B mit der täglichen Wahrscheinlichkeit $P = 0.04$. Sowohl beim Ausfall beider, wie auch nur von einem der beiden Hersteller kommt es zum Unterbruch der Arbeiten auf der Baustelle.

Welche ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es an einem Tag zu einem Unterbruch der Arbeiten kommt?

$P = 0.010$ ☐

$P = 0.038$ ☐

$P = 0.045$ ☐

$P = 0.02 + 0.04 - 0.02 \cdot 0.04 = 0.059$ ☑

1.5 *(2 Punkte)*

Für zwei unabhängige Ereignisse A und B wird die Schnittmenge $P(A \cap B)$ berechnet als:

- $P(A)P(B)$ ☑
- $P(A|B)$ ☐
- $P(A|B)P(A)$ ☐
- $\varnothing$ (es gibt gar keine Schnittmenge bei unabhängigen Ereignissen) ☐

1.6 *(2 Punkte)*

Kreuzen Sie die die richtige(n) Antwort(en) an:

- Epistemische Unsicherheiten können grundsätzlich nicht durch den Erwerb von zusätzlichem Wissen reduziert werden. ☐
- Eine Aktualisierung („Updating") von Wahrscheinlichkeiten beinhaltet die Möglichkeit, durch neue Informationen die Unsicherheiten zu reduzieren. ☑
- Die natürliche Variabilität einer Grundgesamtheit wird als aleatorische Unsicherheit bezeichnet. ☑
- Für die Entscheidungsfindung im Ingenieurwesen sind nur die epistemischen Unsicherheiten von Bedeutung. ☐

1.7 Ein Dorf ist durch zwei Strassen erschlossen. Im Winter können sie aufgrund Lawinengefahr gesperrt werden.

Sei K das Ereignis, dass die Kantonsstrasse offen ist, und B das Ereignis, dass die Bergstrasse offen ist. $P(K) = 0.75 \text{ und } P(B) = 0.5$ sind jeweils die täglichen Wahrscheinlichkeiten während der Winterperiode, dass die Strassen offen sind. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Strassen offen sind, beträgt $P(K \cap B) = 0.4$.

Hinweis: Die Teilaufgaben a), b) und c) auf der folgenden Seite können unabhängig voneinander gelöst werden.

a) *(2 Punkte)*

Die tägliche Wahrscheinlichkeit während der Winterperiode, dass die Kantonsstrasse offen ist, gegeben, dass die Bergstrasse offen ist, beträgt:

$P(K|B) = 0.3$ ☐

$P(K|B) = 0.4$ ☐

$P(K|B) = \dfrac{P(K \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0.4}{0.5} = 0.8$ ☑

$P(K|B) = 1.0$ ☐

b) *(2 Punkte)*

Welches ist die tägliche Wahrscheinlichkeit, dass die Kantonsstrasse gesperrt ist, gegeben, dass die Bergstrasse offen ist?

$P(\overline{K}|B) = 1 - P(K|\overline{B})$ ☐

$P(\overline{K}|B) = 1 - P(K|B)$ ☑

$P(\overline{K}|B) = \dfrac{P(K \cap B)}{P(B)}$ ☐

$P(\overline{K}|B) = 1 - \dfrac{P(K \cap B)}{P(B)}$ ☑

c) *(5 Punkte)*

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Kantonsstrasse offen ist, gegeben, dass die Bergstrasse gesperrt ist?

$P(K|\overline{B}) = 0.1$ ☐

$P(K|\overline{B}) = 0.6$ ☐

$P(K|\overline{B}) = 0.7$ ☑

$$P(\overline{K}|\overline{B}) = \frac{P(\overline{K} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$$

$$\begin{aligned} P(\overline{K} \cap \overline{B}) &= 1 - P(K \cup B) \\ &= 1 - [P(K) + P(B) - P(K \cap B)] \\ &= 1 - (0.75 + 0.5 - 0.4) \\ &= 0.15 \end{aligned}$$

$$P(\overline{K}|\overline{B}) = \frac{0.15}{0.5} = 0.3$$

$$P(K|\overline{B}) = \underline{\underline{0.7}}$$

$P(K|\overline{B}) = 1.0$ ☐

1.8 Die Studierenden der Vorlesung „Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung" in den Frühjahrsemestern 2008 und 2009 haben Durchbiegungsversuche an Büroklammern mit einem standardisierten Vorgehen durchgeführt. Die Tukey-Box-Plots in Abbildung 1.8 zeigen die Ergebnisse der Versuche aus den beiden Jahren.

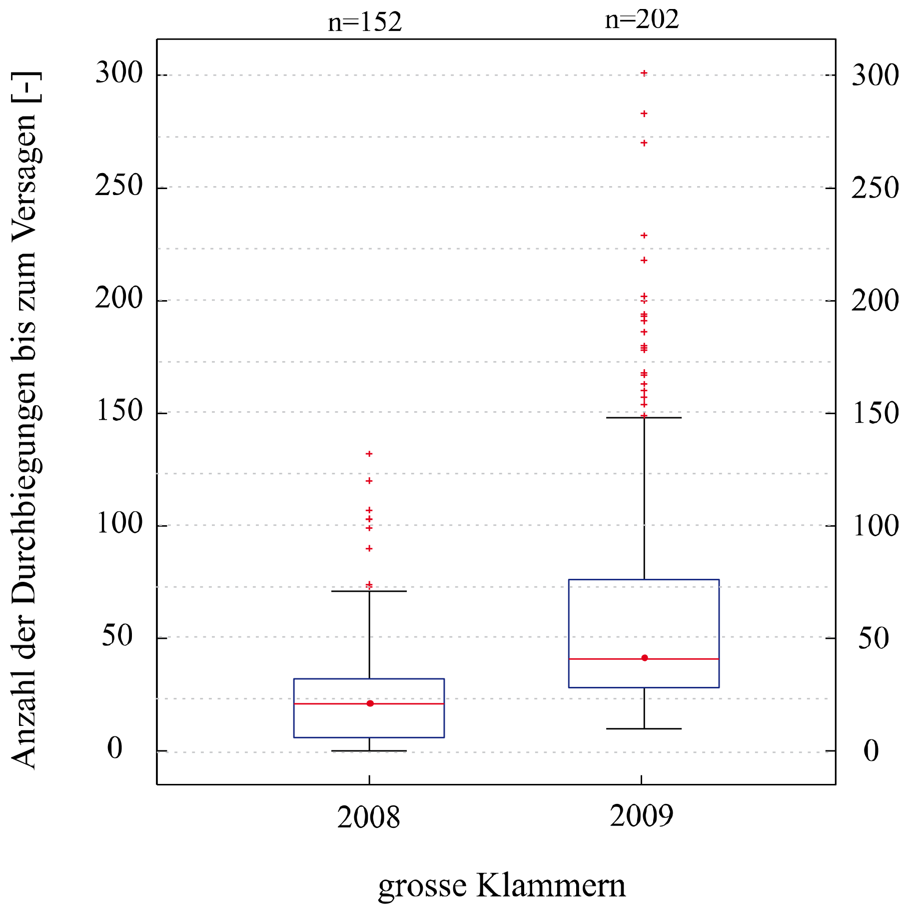


Abbildung 1.8: *Tukey-Box-Plots für die Anzahl der Durchbiegungen von Büroklammern bis zum Versagen aus den Vorlesungsjahren 2008 und 2009.*

Was kann man bei einem Vergleich der beiden Tukey-Box-Plots aus Abbildung 1.8 herauslesen? Bitte kreuzen Sie die richtige(n) Antwort(en) an.

a) *(2 Punkte)*

- [x] Alle Kennwerte sind im Jahr 2009 grösser.
- [x] Bei beiden Datenreihen liegen 50% der Daten innerhalb des Bereichs der interquartilen Differenz.
- [ ] Der Wert der oberen Quartile im Jahr 2009 liegt bei ca. 149 Durchbiegungen.
- [x] Der Median der Daten aus dem Jahr 2008 liegt bei ca. 24 Durchbiegungen.

b) *(2 Punkte)*

Die interquartile Differenz im Jahr 2008 ist grösser als 2009. ☐

Die Verteilungen der Daten im Jahr 2008 und 2009 sind rechtsschief. ☑

Die Beobachtungen aus dem Jahr 2008 streuen stärker um ihren Median als die Beobachtungen im Jahr 2009. ☐

Der untere Nachbarschaftswert der Daten aus dem Jahr 2009 entspricht dem Minimum der Beobachtungen. ☑

1.9 Bei einer Umfrage wurden die Körpergrössen von 6 Männern und 6 Frauen erfasst. In Tabelle 1.9 sind die erhobenen Werte vergleichend dargestellt.

Tabelle 1.9: *Körpergrössen von 6 Männern und Frauen.*

	Körpergrösse [cm]					
Männer	186	179	176	186	178	174
Frauen	168	165	166	180	166	160

Bestimmen Sie, ggf. rechnerisch, welche der folgenden Aussagen korrekt sind:

a) *(4 Punkte)*

Die Stichprobenvarianz der beiden Datensätze ist gleich. ☐

$$\bar{x}_{Männer} = 179.8$$

$$s^2_{Männer} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 21.5$$

$$\bar{x}_{Frauen} = 167.5$$

$$s^2_{Frauen} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 37.5$$

Die Standardabweichung entspricht der Quadratwurzel der Varianz. ☑

Der Variationskoeffizient beider Datensätze ist gleich. ☐

$\overline{x}_{Männer} = 179.8 \qquad s_{Männer} = \sqrt{21.5} = 4.64 \qquad CoV = \frac{4.64}{179.8} = 0.025$

$\overline{x}_{Frauen} = 167.5 \qquad s_{Frauen} = \sqrt{37.25} = 6.10 \qquad CoV = \frac{6.10}{167.5} = 0.036$

Die Kovarianz des Datensatzes der Männer ist höher als die des Datensatzes der Frauen. ☐

b) *(2 Punkte)*

Die befragten Männer haben eine mittlere Körpergrösse von 179.8 cm. ☑

Der Modus der Daten der befragten Männer beträgt 186 cm. ☑

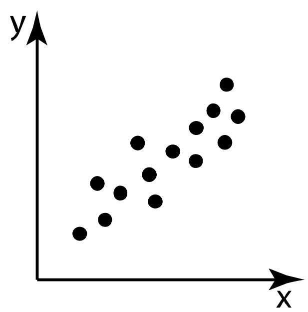
Der Modus der Daten der befragten Frauen beträgt 166 cm. ☑

Der Median der Daten der befragten Frauen beträgt 166 cm. ☑

1.10 In den Abbildungen I) bis IV) sind unterschiedliche Zusammenhänge zwischen Beobachtungen x_i und y_i dargestellt.

a) *(4 Punkte)*
Welche der folgenden linearen Korrelationskoeffizienten stimmen mit den entsprechenden Abbildungen am ehesten überein?

I)



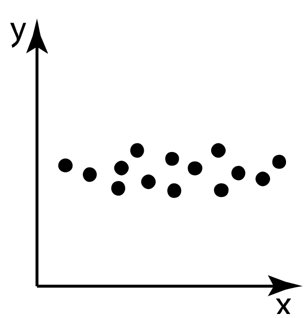
- 0.8 ☐

+ 1.8 ☐

0.0 ☐

+ 0.8 ☑

II)



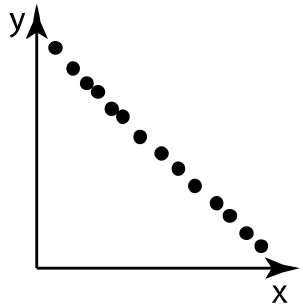
0.0 ☑

+ 2.5 ☐

- 0.5 ☐

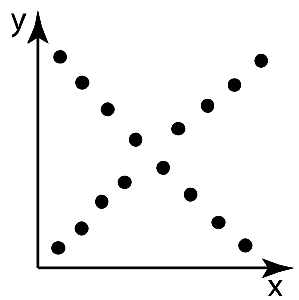
+ 0.5 ☐

III)



- -1.0 ☑
- 0.0 ☐
- $+1.0$ ☐
- -3.5 ☐

IV)



- 0.0 ☑
- $+1.0$ ☐
- -0.5 ☐
- $+0.5$ ☐

b) *(2 Punkte)*

Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt?

- Der Korrelationskoeffizient beschreibt die Streuung der Daten um ihren Mittelwert. ☐
- Der Korrelationskoeffizient beschreibt den Zusammenhang zweier Datensätze. ☑
- Der Korrelationskoeffizient liegt immer im Intervall zwischen -10 und +10. ☐
- Ein Korrelationskoeffizient von 0.0 sagt aus, dass die Datenpaare perfekt miteinander korreliert sind. ☐

1.11 In der Stadt Zürich sind 20 neue Fussgängerbrücken geplant. Es soll die gesamte Bauzeit Z einer Fussgängerbrücke, welche sich aus der Planungsphase P und der Bauphase B zusammensetzt, abgeschätzt werden. Es wird angenommen, dass die Zeit der Planungsphase P einer Normalverteilung mit dem Mittelwert $\mu_P = 6\ [Monate]$ und der Standardabweichen $\sigma_p = 1\ [Monate]$ folgt. Die benötigte Zeit der Bauphase B wird ebenfalls als normalverteilt angenommen mit dem Mittelwert $\mu_B = 12\ [Monate]$ und der Standardabweichung $\sigma_B = 4\ [Monate]$. Die Zeitdauer der Planungsphase P und der Bauphase B wird als voneinander unabhängig angenommen.

a) *(2 Punkte)*

Berechnen Sie den Mittelwert μ_Z der gesamten Bauzeit Z einer Fussgängerbrücke.

$\mu_Z = 5\ [Monate]$ ☐

$\mu_Z = 18\ [Monate]$ ☑

$\mu_Z = 23\ [Monate]$ ☐

$\mu_Z = 20.5\ [Monate]$ ☐

Skript: Gleichung D.25

$$\mu_Z = a_0 + a_P\mu_P + a_B\mu_B = 0 + 1\cdot\mu_P + 1\cdot\mu_B = 6 + 12 = \underline{\underline{18}}\ [Monate]$$

b) *(2 Punkte)*

Berechnen Sie die Standardabweichung σ_Z der gesamten Bauzeit Z einer Fussgängerbrücke.

$\sigma_Z = 5\ [Monate]$ ☐

$\sigma_Z = 17\ [Monate]$ ☐

$\sigma_Z = 4.12\ [Monate]$ ☑

$\sigma_Z = 3.86\ [Monate]$ ☐

Skript: Gleichung D.25

$$\sigma_Z = \sqrt{a_P^2\sigma_P{}^2 + a_B^2\sigma_B{}^2} = \sqrt{1^2\sigma_P{}^2 + 1^2\sigma_B{}^2} = \sqrt{\sigma_P{}^2 + \sigma_B{}^2} = \sqrt{1^2 + 4^2} = \underline{\underline{4.12}}\ [Monate]$$

c) *(2 Punkte)*

Es wird nun angenommen, dass die Zeitdauer der Planungsphase P und der Bauphase B voneinander *abhängig* sind. Welche der folgenden Aussagen ist/sind richtig?

Der Mittelwert μ_Z *ist* kleiner, wenn die Zeitdauer der Planungsphase P und der Bauphase B voneinander *abhängig* sind im Vergleich zu dem Mittelwert μ_Z unter der Annahme, dass die Zeitdauern *unabhängig* sind. ☐

Die Standardabweichung σ_Z ist kleiner, wenn die Zeitdauer der Planungsphase P und der Bauphase B voneinander *abhängig* sind im Vergleich zu der Standardabweichung σ_Z unter der Annahme, dass die Zeitdauern *unabhängig* sind. ☐

☑

Es muss zuerst die Kovarianz $C_{P,B}$ zwischen der Zeitdauer der Planungsphase P und der Bauphase B ermittelt werden, bevor eine Aussage gemacht werden kann, ob und wie sich der Mittelwert μ_Z und die Standardabweichung σ_Z verändern.

Keine der Antworten ist richtig. ☐

1.12 Das Budget für den Bau einer Fussgängerbrücke beträgt $700'000\ [CHF]$. Es wird angenommen, dass die Gesamtkosten für die Erstellung einer Fussgängerbrücke einer Normalverteilung mit dem Mittelwert $\mu_K = 500'000\ [CHF]$ und der Standardabweichung $\sigma_K = 100'000\ [CHF]$ folgt.

Eine Tabelle mit den Werten der Standardnormalverteilung ist am Ende der Prüfung angefügt. Beim Ablesen aus der Tabelle darf der z - Wert gerundet werden.

a) *(4 Punkte)*

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kosten zur Erstellung einer Fussgängerbrücke das Budget überschreiten?

$P = 0.9772$ ☐

$P = 0.5793$ ☐

$P = 0.0228$ ☑

$P = 0.0013$ ☐

Gesuchte Wahrscheinlichkeit: $P\left(700'000 < K\right) = 1 - P\left(700'000 \geq K\right)$

$K \sim N\left(\mu_K = 500'000, \sigma_K = 100'000\right)$

Standardisieren:

$$Z = \frac{X_1 - \mu}{\sigma}$$

$$1 - P\left(700'000 \geq K\right) = 1 - P\left(\frac{700'000 - 500'000}{100'000} \geq \frac{K - 500'000}{100'000}\right)$$

$$\rightarrow \frac{700'000 - 500'000}{100'000} = 2$$

Aus Tabelle:

$$1-\Phi(Z)=1-\Phi(2)=1-0.9772=\underline{\underline{0.0228}}$$

b) *(4 Punkte)*

Wegen Sparmassnahmen wurde das Budget pro Fussgängerbrücke auf $600'000\ [CHF]$ gekürzt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit P, dass beim Bau der 20 Fussgängerbrücken das Gesamtbudget von $20\cdot 600'000\ [CHF]$ ausreicht?

- $P=0.9999966$ ☑
- $P=0.8413$ ☐
- $P=1.2\cdot 10^{-4}$ ☐
- $P=0.9821356$ ☐

Gesuchte Wahrscheinlichkeit: $P(20\cdot 600'000\geq S)$

Berechne Mittelwert und Standardabweichung von S:

$$S=a_0+\sum_{i=1}^{20}a_iK_i=a_0+a_1\cdot K_1+a_2\cdot K_2+\ldots+a_{20}\cdot K_{20}=0+1\cdot K_1+1\cdot K_2+\ldots+1\cdot K_{20}$$

$$\mu_S=a_0+\sum_{i=1}^{20}a_i\cdot\mu_K=0+\sum_{i=1}^{20}1\cdot\mu_K=\sum_{i=1}^{20}\mu_K=20\cdot\mu_K=20\cdot 500'000\ [CHF]=\underline{10'000'000\ [CHF]}$$

$$\sigma_S^2=\sum_{i=1}^{20}a_i^2\sigma_K^2=\sum_{i=1}^{20}1^2\sigma_K^2=\sum_{i=1}^{20}\sigma_K^2=20\cdot\sigma_K^2$$

$$\sigma_S=\sqrt{20\cdot{\sigma_K}^2}=\sqrt{20\cdot 100'000^2}\ [CHF]=\underline{447'214\ [CHF]}$$

$$S\sim N(\mu_S=10'000'000,\sigma_S=447'214)$$

Standardisieren:

$$Z=\frac{X_1-\mu_Z}{\sigma_Z}$$

$$P(20\cdot 600'000\geq S)=P\left(\frac{12'000'000-10'000'000}{447'214}\geq\frac{S-10'000'000}{447'214}\right)$$

$$\rightarrow\frac{12'000'000-10'000'000}{447'214}=4.4721\sim 4.5$$

Aus Tabelle:

$$\Phi(Z) = \Phi(4.5) = \underline{\underline{0.9999966}}$$

1.13 *(4 Punkte)*

Da die geplanten Fussgängerbrücken grösstenteils aus Holz gefertigt sind, besteht ein gewisses Brandrisiko. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Brücke innerhalb eines Jahres durch einen Brand zerstört wird, beträgt $4 \cdot 10^{-4}$. Es wird angenommen, dass Brände an verschiedenen Brücken voneinander unabhängig auftreten.
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit P, dass innerhalb eines Jahres genau eine von den 20 Fussgängerbrücken abbrennt?

- [ ] $P = 0.021$
- [ ] $P = 4 \cdot 10^{-4}$
- [ ] $P = 3.97 \cdot 10^{-4}$
- [x] $P = 7.94 \cdot 10^{-3}$

Lösungsweg mit Geometrischen Verteilung:

$$P\left(\text{Brücke } j \text{ brennt}\right) = 4 \cdot 10^{-4} \cdot \left(1 - 4 \cdot 10^{-4}\right)^{19} = 3.97 \cdot 10^{-4}$$

$$P = \sum_{j=1}^{20} \left(\text{Brücke } j \text{ brennt}\right) = 20 \cdot 3.97 \cdot 10^{-4} = \underline{\underline{7.94 \cdot 10^{-3}}}$$

Lösungsweg mit Binominalverteilung:

$$P[Y = y] = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y} = \frac{n!}{y!(n-y)!} p^y (1-p)^{n-y}$$

$$P[Y = 1] = \binom{20}{1} 4 \cdot 10^{-4^1} (1 - 4 \cdot 10^{-4})^{20-1} = \frac{20!}{1!(20-1)!} 4 \cdot 10^{-4^1} (1 - 4 \cdot 10^{-4})^{20-1}$$

$$= 20 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot \left(1 - 4 \cdot 10^{-4}\right)^{19} = \underline{\underline{7.94 \cdot 10^{-3}}}$$

1.14 *(5 Punkte)*

Die Fussgängerbrücken sind für eine maximalen Schneehöhe von 1.8m bemessen. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass die jährliche maximale Schneehöhe in einem bestimmten Jahr 1.8m übersteigt, beträgt 10^{-4}.
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit P, dass dieses Ereignis in einem Zeitraum von 100 Jahren mindestens zweimal eintritt?

$P = 4.9 \cdot 10^{-1}$ ☐

$P = 4.9 \cdot 10^{-5}$ ☑

$P = 9.9 \cdot 10^{-1}$ ☐

$P = 9.9 \cdot 10^{-3}$ ☐

Gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$P[Y \geq 2] = 1 - P[Y = 0] - P[Y = 1]$$

Binomialverteilung:

$$P[Y = y] = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y} = \frac{n!}{y!(n-y)!} p^y (1-p)^{n-y}$$

$$P[Y = 0] = \binom{100}{0} 10^{-4^0} (1 - 10^{-4})^{100-0} = \frac{100!}{0!\left(100-0\right)!} 10^{-4^0} (1-10^{-4})^{100-0} = (1-10^{-4})^{100} = \underline{0.990049}$$

$$P[Y = 1] = \binom{100}{1} 10^{-41} (1 - 10^{-4})^{100-1} = \frac{100!}{1!\left(100-1\right)!} 10^{-4^1} (1-10^{-4})^{100-1}$$

$$= 100 \cdot 10^{-4} \cdot (1-10^{-4})^{99} = \underline{0.00990148}$$

$$P[Y \geq 2] = 1 - P[Y = 0] - P[Y = 1] = 1 - 0.99049 - 0.00990148 = \underline{\underline{4.952 \cdot 10^{-5}}}$$

Teil 2: Rechenaufgabe (maximal 20 Punkte)

In einem billigen Hotel ist jedes Stockwerk nur mit einem Rauchmelder auf dem Zimmerflur ausgerüstet. Am Ende des Flures, 20m von dem Rauchmelder entfernt, ist eine marode Elektroheizung installiert. Tests haben gezeigt, dass die Zeit T, die Rauchgase benötigen, um sich in einem Flur über eine solche Entfernung auszubreiten, einer Normalverteilung mit einem Mittelwert von $\mu_T = 10[\min]$ und einer Standardabweichung von $\sigma_T = 5[\min]$ folgt.

a) *(4 Punkte)*
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass $25[\min]$ nach einer Entzündung des Heizkörpers am Ende des Flures der Rauch noch nicht den Rauchmelder erreicht hat?

Eine Tabelle mit den Werten der Standardnormalverteilung ist am Ende der Prüfung angefügt.

LÖSUNG:

$$T \sim N(10,5)$$

$$P(T > 25) = 1 - P(T \leq 25) = 1 - P(Z \leq \frac{25-10}{5}) \qquad Z \sim N(0,1)$$
$$= 1 - \Phi(3) = 1 - 0.9986501 = 0.0013499$$

Im Werbeprospekt der Rauchmelder heisst es, dass ein Brand nur in 1% der Fälle nicht zu einem Alarmsignal führt. Neben der Aktivierung durch Brandgase kann ein Feueralarm aber auch aufgrund von anderen Ursachen ausgelöst werden (z.B. Wasserdampf vom Duschen, Zigarettenrauch, Insekten…). Der gesprächige Zimmernachbar berichtet, dass er in den 10 Nächten, die er in dem Hotel verbracht hat, bereits zweimal von einem Fehlalarm geweckt wurde.

b) *(4 Punkte)*
Füllen Sie zunächst die folgende Tabelle mit den bedingten Wahrscheinlichkeiten eines Alarmes A, gegeben, dass ein Feuer F ausgebrochen ist, aus. Nutzen Sie hierfür die Informationen, die Sie aus dem Werbeprospekt und der Erfahrung des Zimmernachbarn gewinnen können.

	Alarm A	**Kein Alarm** $\overline{A}$
Feuer F	$P(A\|F) =$ *0.99*	$P(\overline{A}\|F) =$ *0.01*
Kein Feuer $\overline{F}$	$P(A\|\overline{F}) =$ *0.2*	$P(\overline{A}\|\overline{F}) =$ *0.8*

c) *(5 Punkte)*

Gleich in Ihrer ersten Nacht im Hotel werden Sie von einem lauten Alarmsignal wach. Nach Ihrer Einschätzung beträgt die Wahrscheinlichkeit eines Feuers in einer Nacht $P(F)=0.005$. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Alarm tatsächlich durch Rauchgase auf Ihrem Flur ausgelöst wurde?

LÖSUNG:

$$P(F \mid A)=\frac{P(A \mid F)P(F)}{P(A \mid F)P(F)+P(A \mid \overline{F})P(\overline{F})}=\frac{0.99 \cdot 0.005}{0.99 \cdot 0.005+0.2 \cdot 0.995}=0.02427$$

Moderne Brandmelder sind nicht nur mit einem Rauch- sondern auch mit einem Hitzesensor ausgerüstet. Das Alarmsignal wird nur dann ausgelöst, wenn beide Sensoren die Überschreitung eines bestimmten Grenzwertes melden. Es sei R das Ereignis, dass der Grenzwert für den Rauchsensor überschritten wird, und H das Ereignis, dass der Grenzwert für den Hitzesensor überschritten wird. Im Brandfall seien die beiden Ereignisse voneinander unabhängig. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten der Grenzwertüberschreitung, gegeben, dass es im Flur brennt, sind bekannt: $P(R \mid F)=0.999$ und $P(H \mid F)=0.991$. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Grenzwerte gleichzeitig überschritten werden, obwohl es nicht brennt, ist 0.001.

d) *(5 Punkte)*

Berechnen Sie die in Aufgabe c) bestimmte Wahrscheinlichkeit, dass ein Alarmsignal tatsächlich durch einen Brand ausgelöst wurde, erneut. Nehmen Sie hierfür an, dass das Hotel mit modernen Brandmeldern ausgerüstet ist. Sie können hierzu die folgende Tabelle verwenden.

LÖSUNG:

$$P(A \mid F)=P((R \cap H) \mid F)=P(R \mid F) \cdot P(H \mid F)=0.999 \cdot 0.991=0.990009 \cong 0.99$$

	Alarm A	**Kein Alarm** $\overline{A}$
Feuer F	$P(A \mid F)=$ *0.99*	$P(\overline{A} \mid F)=$ *0.01*
Kein Feuer $\overline{F}$	$P(A \mid \overline{F})=$ *0.001*	$P(\overline{A} \mid \overline{F})=$ *0.999*

$$P(F \mid A)=\frac{P(A \mid F)P(F)}{P(A \mid F)P(F)+P(A \mid \overline{F})P(\overline{F})}=\frac{0.99 \cdot 0.005}{0.99 \cdot 0.005+0.001 \cdot 0.995}=0.83263$$

---

e) *(2 Punkte)*

Dem Hotelier liegt die Sicherheit seiner Gäste sehr am Herzen. Er überlegt deswegen, moderne Brandmelder statt der alten zu installieren. Würden Sie ihm zu dieser Investition raten? Begründen Sie Ihre Antwort.

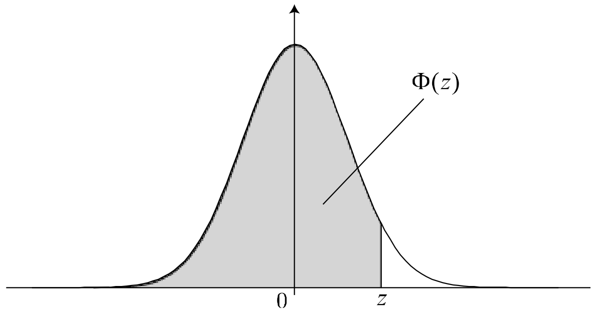
LÖSUNG:

Die richtige Antwort ist JA

Mögliche Begründungen z.B.:

- *Durch die geringere Wahrscheinlichkeit eines Fehlalarms (bei gleicher Branderkennung) erhöht sich die Chance, dass die Gäste auch die Zimmer verlassen*
- *Die Branderkennung ist (wenn auch nur geringfügig) grösser (0.990009 statt 0.99)*

Kumulative Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung $\Phi(z)$.



Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Standardnormalverteilung.

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0.00	0.5000	0.50	0.6915	1.00	0.8413	1.50	0.9332	2.00	0.9772
0.01	0.5040	0.51	0.6950	1.01	0.8438	1.51	0.9345	2.10	0.9821356
0.02	0.5080	0.52	0.6985	1.02	0.8461	1.52	0.9357	2.20	0.9860966
0.03	0.5120	0.53	0.7019	1.03	0.8485	1.53	0.9370	2.30	0.9892759
0.04	0.5160	0.54	0.7054	1.04	0.8508	1.54	0.9382	2.40	0.9918025
0.05	0.5199	0.55	0.7088	1.05	0.8531	1.55	0.9394	2.50	0.9937903
0.06	0.5239	0.56	0.7123	1.06	0.8554	1.56	0.9406	2.60	0.9953388
0.07	0.5279	0.57	0.7157	1.07	0.8577	1.57	0.9418	2.70	0.9965330
0.08	0.5319	0.58	0.7190	1.08	0.8599	1.58	0.9429	2.80	0.9974449
0.09	0.5359	0.59	0.7224	1.09	0.8621	1.59	0.9441	2.90	0.9981342
0.10	0.5398	0.60	0.7257	1.10	0.8643	1.60	0.9452	3.00	0.9986501
0.11	0.5438	0.61	0.7291	1.11	0.8665	1.61	0.9463	3.10	0.9990324
0.12	0.5478	0.62	0.7324	1.12	0.8686	1.62	0.9474	3.20	0.9993129
0.13	0.5517	0.63	0.7357	1.13	0.8708	1.63	0.9484	3.30	0.9995166
0.14	0.5557	0.64	0.7389	1.14	0.8729	1.64	0.9495	3.40	0.9996631
0.15	0.5596	0.65	0.7422	1.15	0.8749	1.65	0.9505	3.50	0.9997674
0.16	0.5636	0.66	0.7454	1.16	0.8770	1.66	0.9515	3.60	0.9998409
0.17	0.5675	0.67	0.7486	1.17	0.8790	1.67	0.9525	3.70	0.9998922
0.18	0.5714	0.68	0.7517	1.18	0.8810	1.68	0.9535	3.80	0.9999277
0.19	0.5753	0.69	0.7549	1.19	0.8830	1.69	0.9545	3.90	0.9999519
0.20	0.5793	0.70	0.7580	1.20	0.8849	1.70	0.9554	4.00	0.9999683
0.21	0.5832	0.71	0.7611	1.21	0.8869	1.71	0.9564	4.10	0.9999793
0.22	0.5871	0.72	0.7642	1.22	0.8888	1.72	0.9573	4.20	0.9999867
0.23	0.5910	0.73	0.7673	1.23	0.8907	1.73	0.9582	4.30	0.9999915
0.24	0.5948	0.74	0.7704	1.24	0.8925	1.74	0.9591	4.40	0.9999946
0.25	0.5987	0.75	0.7734	1.25	0.8944	1.75	0.9599	4.50	0.9999966
0.26	0.6026	0.76	0.7764	1.26	0.8962	1.76	0.9608	4.60	0.9999979
0.27	0.6064	0.77	0.7794	1.27	0.8980	1.77	0.9616	4.70	0.9999987
0.28	0.6103	0.78	0.7823	1.28	0.8997	1.78	0.9625	4.80	0.9999992
0.29	0.6141	0.79	0.7852	1.29	0.9015	1.79	0.9633	4.90	0.9999995
0.30	0.6179	0.80	0.7881	1.30	0.9032	1.80	0.9641	5.00	0.9999997
0.31	0.6217	0.81	0.7910	1.31	0.9049	1.81	0.9649		
0.32	0.6255	0.82	0.7939	1.32	0.9066	1.82	0.9656		
0.33	0.6293	0.83	0.7967	1.33	0.9082	1.83	0.9664		
0.34	0.6331	0.84	0.7995	1.34	0.9099	1.84	0.9671		
0.35	0.6368	0.85	0.8023	1.35	0.9115	1.85	0.9678		
0.36	0.6406	0.86	0.8051	1.36	0.9131	1.86	0.9686		
0.37	0.6443	0.87	0.8078	1.37	0.9147	1.87	0.9693		
0.38	0.6480	0.88	0.8106	1.38	0.9162	1.88	0.9699		
0.39	0.6517	0.89	0.8133	1.39	0.9177	1.89	0.9706		
0.40	0.6554	0.90	0.8159	1.40	0.9192	1.90	0.9713		
0.41	0.6591	0.91	0.8186	1.41	0.9207	1.91	0.9719		
0.42	0.6628	0.92	0.8212	1.42	0.9222	1.92	0.9726		
0.43	0.6664	0.93	0.8238	1.43	0.9236	1.93	0.9732		
0.44	0.6700	0.94	0.8264	1.44	0.9251	1.94	0.9738		
0.45	0.6736	0.95	0.8289	1.45	0.9265	1.95	0.9744		
0.46	0.6772	0.96	0.8315	1.46	0.9279	1.96	0.9750		
0.47	0.6808	0.97	0.8340	1.47	0.9292	1.97	0.9756		
0.48	0.6844	0.98	0.8365	1.48	0.9306	1.98	0.9761		
0.49	0.6879	0.99	0.8389	1.49	0.9319	1.99	0.9767		